

第八章 曲线与曲面生成

- **提出问题:**

曲线与曲面的表达：由离散点来近似地决定曲线和曲面，即通过测量或实验得到一系列有序点列，根据这些点列需构造出一条光滑曲线或曲面，以直观地反映出几何特性、变化规律和趋势等。

工业产品的几何形状：

- 初等解析曲面
- 复杂方式自由变化的曲线曲面

模线样板法

计算机辅助几何设计 **CAGD** (Computer Aided Geometric Design)

8.1 曲线、曲面的基础知识

一.曲线和曲面的发展:

- 1963年, 波音(Boeing)公司的佛格森(Ferguson)将曲线曲面表示成参数矢量形式;
- 1964年, 麻省理工学院(MIT)的孔斯(Coons)用封闭曲线的四条边界定义一块曲面;
- 1964年, 舍恩伯格(Schoenberg)提出了参数样条曲线、曲面的定义;

- 1971年，法国雷诺(Renault)公司的贝塞尔(Bézier)发明了一种用控制多边形定义曲线和曲面的方法；
- 1972年，德布尔(de Boor)给出了B样条的标准计算方法；
- 1974年，通用汽车公司的戈登(Gordon)和里森费尔德(Riesenfeld)在B样条理论的基础上，提出了B样条曲线、曲面；
- 1975年，美国的佛斯普里尔(Versprill)提出了有理B样条方法；
- 80年代后期，美国的皮格尔(Piegl)和蒂勒(Tiller)将有理B样条发展成非均匀有理B样条(NURBS)方法；

二、曲线、曲面参数表示的基础知识

- ❖ 显示、隐式和参数表示;
- ❖ 参数曲线的定义及切矢量、曲率;
- ❖ 插值、逼近、拟合和光顺;
- ❖ 参数化
- ❖ 参数曲线的代数形式和几何形式;
- ❖ 调和函数;
- ❖ 曲线段的连续性定义;
- ❖ 参数曲面的基本概念

1. 显式、隐式和参数表示

曲线和曲面均有参数表示和非参数表示之分，在非参数表示中又分为显式表示和隐式表示。

➤显式表示

对于一条平面曲线，非参数方程的显式表示一般为 $y=f(x)$ 。在显式表示中，每一个 x 值只对应一个 y 值，所以用显式方程不能表示封闭或多值曲线；

➤隐式表示

隐式的非参数方程一般形式为： $f(x,y)=0$ ；如二阶隐式方程的一般式可写成：

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

通过定义不同的方程系数 a,b,c,d,e,f ，即可得到不同的圆锥曲线，如抛物线，双曲线和椭圆等。

➤ 显式表示和隐式表示存在着如下的问题：

- (1) 与坐标轴相关；
- (2) 会出现斜率为无穷大的情形(如垂线)；
- (3) 不便于计算机编程。

➤参数表示

在平面曲线的参数表示中，曲线上每一点的坐标表示成一个参数式。如用参数 t 表示，则平面曲线上每一点坐标的参数形式是：

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

平面曲线上一点坐标的矢量表示是： $p(t) = [x(t) \ y(t)]$

空间曲线上一点坐标的矢量表示是： $p(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]$

如用 $'$ 表示对参数的求导，则参数曲线的切矢量或导函数是：

$$p'(t) = [x'(t) \ y'(t)]$$

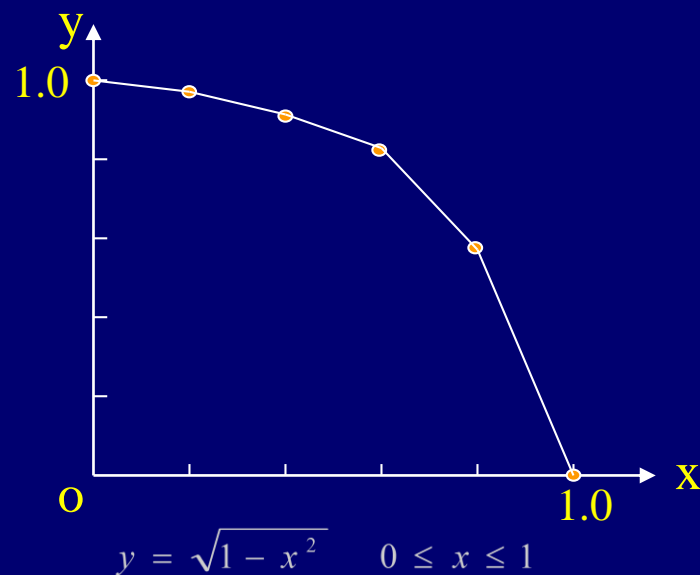
- 参数表示例子:
 - 直线

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t, \quad t \in [0,1]$$

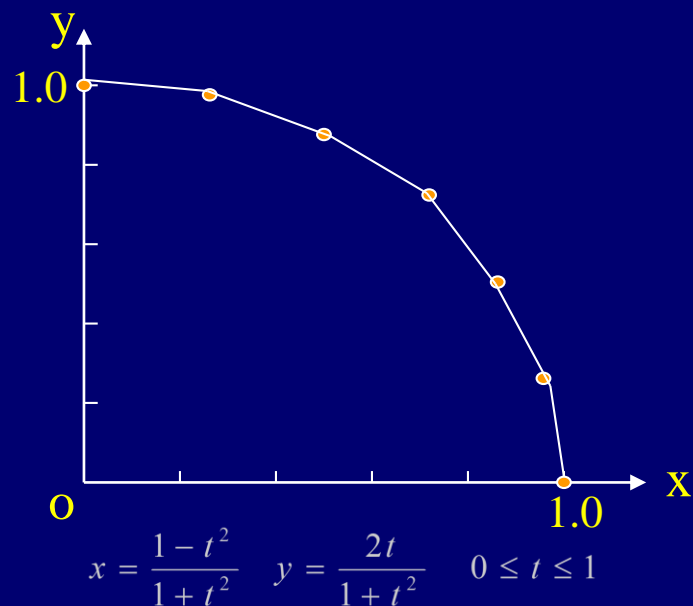
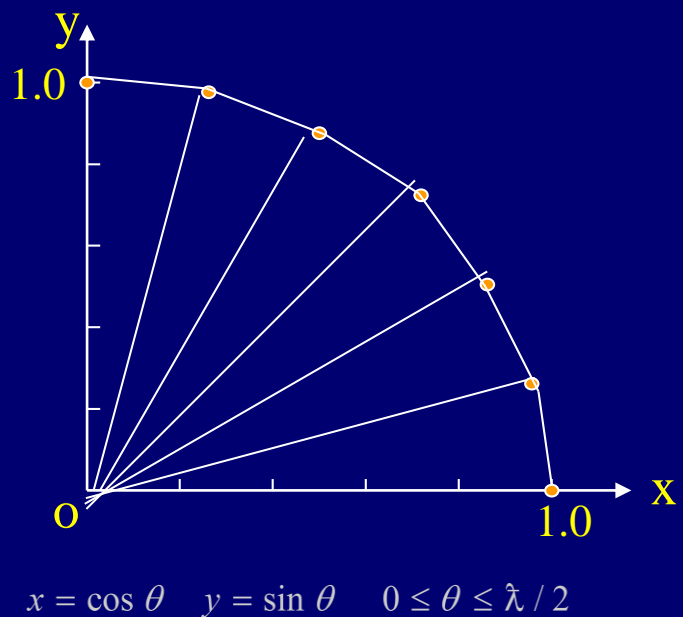
- 单位圆

$$P(t) = \left[\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right] \quad t \in [0,1]$$

■显示方式表示的圆弧



■参数方式表示的圆弧



■参数表示的优点

- 满足几何不变性的要求;
- 有更大的自由度来控制曲线、曲面的形状;
- 对曲线、曲面进行变换, 可对其参数方程直接进行几何变换;
- 便于处理斜率为无穷大的情形, 不会因此而中断计算;
- 变量分离的特点使我们可以用数学公式处理几何分量, 便于用户把低维空间中曲线、曲面扩展到高维空间去;
- 规格化的参数变量 $t \in [0, 1]$, 使其相应的几何分量是有界的, 而不必用另外的参数去定义边界;
- 易于用矢量和矩阵表示几何分量, 简化了计算;

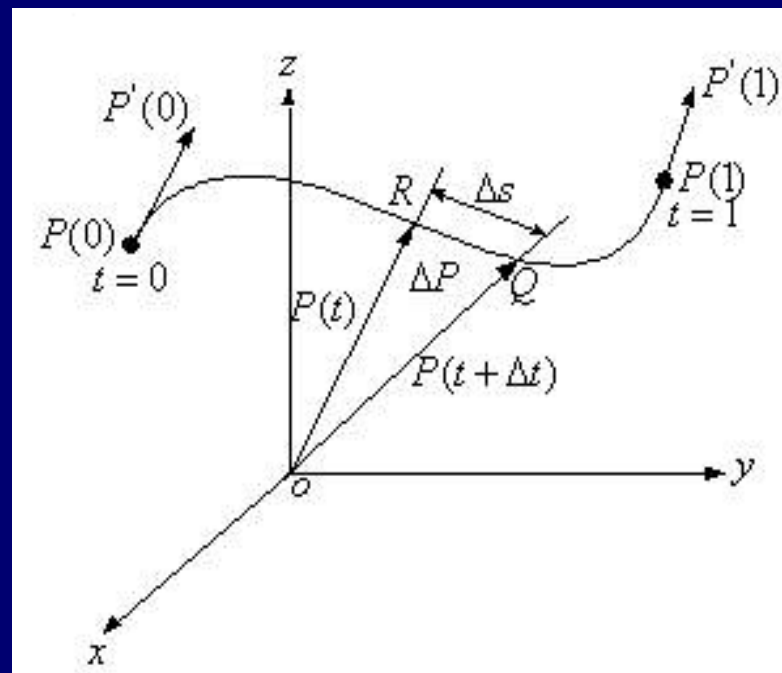
2. 参数曲线的定义及切矢量、曲率

- 一条用参数表示的三维曲线是一个有界的点集，可写成一个带参数的、连续的、单值的数学函数，其形式为：

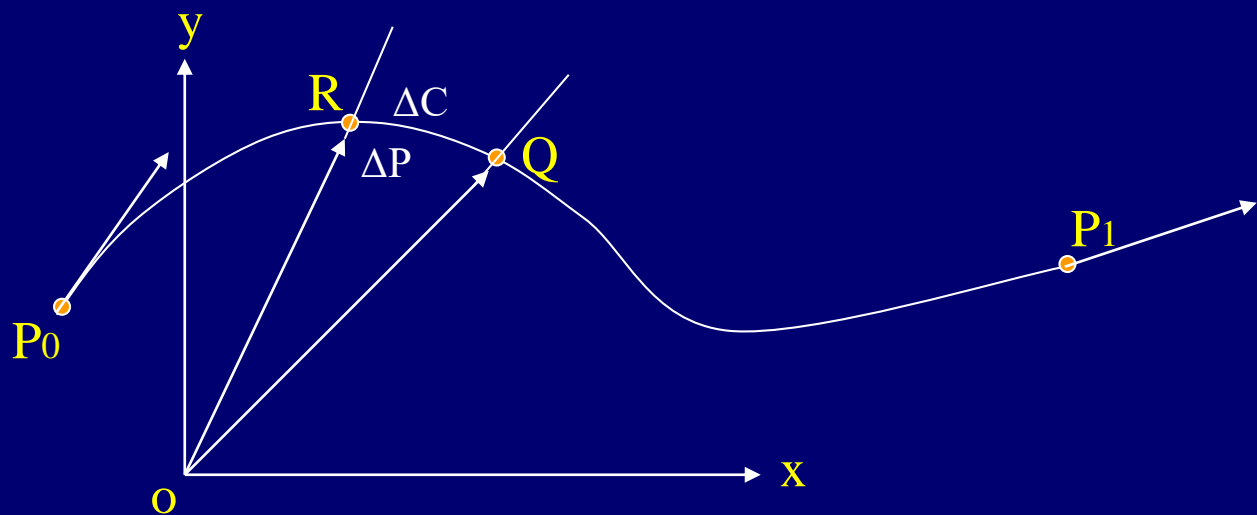
$$x=x(t), y=y(t), z=z(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

- **位置矢量：**该曲线的端点在 $t=0$ 和 $t=1$ 处，曲线上任何一点的位置矢量可用矢量 $p(t)$ 表示：

$$p(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$



➤ 切矢量:



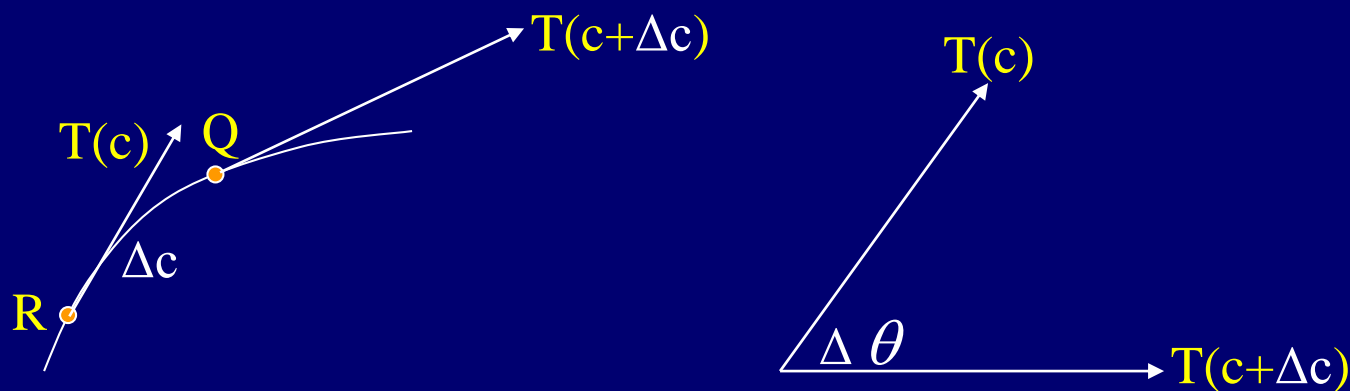
➤ 选择弧长 c 作为参数, 则 $T = \frac{dP}{dc} = \lim_{\Delta c \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta C}$ 是单位切矢量;

➤ 根据弧长微分公式, 有 $(dc)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$

$$(dc/dt)^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2 = |P'(t)|^2$$

➤ 所以, 单位切矢量为: $\frac{dP}{dc} = \frac{dP}{dt} \cdot \frac{dt}{dc} = \frac{P'(t)}{|P'(t)|}$

➤ 曲率:



- 设以弧长 c 为参数，弧RQ的弯曲程度一方面与 $\Delta\theta$ 的大小有关，一方面又与弧长 Δc 有关；
- 用 $\Delta\theta$ 与 Δc 比的绝对值 $|\Delta\theta / \Delta c|$ 来度量弧RQ的弯曲程度，称为弧RQ的平均曲率；
- 当Q点趋近于R点时，曲线在R点的曲率为：

$$k = \lim_{\Delta c \rightarrow 0} |\Delta\theta / \Delta c| = |p'(c)|$$

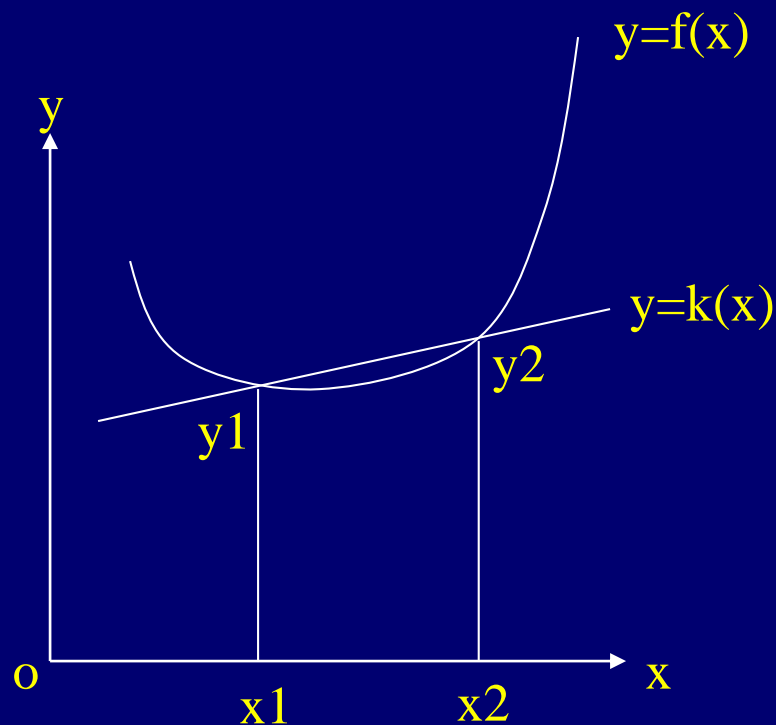
- 曲率半径 $\rho = \frac{1}{k}$

3. 插值、逼近、拟合和光顺

(1) 插值

插值是函数逼近的重要方法。给定函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 中互异的 n 个点 $f(x_i)$ $i=1,2,\dots,n$ ，基于这个列表数据，寻找某一个函数 $k(x)$ 去逼近 $f(x)$ 。若要求 $k(x)$ 在 x_i 处与 $f(x_i)$ 相等，就称这样的函数逼近问题为插值问题，称 $k(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数， x_i 称为插值节点。也就是说， $k(x)$ 在 n 个插值节点 x_i 处与 $f(x_i)$ 相等，而在别处就用 $k(x)$ 近似的代替 $f(x)$ 。在曲线曲面中最常用到的是线性插值和抛物线插值。

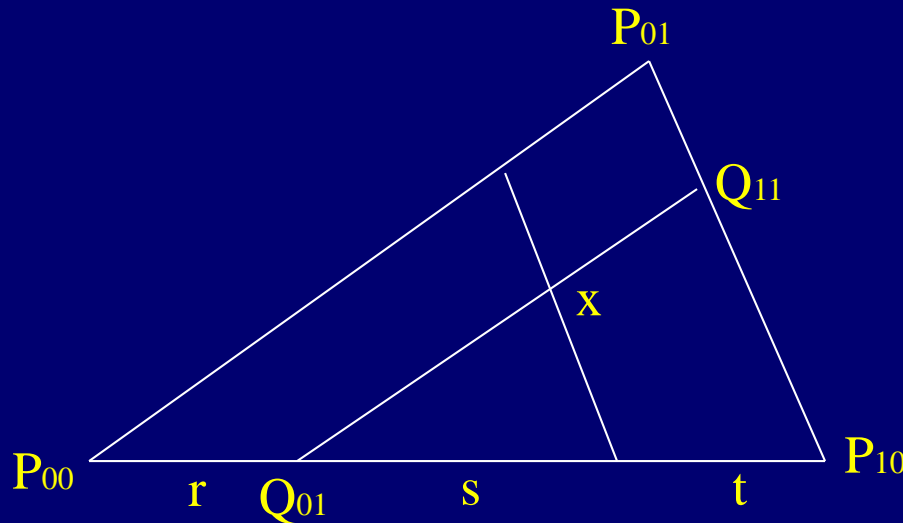
- 线性插值



1) 给定函数 $f(x)$ 在两个不同点 x_1 和 x_2 的值, $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, 现要求用一线性函数: $y=k(x)=ax+b$, 近似替代 $y=f(x)$ 。

2) 选择线性函数的系数 a, b , 使得 $k(x_1)=y_1$, $k(x_2)=y_2$, 称 $k(x)$ 为 $f(x)$ 的线性插值函数;

$$k(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2$$

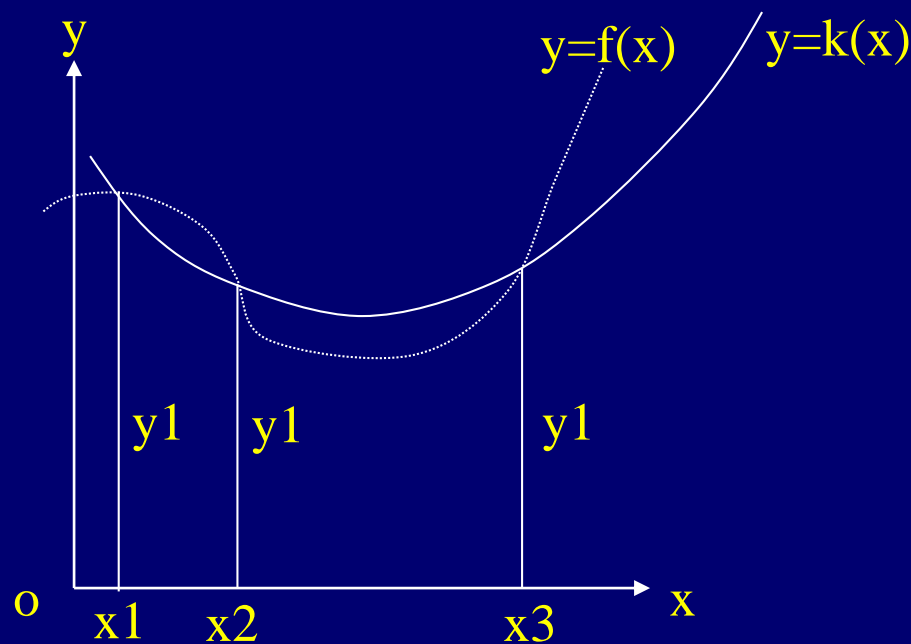


$$Q_{01} = P_{00}(1-r) + P_{10}r$$

$$Q_{11} = P_{01}(1-r) + P_{10}r$$

$$x(r, s, t) = Q_{01}t/(s+t) + Q_{11}s/(s+t) = P_{10}r + P_{01}s + P_{00}t$$

- 抛物线插值



抛物线插值又称为二次插值。设已知 $f(x)$ 在三个互异点 x_1, x_2, x_3 的函数值为 y_1, y_2, y_3 ，现构造函数

$$k(x) = ax^2 + bx + c$$

使 $k(x)$ 在节点 x_i 处与 $f(x)$ 相等。根据 x_1, x_2, x_3 求出 a, b, c ，便构造了 $k(x)$ 插值函数。

(2) 逼近

- 当型值点太多时，构造插值函数使其通过所有的型值点是相当困难的；同时，也没有必要寻找一个插值函数通过所有的型值点；
- 解决的办法通常是寻找一个次数较低的函数，从某种意义上最佳的逼近这些型值点；
- 逼近的方法有很多，最常采用的有最小二乘法；

最小二乘法解决逼近问题

- 设已知型值点为 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$ ，现构造一个 $m (m < n-1)$ 次多项式函数 $y=F(x)$ 逼近这些型值点；
- 逼近的好坏可用各点偏差的加权平方和衡量：

$$\varphi = \sum_{k=1}^n d_k [F(x_k) - y_k]^2$$

- 令 $F(x)$ 为一个 m 次多项式， $F(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$ 使得偏差平方和

$$\varphi(a_j) = \sum_{k=1}^n d_k \left[\sum_{j=0}^m a_j x_k^j - y_k \right]^2$$

达到最小；

- 根据求极值问题的方法可知，使 $\varphi(a_j)$ 达到极小的 a_j ($j=0,1,\dots,m$)必须满足下列方程组：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 2 \sum_{k=1}^n d_k \left[\sum_{j=0}^m a_j x_k^j - y_k \right] x_k^i = 0 \quad i = 0, 1, \dots, m$$

- 若令 $\sum_{k=1}^n d_k x_k^i = S_i$, $\sum_{k=1}^n d_k y_k x_k^i = T_i$; 则可得方程组：

$$\sum_{j=0}^m a_j S_{i+j} = T_i$$

这里有 $m+1$ 个方程，可以解出 $m+1$ 个系数未知数 a_0, a_1, \dots, a_m ，代入定义即可求出多项式 $F(x)$ 逼近已知的 n 个型值点；

(3) 光顺

- 光顺通俗的几何含义是曲线的拐点不能太多，曲线拐来拐去，就会不顺眼；
- 对于平面曲线，相对光顺的条件是：
 - ❖ 曲线具有二阶几何连续性 G^2 ；
 - ❖ 不存在多余拐点；
 - ❖ 曲线的曲率变化较小；
- 注：
 - ❖ 拐点：曲线由增变减或由减变增的转折点；

(4) 拟合

- 拟合不象插值、逼近、光顺那样有完整的数学和公式定义；
- 拟合是指在曲线、曲面的设计过程中，用插值、逼近的办法，使生成的曲线、曲面达到某些设计的要求，如使曲线通过型值点、控制点，使曲线“光滑”，“光顺”等；

4. 参数化

- 过三点 P_0 、 P_1 和 P_2 构造参数表示的插值多项式可以有无数条，这是因为对应的参数 t ，在 $[0, 1]$ 区间中有无数种取法。即 P_0 、 P_1 和 P_2 可对应不同的参数值，其中每个参数值称为节点(*knot*)。
- 对于一条插值曲线，型值点 P_0, P_1, \dots, P_n 与其参数域 $t \in [t_0, t_n]$ 内的节点之间有一种对应关系。对于一组有序的型值点，所确定一种参数分割，称之这组型值点的参数化。

参数化方法

均匀参数化(等距参数化)

节点在参数轴上呈等距分布, $t_{i+1} = t_i + \text{常数}$

累加弦长参数化

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_i = t_{i-1} + |\Delta P_{i-1}|, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad \Delta P_i = P_{i+1} - P_i$$

这种参数法如实反映了型值点按弦长的分布情况, 能够克服型值点按弦长分布不均匀的情况下采用均匀参数化所出现的问题。

5. 曲线段的连续性定义

- 曲线间连接的光滑度的度量有两种：
 - **函数的可微性**：组合参数曲线在连接处具有直到 n 阶连续导矢，即 n 阶连续可微，这类光滑度称之为 C^n 或 **n 阶参数连续性**。
 - **几何连续性**：组合曲线在连接处满足某一组约束条件，称为具有 **n 阶几何连续性**，简记为 G^n ；
- 曲线光滑度的两种方法并不矛盾，参数连续性 C^n 包含在几何连续性 G^n 当中；

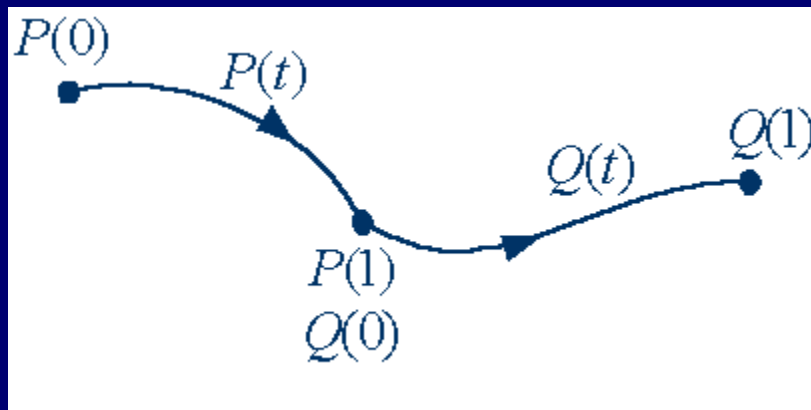
曲线段的连续性

➤ 设有两条曲线 $P(t)$ 和 $Q(t)$, $t \in [0,1]$

- 若要求在结合处达到 G^0 连续或 C^0 连续, 即两曲线在结合处位置连续: $P(1) = Q(0)$
- 若要求在结合处达到 G^1 连续, 就是说两条曲线在结合处在满足 G^0 连续的条件下, 并有公共的切矢量 $Q'(0) = \alpha P'(1)$ ($\alpha > 0$)
- 当 $\alpha = 1$ 时, G^1 连续就成为 C^1 连续;

曲线段的连续性

- 若P和Q在连接处已有 C^0C^1 连续性且曲率的大小和方向均相等，及 $P'(1) = Q'(0)$ ，则P和Q在连接处具有 C^2 连续；推广之，若 $P^n(1) = Q^n(0)$ ，则P和Q在连接处具有 C^n 连续；
- 若P和Q在连接处已有 C^0C^1 连续性且曲率的方向相等、大小不相等，则说P和Q在连接处具有 G^2 连续；



曲线段的连续性

我们已经看到, C^1 连续保证 G^1 连续, C^2 连续能保证 G^2 连续, 但反过来不行。也就是说 C^n 连续的条件比 G^n 连续的条件要苛刻。

曲线生成1：多项式插值及参数化

- 1 线性插值
- 2 抛物线插值
- 3 Lagrange插值
- 4 Lagrange参数插值曲线

曲线生成1：样条函数的概念

- 1 一般样条函数的定义
- 2 三次样条函数
- 3 二次样条函数

8.2 Bezier曲线

Bezier曲线的定义

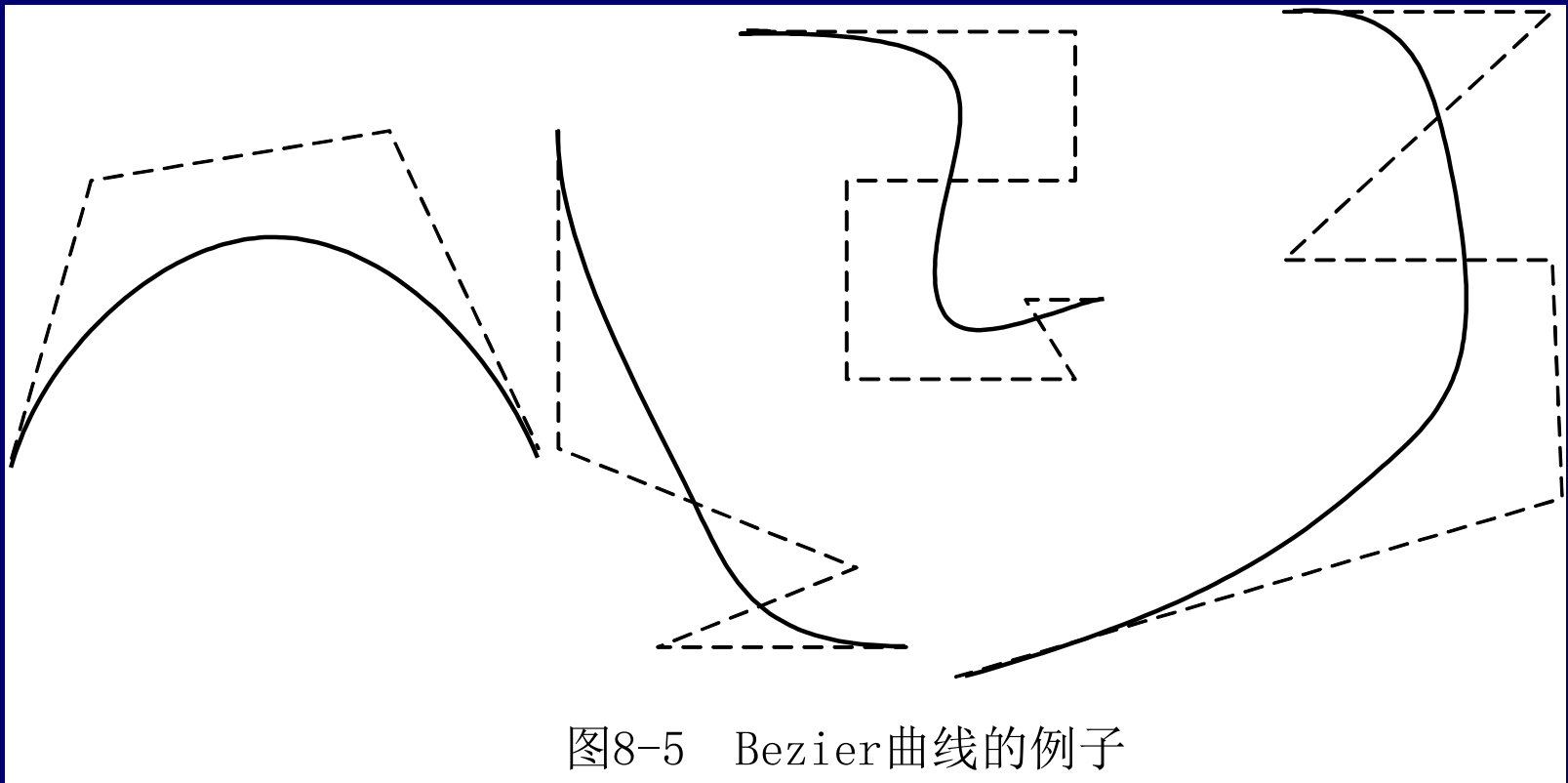


图8-5 Bezier曲线的例子

定义:

$$p(t) = \sum_{k=0}^n P_k BEN_{k,n}(t) \quad t \in [0,1]$$

Bernstein基函数具有如下形式:

$$BEN_{k,n}(t) = \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k} = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

注意: 当 $k=0$, $t=0$ 时,
 $t^k=1$, $k!=1$ 。

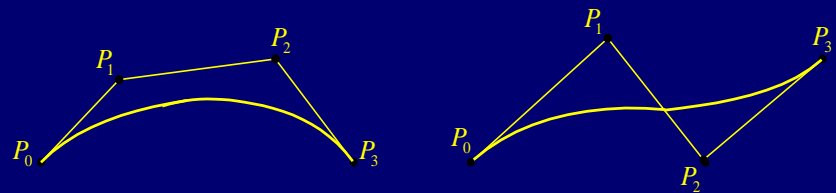


图3.1.8 三次Bezier曲线

1. Bernstein基函数的性质

(1) 正性

$$B_{i,n}(t) = \begin{cases} = 0 & t = 0, 1 \\ > 0 & t \in (0, 1), i = 1, 2, \dots, n-1; \end{cases}$$

(2) 端点性质

$$B_{i,n}(0) = \begin{cases} 1 & (i = 0) \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

$$B_{i,n}(1) = \begin{cases} 1 & (i = n) \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

(3) 权性

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \equiv 1, t \in (0, 1)$$

由二项式定理可知:

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = [(1-t) + t]^n \equiv 1$$

(4) 对称性

$$B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(t)$$

因为 $B_{n-i,n}(t) = C_n^{n-i} [1-(1-t)]^{n-(n-i)} \cdot (1-t)^{n-i} = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = B_{i,n}(1-t)$

(5) 递推性。

$$B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t) \quad (i=0,1,\dots,n)$$

即高一次的Bernstein基函数可由两个低一次的Bernstein调和函数线性组合而成。

因为,
$$\begin{aligned} B_{i,n}(t) &= C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = (C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1}) t^i (1-t)^{n-i} \\ &= (1-t) C_{n-1}^i t^i (1-t)^{(n-1)-i} + t C_{n-1}^{i-1} t^{i-1} (1-t)^{(n-1)-(i-1)} \\ &= (1-t) B_{i,n-1}(t) + t B_{i-1,n-1}(t) \end{aligned}$$

(6) 导函数 $B'_{i,n}(t) = n[B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)], i = 0, 1, \dots, n;$

(7) 最大值。 $B_{i,n}(t)$ 在 $t = \frac{i}{n}$ 处达到最大值。

(8) 升阶公式

$$(1-t)B_{i,n}(t) = (1 - \frac{i}{n+1})B_{i,n+1}(t)$$

$$tB_{i,n}(t) = \frac{i+1}{n+1}B_{i+1,n+1}(t)$$

$$B_{i,n}(t) = (1 - \frac{i}{n+1})B_{i,n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1}B_{i+1,n+1}(t)$$

(9) 积分

$$\int_0^1 B_{i,n}(t) dt = \frac{1}{n+1}$$

2. Bezier曲线的性质

(1) 端点性质

a.) 曲线端点位置矢量

由Bernstein基函数的端点性质可以推得，当 $t=0$ 时， $P(0)=P_0$ ；当 $t=1$ 时， $P(1)=P_n$ 。由此可见，Bezier曲线的起点、终点与相应的特征多边形的起点、终点重合。

b.) 切矢量

因为，
$$P'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i B'_{i,n}(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (P_i - P_{i+1}) B_{i,n-1}(t)$$
所以，当 $t=0$ 时， $P'(0)=n(P_1-P_0)$ ，当 $t=1$ 时， $P'(1)=n(P_{n-1}-P_n)$ ，这说明Bezier曲线的起点和终点处的切线方向和特征多边形的第一条边及最后一条边的走向一致。

2) 对称性。由控制顶点 $P_i^* = P_{n-i}, (i=0,1,\dots,n)$, 构造出的新Bezier曲线, 与原Bezier曲线形状相同, 走向相反。因为:

$$C^*(t) = \sum_{i=0}^n P_i^* B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n P_{n-i} B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n P_{n-i} B_{n-i,n}(1-t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(1-t), \quad t \in [0,1]$$

这个性质说明Bezier曲线在起点处有什么几何性质, 在终点处也有相同的性质。

(3) 凸包性

由于 $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \equiv 1$ ，且 $0 \leq B_{i,n}(t) \leq 1 (0 \leq t \leq 1, i=0,1,\dots,n)$ ，这一结果说明当 t 在 $[0, 1]$ 区间变化时，对某一个 t 值， $P(t)$ 是特征多边形各顶点的加权平均，权因子依次是 $B_{i,n}(t)$ 。在几何图形上，意味着 Bezier 曲线 $P(t)$ 在 $t \in [0,1]$ 中各点是控制点 P_i 的凸线性组合，即曲线落在 P_i 构成的凸包之中，如图 3.1.9 所示。

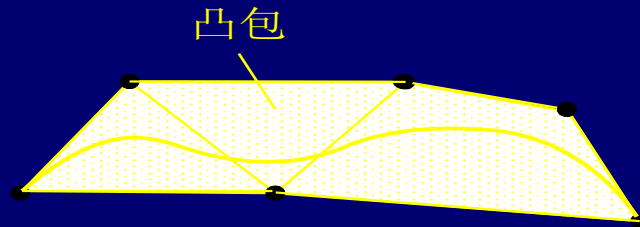


图3.1.9 Bezier曲线的凸包性

(4) 几何不变性。这是指某些几何特性不随坐标变换而变化的特性。Bezier曲线位置与形状与其特征多边形顶点 $P_i (i=0,1,\dots,n)$ 的位置有关，它不依赖坐标系的选择，即有：

$$\sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}\left(\frac{u-a}{b-a}\right) \quad (\text{变量}u\text{是}t\text{的置换})$$

(5) 变差缩减性。若Bezier曲线的特征多边形 $P_0P_1\cdots P_n$ 是一个平面图形，则平面内任意直线与 $C(t)$ 的交点个数不多于该直线与其特征多边形的交点个数，这一性质叫变差缩减性质。此性质反映了Bezier曲线比其特征多边形的波动还小，也就是说Bezier曲线比特征多边形的折线更光滑。

(6) 几何不变性

(7) 控制顶点变化对曲线形状的影响

8.1.2 二、三次Bezier曲线

1. 一次Bezier曲线(n=1)

$$p(t) = \sum_{k=0}^1 P_k BEN_{k,1}(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$

$$t \in [0,1]$$

2. 二次Bezier曲线(n=2)

$$p(t) = \sum_{k=0}^2 P_k BEN_{k,2}(t)$$

$$= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \quad t \in [0,1]$$

$$= (P_2 - 2P_1 + P_0)t^2 + 2(P_1 - P_0)t + P_0$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

- (1) 二次Bezier曲线的作图
- (2) 包络形成的二次Bezier曲线
- (3) 二次Bezier曲线的拼接
- (4) 插值二次Bezier曲线

3. 三次Bezier曲线(n=3)

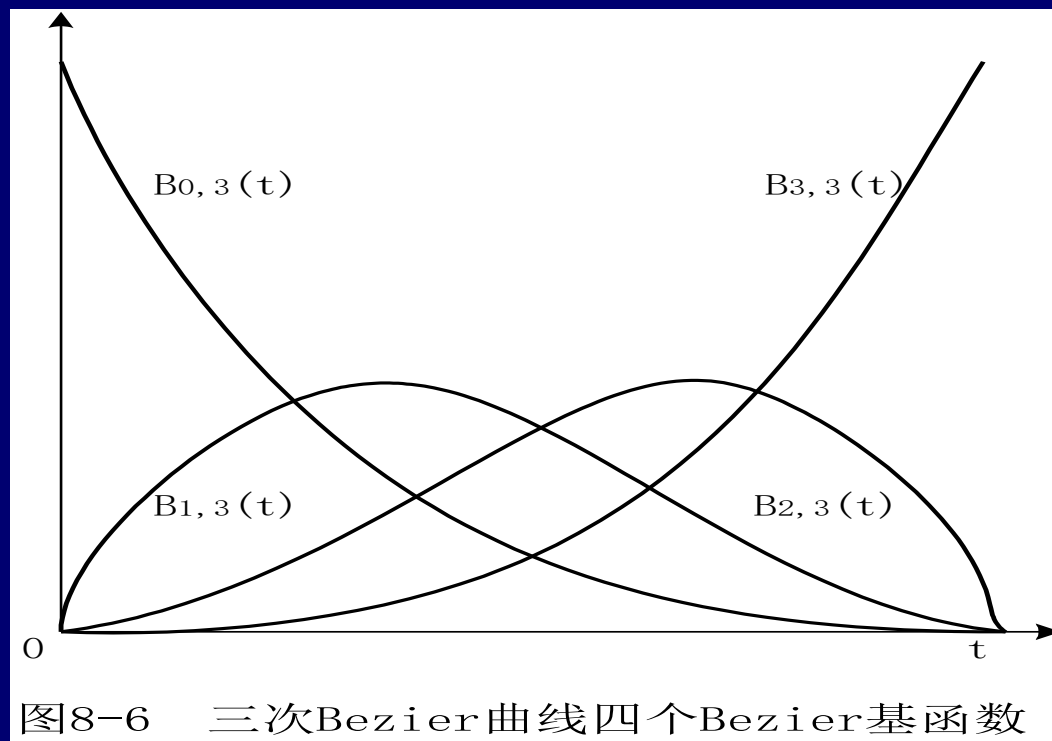
$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{k=0}^3 P_k BEN_{k,3}(t) \\ &= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3 \quad t \in [0,1] \\ &= BEN_{0,3}(t) P_0 + BEN_{1,3}(t) P_1 + BEN_{2,3}(t) P_2 + BEN_{3,3}(t) P_3 \end{aligned}$$

$$BEN_{0,3}(t) = (1-t)^3$$

$$BEN_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2$$

$$BEN_{2,3}(t) = 3t^2(1-t)$$

$$BEN_{3,3}(t) = t^3$$



4. 插值三次Bezier曲线($n=3$)

8.2.3 n 次Bezier曲线应用及变型

- 1、 n 次Bezier曲线的作图算法
- 2、 n 次Bezier曲线的Horner算法
- 3、 插值 n 次Bezier曲线
- 4、 有理 n 次Bezier曲线

8.3 二、三次参数样条曲线

- 6.3.1 参数连续和几何连续

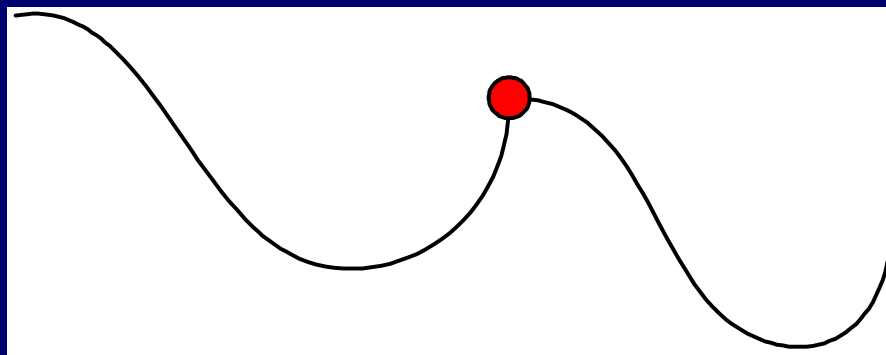
假定参数曲线段 p_i 以参数形式进行描述:

$$p_i = p_i(t) \quad t \in [t_{i0}, t_{i1}]$$

- 参数连续性
- 几何连续性

0阶参数连续性，记作 C^0 连续性，是指曲线的几何位置连接，即

$$p_i(t_{i1}) = p_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$

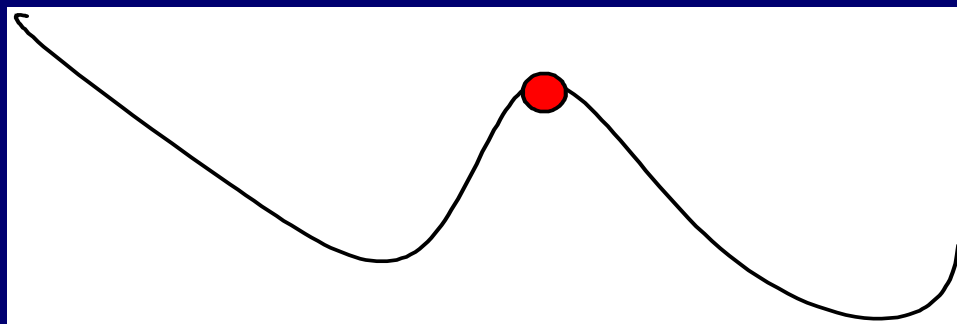


1阶参数连续性

记作 C^1 连续性，指代表两个相邻曲线段的方程在相交点处有相同的一阶导数：

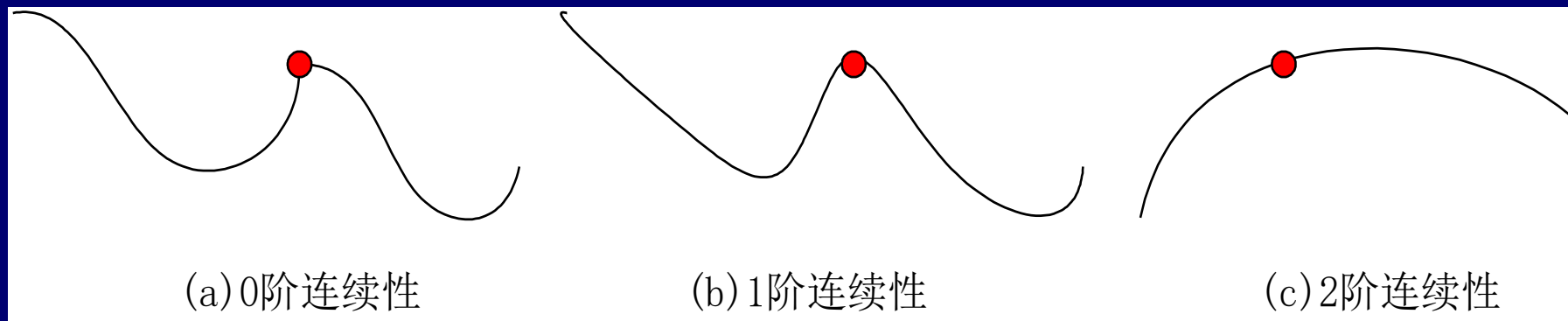
$$p_i(t_{i1}) = p_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$

$$\text{且 } p'_i(t_{i1}) = p'_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$



2阶参数连续性,

记作 C^2 连续性, 指两个相邻曲线段的方程在相交点处具有相同的一阶和二阶导数。



2.几何连续性

0阶几何连续性，记作 G^0 连续性，与0阶参数连续性的定义相同，满足：

$$p_i(t_{i1}) = p_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$

1阶几何连续性，记作 G^1 连续性，指一阶导数在相邻段的交点处成比例

2阶几何连续性，记作 G^2 连续性，指相邻曲线段在交点处其一阶和二阶导数均成比例。

8.3.2 二次参数样条曲线

- 1 插值二次参数曲线定义
- 2 累加弦长二次参数样条曲线
- 3 统一参数二次样条曲线表示

8.3.3 三次参数样条曲线

- 1 插值三次参数曲线定义
- 2 累加弦长三次参数样条曲线
- 3 统一参数三次样条曲线表示
- 4 三次张力参数样条曲线

8.4 B样条曲线

Bezier曲线的不足:

一是控制多边形的顶点个数决定了Bezier曲线的阶次

二是不能作局部修改

8.4.1 B样条曲线的定义与性质

定义:

$$p(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_{k,m}(t)$$

de Boor点、B样条控制多边形、B样条基函数

$$B_{k,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{若 } t_k \leq t < t_{k+1} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$B_{k,m}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+m-1} - t_k} B_{k,m-1}(t) + \frac{t_{k+m} - t}{t_{k+m} - t_{k+1}} B_{k+1,m-1}(t)$$

- B样条基函数的性质

- (1) 有界正性

- (2) 权性

- (3) 对称性

- (4) 递推性

B样条曲线的性质

- 1) 局部性

B样条的基函数是一个分段函数，其重要特征是在参数变化范围内，每个基函数在 t_k 到 t_{k+m} 的子区间内函数值不为零，在其余区间内均为零，通常也将该特征称为局部支柱性。

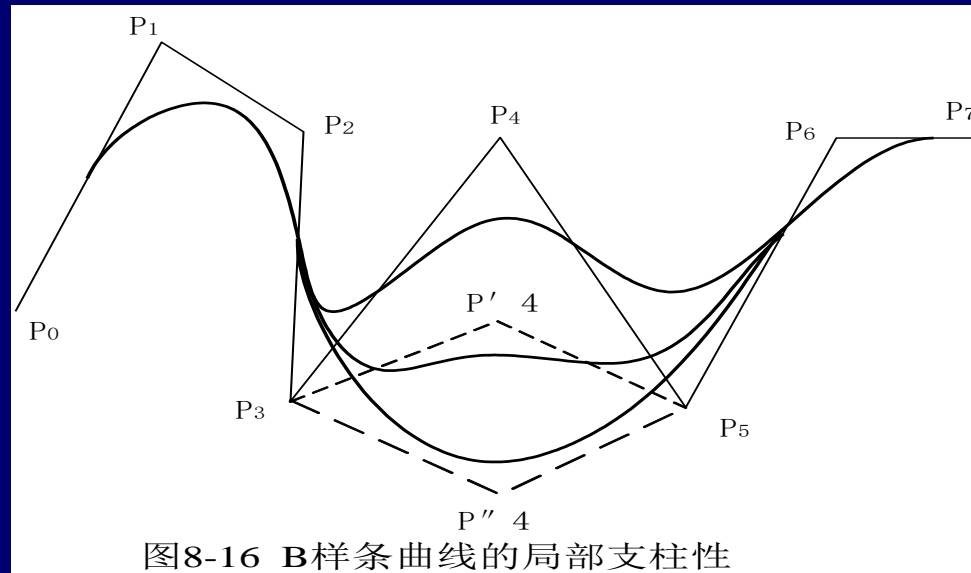
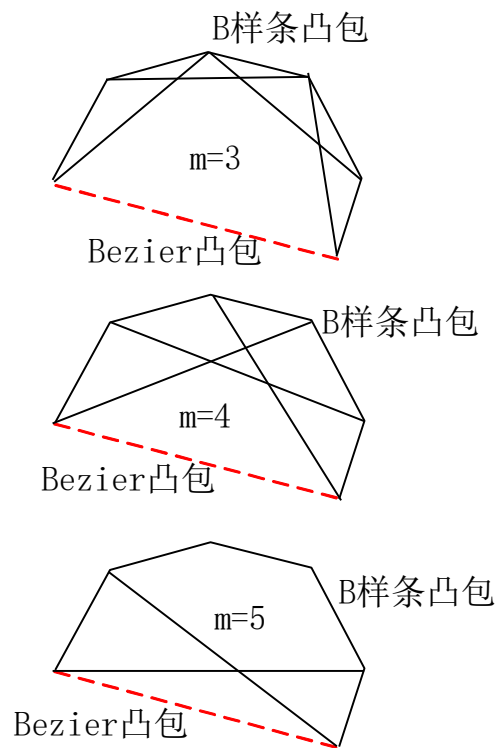


图8-16 B样条曲线的局部支柱性

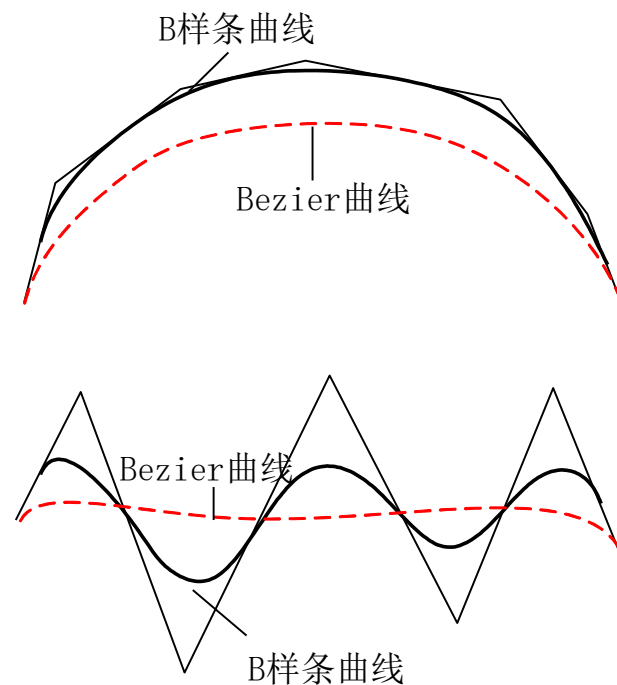
2) 凸包性

$$\sum_{k=0}^n B_{k,m}(t) \equiv 1 \quad t \in [t_{m-1}, t_{n+1}]$$

B样条的凸组合性和**B**样条基函数的数值均大于或等于0保证了**B**样条曲线的凸包性，即**B**样条曲线必处在控制多边形所形成的凸包之内。



(a) B样条曲线和Bezier曲线的凸包比较



(b) B样条曲线和Bezier曲线的比较

图8-17 B样条曲线与Bezier曲线的凸包性比较

3) 连续性

- 若一节点矢量中节点均不相同，则 m 阶（ $m-1$ 次）B样条曲线在节点处为 $m-2$ 阶连续。
- B样条曲线基函数的次数与控制顶点个数无关。
- 重节点问题

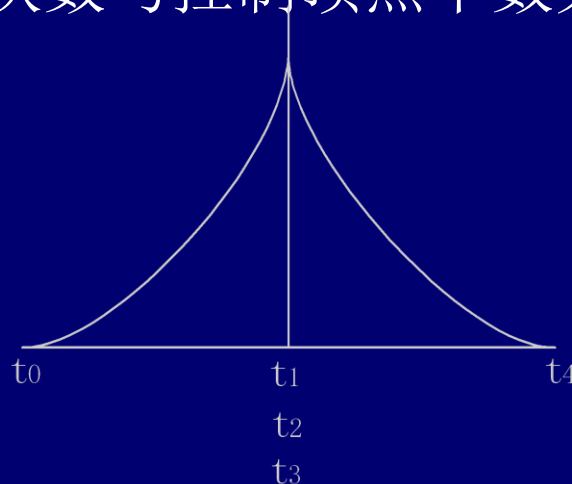


图8-18 具有重节点的三次B样条

- 4) 几何不变性
- 5) 对称性
- 6) 递推性
- 7) 变差缩减性（保凸性）

8.4.2 二次和三次B样条曲线

- 1 二次B样条曲线
- 2 三次B样条曲线
- 3 二次和三次B样条曲线的应用

8.4.3 非均匀B样条曲线

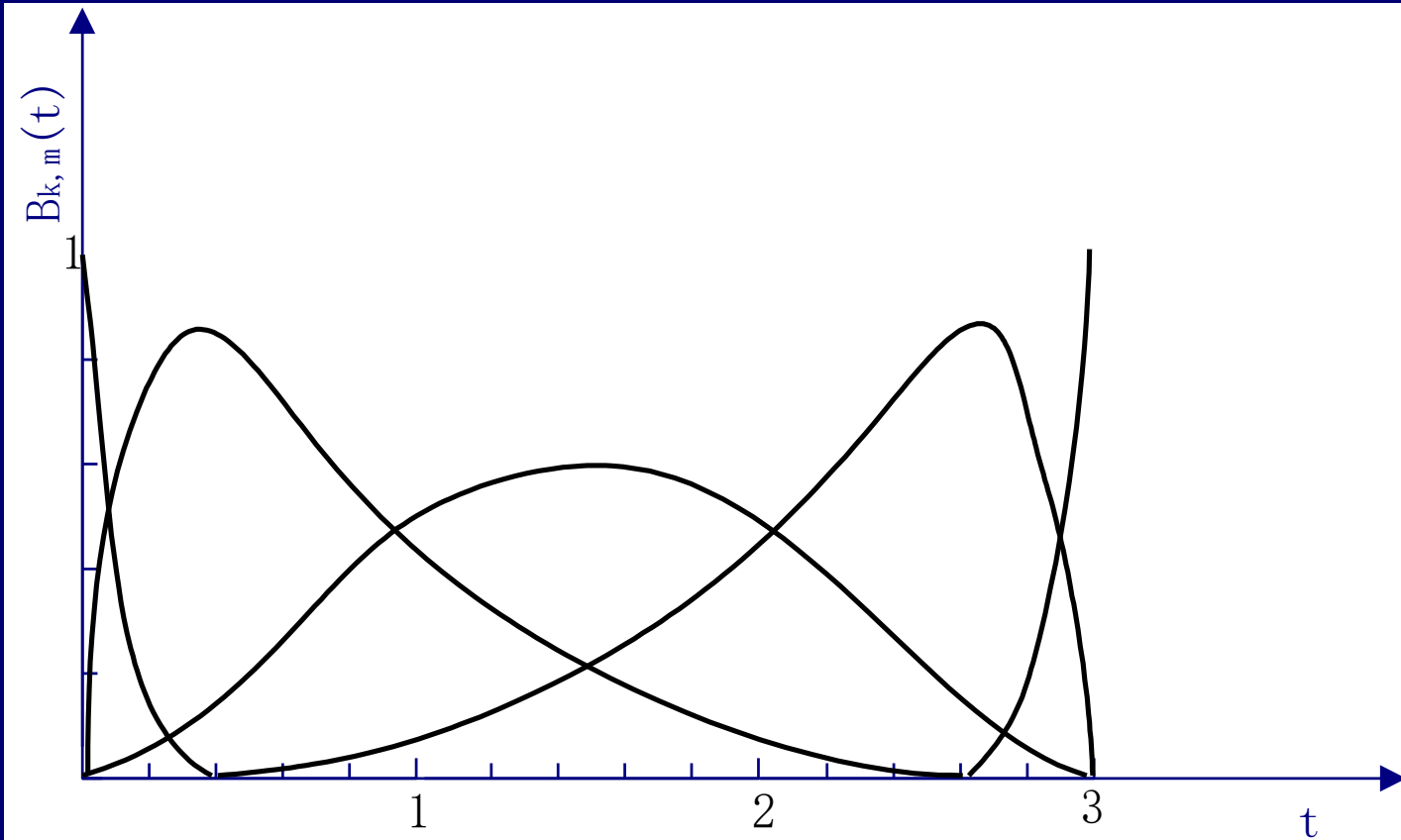


图8-15 非均匀B样条曲线的基函数

8.4.4 参数曲线段的一般递推公式

$$\begin{cases} D_{i,0}(t) = P_i \\ D_{i,l}(t) = \lambda_{i,l}(t)D_{i,l-1}(t) + \mu_{i,l}(t)D_{i+1,l-1}(t) \end{cases}$$
$$(t \in [a, b], b > a, i = 0, 1, \dots, n-1; l = 1, 2, \dots, n)$$

$D_{i,l}(t)$ 为n次递归曲线 .

8.5 Beizer曲面

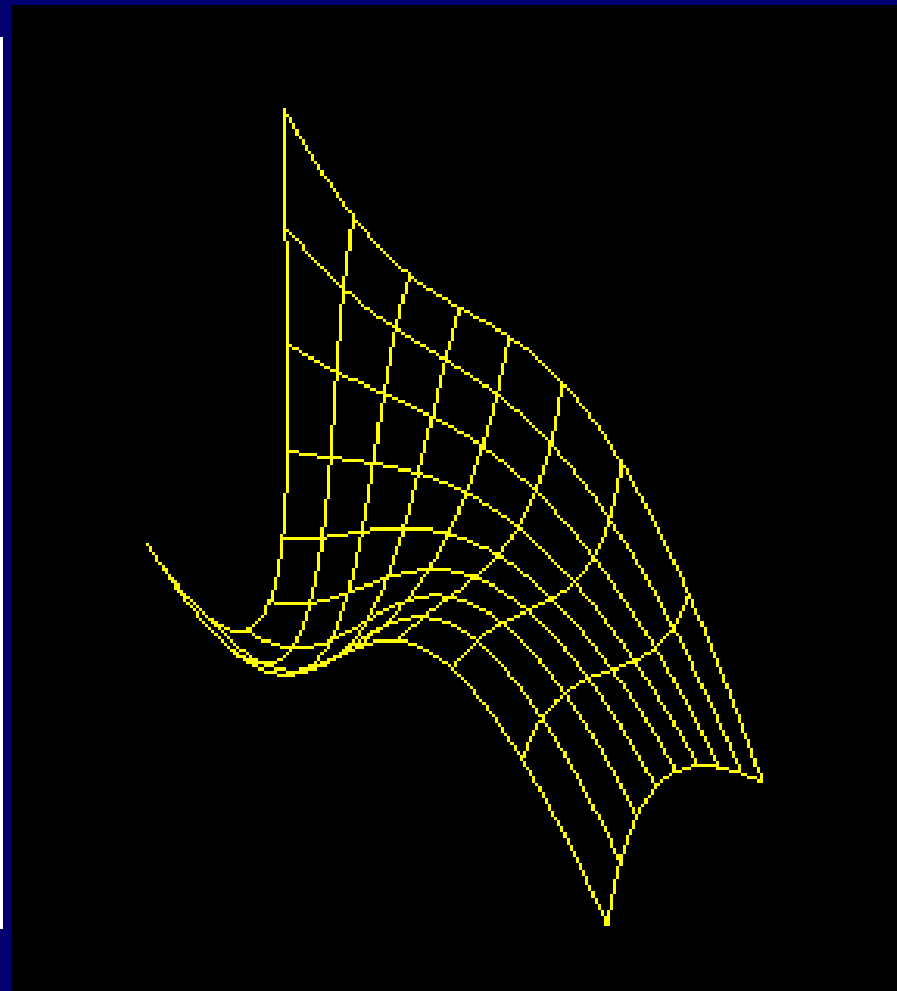
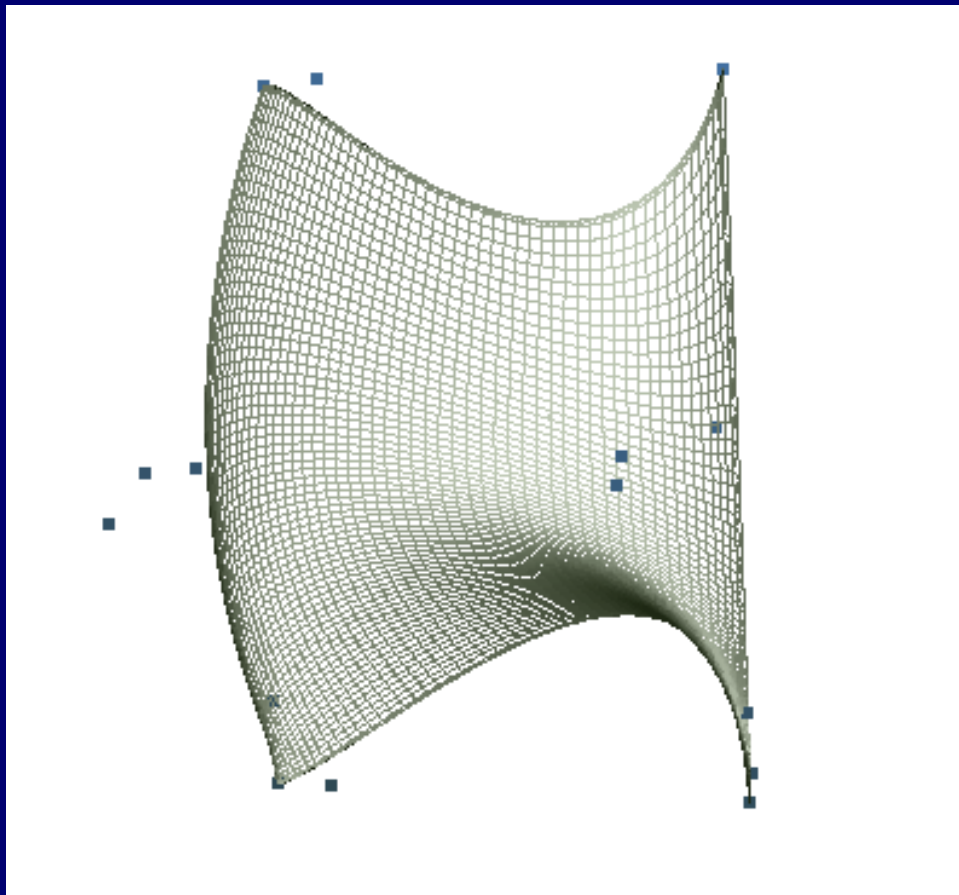
8.5.1 矩形域上的Bezier曲面

定义:
$$p(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{i,j} BEN_{i,m}(u) BEN_{j,n}(v)$$
$$(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

- $BEN_{i,m}(u)$ 与 $BEN_{j,n}(v)$ 是**Bernstein**基函数:

$$BEN_{i,m}(u) = C_m^i \cdot u^i \cdot (1-u)^{m-i}$$

$$BEN_{j,n}(v) = C_n^j \cdot v^j \cdot (1-v)^{n-j}$$



1. 双线性Bezier曲面($m=n=1$)

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 P_{i,j} BEN_{i,1}(u) BEN_{j,1}(v)$$

$$(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

$$\begin{aligned} p(u, v) = & (1-u)(1-v)P_{0,0} + (1-u)vP_{0,1} \\ & + u(1-v)P_{1,0} + uvP_{1,1} \end{aligned}$$

- 2. 双二次Bezier曲面($m=n=2$)

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 P_{i,j} BEN_{i,2}(u) BEN_{j,2}(v)$$

$$(u, v) \in [0,1] \times [0,1]$$

- 3. 双三次Bezier曲面($m=n=3$)

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{i,j} BEN_{i,3}(u) BEN_{j,3}(v)$$

$$(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

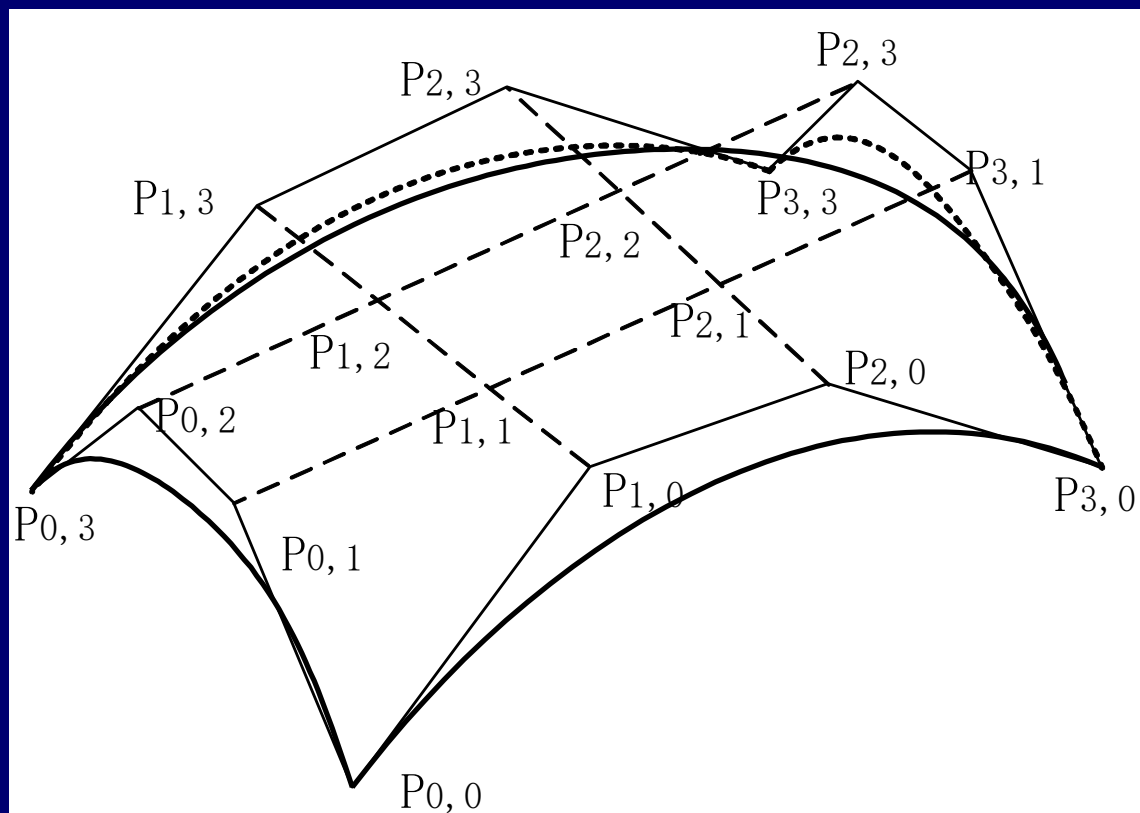


图8-9 双三次Bezier曲面及其控制网格

$$p(u, v) = UM_{be}PM_{be}^TV^T$$

• 其中：

$$U = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{be} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{bmatrix}$$

性质:

- 1) 控制网格的四个角点正好是Bezier曲面的四个角点

$$p(0,0) = P_{0,0}; \quad p(1,0) = P_{m,0};$$

$$p(0,1) = P_{0,n}; \quad p(1,1) = P_{m,n}$$

- 2) 控制网格最外一圈顶点定义Bezier曲面的四条边界, 这四条边界均为Bezier曲线。

3) 几何不变性

4) 移动一个顶点 $P_{i,j}$, 将对曲面上参数为 $u = i/m$,
 $v = j/n$ 的那点 $p(i/m, j/n)$ 处发生最大的影响

5) 对称性

6) 凸包性

8.5.2 三角域上的Bezier曲面

与上一节定义在矩形域上的Bezier曲面片不同，本节介绍的三边Bezier曲面片是定义在三边形域上的，如图3.1.17所示，为了便于区分，我们把上一节介绍的Bezier曲面片称为四边Bezier曲面片。三边曲面片能够较好地适应不规则与散乱数据的几何造型及适合有限元分析中的三边元素的需要。

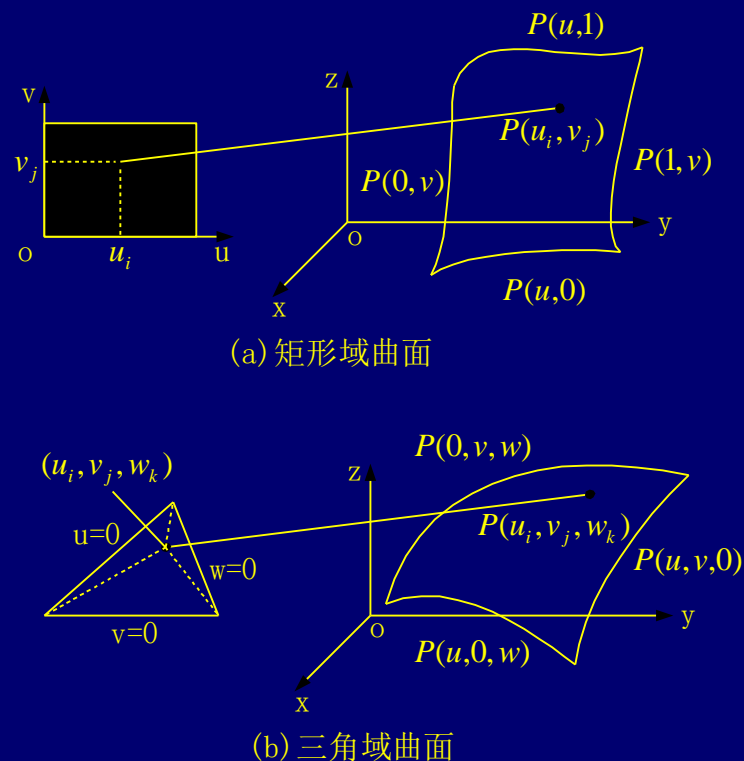


图3.1.17

1、三角域上的Bernstein基

单变量的n次的Bernstein基 $B_{i,n}(t)(i = 0, 1, \dots, n)$ 由 $[t + (1-t)]^n$ 的二项式展开各项组成。双变量张量积的Bernstein基由两个单变量的Bernstein基各取其一的乘积组成。而定义在三角域上的双变量n次的Bernstein基由 $(u + v + w)^n$ 的展开式各项组成。

$$(u + v + w)^n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} B_{i,n,k}(u, v, w)$$

Bernstein基函数:

$$B_{i,j,k}(u,v,w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \quad u,v,w \in [0,1]$$

其中 $i+j+k=n$, 且 $i, j, k \geq 0$ 。可见, 三角域上 n 次Bernstein基共包含了 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 个基函数, 可以用一个三角阵来排列这些基函数。例如, $n=2$ 时如图3. 1. 19所示。

三角域按Bernstein基的三角阵列相应划分成子三角域，其中诸直线交点同样地称为节点。节点与基函数一一对应。每个结点也由三个指标确定，如图3.1.20所示，它们分别与三参数u, v, w相联系。

三角域上Bernstein基同样具有规范性、非负性与递推性。其递推关系为：

$$\begin{aligned} B_{i,j,k}^n(u,v,w) = & uB_{i-1,j,k}^{n-1}(u,v,w) + vB_{i,j-1,k}^{n-1}(u,v,w) \\ & + wB_{i,j,k-1}^{n-1}(u,v,w) \end{aligned}$$

2、三边Bézier曲面片的定义

使一个基函数联系一个控制顶点，一张n次三边Bezier曲面片必须由构成三角阵列的 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 个控制顶点

$T_{i,j,k}$ ($i+j+k=n$, $i,j,k \geq 0$) 定义。因此，n次Bezier曲面可以定义为：

$$P(u,v,w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} P_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(u,v,w) \quad u,v,w \in [0,1]$$

按下标顺序用直线连接控制顶点，就形成了曲面的控制网格，它由三角形组成，网格顶点与三角域的节点一一对应。

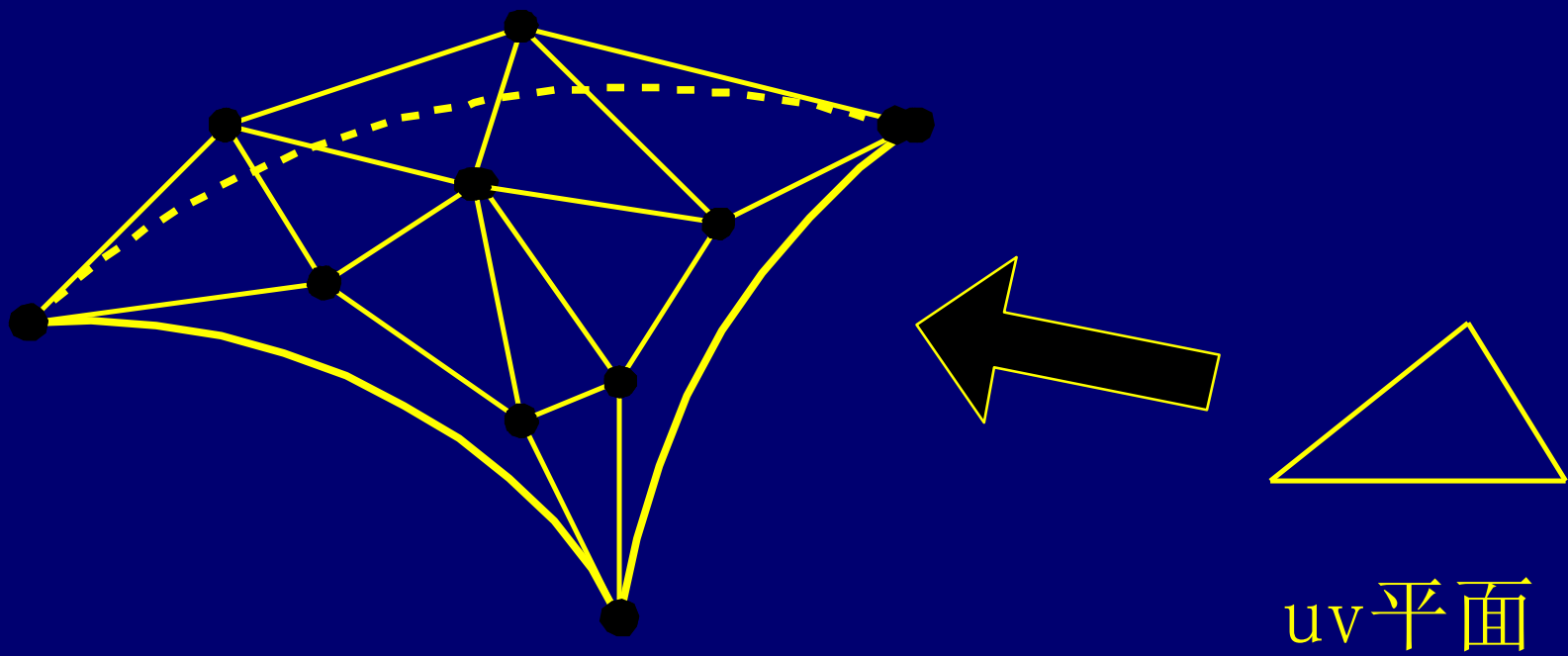


图3.1.21 三边Bezier曲面片

当固定三参数之一时，将得到曲面片上一条等参数线。

例如，当 w 固定，让 u 独立地变化，则得到一条 u 线；若让 v 独立地变化，则得到 v 线，两者实际是同一条曲线。因此，曲面片上有三族等参数线。当三参数之一为零时，则得曲面片的一条边界线，它由相应那排边界顶点定义，就是一般所指的一条非有理 n 次Bezier曲线。当三参数之一为1时，则得三边曲面片的一个角点，就是控制网格三角顶点之一。可见，三边Bezier曲面片与四边Bezier曲面片具有类似的性质。

与定义在矩形域上的四边Bezier曲面片的差别在于：

- 1) 定义域不同；
- 2) 控制网格不同，后者由呈矩形阵列的控制顶点构成；
- 3) 同样是两个独立参数，但最高次数不同，后者两个参数的最高次数是互相独立的，可以不同。而三边Bezier曲面片的三个参数的最高次数都是相同的；
- 4) 四边Bezier曲面片是张量积曲面，三边Bezier曲面片是非张量积曲面，这是本质差别。

8.5.3 Bezier曲面的拼接

- 0阶连续性只要求相连接的曲面片具有公共的边界曲线。
- 1阶连续性则要求在边界曲线上的任何一点，两个曲面片跨越边界的切线矢量应该共线，而且两切线矢量的长度之比为常数。

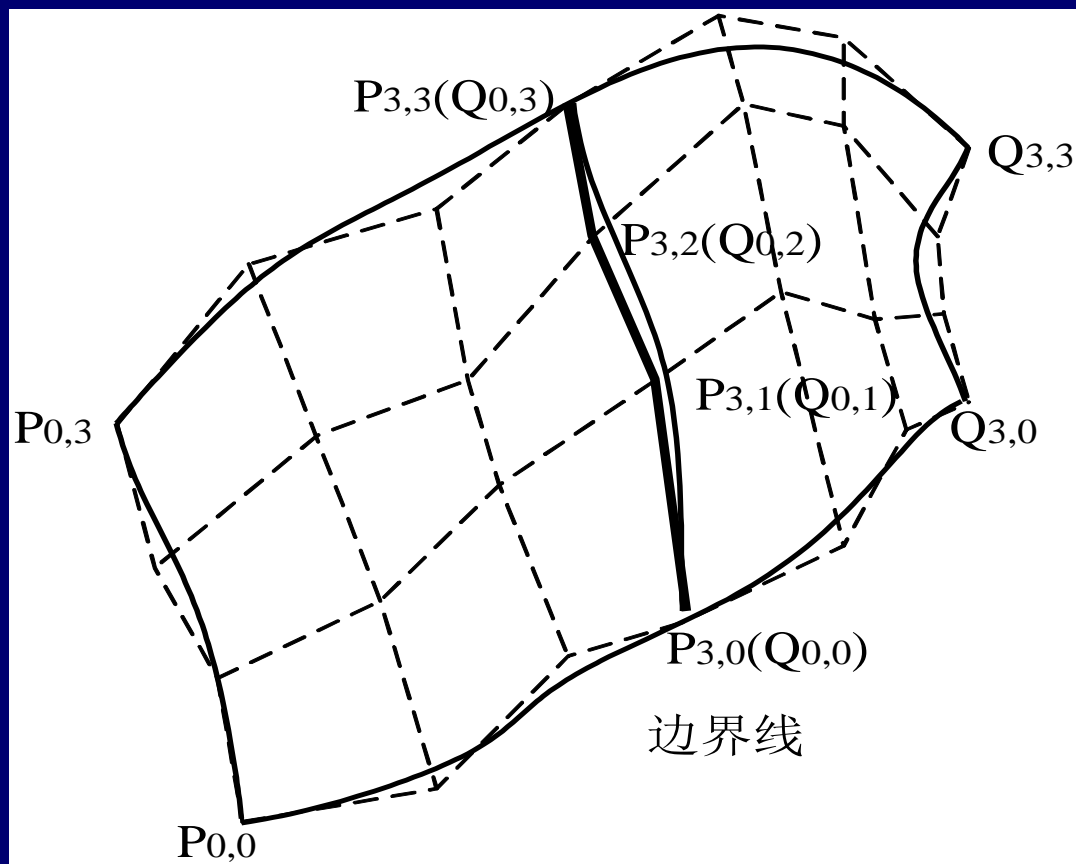


图8-10 Bezier曲面片的拼接

- 已知两张双三次Bezier曲面片：

$$p_1(u, v) = UM_{be}PM_{be}^T v^T \quad p_2(u, v) = UM_{be}QM_{be}^T V^T$$

$$P = P_{i,j} (i, j = 0, 1, 2, 3) \quad Q = Q_{i,j} (i, j = 0, 1, 2, 3)$$

实现G¹连续性的条件为：

$$(1) p_1(1, v) = p_2(0, v), \quad \text{即有 } P_{3,i} = Q_{0,i}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

$$(2) P_{3,i} - P_{2,i} = \lambda (Q_{1,i} - Q_{0,i}), \quad i = 0, 1, 2, 3$$

8.6 Coons曲面

- 双三次Coons曲面
- 布尔和形式的Coons曲面

8.7 B样条曲面

定义:

$$p(u, v) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} P_{k_1, k_2} B_{k_1, m_1}(u) B_{k_2, m_2}(v)$$

- 控制顶点、控制网格（特征网格）、B样条基函数。
- B样条曲面具有与B样条曲线相同的局部支柱性、凸包性、连续性、几何变换不变性等性质。

- 双三次B样条曲面

$$p(u, v) = UM_B PM_B^T V^T$$

$$U = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_B = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{bmatrix}$$

非均匀有理B样条 (NURBS)

定义:

$$p(t) = \frac{\sum_{k=0}^n w_k P_k B_{k,m}(t)}{\sum_{k=0}^n w_k B_{k,m}(t)}$$

- 参数曲面的等价表示

三次Bezier曲面：

$$P_1(u, v) = [U][M][P][M]^T [V]^T$$

三次Coons曲面：

$$P_2(u, v) = [U][C][P_C][C]^T [V]^T$$

三次均匀B样条曲面：

$$P_3(u, v) = [U][B][P_B][B]^T [V]^T$$

- 其中：

$$[C] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 曲线曲面的实现
 - 利用算法自己写
 - 调用OpenGL的函数