第五章　图形变换

提出问题

- 如何对二维图形进行方向、尺寸和形状方面的变换
- 如何方便地实现在显示设备上对二维图形进行观察

5.1 基本概念

5.1.1 齐次坐标

齐次坐标表示就是用n+1维向量表示一个n维向量。

齐次坐标的不唯一性

规范化齐次坐标表示就是h=1的齐次坐标表示。

如何从齐次坐标转换到规范化齐次坐标？

5.1.2 几何变换

图形的**几何变换**是指对图形的几何信息经过平移、比例、旋转等变换后产生新的图形，是图形在方向、尺寸和形状方面的变换。

5.1.3 二维变换矩阵

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot T_{2D} = [x \quad y \quad 1] \cdot \left[\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \\ \hline l & m & s \end{array}\right]$$

$$= [ax + cy + l, bx + dy + m, px + qy + s]$$

5.2 二维图形的几何变换

基本几何变换都是**相对于坐标原点和坐标轴进行的**

几何变换

6.2.1 平移变换

平移是指将p点沿直线路径从一个坐标位置移到另一个坐标位置的重定位过程。

平移是一种不产生变形而移动物体的刚体变换（rigid-body transformation）

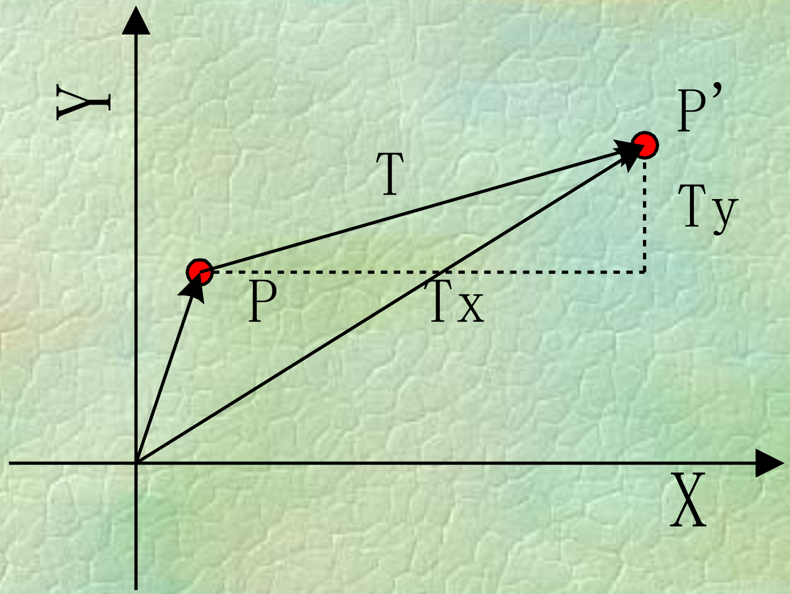


图6-1　平移变换

推导：

$$\begin{cases} ax + cy + l = x + Tx \\ bx + dy + m = y + Ty \\ px + qy + s = 1 \end{cases}$$

矩阵：

$$\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

T_x，T_y称为平移矢量

5.2.2 比例变换

比例变换是指对p点相对于坐标原点沿x方向放缩S_x倍，沿y方向放缩S_y倍。其中S_x和S_y称为**比例系数**。

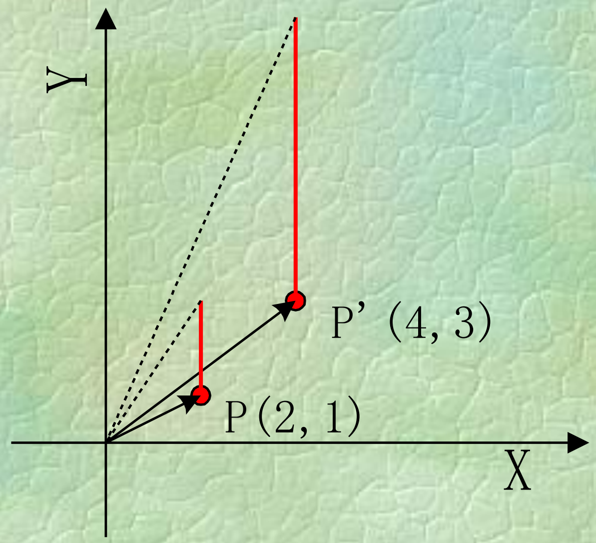
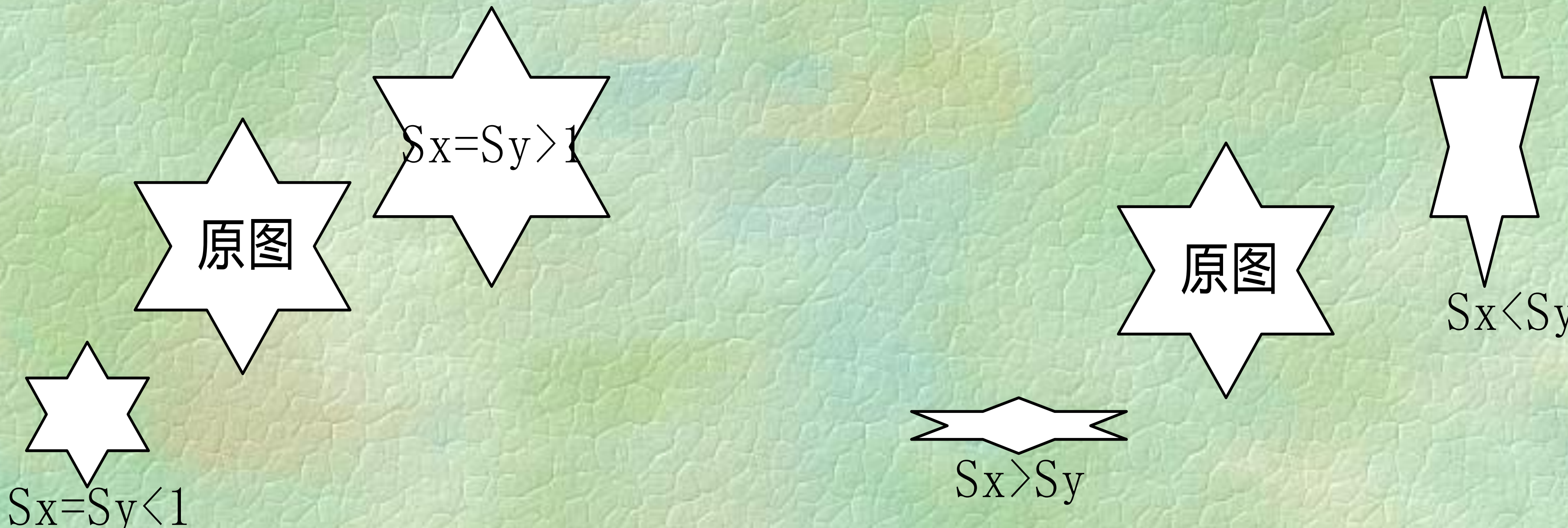


图6-2　比例变换(Sx=2, Sy=3)

推导:

矩阵:

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



（a） Sx=Sy比例　　　　（b） Sx<>Sy比例

图6-3　比例变换

整体比例变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

5.2.3 旋转变换

二维旋转是指将p点绕坐标原点转动某个角度（逆时针为正，顺时针为负）得到新的点p’的重定位过程。

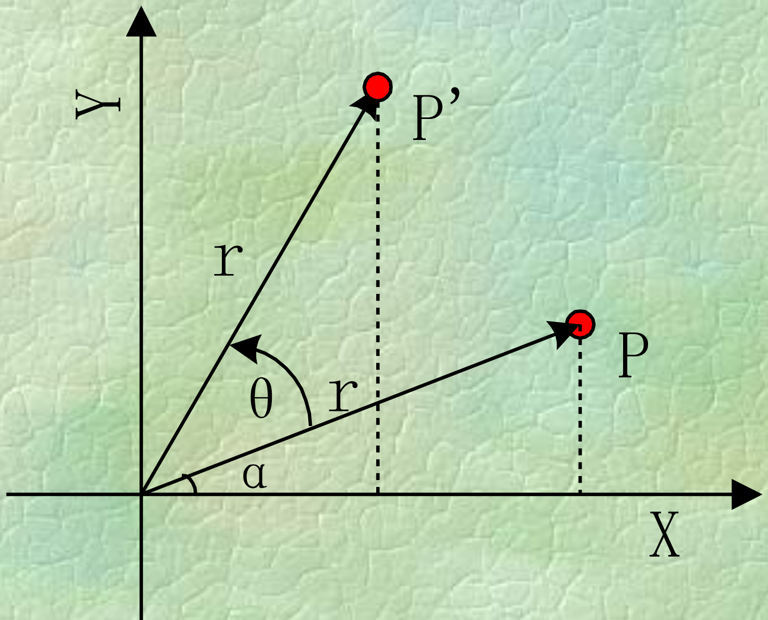


图6-4　旋转变换

推导：

矩阵：逆时针旋转θ角

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

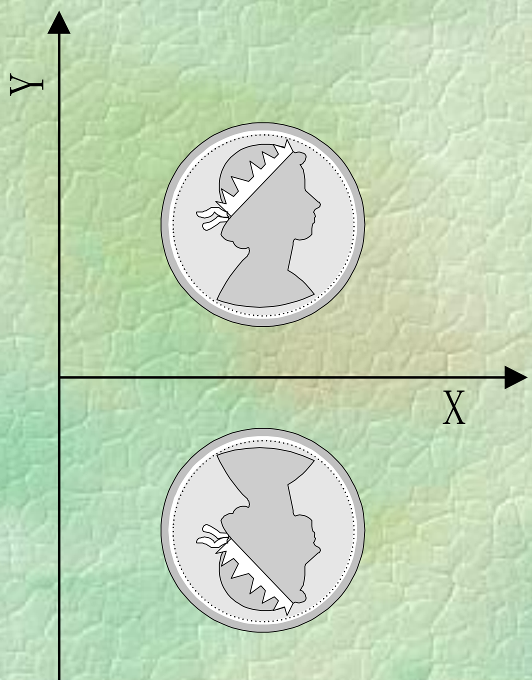
顺时针旋转θ角？

简化计算

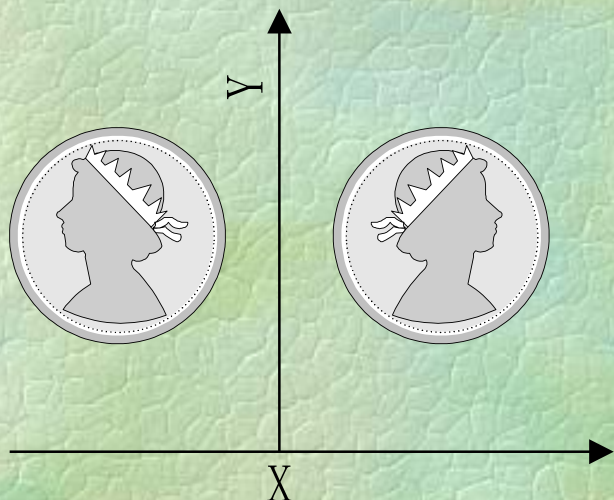
$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \theta & 0 \\ -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.2.4 对称变换

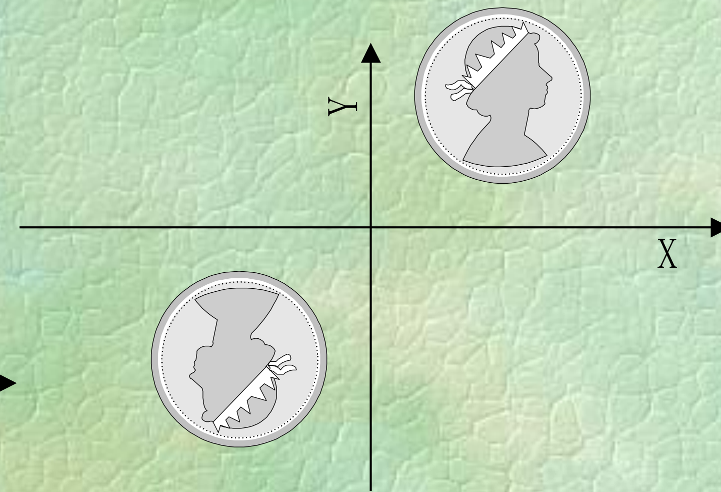
对称变换后的图形是原图形关于某一轴线或原点的镜像。



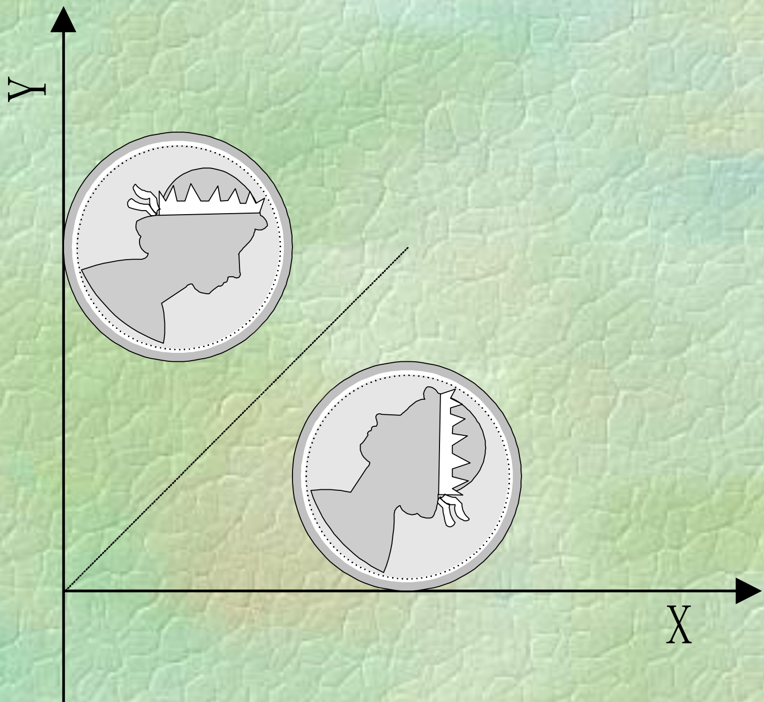
(a)关于x轴对称



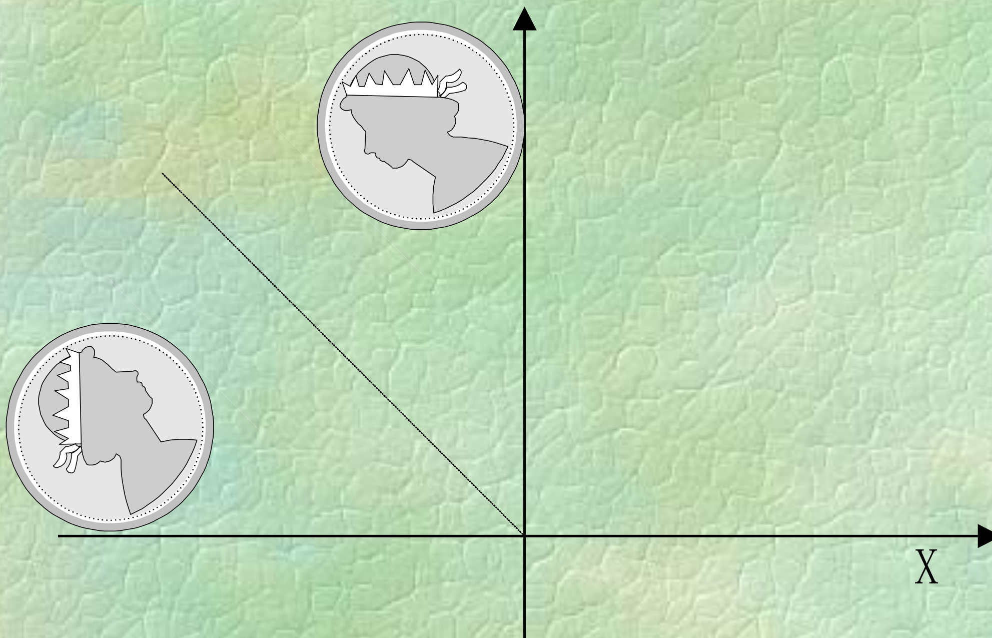
(b)关于y轴对称



(c)关于原点对称



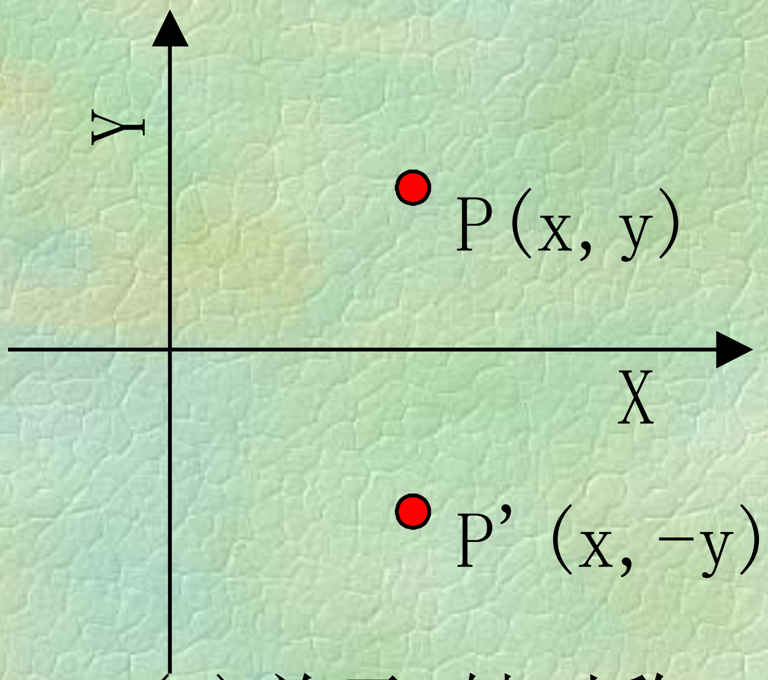
(d)关于x=y对称



(e)关于x=-y对称

(1)关于**x**轴对称

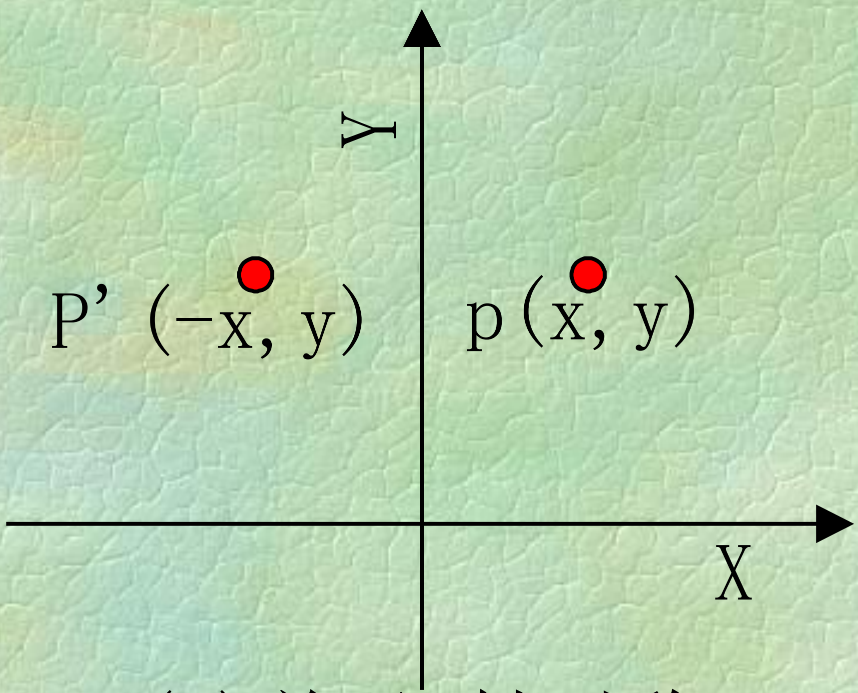
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(a)关于x轴对称

(2)关于**y**轴对称

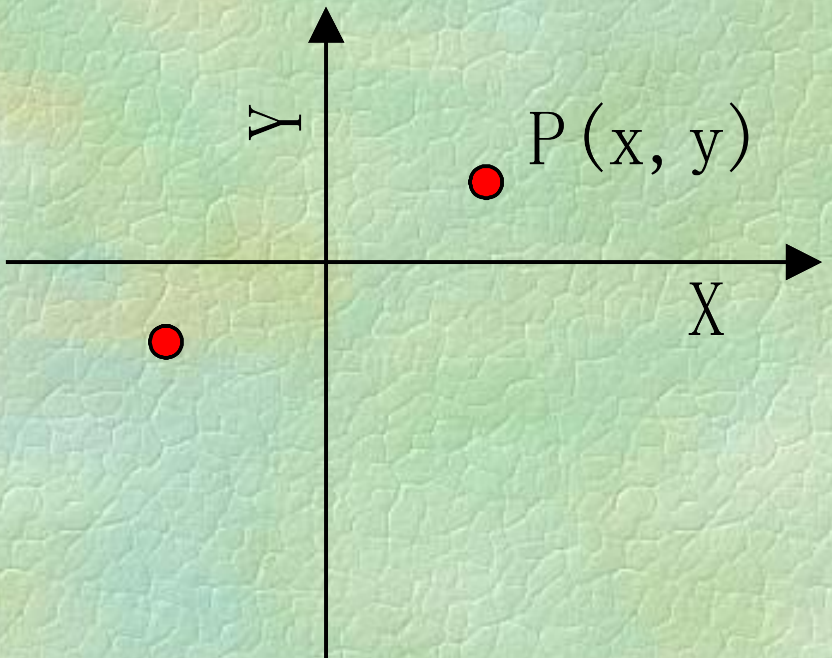
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(b)关于y轴对称

(3)关于原点对称

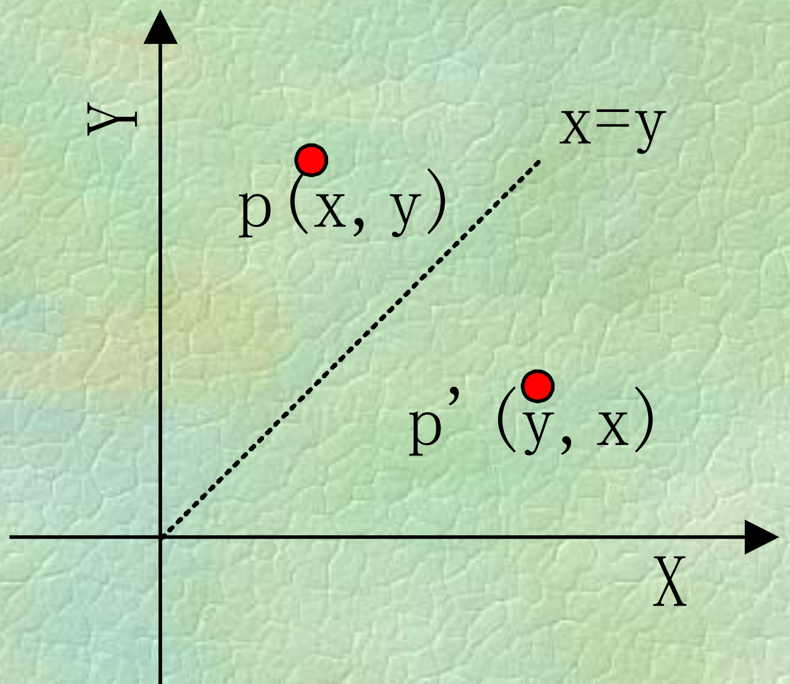
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(c)关于原点对称

(4)关于**y=x**轴对称

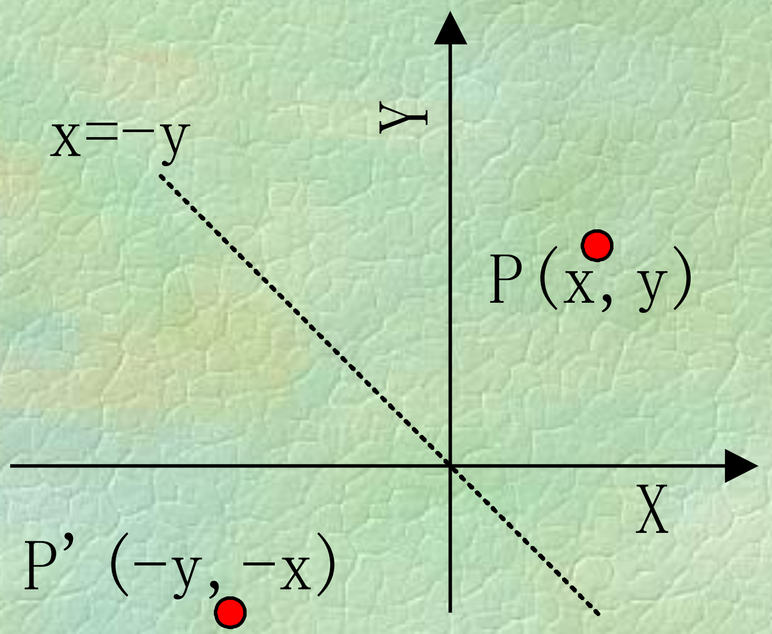
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(d)关于x=y对称

(5)关于**y=-x**轴对称

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(e)关于x=−y对称

5.2.6 基本二维图形的变换

几何变换均可表示成**P’=P*T**的形式

1. 点的变换

2. 直线的变换

3. 多边形的变换

4. 曲线的变换

先变换，再生成；

先生成，再变换；

Bezier曲线的变换

5.2.7 复合变换

复合变换是指:

图形作一次以上的几何变换，变换结果是每次的变换矩阵相乘。

任何一复杂的几何变换都可以看作基本几何变换的组合形式。

复合变换具有形式:

$$P' = P \cdot T = P \cdot (T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots \cdot T_n)$$
$$= P \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots \cdot T_n \qquad (n > 1)$$

1 二维复合平移

两个连续平移是加性的。

2 二维复合比例

连续比例变换是相乘的。

3 二维复合旋转

两个连续旋转是相加的。可写为:

$$R = R_{(\theta_1)} \bullet R_{(\theta_2)} = R(\theta_1 + \theta_2)$$

5.3　三维图形的几何变换

提出问题

- 如何对三维图形进行方向、尺寸和形状方面的变换
- 如何进行投影变换
- 如何方便地实现在显示设备上对三维图形进行观察

三维齐次坐标变换矩阵

$$T_{3D} = \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ \hline l & m & n & s \end{array}\right]$$

三维基本几何变换

三维基本几何变换都是相对于坐标原点和坐标轴进行的几何变换

假设三维形体变换前一点为p(x,y,z)，变换后为p'(x',y',z')。

$$p' = [x' \quad y' \quad z' \quad 1] = p \cdot T_{3D} = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ \hline l & m & n & s \end{array}\right]$$

1. 平移变换

$$T_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & Tz & 1 \end{bmatrix}$$

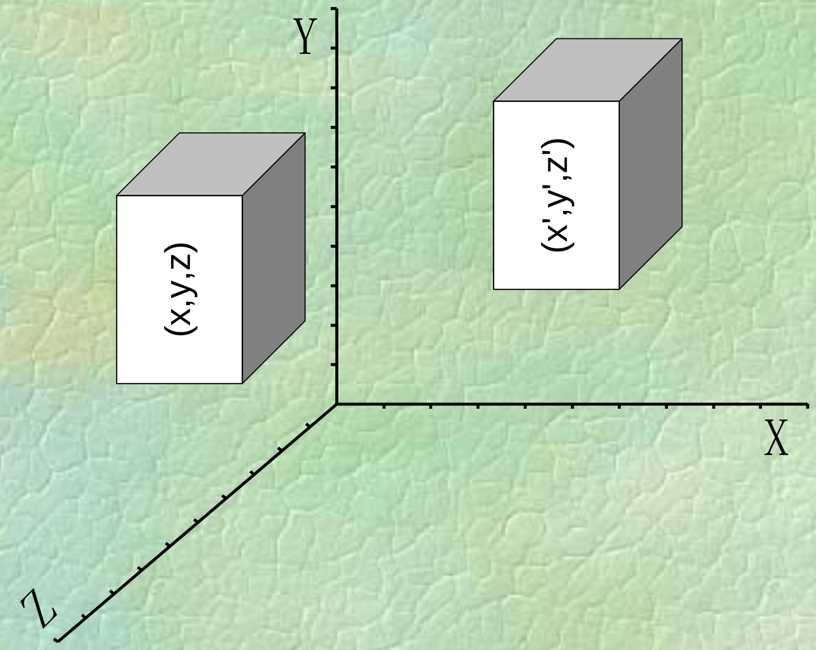


图7-5　平移变换

2. 比例变换

(1)局部比例变换

$$T_s = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例子：对如图7-6所示的长方形体进行比例变换，其中a=1/2，e=1/3，j=1/2，求变换后的长方形体各点坐标。

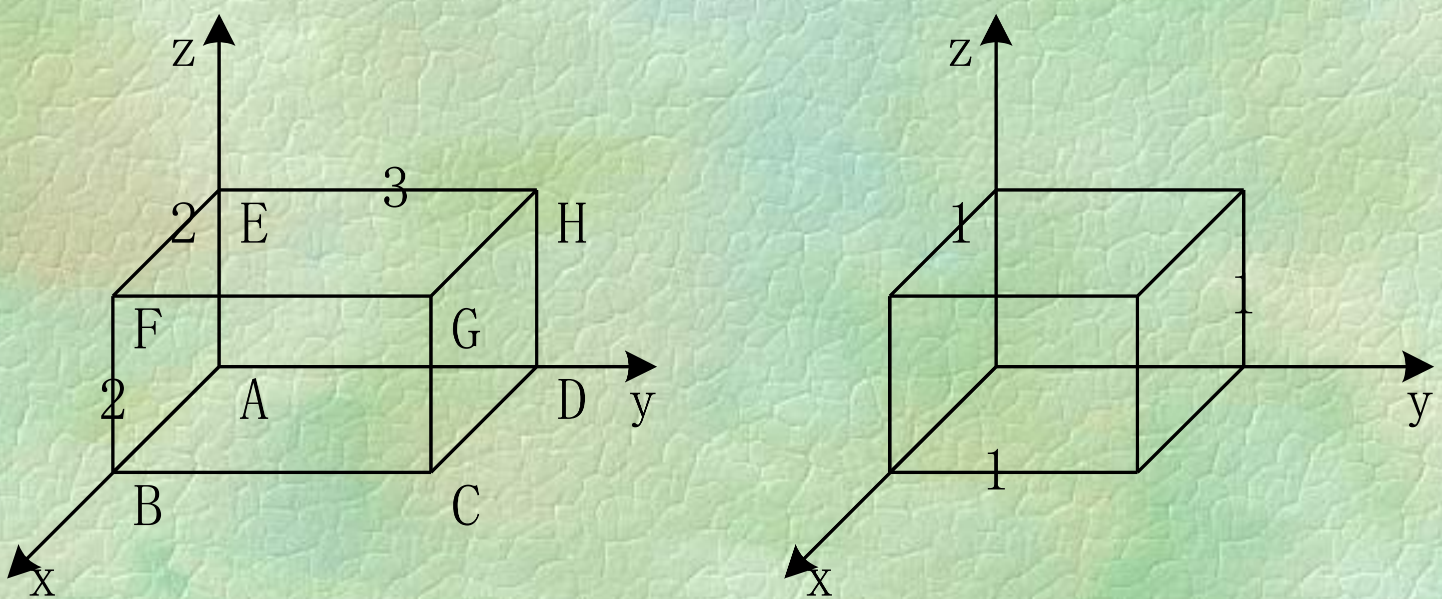


图7-6　比例变换

(2)整体比例变换

$$T_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

3. 旋转变换

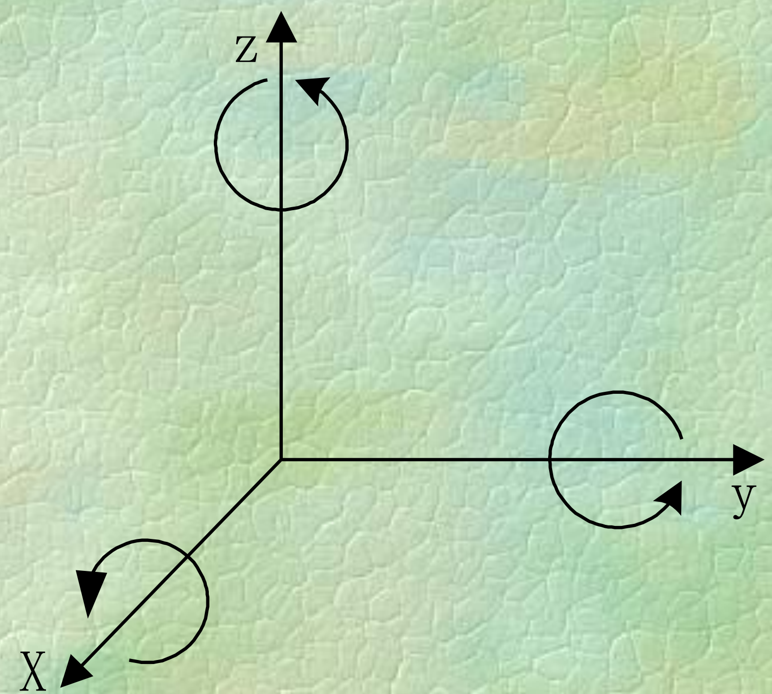
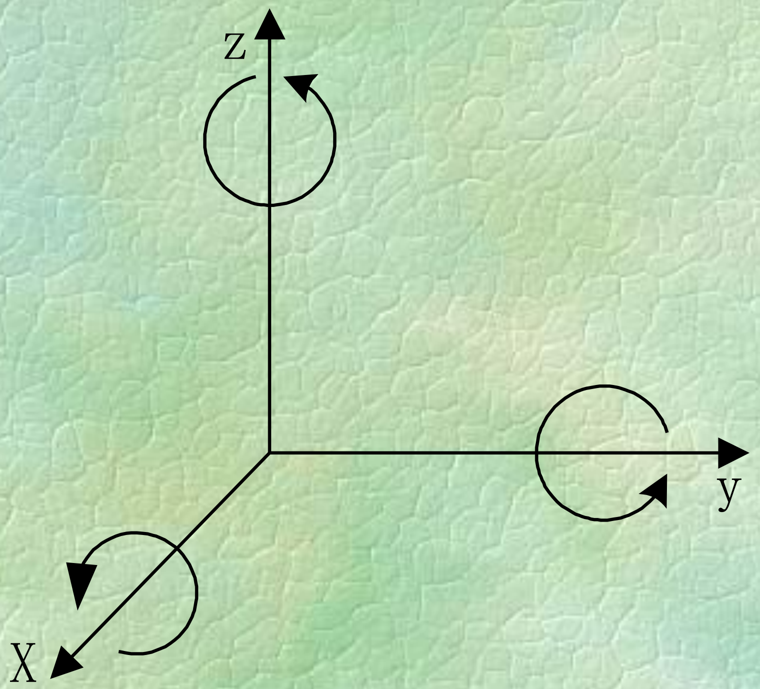


图7-7　旋转变换的角度方向

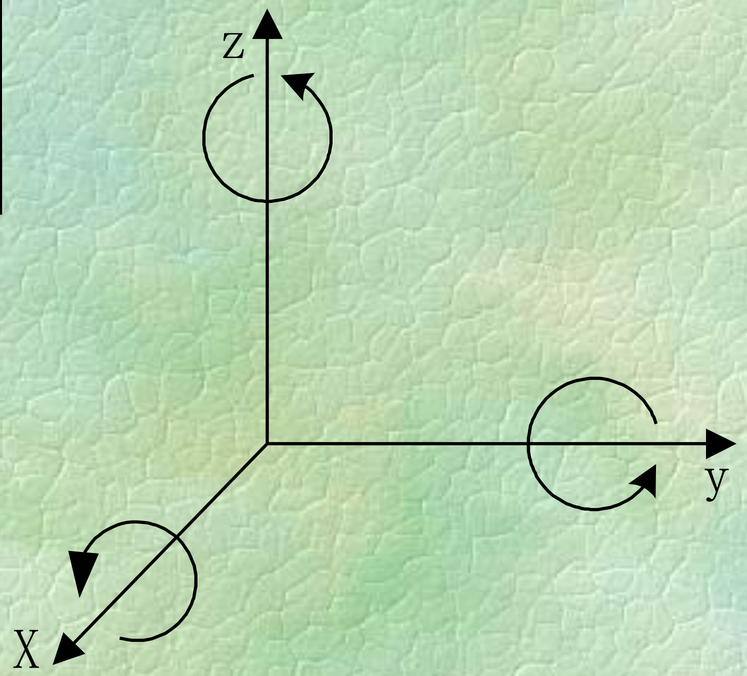
(1)绕z轴旋转

$$T_{RZ} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



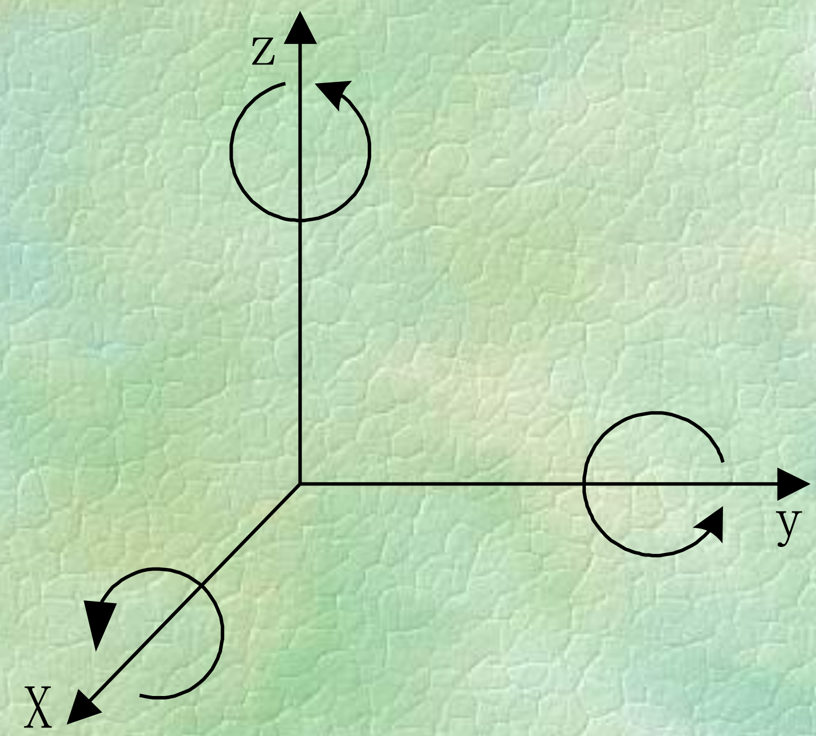
(2)绕x轴旋转

$$T_{RX}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



(3)绕y轴旋转

$$T_{RY} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



4. 对称变换

(1)关于坐标平面对称

关于xoy平面进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$T_{Fxy}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

关于yoz平面的对称变换为：

$$T_{Fyz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关于zox平面的对称变换为:

$$T_{Fzx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)关于坐标轴对称变换

关于x轴进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$T_{Fx}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

关于y轴的对称变换为：

$$T_{Fy}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

关于z轴的对称变换为：

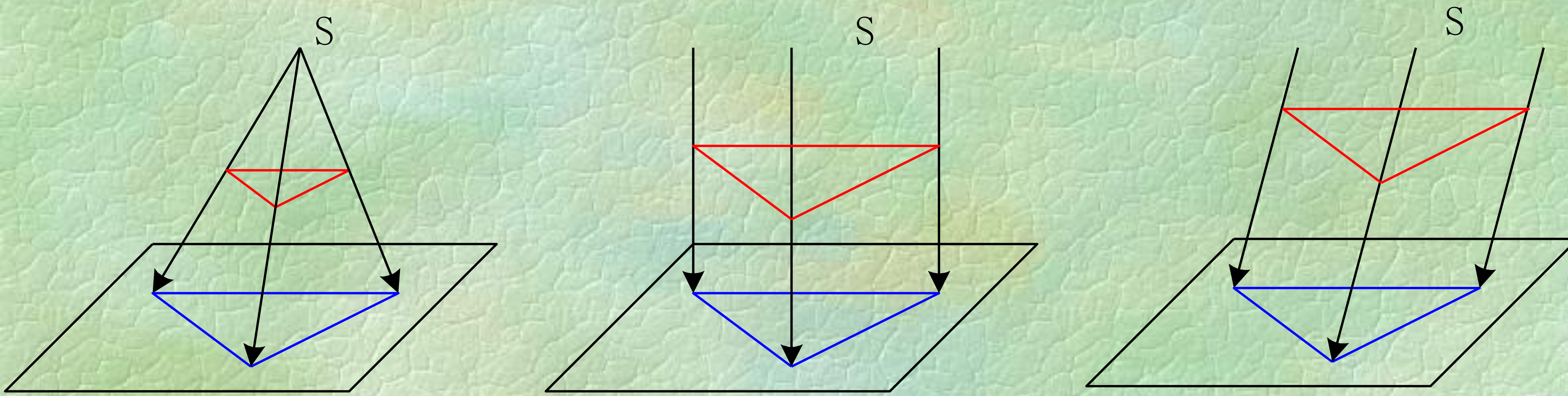
$$T_{Fz}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

5.4 投影变换

投影变换就是把三维立体（或物体）投射到投影面上得到二维平面图形。

平面几何投影主要指平行投影、透视投影以及通过这些投影变换而得到的三维立体的常用平面图形：三视图、轴测图。

观察投影是指在观察空间下进行的图形投影变换。



(a)透视投影　　(b)正投影　　(c)斜投影

图7-2　平面几何投影分为透视投影和平行投影

平面几何投影可分为两大类：

透视投影的投影中心到投影面之间的距离是有限的

平行投影的投影中心到投影面之间的距离是无限的

投影中心、投影面、投影线：

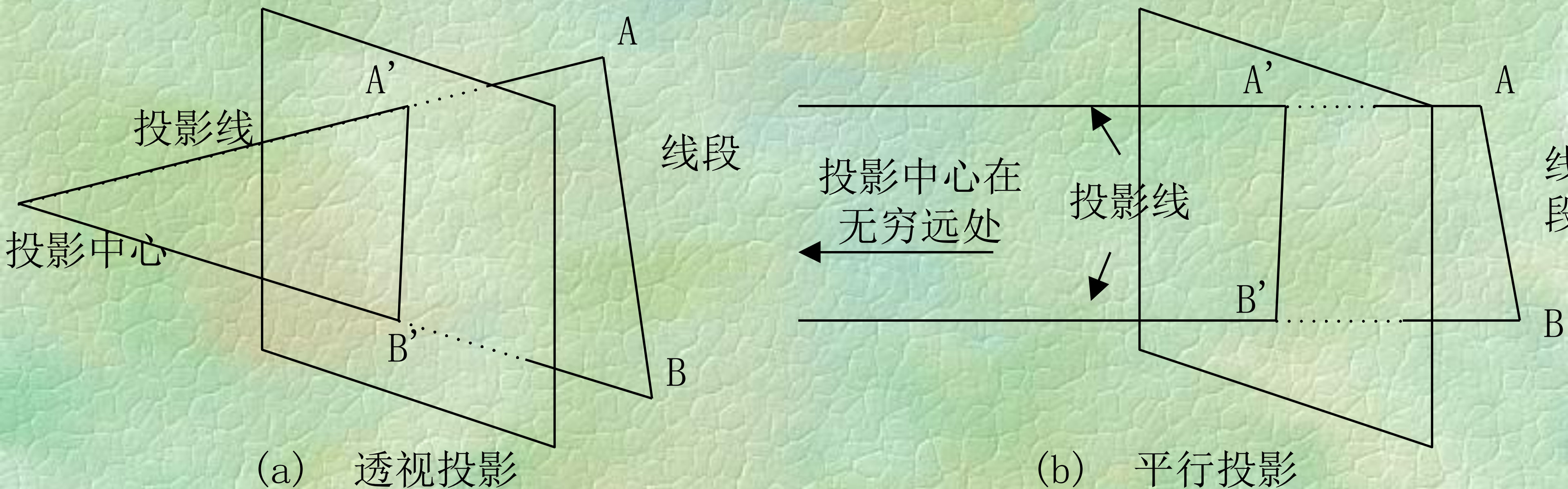
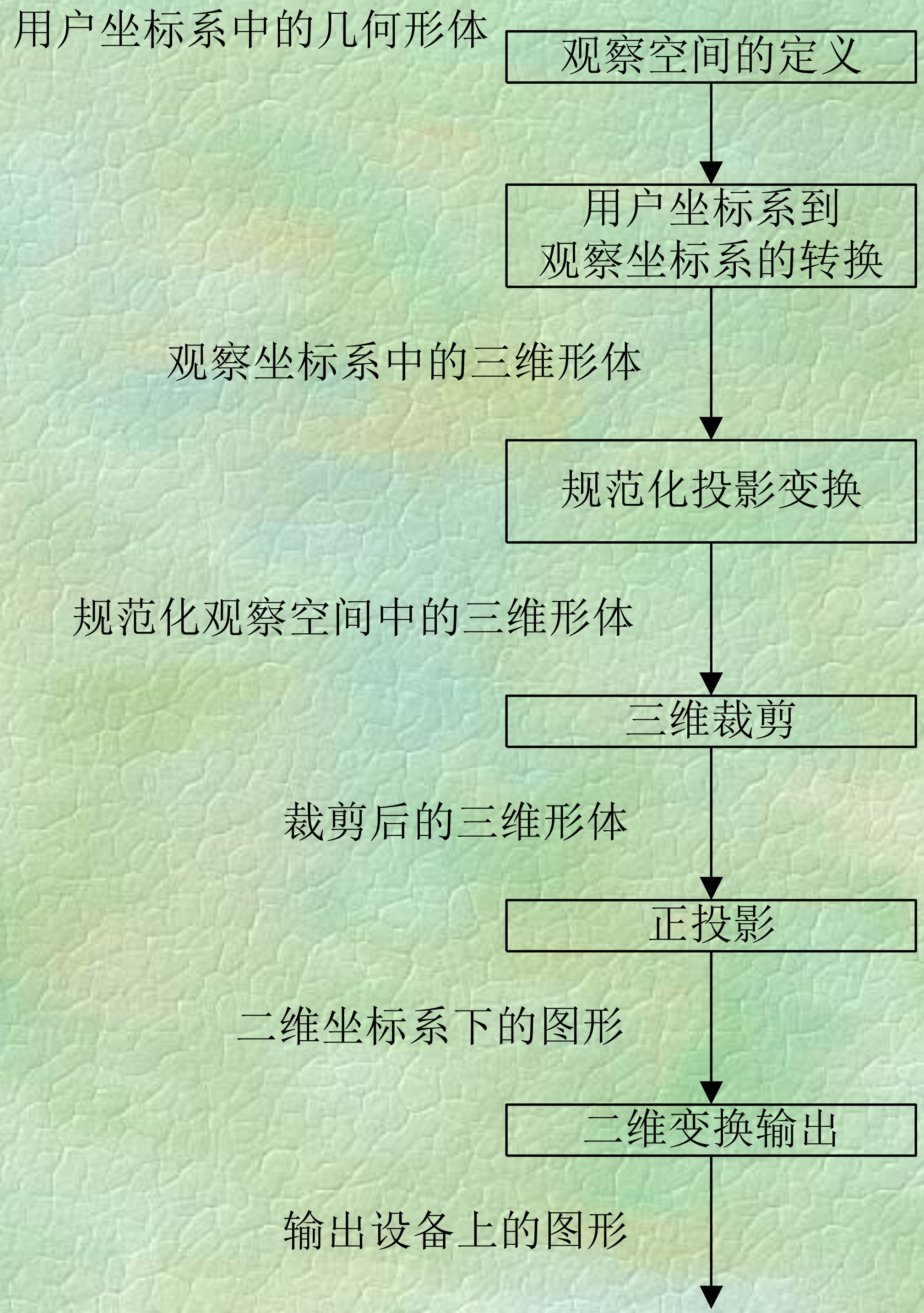


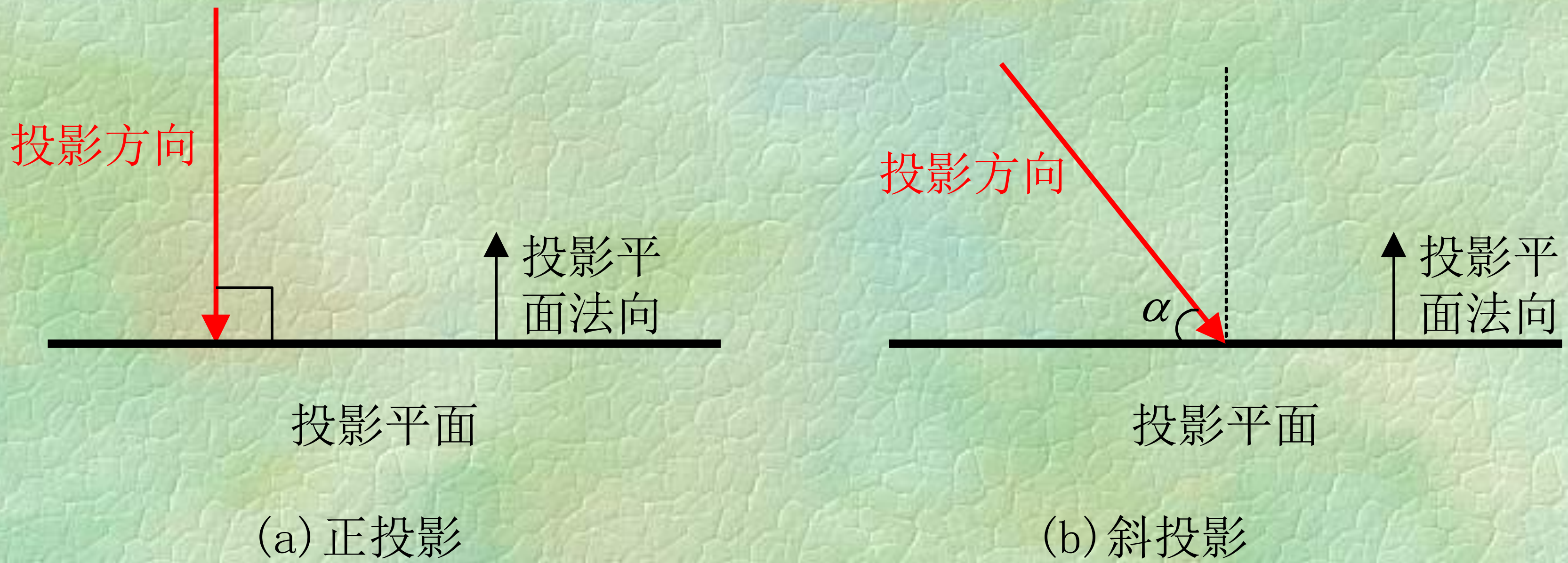
图7-1 线段AB的平面几何投影

观察投影


用户坐标系中的几何形体
观察空间的定义
用户坐标系到
观察坐标系的转换
观察坐标系中的三维形体
规范化投影变换
规范化观察空间中的三维形体
三维裁剪
裁剪后的三维形体
正投影
二维坐标系下的图形
二维变换输出
输出设备上的图形

平行投影

平行投影可分成两类：正投影和斜投影。

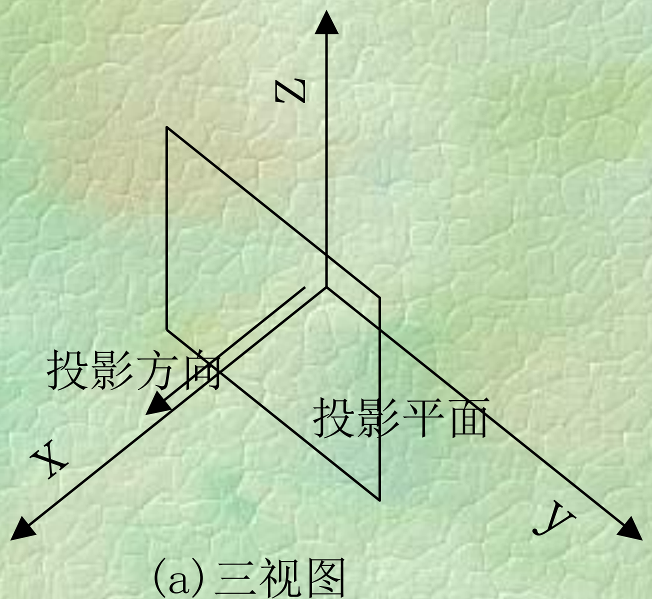


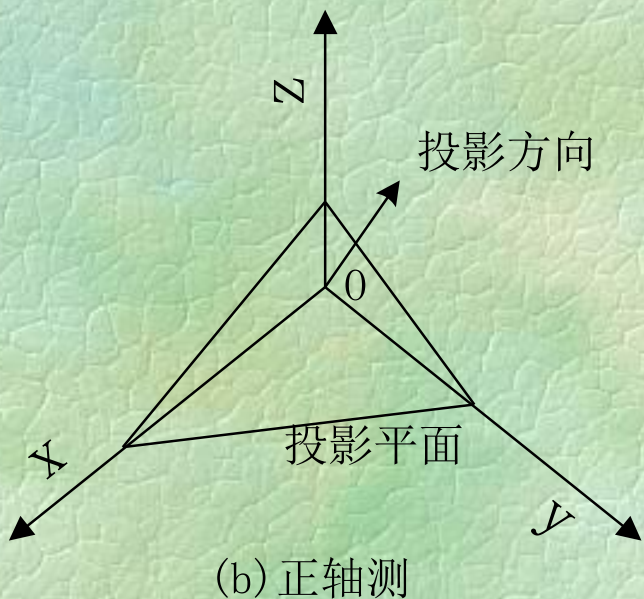
7-11　平行投影

5.4.1 正投影

正投影又可分为：三视图和正轴测。

当投影面与某一坐标轴垂直时，得到的投影为**三视图**；否则，得到的投影为**正轴测图**。

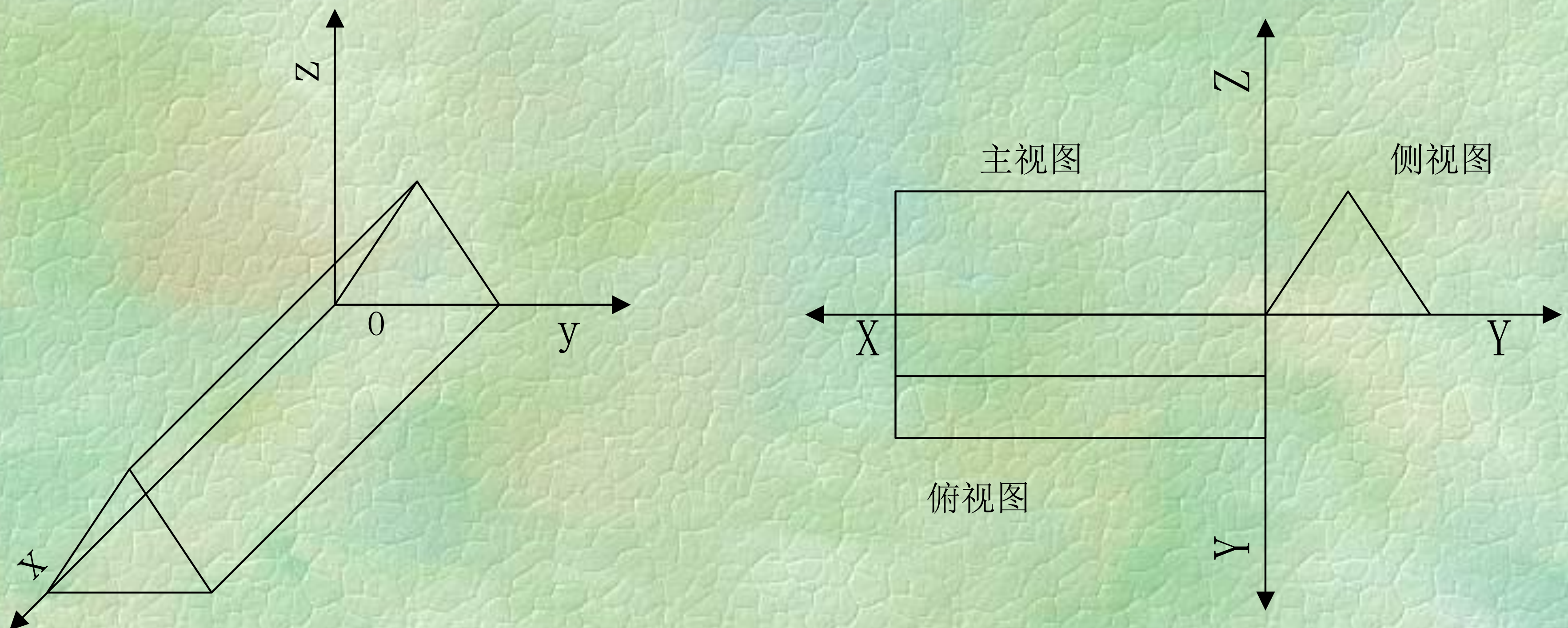




7-12　正投影

三视图：

三视图包括主视图、侧视图和俯视图三种，投影面分别与X轴、Y轴和Z轴垂直。



7-13　三维形体及其三视图

正轴测图

正轴测有等轴测、正二测和正三测三种。

当投影面与三个坐标轴之间的夹角都相等时为**等轴测**；

当投影面与两个坐标轴之间的夹角相等时为**正二测**；

当投影面与三个坐标轴之间的夹角都不相等时为**正三测**。

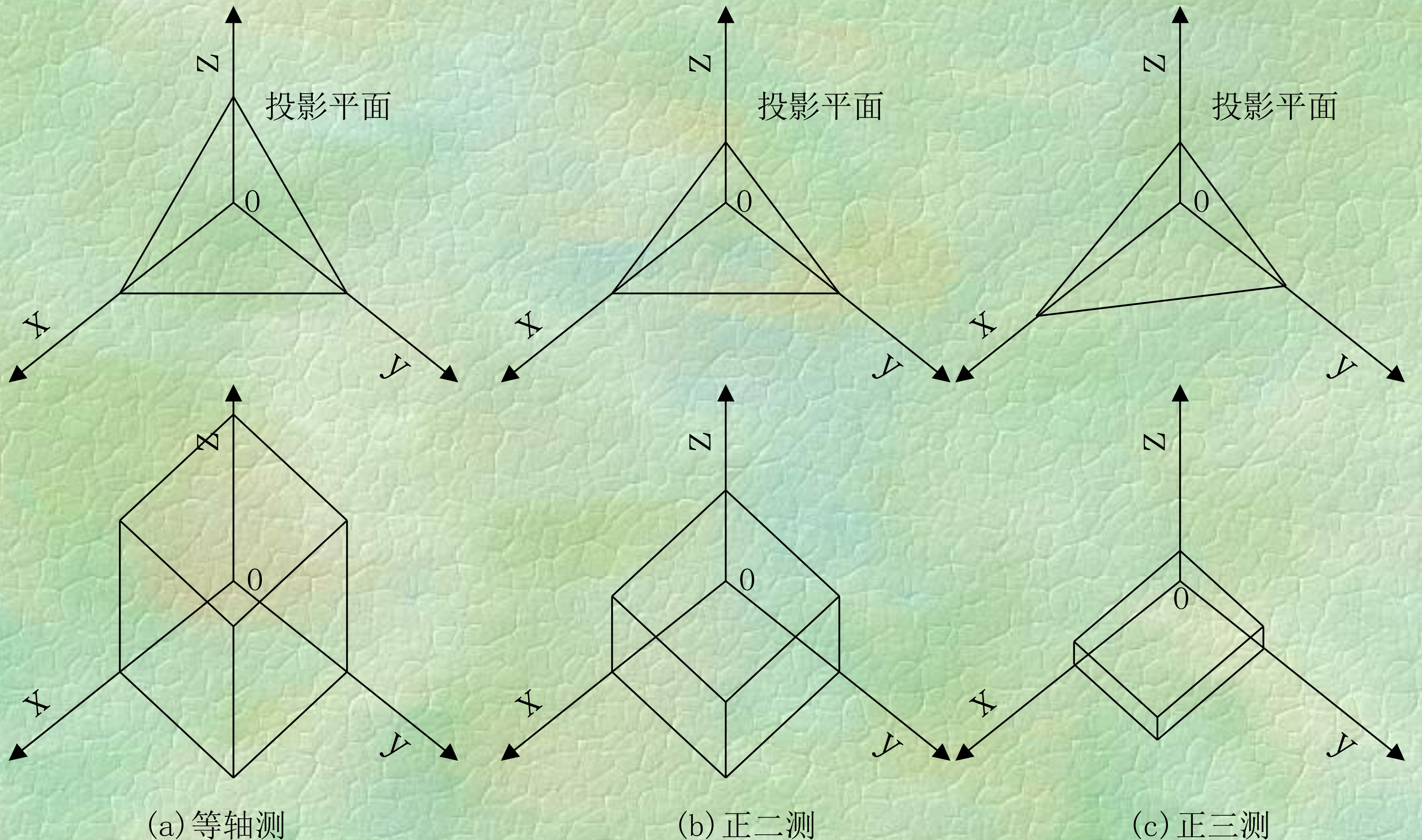


图7-14　正轴测投影面及一个立方体的正轴测投影图

1. 三视图

计算步骤:

(1) 确定三维形体上各点的位置坐标

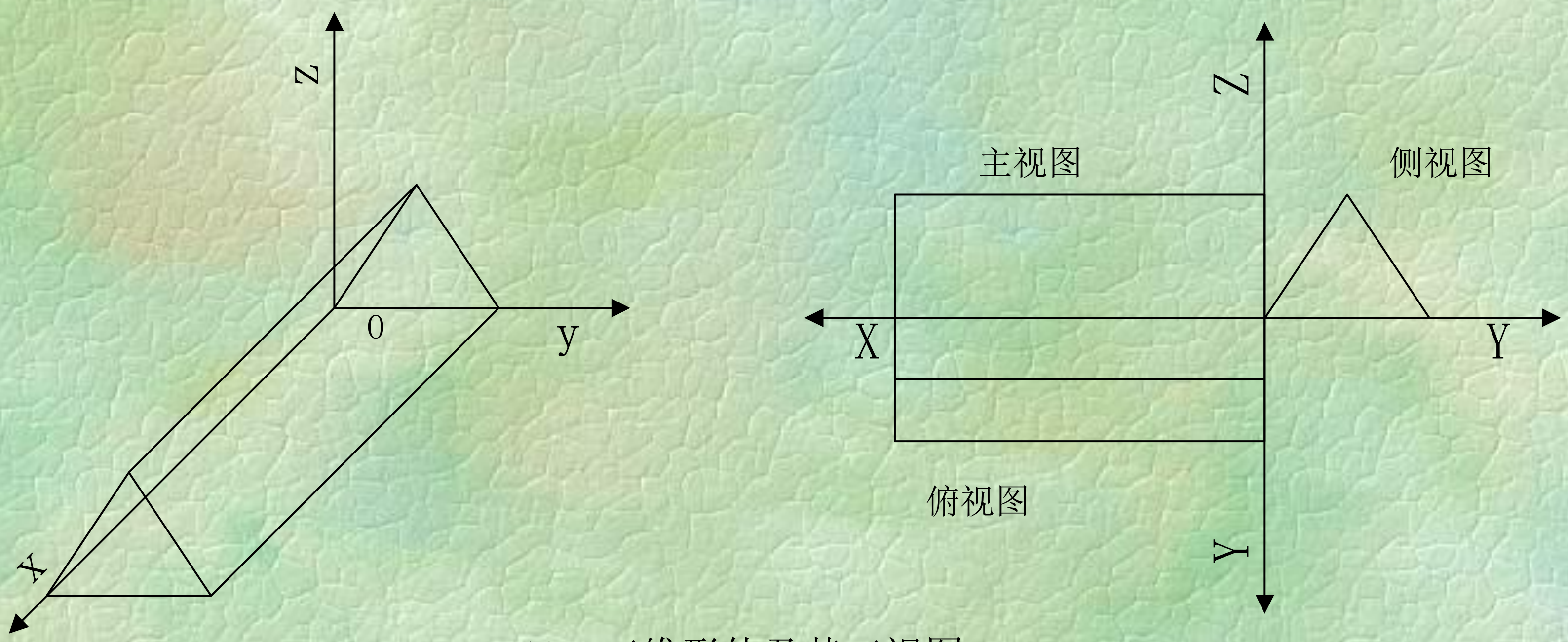
(2) 引入齐次坐标，求出所作变换相应的变换矩阵

(3) 将所作变换用矩阵表示，通过运算求得三维形体上各点(x,y,z)经变换后的相应点(x',y')或(y',z')

(4) 由变换后的所有二维点绘出三维形体投影后的三视图。

2. 主视图

将三维形体向xoz面（又称V面）作垂直投影（即正平行投影），得到主视图。



7-13　三维形体及其三视图

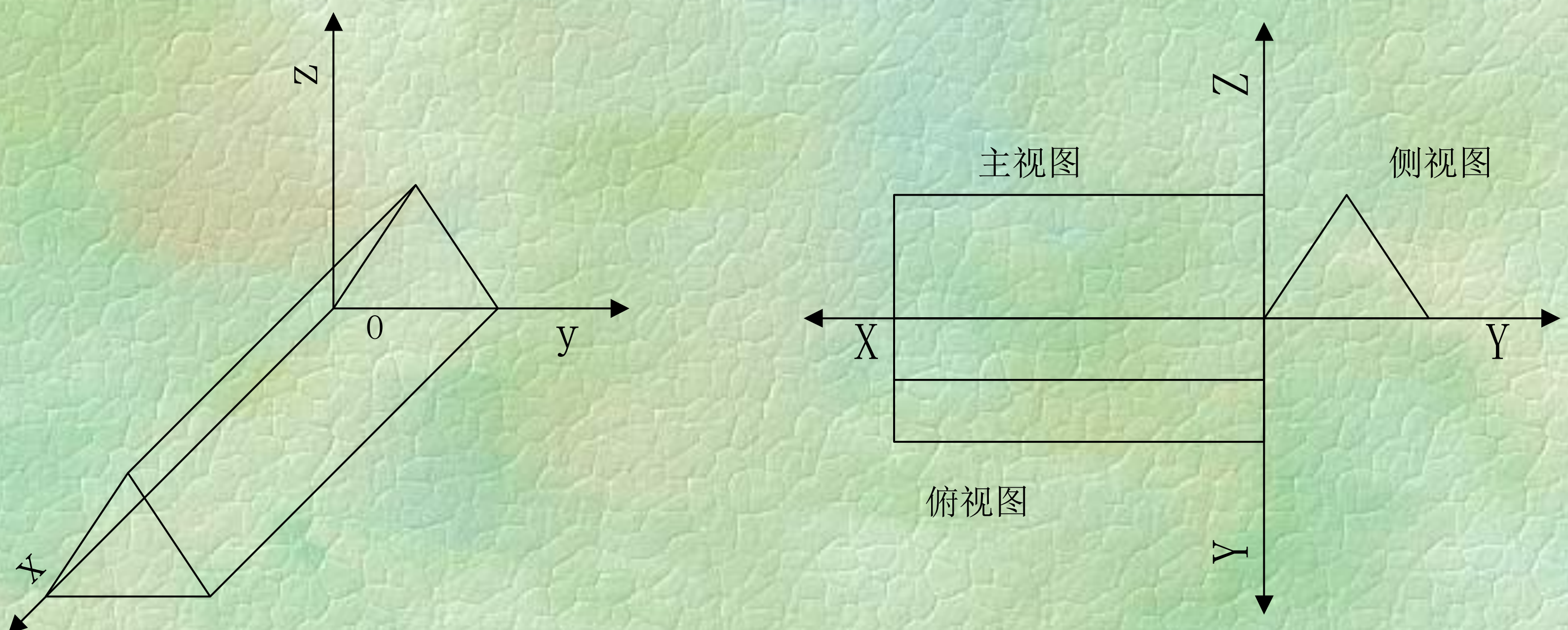
3. 俯视图

三维形体向xoy面（又称H面）作垂直投影得到俯视图，

(1) 投影变换

(2)使H面绕x轴负转90°

(3)使H面沿z方向平移一段距离$-z_0$



7-13　三维形体及其三视图

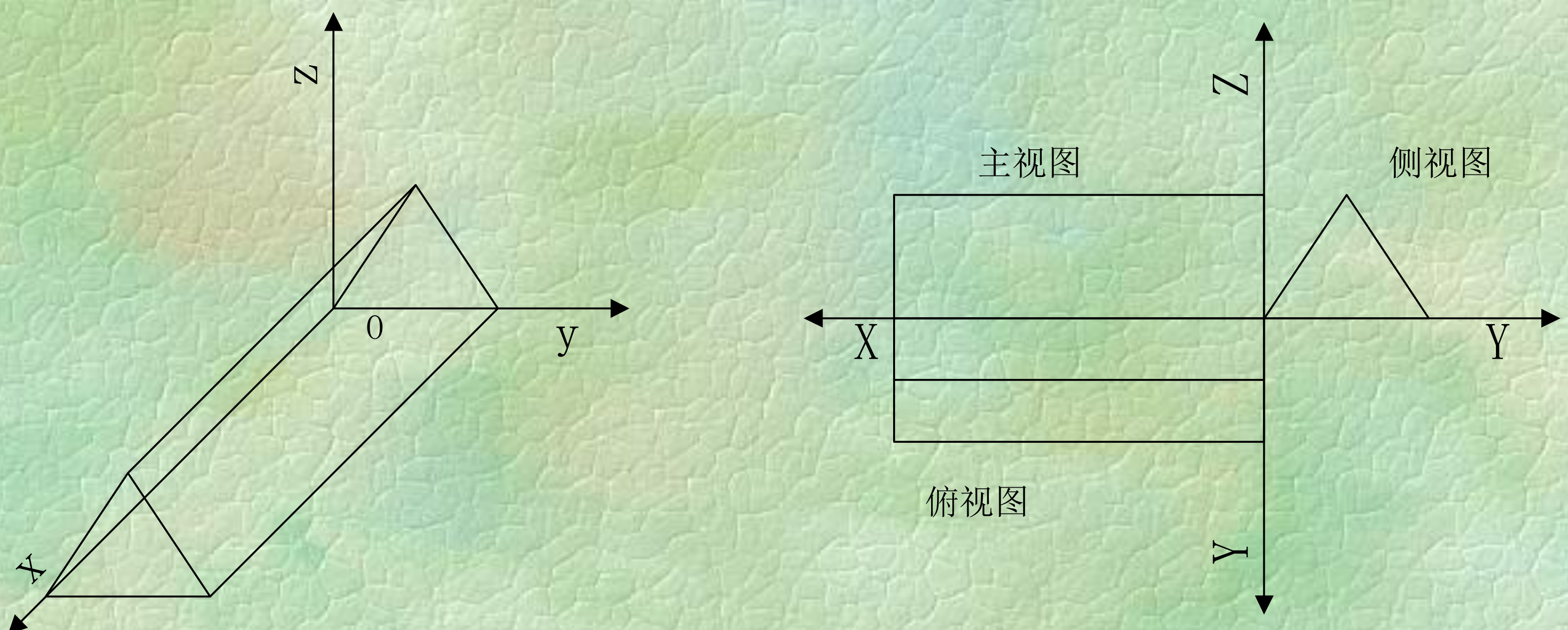
4. 侧视图

获得侧视图是将三维形体往yoz面（侧面W）作垂直投影。

(1) 侧视图的投影变换

(2)使W面绕z轴正转90°

(3)使W面沿负x方向平移一段距离x_0



7-13　三维形体及其三视图

5. 正轴测图的投影变换矩阵

分析：

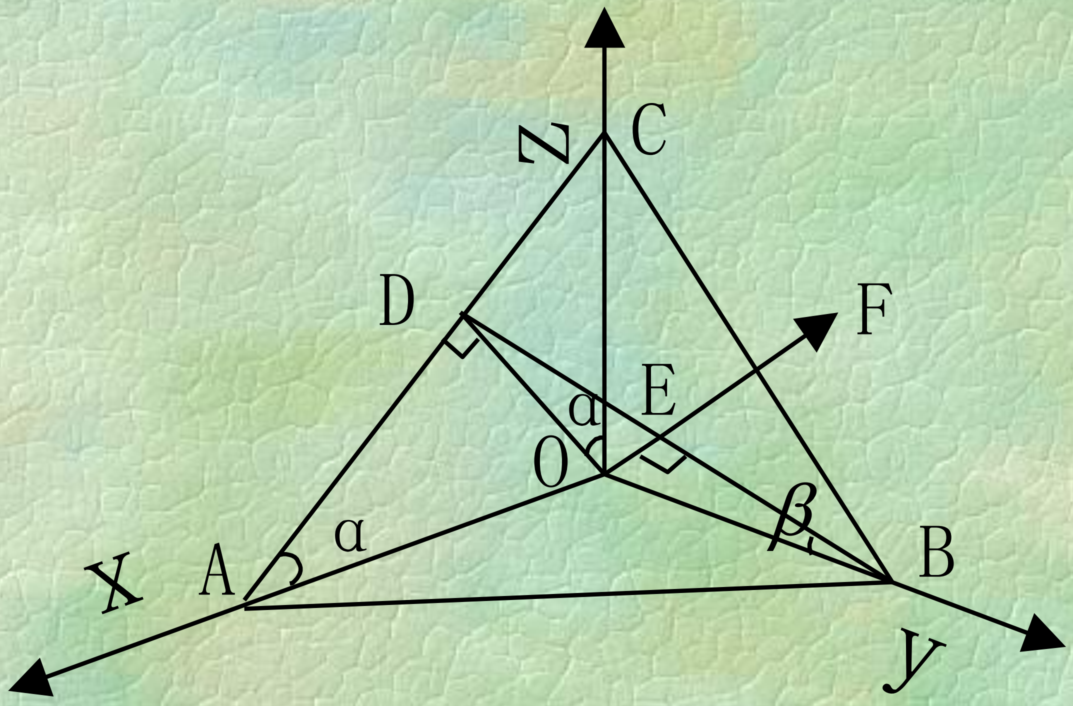


图7-15 正轴测图的形成

公式推导：

(1) 先绕y轴顺时针旋转α角

(2) 再绕x轴逆时针旋转β角

(3) 将三维形体向xoy平面作正投影

最后得到正轴测图的投影变换矩阵

$$T = T_{Ry} \cdot T_{Rx} \cdot T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \cdot \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \cdot \sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. 正等测图

分析：

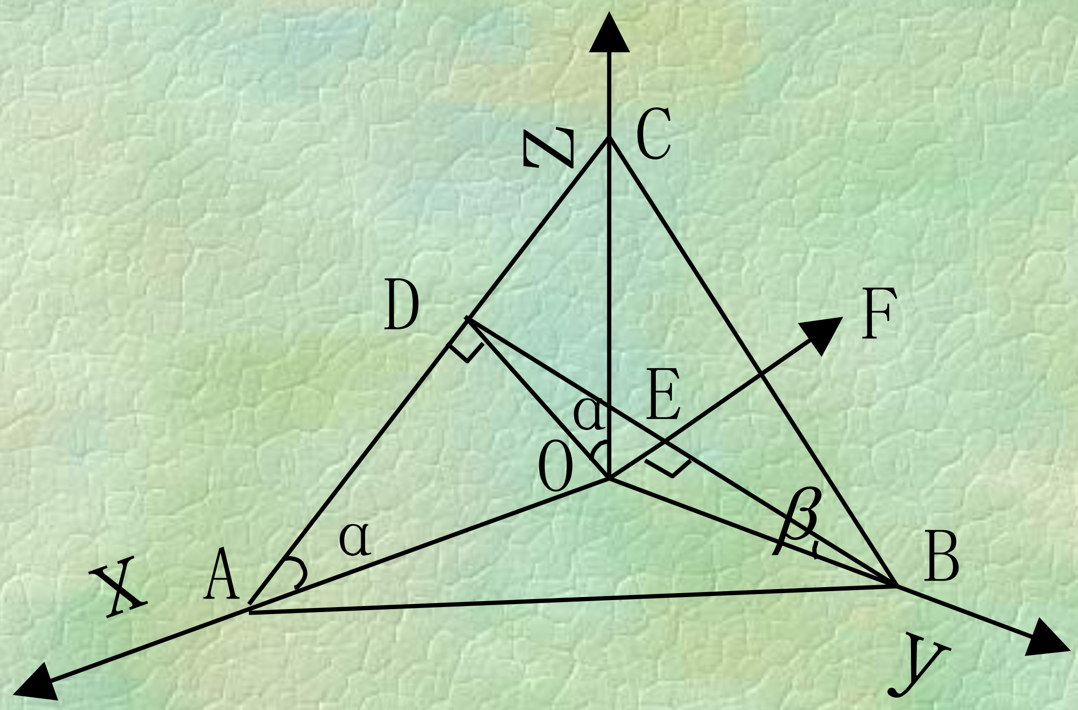


图7-15　正轴测图的形成

公式推导：

将α和β的值代入(7-1)式得到正等测图的投影变换矩阵：

$$T=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.7071 & -0.4082 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8165 & 0 & 0 \\ -0.7071 & -0.4082 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.5 透视投影

分析：

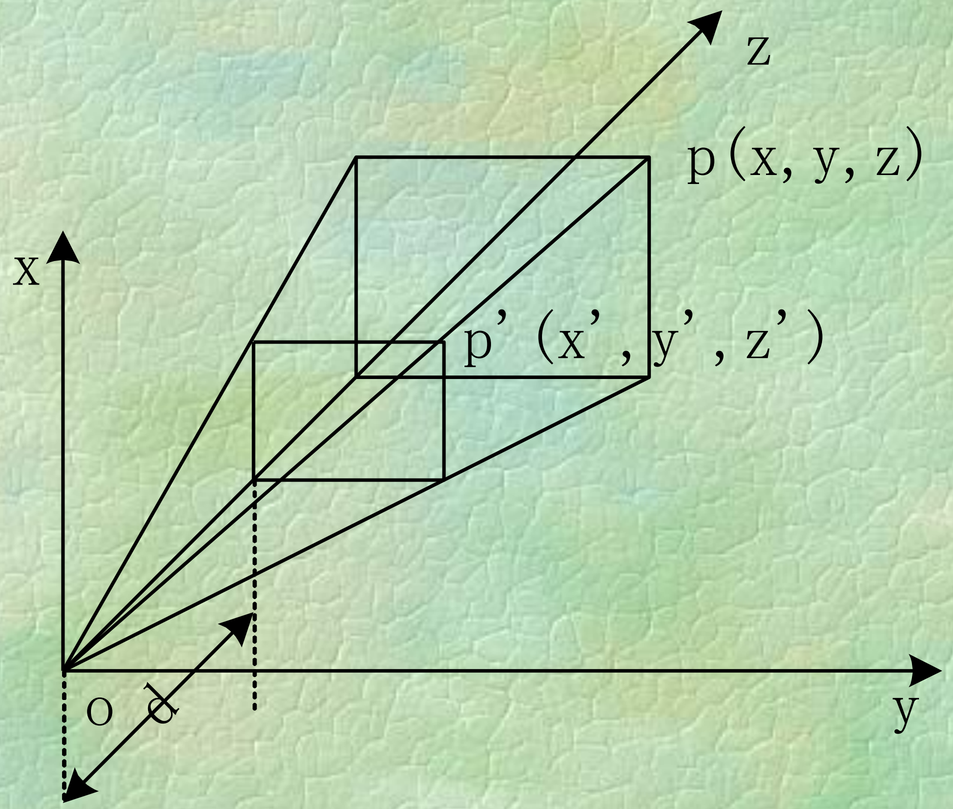


图7-19　点的一点透视

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

灭点：

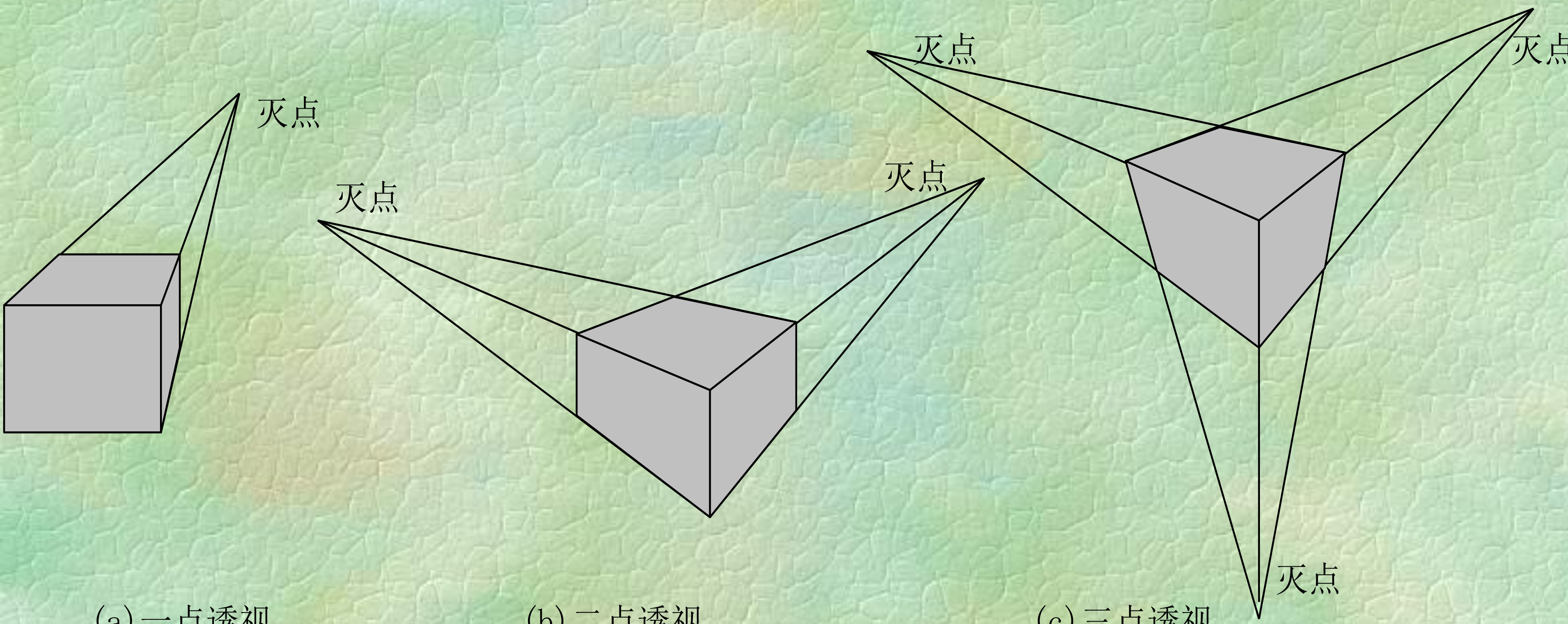
不平行于投影面的平行线的投影会汇聚到一个点，这个点称为**灭点**(Vanishing Point)。

坐标轴方向的平行线在投影面上形成的灭点称作**主灭点**。

一点透视有一个主灭点，即投影面与一个坐标轴正交，与另外两个坐标轴平行。

两点透视有两个主灭点，即投影面与两个坐标轴相交，与另一个坐标轴平行。

三点透视有三个主灭点，即投影面与三个坐标轴都相交。



(a)一点透视 (b)二点透视 (c)三点透视

7-20 透视投影

一点透视

分析：

要考虑下列几点：

(1)三维形体与画面（投影面）的相对位置；

(2)视距，即视点（投影中心）与画面的距离；

(3)视点的高度。