卡尔曼滤波

卡尔曼滤波器的操作包含两个阶段：预测和更新。

Kalman滤波包括两个阶段：预测和更新。在预测阶段，滤波器利用上一状态的估计做出对当前状态的估计；在更新阶段，滤波器利用在当前状态的观测值优化在预测阶段获得的预测值，以获的一个更精确的当前状态的估计。

Note：

> 用$n-1$帧的状态预测n帧的状态，再由第n帧的输出更新第n帧的状态。

想要用kalman滤波，要知道前一时刻的状态估计值x，当前的观测值y，还得建立状态方程和量测方程，有了这些就可以运用kalman滤波了。

卡尔曼有三种用途：回归、滤波和预测。

1. 回归问题

给定多个自变量、一个因变量以及代表它们之间关系的一些训练样本，如何来确定它们的关系的问题为回归问题。

2. 滤波问题

3. 预测问题

运动模型

1. 匀速模型

匀速模型假设车辆以较为恒定的速度行驶，则匀速模型为：

$$\dot{X}(t) = AX(t) + w(t)$$

其中，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

$$w(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ a(t) \end{pmatrix} \qquad R(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a^2 \end{pmatrix}$$

其中，σ_a^2为加速度的方差。

离散系统的采样间隔$T_k = t_{k+1} - t_k$，其状态转移矩阵和状态噪声的协方差阵分别为：

$$\begin{aligned}
X(k+1) &= \Phi(k)X(k) + w(k) \\
\Phi(k) &= (e^{AT_k}) \\
&= (I + AT_k + A^2\,\frac{{T_k}^2}{2!} + A^3\,\frac{{T_k}^3}{3!} + \ldots) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & T_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
Q(k) &= \sigma_a^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\,T_k^3 & \frac{1}{2}\,T_k^2 \\ \frac{1}{2}\,T_k^2 & T_k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

加速过程的噪声σ_a^2只有在对车辆实际行驶过程进行了测量才能确定。对于完全可预测的系统，位置测量信息一定是可估计的。与上式相对应的离散后的测量方程为：

$$Y(k) = H(k)X(k) + v(k)$$

其中，对于仅有位置可观测的系统，有：

$$H(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y(k) \qquad = (y(k)) \qquad R(k) = (\sigma_a^2)$$

对于位置可速度都可观测的系统，则有：

$$H(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y(k) \qquad = \begin{pmatrix} (y(k)) \\ \ddot{y}(k) \end{pmatrix} \qquad R(k) = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{\dot{x}x} \\ \sigma_{\dot{x}x} & \sigma_{\dot{x}}^2 \end{pmatrix}$$

这里的σ_x^2、$\sigma_{\dot{x}}^2$、$\sigma_{x\dot{x}}$分别为位置方差、速度方差以及位置和速度的协方差。这些参数由定位系统的特性决定，并且可能随着时间、位置的不同而变化。因为卡尔曼滤波器是递归形式的，所以需要给定初始状态和初始状态的误差。

如果观测值只有位置，则需要$Y(0)$和$Y(1)$两个测量值来初始化一阶系统，其初始状态为：

$$\hat{X}(1|1)=\begin{pmatrix} Y_1(1) \\ \frac{1}{T_0}\left(Y_1(1)-Y_1(0)\right) \end{pmatrix}$$

假设在两次测量中测量噪声是不变的，即$R(0)=R(1)$，状态误差矩阵为：

$$P(1|1)=\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \frac{1}{T_0}\sigma_x^2 \\ \frac{1}{T_0}\sigma_x^2 & \frac{2}{T_0^2}\sigma_x^2+\frac{T_0}{3}\sigma_a^2 \end{pmatrix}$$

其中，$\sigma_x^2=R_{11}(0)$为定位系统测量误差的方差。

如果车辆从静止开始起步，那么滤波器只需要一个初始位置进行初始化。初始状态估计和相关的状态量方差如下：

$$\hat{X}(0|0)=\begin{pmatrix} Y_1(0) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P(0|0)=\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\dot{x}}^2 \end{pmatrix}$$

其中，$\sigma_{\dot{x}}^2$为车辆的速度方差。

如果车辆的速度和位置都可观测，初始状态为：

$$\begin{aligned} \hat{X}(0|0)&=\begin{pmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} Y(0) \\ \dot{Y}(0) \end{pmatrix} \\ P(0|0)&=R(0) \end{aligned}$$

2. 匀加速模型

匀加速模型的滤波方程与匀速模型类似，其连续系统的参数如下所示：

$$A(t)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ \dot{x}(t)\\ \ddot{x}(t)\end{pmatrix}$$

$$w(t)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot{a}(t)\end{pmatrix} \qquad Q(t)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{\dot{a}}^2\end{pmatrix}$$

其中，$\sigma_{\dot{a}}^2$为加速度变化率的方差。

离散模型的状态转移矩阵为：

$$\Phi(k)=\begin{pmatrix}1 & T_k & \frac{1}{2}T_k^2\\ 0 & 1 & T_k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

状态噪声的协方差阵为：

$$Q(k)=\sigma_{\dot{a}}^2\begin{pmatrix}\frac{1}{20}T_k^5 & \frac{1}{8}T_k^4 & \frac{1}{6}T_k^3\\ \frac{1}{8}T_k^4 & \frac{1}{3}T_k^3 & \frac{1}{2}T_k^2\\ \frac{1}{6}T_k^3 & \frac{1}{2}T_k^2 & T_k\end{pmatrix}$$

假定定位系统不能直接测量到加速度，因此，观测方程的参数在不同条件下有如下形式：

若仅有位置测量值，则：

$$H=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad Y(k)=(y(k)) \qquad R(k)=(\sigma_x^2)$$

若位置和速度测量值都存在，则：

$$H=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad Y(k)=\begin{pmatrix}y(k)\\ \dot{y}(k)\end{pmatrix} \qquad R(k)=\begin{pmatrix}\sigma_x^2 & \sigma_{x\dot{x}}\\ \sigma_{x\dot{x}} & \sigma_{\dot{x}}^2\end{pmatrix}$$

当位置是唯一的状态观测量时，初始化滤波器需要三个等间隔（$T_0=T_1=T_2$）的测量值$Y(0)$、$Y(1)$和$Y(2)$，这时系统的初始状态和相应的状态误差矩阵为：

$$\hat{X}(2|2)=\begin{pmatrix} Y_1(2) \\ \frac{1}{T}\left(Y_1(2)-Y_1(1)\right) \\ \frac{1}{T^2}\left(Y_1(2)-2Y_1(1)+Y_1(0)\right) \end{pmatrix}$$

$$P(2|2)=\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \frac{1}{T}\sigma_x^2 & \frac{1}{T^2}\sigma_x^2 \\ \frac{1}{T}\sigma_x^2 & \frac{2}{T^2}\sigma_x^2+\frac{T^2}{4}\sigma_a^2+\frac{T^3}{5}\sigma_{\dot{x}}^2 & \frac{3}{T^3}\sigma_x^2+\frac{7}{40}T^2\sigma_{\dot{a}}^2 \\ \frac{1}{T^2}\sigma_x^2 & \frac{3}{T^3}\sigma_x^2+\frac{7}{40}T^2\sigma_{\dot{a}}^2 & \frac{6}{T^4}\sigma_x^2+\frac{23}{30}T\sigma_{\dot{a}}^2 \end{pmatrix}$$

其中，σ_a^2是加速度的方差。

通常采用的方法是假设除了位置以外的所有状态变量在初始时为零，此时初始状态和方差针为：

$$\hat{X}(1|1)=\begin{pmatrix} Y_1(1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P(1|1)=\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\dot{x}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_a^2 \end{pmatrix}$$

其中，$\sigma_{\dot{x}}^2$和σ_a^2分别是车辆速度和加速度的方差。如果位置和速度都可得到，则初始状态和方差为：

$$\hat{X}(1|1)=\begin{pmatrix} Y_1(1) \\ Y_2(1) \\ \frac{Y_1(1)-Y_1(0)}{T} \end{pmatrix}$$

$$P(1|1)=\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{x\dot{x}} & \frac{1}{T}\sigma_{x\dot{x}} \\ \sigma_{x\dot{x}} & \sigma_{\dot{x}}^2 & \frac{1}{T}\sigma_{\dot{x}}^2 \\ \frac{1}{T}\sigma_{x\dot{x}} & \frac{1}{T}\sigma_{\dot{x}}^2 & \frac{2}{T^2}\sigma_{\dot{x}}^2+\frac{T}{3}\sigma_{\dot{a}}^2 \end{pmatrix}$$

状态转移矩阵：

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 & \frac{1}{2}t^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t & 0 & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

观测模型：

$$H(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

分析

针对GPS位置滤波（经度和纬度），状态数为4，包括$(x, y, \dot{x}, \dot{y})$，即为状态量，其中x、y为位置量，即能看到的坐标值；$\dot{x}$、$\dot{y}$为速度（即每次移动的距离）。

假定预测量为$\hat{x}$、$\hat{y}$，那么：

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ dx \\ dy \end{pmatrix}$$

由于物体做匀速运动，则$dx = \dot{x}, dy = \dot{y}$。

即，

$$\begin{cases} \hat{x} = x + dx = x + \dot{x} \\ \hat{y} = y + dy = y + \dot{y} \end{cases}$$

说明

1. 摘自：[GPS动态滤波的理论、方法及其应用]

2. C语言实现的Kalman库：iKalman

参考链接：

1. Sensor Fusion using the Kalman Filter；

2. Example_application.2C_technical；

3. Implementing a Kalman filter for position, velocity, acceleration；

4. More on: Kalman filter for position and velocity。