笔记

2024年5月12日 20:10

核心一：线性方程组.

工具：
- 行列式
- 矩阵
- 向量

第一章：行列式 ⇒ 本质为数/式子 → 不构成矩阵含了

一. 概念

1. 逆序 (2个数之间)：$\forall i,j$ 且 $i \neq j$
   - ① $i<j$ — (i,j) 为顺序
   - ② $i>j$ — (i,j) 为逆序

2. 逆序数

eg1：3.1.2. 含以下逆序对 { $3 \to (3,1)\ (3,2)$ ②；$1 \to \times$；$2 \to \times$ }

∴ (3,1,2) 的逆序数为 2. 记作 $\tau(3,1,2)$

eg2：$\tau(2,3,4,1) = 1+0+1+1 = 3$

eg3：$\tau(3,5,1,4,2) = 2+3+0+1+0 = 6$

⇒ 逆序数：$i_1, i_2 \cdots i_n$ 为 $1,2,\cdots n$ 的一个排列

则 $(i_1, i_2 \cdots i_n)$ 中所含的逆序的数称为逆序数.

记为 $\tau(i_1 \cdots i_n)$

eg4 $\tau(361542) = 2+4+0+2+1 = 9$

3. 行列式 — $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$ → n行n列的行列式

[三阶行列式从定义的角度计算]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$a_{11} \langle a_{22} - a_{32},\ a_{23} - a_{32}$

$a_{12} \langle a_{21} - a_{33},\ a_{23} - a_{31}$

$a_{13} \langle a_{21} - a_{32},\ a_{22} - a_{31}$

⇒ $+a_{11}a_{22}a_{33}$ $\tau(123)=0$　$-a_{11}a_{23}a_{32}$ $\tau(132)=1$　$-a_{12}a_{21}a_{33}$ $\tau(213)=1$

$+a_{12}a_{23}a_{31}$ $\tau(231)=2$　$+a_{13}a_{21}a_{32}$ $\tau(312)=2$　$-a_{13}a_{22}a_{31}$ $\tau(321)=3$

[例1] $f(x) = \begin{vmatrix} 2x+1 & 2 & 3 \\ 1 & x-1 & 3x-1 \\ 5 & 2x & x-2 \end{vmatrix}$ 求 x^2 的系数

[解]：$2x+1 \langle x-1 — x-2,\ 3x-1 — 2x$　要它出现 x^2 → $\overset{1}{2x+1}\ \overset{2}{(x-1)}\ \overset{3}{(x-2)}$ $\tau(123)=0$

$2 \langle 1 — x-2,\ 3x-1 — 5$　　$\overset{1}{2x+1}\ \overset{3}{(3x-1)}\ \overset{2}{(2x)}$ $\tau(132)=1$

$\to \langle 1\ 2,\ 7+\ -5$　不要忘 记前面的系数 τ！

[四阶行列式的计算] 类似. 同上

4. 余子式与代数余子式 — $D = \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

取 a_{ij} 划去i行. j列 构成的 n-阶行列式

记为 M_{ij}，叫作 a_{ij} 的余子式　$A_{ij} \triangleq (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 A_{ij} 的代数余子式

eg. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ $(D=-8)$

- $a_{11} = 1$　$M_{11} = 11$　$A_{11} = 11$
- $a_{12} = 2$　$M_{12} = 5$　$A_{12} = -5$
- $a_{13} = -1$　$M_{13} = -7$　$A_{13} = -7$

{ $1 \times 11 + 2 \times (-5) + (-1) \times (-7) = 8$
$2 \times (-9) + 3 \times 7 + 1 \times 5 = 8$
$3 \times 5 + 1 \times (-3) + 4 \times (-1) = 8$ }

同理

- $a_{21} = 2$　$M_{21} = 9$　$A_{21} = -9$
- $a_{22} = 3$　$M_{22} = 7$　$A_{22} = 7$
- $a_{23} = 1$　$M_{23} = -5$　$A_{23} = 5$

- $a_{31} = 3$　$M_{31} = 5$　$A_{31} = 5$
- $a_{32} = 1$　$M_{32} = 3$　$A_{32} = -3$
- $a_{33} = 4$　$M_{33} = -1$　$A_{33} = -1$

{ $1 \times (-9) + 2 \times 7 + (-1) \times 5 = 0$
$1 \times 5 + 2 \times (-3) - 1 \times (-1) = 0$
$2 \times 11 + 3 \times (-5) + 1 \times (-7) = 0$
$2 \times 5 + 3 \times (-3) + 1 \times (-1) = 0$
⋯ }

二 特殊的行列式

1. 对角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix}$

$= a_{11} \times a_{22} \cdots a_{nn}$

2. 范德蒙行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & a_4^{n-1} & \cdots \end{vmatrix}$$

下标大的减下标大的再连乘

$V_2 = a_2 - a_1$

$V_3 = (a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_2-a_1)$

$V_4 = (a_4-a_3)(a_4-a_2)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_1)$

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & a_4^{n-1} & \cdots \end{vmatrix}$$

$\prod$

$V_2=a_2-a_1$

$V_3=(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_2-a_1)$

$V_4=(a_4-a_3)(a_4-a_2)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_1)$

$V_n\neq 0 \iff$ 任意 $a_i\neq a_j$

3. $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix}=|A|\cdot|B|$

Q：如何计算行列式 $\begin{cases} ① \ D=|\triangledown| \text{ 或 } |\triangle| \\ ② \ \text{降阶} \end{cases}$

三、行列式的计算性质

(一) $D \Rightarrow |\triangledown|$ 或 $|\triangle|$

性质1 $D^T=D$

性质2 对调2行/2列，行列式变为相反数

性质3 一行/一列可以提取公因子

性质4 拆：eg: $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

☆性质5 一行/一列 加到另一行/列，行列式不变

(二) 降阶性质

1. $a_{i1}\times A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}\cdots a_{in}A_{in}=|A|$

$a_{1j}\times A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}\cdots a_{nj}A_{nj}=|A|$ } 某一行/列中有许多0可以展开.

2. $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}\cdots a_{in}A_{jn}=0$

降阶 Note ① 某一行/列中0特别多可以按行/列展开

② $A=\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$

$\forall a_{ij} \Rightarrow M_{ij} \Rightarrow A_{ij}$

$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & & A_{1n} \\ & & \\ A_{n1} & & A_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$ A的伴随矩阵

$\Rightarrow$ 行列式中只有 A_{ij} 或 A^* 用

$\begin{cases} |A^*|=|A|^{n-1} \\ |A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}\cdots a_{in}A_{in} \end{cases}$

[例2] $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

[解] $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}=8$

[例3] $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

[解1]：$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}\times(-1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix}\times(-1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}\times(-1)=20$

[解2]：$D=\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=20$

[例3] 令 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=M$ 求 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$

[解] $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$

$=|a \ \ b+c \ \ c|+|b \ \ c \ \ c+a|$

$=|a \ \ b \ \ c|+|b \ \ c \ \ a|$

$=2M.$

[例] $D=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

[解] $D=1\times A_{11}+a\times A_{12}=M_{11}-aM_{12}$

$M_{11}=1 \quad M_{12}=\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix}=a\times A_{12}=a\times(-1)(-a^2)$

$\therefore D=1-a^4$

[例] $D=\begin{vmatrix} 2a & -1 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & -1 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & -1 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}$

[解] $D=2aA_{11}-A_{12}$

$A_{11}=\begin{vmatrix} 2a & -1 & 0 \\ a^2 & 2a & -1 \\ 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}=2aA_{11}-A_{12}.$

$A_{12}=\begin{vmatrix} a^2 & -1 & 0 \\ 0 & 2a & -1 \\ 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix}$

$=5a^4\times(-1)^{1+2}=-5a^4$

$= 2a(4a^2+a^2) - (-1)(2a^3)$

$= 10a^3 + 2a^3$

$= 12a^3$

代入 $= 2a \times 12a^3 + 5a^4 = 29a^4$