Решение системы уравнений для вязкого теплопроводного идеального газа

Solving the system of equations of a viscous heat-conducting ideal gas

Содержание

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений, описывающую движение вязкого теплопроводного газа в двумерном случае:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \bigtriangledown)\mathbf{u} \right] + \bigtriangledown p = L\mathbf{u} + \rho f \\ c_v \rho \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u}, \bigtriangledown \theta) \right] = \kappa \bigtriangleup \theta - p div \mathbf{u} - \frac{2}{3}\mu (div \mathbf{u})^2 + 2\mu D : D \end{cases}$$

где неизвестными являются: функция скорости $u = u(x,t)$, плотности $\rho = \rho(x,t)$, температуры $\theta = \theta(x,t)$, $(x,t) \in [0,X] \times [0,T]$, где $x = (x_1, x_2)$. Давление записывается выражением $p = R\rho\theta$, R - универсальная газовая постоянная. κ-теплопроводность, c_v-теплоёмкость, μ-коэффицент вязкости являются известными положительными константами. $\kappa = 0.023$ кДж/(с*м*К), $c_v = 1.3$ кДж/(кг*К), $R = 0.00831$ кДж/(моль*К).

$$L\mathbf{u} \equiv div(\mu \bigtriangledown \mathbf{u}) + \frac{1}{3}\mu \bigtriangledown (div \mathbf{u}),$$

D - линейный тензор деформаций Коши-Грина: $D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

Начальные условия:

$$(\rho, u, \theta)|_{t=0} = (\rho_0, u_0, \theta_0)$$

Краевые условия:

$$u(t,x) = 0,\ \theta(t,x) = \tilde{\theta}(t,x),\ (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega.$$

Введём на пространстве следующую сетку:

Разбиение по $[0,X]$: $\omega_{h_k} = \{mh_k \,|\, m = 0,..M_k\}$, $M_k h_k = X_k$, $k = 1,2$

Разбиение по $[0,T]$: $\omega_\tau = \{n\tau | n = 0,..N\}, \quad N\tau = T$

Таким образом сетка на всей области Q задаётся следующим образом: $Q_{\tau,h} = \omega_\tau \times \Omega_h = \omega_\tau \times \prod_{k=1}^{2} \omega_{h_k}$

Определим ниже скалярные произведения и нормы сеточных функций, которые будут использованы в дальнейшем:

$$(u,v)=\prod_{k=1}^{2}h_k\sum_{x_m\in\Omega_h}u_m v_m,\quad [u,v]=(u,v)+0.5\prod_{k=1}^{2}h_k\sum_{x_m\in\gamma_h}u_m v_m,$$

$$||v||_{C_h}=\max_{x_m\in\bar\Omega_h}|v_m|,\quad ||v||_{L_2}=\sqrt{(v,v)},\quad |[v]|=\sqrt{[v,v]},\quad ||v||_2^1=\sqrt{|[v]|^2+|v|_1^2},$$

$$|v|_1=\sqrt{\prod_{k=1}^{2}h_k\sum_{k=1}^{2}\sum_{x_m\in\bar\Omega_h}(v_{x_k})^2}$$

Поделим уравнения системы на ρ и сделаем замену $g=\ln\rho$. Получаем:

$$\begin{cases}\frac{\partial g}{\partial t}+(\mathbf{u},\bigtriangledown g)+div\mathbf{u}=0\\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u},\bigtriangledown)\mathbf{u}+\tilde p'(g)=e^{-g}L\mathbf{u}+f,\\ c_v\left[\frac{\partial\theta}{\partial t}+(\mathbf{u},\bigtriangledown\theta)\right]=e^{-g}\left(\kappa\bigtriangleup\theta-\frac{2}{3}\mu(div\mathbf{u})^2+2\mu D:D\right)-R\theta div\mathbf{u}\end{cases}$$

где $\tilde p'(g)=\frac{\partial p}{\partial\rho}(e^g,\theta)\bigtriangledown g+\frac{\partial p}{\partial\theta}(e^g,\theta)\bigtriangledown\theta.$

Начальные и краевые условия:

$$(g,u,\theta)|_{t=0}=(g_0,u_0,\theta_0),$$

$$u(t,x)=0,\ \theta(t,x)=\tilde\theta(t,x),\ (t,x)\in[0,T]\times\partial\Omega.$$

Прежде, чем писать разностные схемы, распишем конфективные слагаемые:

$$(\mathbf{u},\bigtriangledown g)=0.5((\mathbf{u},\bigtriangledown g)+div(g\mathbf{u}))-0.5g(div\mathbf{u}),$$

$$(\mathbf{u},\bigtriangledown)\mathbf{u}=\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{1}{3}(u_k\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k^2}{\partial x_k})+\frac{1}{2}\sum_{l=1,l\neq k}^{2}(u_l\frac{\partial u_k}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l u_k}{\partial x_l}-u_k\frac{\partial u_l}{\partial x_l})\right],$$

$$(\mathbf{u},\bigtriangledown\theta)=0.5((\mathbf{u},\bigtriangledown\theta)+div(\theta\mathbf{u}))-0.5\theta(div\mathbf{u})$$

$$D=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

$$D:D=(\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial u_2}{\partial x_2})^2+(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1})^2$$

2. Разностная схема

Теперь можно приступить к написанию разностных схем, сопоставляя неизвестным функциям g, u, θ сеточные функции G, V, T. В данной работе предлагается частично явная схема, в которой для сеточной функции плотности выполняется условие положительности, а само сеточное решение на каждом временном шаге является решением двух СЛАУ:

$$
\begin{cases}
G_t + 0.5 \sum\limits_{k=1}^{2} \left(V_k \hat{G}_{\overset{\circ}{x}_k} + (V_k \hat{G})_{\overset{\circ}{x}_k} - G(V_k)_{\overset{\circ}{x}_k} + 2(\hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_k} \right) = 0, \quad x \in \Omega_h \\
G_t + 0.5 \left((V_k \hat{G})_{x_k} - G(V_k)_{x_k} + 2(\hat{V}_k)_{x_k} \right) + \\
\qquad -0.5 \left(h_k \left((GV_k)^{+1_k}_{x_k \bar{x}_k} - 0.5 (GV_k)^{+2_k}_{x_k \bar{x}_k} + (2 - G)((V_k)^{+1_k}_{x_k \bar{x}_k} - 0.5 (V_k)^{+2_k}_{x_k \bar{x}_k}) \right) \right) = 0, \\
\qquad x \in \gamma_k^-, \; k = 1, 2 \\
G_t + 0.5 \left((V_k \hat{G})_{x_k} - G(V_k)_{x_k} + 2(\hat{V}_k)_{x_k} \right) + \\
\qquad +0.5 \left(h_k \left((GV_k)^{-1_k}_{x_k \bar{x}_k} - 0.5 (GV_k)^{-2_k}_{x_k \bar{x}_k} + (2 - G)((V_k)^{-1_k}_{x_k \bar{x}_k} - 0.5 (V_k)^{-2_k}_{x_k \bar{x}_k}) \right) \right) = 0, \\
\qquad x \in \gamma_k^+, \; k = 1, 2 \\
(V_k)_t + \frac{1}{3} \left(V_k (\hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_k} + (V_k \hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_k} \right) + \frac{1}{2} \sum\limits_{l=1, l \neq k}^{2} \left(V_l (\hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_l} + (V_l \hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_l} - V_k (V_l)_{\overset{\circ}{x}_l} \right) + \\
\qquad + RT \hat{G}_{\overset{\circ}{x}_k} + RT_{\overset{\circ}{x}_k} = \tilde{\mu} \left(\frac{4}{3} (\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum\limits_{l=1, l \neq k}^{2} (\hat{V}_k)_{x_l \bar{x}_l} \right) - \\
\qquad - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G}) \left(\frac{4}{3} (\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum\limits_{l=1, l \neq k}^{2} (\hat{V}_k)_{x_l \bar{x}_l} \right) + \frac{\mu e^{-G}}{3} \sum\limits_{l=1, l \neq k}^{2} (V_l)_{\overset{\circ}{x}_k \overset{\circ}{x}_l} + f_k, \\
\qquad k = 1, 2; \quad x \in \Omega_h \\
\hat{V}_k = 0, \quad x \in \gamma_h, \quad k = 1, 2. \\
c_v \left(T_t + 0.5 \sum\limits_{k=1}^{2} \left(\hat{V}_k \hat{T}_{\overset{\circ}{x}_k} + (\hat{V}_k \hat{T})_{\overset{\circ}{x}_k} - T (\hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_k} \right) \right) = \\
\qquad = \tilde{\kappa} \sum\limits_{k=1}^{2} \left(\hat{T}_{x_k \bar{x}_k} \right) + \sum\limits_{k=1}^{2} (\kappa e^{-G} - \tilde{\kappa}) \left(T_{x_k \bar{x}_k} \right) - \\
\qquad - \sum\limits_{k=1}^{2} \left(RT (\hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_k} + \frac{2}{3} \mu e^{-\hat{G}} (\hat{V}_k)^2_{\overset{\circ}{x}_k} + \frac{2}{3} \mu e^{-\hat{G}} \sum\limits_{l=1, l \neq k}^{2} ((\hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_k} (\hat{V}_l)_{\overset{\circ}{x}_l}) \right) + \\
\qquad + 2 \mu e^{-G} \sum\limits_{k=1}^{2} \left((\hat{V}_k)^2_{\overset{\circ}{x}_k} + 0.5 \left(\sum\limits_{l=1, l \neq k}^{2} (\hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_l} + (\hat{V}_l)_{\overset{\circ}{x}_k} \right)^2 \right), \quad x \in \Omega_h,
\end{cases}
$$

где $\tilde{\kappa} = ||\kappa e^{-G}||$, $\tilde{\mu} = ||\mu e^{-G}||$.

Уравнения на слой вышеуказанной разностной схемы примут следующий вид:

$$\frac{\hat{G}_{m_1,m_2}-G_{m_1,m_2}}{\tau} + \frac{1}{2}\left(V_{1_{m_1,m_2}}\frac{\hat{G}_{m_1+1,m_2}-\hat{G}_{m_1-1,m_2}}{2h_1} + V_{2_{m_1,m_2}}\frac{\hat{G}_{m_1,m_2+1}-\hat{G}_{m_1,m_2-1}}{2h_2}\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{V_{1_{m_1+1,m_2}}\hat{G}_{m_1+1,m_2}-V_{1_{m_1-1,m_2}}\hat{G}_{m_1-1,m_2}}{2h_1} + \frac{V_{2_{m_1,m_2+1}}\hat{G}_{m_1,m_2+1}-V_{1_{m_1,m_2-1}}\hat{G}_{m_1,m_2-1}}{2h_2}\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\left(G_{m_1,m_2}\frac{V_{1_{m_1+1,m_2}}-V_{1_{m_1-1,m_2}}}{2h_1} + G_{m_1,m_2}\frac{V_{2_{m_1,m_2+1}}-V_{2_{m_1,m_2-1}}}{2h_2}\right) +$$
$$+\left(\frac{\hat{V}_{1_{m_1+1,m_2}}-\hat{V}_{1_{m_1-1,m_2}}}{2h_1} + \frac{\hat{V}_{2_{m_1,m_2+1}}-\hat{V}_{2_{m_1,m_2-1}}}{2h_2}\right) = 0, \qquad (2..1)$$
$$x = (m_1h_1, m_2h_2) \in \Omega_h$$

$$\frac{\hat{G}_{0,m_2}-G_{0,m_2}}{\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{V_{1_{1,m_2}}\hat{G}_{1,m_2}-V_{1_{0,m_2}}\hat{G}_{0,m_2}}{h_1}\right) - \frac{G_{0,m_2}}{2}\left(\frac{V_{1_{1,m_2}}-V_{1_{0,m_2}}}{h_1}\right) + \left(\frac{\hat{V}_{1_{1,m_2}}-\hat{V}_{1_{0,m_2}}}{h_1}\right) +$$
$$+\frac{h_1}{2}\left(\frac{G_{2,m2}V_{1_{2,m_2}}-2G_{1,m2}V_{1_{1,m_2}}+G_{0,m2}V_{1_{0,m_2}}}{h_1^2} - 0.5\frac{G_{3,m2}V_{1_{3,m_2}}-2G_{2,m2}V_{1_{2,m_2}}+G_{1,m2}V_{1_{1,m_2}}}{h_1^2}\right) +$$
$$+\frac{h_1}{2}(2-G_{0,m_2})\left(\frac{V_{1_{2,m_2}}-2V_{1_{1,m_2}}+V_{1_{0,m_2}}}{h_1^2} - 0.5\frac{V_{1_{3,m_2}}-2V_{1_{2,m_2}}+V_{1_{1,m_2}}}{h_1^2}\right) = 0, \qquad (2..2)$$
$$\mathbf{x} \in \gamma_1^-$$

$$\frac{\hat{G}_{M_1,m_2}-G_{M_1,m_2}}{\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{V_{1_{M_1,m_2}}\hat{G}_{M_1,m_2}-V_{1_{M_1-1,m_2}}\hat{G}_{M_1-1,m_2}}{h_1}\right) - \frac{G_{M_1,m_2}}{2}\left(\frac{V_{1_{M_1,m_2}}-V_{1_{M_1-1,m_2}}}{h_1}\right) +$$
$$+\left(\frac{\hat{V}_{1_{M_1,m_2}}-\hat{V}_{1_{M_1-1,m_2}}}{h_1}\right) + \qquad (2..3)$$
$$+\frac{h_1}{2}\frac{G_{M_1,m2}V_{1_{M_1,m_2}}-2G_{M_1-1,m2}V_{1_{M_1-1,m_2}}+G_{M_1-2,m2}V_{1_{M_1-2,m_2}}}{h_1^2} -$$
$$-0.25h_1\frac{G_{M_1-1,m2}V_{1_{M_1-1,m_2}}-2G_{M_1-2,m2}V_{1_{M_1-2,m_2}}+G_{M_1-3,m2}V_{1_{M_1-3,m_2}}}{h_1^2} +$$
$$+\frac{h_1}{2}(2-G_{M_1,m_2})\left(\frac{V_{1_{M_1,m_2}}-2V_{1_{M_1-1,m_2}}+V_{1_{M_1-2,m_2}}}{h_1^2} - 0.5\frac{V_{1_{M_1-1,m_2}}-2V_{1_{M_1-2,m_2}}+V_{1_{M_1-3,m_2}}}{h_1^2}\right) = 0,$$
$$\mathbf{x} \in \gamma_1^+$$

$$
\frac{\hat{G}_{m_1,0}-G_{m_1,0}}{\tau}+\frac{1}{2}\left(\frac{V_{2_{m_1,1}}\hat{G}_{m_1,1}-V_{2_{m_1,0}}\hat{G}_{m_1,0}}{h_2}\right)-\frac{G_{m_1,0}}{2}\left(\frac{V_{2_{m_1,1}}-V_{2_{m_1,0}}}{h_2}\right)+\left(\frac{\hat{V}_{2_{m_1,1}}-\hat{V}_{2_{m_1,0}}}{h_2}\right)+
$$

$$
+\frac{h_2}{2}\left(\frac{G_{m_1,2}V_{2_{m_1,2}}-2G_{m_1,1}V_{2_{m_1,1}}+G_{m_1,0}V_{2_{m_1,0}}}{h_2^2}-0.5\frac{G_{m_1,3}V_{2_{m_1,3}}-2G_{m_1,2}V_{2_{m_1,2}}+G_{m_1,1}V_{2_{m_1,1}}}{h_2^2}\right)+
$$

$$
+\frac{h_2}{2}(2-G_{m_1,0})\left(\frac{V_{2_{m_1,2}}-2V_{2_{m_1,1}}+V_{1_{m_1,0}}}{h_2^2}-0.5\frac{V_{2_{m_1,3}}-2V_{2_{m_1,2}}+V_{2_{m_1,1}}}{h_2^2}\right)=0, \quad (2..4)
$$

$$
\mathbf{x}\in\gamma_2^-
$$

$$
\frac{\hat{G}_{m_1,M_2}-G_{m_1,M_2}}{\tau}+\frac{1}{2}\left(\frac{V_{2_{m_1,M_2}}\hat{G}_{m_1,M_2}-V_{2_{m_1,M_2-1}}\hat{G}_{m_1,M_2-1}}{h_2}\right)-\frac{G_{m_1,M_2}}{2}\left(\frac{V_{2_{m_1,M_2}}-V_{2_{m_1,M_2-1}}}{h_2}\right)+
$$

$$
\left(\frac{\hat{V}_{2_{m_1,M_2}}-\hat{V}_{2_{m_1,M_2-1}}}{h_2}\right)+
$$

$$
+\frac{h_2}{2}\frac{G_{m_1,M_2}V_{2_{m_1,M_2}}-2G_{m_1,M_2-1}V_{2_{m_1,M_2-1}}+G_{m_1,M_2-2}V_{2_{m_1,M_2-2}}}{h_2^2}- \quad (2..5)
$$

$$
-0.25h_2\frac{G_{m_1,M_2-1}V_{2_{m_1,M_2-1}}-2G_{m_1M_2-2}V_{2_{m_1,M_2-2}}+G_{m_1,M_2-3}V_{2_{m_1,M_2-3}}}{h_2^2}+
$$

$$
+\frac{h_1}{2}(2-G_{m_1,M_2})\left(\frac{V_{2_{m_1,M_2}}-2V_{2_{m_1,M_2-1}}+V_{2_{m_1,M_2-2}}}{h_2^2}-0.5\frac{V_{2_{m_1,M_2-1}}-2V_{2_{m_1,M_2-2,}}+V_{2_{m_1,M_2-3}}}{h_2^2}\right),
$$

$$
\mathbf{x}\in\gamma_2^+
$$

$$
\frac{\hat{V}_{1_{m1,m2}}-V_{1_{m1,m2}}}{\tau}+\frac{1}{3}\left(V_{1_{m1,m2}}\frac{\hat{V}_{1_{m1+1,m2}}-\hat{V}_{1_{m1-1,m2}}}{2h_1}+\frac{V_{1_{m1+1,m2}}\hat{V}_{1_{m1+1,m2}}-V_{1_{m1-1,m2}}\hat{V}_{1_{m1-1,m2}}}{2h_1}\right)+
$$

$$
+\frac{1}{2}\left(V_{2_{m1,m2}}\frac{\hat{V}_{1_{m1,m2+1}}-\hat{V}_{1_{m1,m2-1}}}{2h_2}+\frac{V_{2_{m1,m2+1}}\hat{V}_{1_{m1,m2+1}}-V_{2_{m1,m2-1}}\hat{V}_{1_{m1,m2-1}}}{2h_2}\right)-
$$

$$
-\frac{1}{2}\left(V_{1_{m1,m2}}\frac{V_{2_{m1,m2+1}}-V_{2_{m1,m2-1}}}{2h_2}\right)+RT_{m1,m2}\frac{\hat{G}_{m1+1,m2}-\hat{G}_{m1-1,m2}}{2h_1}+R\frac{T_{m1+1,m2}-T_{m1-1,m2}}{2h_1}=
$$

$$
=\tilde{\mu}\left(\frac{4}{3}\frac{\hat{V}_{1_{m1+1,m2}}-2\hat{V}_{1_{m1,m2}}+\hat{V}_{1_{m1-1,m2}}}{h_1^2}+\frac{\hat{V}_{1_{m1,m2+1}}-2\hat{V}_{1_{m1,m2}}+\hat{V}_{1_{m1,m2-1}}}{h_2^2}\right)-
$$

$$
-(\tilde{\mu}-\mu e^{-\hat{G}_{m1,m2}})\left(\frac{4}{3}\frac{V_{1_{m1+1,m2}}-2V_{1_{m1,m2}}+V_{1_{m1-1,m2}}}{h_1^2}+\frac{V_{1_{m1,m2+1}}-2V_{1_{m1,m2}}+V_{1_{m1,m2-1}}}{h_2^2}\right)+
$$

$$
+\frac{\mu e^{-\hat{G}_{m1,m2}}}{3}\frac{V_{2_{m1+1,m2+1}}-V_{2_{m1+1,m2-1}}-V_{2_{m1-1,m2+1}}+V_{2_{m1-1,m2-1}}}{4h_1h_2}+f_{1_{m1,m2}}, \quad (2..6)
$$

$$
\mathbf{x}\in\Omega_h
$$

$$\frac{\hat{V}_{2_{m1,m2}}-V_{2_{m1,m2}}}{\tau}+\frac{1}{3}\left(V_{2_{m1,m2}}\frac{\hat{V}_{2_{m1,m2+1}}-\hat{V}_{2_{m1,m2-1}}}{2h_2}+\frac{V_{2_{m1,m2+1}}\hat{V}_{2_{m1,m2+1}}-V_{2_{m1,m2-1}}\hat{V}_{2_{m1,m2-1}}}{2h_2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(V_{1_{m1,m2}}\frac{\hat{V}_{2_{m1+1,m2}}-\hat{V}_{2_{m1-1,m2}}}{2h_1}+\frac{V_{1_{m1+1,m2}}\hat{V}_{2_{m1+1,m2}}-V_{1_{m1-1,m2}}\hat{V}_{2_{m1-1,m2}}}{2h_1}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(V_{2_{m1,m2}}\frac{V_{1_{m1+1,m2}}-V_{1_{m1-1,m2}}}{2h_1}\right)+RT_{m1,m2}\frac{\hat{G}_{m1,m2+1}-\hat{G}_{m1,m2-1}}{2h_2}+R\frac{T_{m1,m2+1}-T_{m1,m2-1}}{2h_2}=$$
$$=\tilde{\mu}\left(\frac{4}{3}\frac{\hat{V}_{2_{m1,m2+1}}-2\hat{V}_{2_{m1,m2}}+\hat{V}_{2_{m1,m2-1}}}{h_2^2}+\frac{\hat{V}_{2_{m1+1,m2}}-2\hat{V}_{2_{m1,m2}}+\hat{V}_{2_{m1-1,m2}}}{h_1^2}\right)-$$
$$-(\tilde{\mu}-\mu e^{-\hat{G}_{m1,m2}})\left(\frac{4}{3}\frac{V_{2_{m1,m2+1}}-2V_{2_{m1,m2}}+V_{2_{m1,m2-1}}}{h_2^2}+\frac{V_{2_{m1+1,m2}}-2V_{2_{m1,m2}}+V_{2_{m1-1,m2}}}{h_1^2}\right)+$$
$$+\frac{\mu e^{-\hat{G}_{m1,m2}}}{3}\frac{V_{1_{m1+1,m2+1}}-V_{1_{m1+1,m2-1}}-V_{1_{m1-1,m2+1}}+V_{1_{m1-1,m2-1}}}{4h_1h_2}+f_{2_{m1,m2}}, \tag{2..7}$$
$$\mathbf{x}\in\Omega_h$$

$$c_v\frac{\hat{T}_{m1,m2}-T_{m1,m2}}{\tau}+0.5c_v\left(\hat{V}_1\frac{\hat{T}_{m1+1,m2}-\hat{T}_{m1-1,m2}}{2h_1}+\hat{V}_2\frac{\hat{T}_{m1,m2+1}-\hat{T}_{m1,m2-1}}{2h_2}\right)+$$
$$+0.5c_v\left(\frac{\hat{V}_{1_{m1+1,m2}}\hat{T}_{m1+1,m2}-\hat{V}_{1_{m1-1,m2}}\hat{T}_{m1-1,m2}}{2h_1}+\frac{\hat{V}_{2_{m1,m2+1}}\hat{T}_{m1,m2+1}-\hat{V}_{2_{m1,m2-1}}\hat{T}_{m1,m2-1}}{2h_2}\right)-$$
$$-0.5c_vT_{m1,m2}\left(\frac{\hat{V}_{1_{m1+1,m2}}-\hat{V}_{1_{m1-1,m2}}}{2h_1}+\frac{\hat{V}_{2_{m1,m2+1}}-\hat{V}_{2_{m1,m2-1}}}{2h_2}\right)=$$
$$=\tilde{\kappa}\left(\frac{\hat{T}_{m1+1,m2}-2\hat{T}_{m1,m2}+\hat{T}_{m1-1,m2}}{h_1^2}+\frac{\hat{T}_{m1,m2+1}-2\hat{T}_{m1,m2}+\hat{T}_{m1,m2-1}}{h_2^2}\right)+$$
$$+(\kappa e^{-\hat{G}_{m1,m2}}-\tilde{\kappa})\left(\frac{T_{m1+1,m2}-2T_{m1,m2}+T_{m1-1,m2}}{h_1^2}+\frac{T_{m1,m2+1}-2T_{m1,m2}+T_{m1,m2-1}}{h_2^2}\right)+$$
$$-RT_{m1,m2}\left(\frac{\hat{V}_{1_{m1+1,m2}}-\hat{V}_{1_{m1-1,m2}}}{2h_1}+\frac{\hat{V}_{2_{m1,m2+1}}-\hat{V}_{2_{m1,m2-1}}}{2h_2}\right)-$$
$$-\frac{2}{3}\mu e^{-\hat{G}_{m1,m2}}\left(\left(\frac{\hat{V}_{1_{m1+1,m2}}-\hat{V}_{1_{m1-1,m2}}}{2h_1}\right)^2+\left(\frac{\hat{V}_{2_{m1,m2+1}}-\hat{V}_{2_{m1,m2-1}}}{2h_2}\right)^2\right)-$$
$$-\frac{4}{3}\mu e^{-\hat{G}_{m1,m2}}\frac{\hat{V}_{1_{m1+1,m2}}-\hat{V}_{1_{m1-1,m2}}}{2h_1}\frac{\hat{V}_{2_{m1,m2+1}}-\hat{V}_{2_{m1,m2-1}}}{2h_2}+$$
$$+2\mu e^{-\hat{G}_{m1,m2}}\left(\left(\frac{\hat{V}_{1_{m1+1,m2}}-\hat{V}_{1_{m1-1,m2}}}{2h_1}\right)^2+\left(\frac{\hat{V}_{2_{m1,m2+1}}-\hat{V}_{2_{m1,m2-1}}}{2h_2}\right)^2\right)+$$
$$+2\mu e^{-\hat{G}_{m1,m2}}\left(\frac{\hat{V}_{2_{m1+1,m2}}-\hat{V}_{2_{m1-1,m2}}}{2h_1}+\frac{\hat{V}_{1_{m1,m2+1}}-\hat{V}_{1_{m1,m2-1}}}{2h_2}\right)^2, \tag{2..8}$$
$$\mathbf{x}\in\Omega_h$$

$$\hat{V}_k=0,\ \mathbf{x}\in\gamma_k^-,\ \hat{V}_k=0,\ \mathbf{x}\in\gamma_k^+,\ k=1,2$$

$$\hat{T}=\theta_{\gamma^-}(\mathbf{x},t),\ \mathbf{x}\in\gamma^-;\ \hat{T}=\theta_{\gamma^+}(\mathbf{x},t),\ \mathbf{x}\in\gamma^+$$

Напишем коэффициенты при слагаемых с верхнего слоя и выражение в правых частях из каждого уравнения:

1. $\hat{G}_{m1,m2}:\ 1$
   $\hat{G}_{m1-1,m2}:\ -\frac{\tau}{4h_1}(V_{1_{m1,m2}}+V_{1_{m1-1,m2}})$
   $\hat{G}_{m1+1,m2}:\ \frac{\tau}{4h_1}(V_{1_{m1,m2}}+V_{1_{m1+1,m2}})$
   $\hat{G}_{m1,m2-1}:\ -\frac{\tau}{4h_2}(V_{2_{m1,m2}}+V_{2_{m1,m2-1}})$
   $\hat{G}_{m1,m2+1}:\ \frac{\tau}{4h_2}(V_{2_{m1,m2}}+V_{2_{m1,m2+1}})$
   $\hat{V}_{1_{m1-1,m2}}:\ -\frac{\tau}{2h_1}$
   $\hat{V}_{2_{m1,m2-1}}:\ -\frac{\tau}{2h_2}$
   $\hat{V}_{1_{m1+1,m2}}:\ \frac{\tau}{2h_1}$
   $\hat{V}_{2_{m1,m2+1}}:\ \frac{\tau}{2h_2}$
   $d[m1,m2]:\ G_{m1,m2}+\frac{\tau}{2}\left(G_{m_1,m_2}\frac{V_{1_{m_1+1,m_2}}-V_{1_{m_1-1,m_2}}}{2h_1}+G_{m_1,m_2}\frac{V_{2_{m_1,m_2+1}}-V_{2_{m_1,m_2-1}}}{2h_2}\right)$
2. $\hat{G}_{0,m2}:\ (1-\frac{\tau}{2h_1}V_{1_{0,m2}})$
   $\hat{G}_{1,m2}:\ \frac{\tau}{2h_1}V_{1_{1,m2}}$
   $\hat{V}_{1_{0,m2}}:\ -\frac{\tau}{h_1}$
   $\hat{V}_{1_{1,m2}}:\ \frac{\tau}{h_1}$
   $d[0,m2]:\ G_{0,m2}+\tau\frac{G_{0,m_2}}{2}\left(\frac{V_{1_{1,m_2}}-V_{1_{0,m_2}}}{h_1}\right)-$
   $-\frac{\tau h_1}{2}\left(\frac{G_{2,m2}V_{1_{2,m_2}}-2G_{1,m2}V_{1_{1,m_2}}+G_{0,m2}V_{1_{0,m_2}}}{h_1^2}-0.5\frac{G_{3,m2}V_{1_{3,m_2}}-2G_{2,m2}V_{1_{2,m_2}}+G_{1,m2}V_{1_{1,m_2}}}{h_1^2}\right)-$
   $\frac{\tau h_1}{2}(2-G_{0,m_2})\left(\frac{V_{1_{2,m_2}}-2V_{1_{1,m_2}}+V_{1_{0,m_2}}}{h_1^2}-0.5\frac{V_{1_{3,m_2}}-2V_{1_{2,m_2}}+V_{1_{1,m_2}}}{h_1^2}\right)$
3. $\hat{G}_{M1,m2}:\ (1+\frac{\tau}{2h_1}V_{1_{M1,m2}})$
   $\hat{G}_{M1-1,m2}:\ -\frac{\tau}{2h_1}V_{1_{M1-1,m2}}$
   $\hat{V}_{1_{M1-1,m2}}:\ -\frac{\tau}{h_1}$
   $\hat{V}_{1_{M1,m2}}:\ \frac{\tau}{h_1}$
   $d[M1,m2]:\ G_{M1,m2}+\tau\frac{G_{M_1,m_2}}{2}\left(\frac{V_{1_{M_1,m_2}}-V_{1_{M_1-1,m_2}}}{h_1}\right)-$
   $-\frac{\tau h_1}{2}\frac{G_{M_1,m2}V_{1_{M_1,m_2}}-2G_{M_1-1,m2}V_{1_{M_1-1,m_2}}+G_{M_1-2,m2}V_{1_{M_1-2,m_2}}}{h_1^2}+$
   $+0.25\tau h_1\frac{G_{M_1-1,m2}V_{1_{M_1-1,m_2}}-2G_{M_1-2,m2}V_{1_{M_1-2,m_2}}+G_{M_1-3,m2}V_{1_{M_1-3,m_2}}}{h_1^2}-$
   $-\frac{\tau h_1}{2}(2-G_{M_1,m_2})\left(\frac{V_{1_{M_1,m_2}}-2V_{1_{M_1-1,m_2}}+V_{1_{M_1-2,m_2}}}{h_1^2}-0.5\frac{V_{1_{M_1-1,m_2}}-2V_{1_{M_1-2,m_2}}+V_{1_{M_1-3,m_2}}}{h_1^2}\right)$
4. $\hat{G}_{m1,0}:\ (1-\frac{\tau}{2h_2}V_{2_{m1,0}})$
   $\hat{G}_{m1,1}:\ \frac{\tau}{2h_2}V_{2_{m1,1}}$

$\hat{V}_{2_{m1,0}}:\ -\frac{\tau}{h_2}$

$\hat{V}_{2_{m1,1}}:\ \frac{\tau}{h_2}$

$d[m1,0]:\ G_{m1,0}+\tau\frac{G_{m_1,0}}{2}\left(\frac{V_{2_{m_1,1}}-V_{2_{m_1,0}}}{h_2}\right)-$
$-\tau\frac{h_2}{2}\left(\frac{G_{m_1,2}V_{2_{m_1,2}}-2G_{m_1,1}V_{2_{m_1,1}}+G_{m_1,0}V_{2_{m_1,0}}}{h_2^2}-0.5\frac{G_{m_1,3}V_{2_{m_1,3}}-2G_{m_1,2}V_{2_{m_1,2}}+G_{m_1,1}V_{2_{m_1,1}}}{h_2^2}\right)-$
$\tau\frac{h_2}{2}(2-G_{m_1,0})\left(\frac{V_{2_{m_1,2}}-2V_{2_{m_1,1}}+V_{1_{m_1,0}}}{h_2^2}-0.5\frac{V_{2_{m_1,3}}-2V_{2_{m_1,2}}+V_{2_{m_1,1}}}{h_2^2}\right)$

5. $\hat{G}_{m1,M2}:\ (1+\frac{\tau}{2h_2}V_{2_{m1,M2}})$

   $\hat{G}_{m1,M2-1}:\ -\frac{\tau}{2h_2}V_{2_{m1,M2-1}}$

   $\hat{V}_{2_{m1,M2-1}}:\ -\frac{\tau}{h_2}$

   $\hat{V}_{2_{m1,M2}}:\ \frac{\tau}{h_2}$

   $d[m1,M2]:\ G_{m1,M2}+\tau\frac{G_{m_1,M_2}}{2}\left(\frac{V_{2_{m_1,M_2}}-V_{2_{m_1,M_2-1}}}{h_2}\right)-$
   $-\tau\frac{h_2}{2}\frac{G_{m_1,M_2}V_{2_{m_1,M_2}}-2G_{m_1,M_2-1}V_{2_{m_1,M_2-1}}+G_{m_1,M_2-2}V_{2_{m_1,M_2-2}}}{h_2^2}+$
   $+0.25\tau h_2\frac{G_{m_1,M_2-1}V_{2_{m_1,M_2-1}}-2G_{m_1M_2-2}V_{2_{m_1,M_2-2}}+G_{m_1,M_2-3}V_{2_{m_1,M_2-3}}}{h_2^2}-$
   $-\tau\frac{h_1}{2}(2-G_{m_1,M_2})\left(\frac{V_{2_{m_1,M_2}}-2V_{2_{m_1,M_2-1}}+V_{2_{m_1,M_2-2}}}{h_2^2}-0.5\frac{V_{2_{m_1,M_2-1}}-2V_{2_{m_1,M_2-2,}}+V_{2_{m_1,M_2-3}}}{h_2^2}\right)$

6. $\hat{V}_{1_{m1,m2}}:\ 1+\frac{8\tau\tilde{\mu}}{3h_1^2}+\frac{2\tau\tilde{\mu}}{h_2^2}$

   $\hat{V}_{1_{m1+1,m2}}:\ \frac{\tau}{6h_1}V_{1_{m1,m2}}+\frac{\tau}{6h_1}V_{1_{m1+1,m2}}-\frac{4\tau\tilde{\mu}}{3h_1^2}$

   $\hat{V}_{1_{m1-1,m2}}:\ -\frac{\tau}{6h_1}V_{1_{m1,m2}}-\frac{\tau}{6h_1}V_{1_{m1-1,m2}}-\frac{4\tau\tilde{\mu}}{3h_1^2}$

   $\hat{V}_{1_{m1,m2+1}}:\ \frac{\tau}{4h_2}V_{2_{m1,m2}}+\frac{\tau}{4h_2}V_{2_{m1,m2+1}}-\frac{\tau\tilde{\mu}}{h_2^2}$

   $\hat{V}_{1_{m1,m2-1}}:\ -\frac{\tau}{4h_2}V_{2_{m1,m2}}-\frac{\tau}{4h_2}V_{2_{m1,m2-1}}-\frac{\tau\tilde{\mu}}{h_2^2}$

   $\hat{G}_{m1-1,m2}:\ -RT_{m1,m2}\frac{\tau}{2h_1}$

   $\hat{G}_{m1+1,m2}:\ RT_{m1,m2}\frac{\tau}{2h_1}$

7. $\hat{V}_{2_{m1,m2}}:\ 1+\frac{8\tau\tilde{\mu}}{3h_2^2}+\frac{2\tau\tilde{\mu}}{h_1^2}$

   $\hat{V}_{2_{m1,m2+1}}:\ \frac{\tau}{6h_2}V_{2_{m1,m2}}+\frac{\tau}{6h_2}V_{2_{m1,m2+1}}-\frac{4\tau\tilde{\mu}}{3h_2^2}$

   $\hat{V}_{2_{m1,m2-1}}:\ -\frac{\tau}{6h_2}V_{2_{m1,m2}}-\frac{\tau}{6h_2}V_{2_{m1,m2-1}}-\frac{4\tau\tilde{\mu}}{3h_2^2}$

   $\hat{V}_{2_{m1+1,m2}}:\ \frac{\tau}{4h_1}V_{1_{m1,m2}}+\frac{\tau}{4h_1}V_{1_{m1+1,m2}}-\frac{\tau\tilde{\mu}}{h_1^2}$

   $\hat{V}_{2_{m1-1,m2}}:\ -\frac{\tau}{4h_1}V_{1_{m1,m2}}-\frac{\tau}{4h_1}V_{1_{m1-1,m2}}-\frac{\tau\tilde{\mu}}{h_1^2}$

   $\hat{G}_{m1,m2-1}:\ -RT_{m1,m2}\frac{\tau}{2h_2}$

   $\hat{G}_{m1,m2+1}:\ RT_{m1,m2}\frac{\tau}{2h_2}$

8. $\hat{T}_{m1,m2}:\ c_v + \frac{2\tau\tilde{\kappa}}{h_1^2} + \frac{2\tau\tilde{\kappa}}{h_2^2}$
$\hat{T}_{m1+1,m2}:\ c_v \frac{\tau}{4h_1}(\hat{V}_{1_{m1,m2}} + \hat{V}_{1_{m1+1,m2}}) - \frac{\tau\tilde{\kappa}}{h_1^2}$
$\hat{T}_{m1-1,m2}:\ -c_v \frac{\tau}{4h_1}(\hat{V}_{1_{m1,m2}} + \hat{V}_{1_{m1-1,m2}}) - \frac{\tau\tilde{\kappa}}{h_1^2}$
$\hat{T}_{m1,m2+1}:\ c_v \frac{\tau}{4h_2}(\hat{V}_{2_{m1,m2}} + \hat{V}_{2_{m1,m2+1}}) - \frac{\tau\tilde{\kappa}}{h_2^2}$
$\hat{T}_{m1,m2-1}:\ -c_v \frac{\tau}{4h_2}(\hat{V}_{2_{m1,m2}} + \hat{V}_{2_{m1,m2-1}}) - \frac{\tau\tilde{\kappa}}{h_2^2}$

Функции $\hat{G}, \hat{V}, \hat{T}$, составляющие решение на верхнем слое, ищутся последовательно как решение двух систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} A^{gv} \begin{pmatrix} \hat{G} \\ \hat{\mathbf{V}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \\ A^t \hat{T} = B_t \end{cases},$$

где матрица A^{gv} является девятидиагональной и умножается на вектор

$$(\hat{G}, \hat{\mathbf{V}}) = (G_{00}, V_{1_{00}}, V_{2_{00}}, \ldots, G_{M_1 0}, V_{1_{M0}}, V_{2_{M0}}, \ldots, G_{M_1 M_2}, V_{1_{M_1 M_2}}, V_{2_{M_1 M_2}}),$$

а матрица A^t является пятидиагональной и умножается на вектор

$$\hat{T} = (T_{00}, T_{10}, \ldots, T_{M_1 0}, T_{01}, T_{11}, \ldots, T_{M_1 1}, \ldots, T_{M_1 M_2}).$$

Сначала решается уравнение на G, V, в котором с нижнего временного слоя будут браться значения Т. Далее, используя уже вычисленные значения $\hat{G}, \hat{V}$, ищем решение уравнения на Т.

Оба уравнения будут иметь единственное решение т.к. матрица A^t представляется в виде: $A^t = c_v E + c_v A_1^t + \tilde{\kappa} A_2^t$, где A_1^t - кососимметрическая матрица, A_2^t - матрица разностного оператора второй производной в двумерном случае. Таким образом выполнится условие: $(A^t x, x) = (Ex, x) + c_v (A_1^t x, x) + \tilde{\kappa}(A_2^t x, x) \geq (Ex, x) > 0$, $\forall x \neq 0$. Матрица A^{gv} имеет, с некоторыми усложнениями, аналогичный матрице A^t вид.

3. Отладочный тест

Для отладки программы, реализующей разностную схему, проверим её на наличие ошибок с помощью задачи, имеющей точное гладкое решение. Здесь и далее расчёты проводятся в области $\Omega = \Omega_{00} \cup \Omega_{10} \cup \Omega_{20} \cup \Omega_{11} \cup \Omega_{21}$.

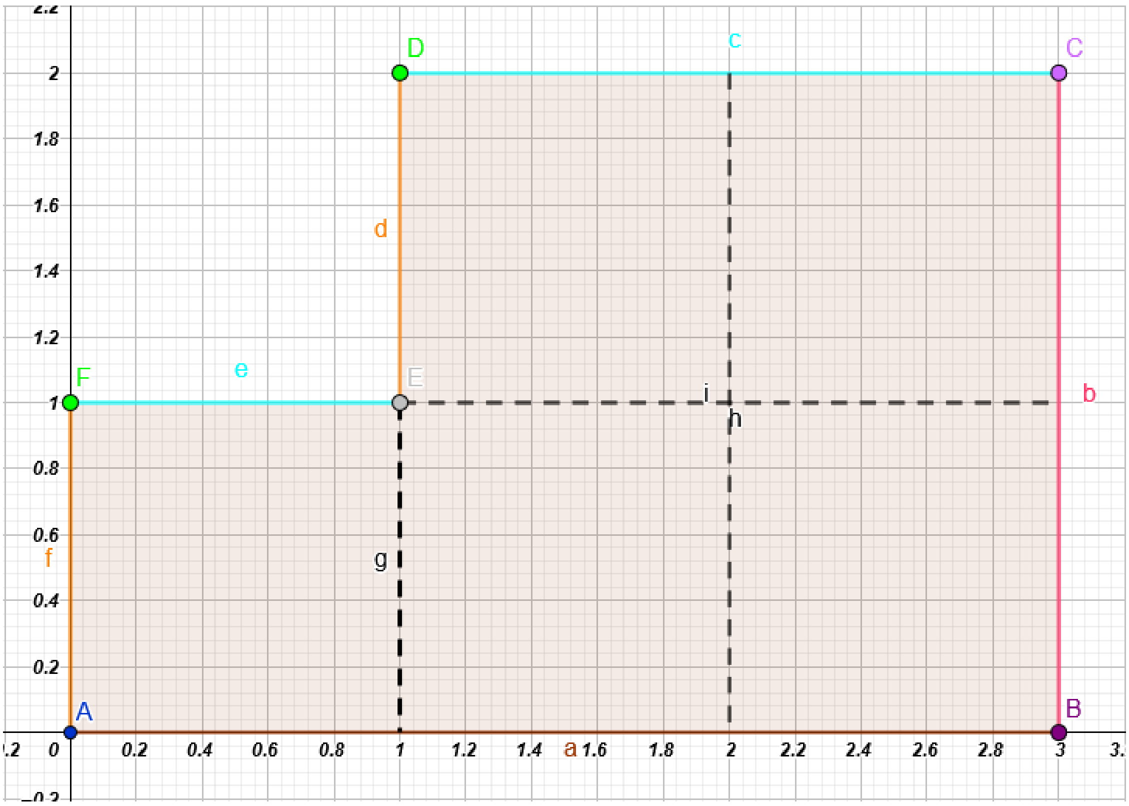


рис.1

На рисунке сплошные отрезки разных цветов соответствуют разным типам границ, а вершины разных цветов - различным типам угловых узлов.

Гладкие функции u_1, u_2, g, θ, использовавшиеся для отладки программы:

$u_1(t, x_1, x_2) = sin(2\pi x_1) sin(2\pi x_2) e^t$

$u_2(t, x_1, x_2) = sin(2\pi x_1) sin(2\pi x_2) e^{-t}$

$g(t, x_1, x_2) = log((cos(2\pi x_1) + \frac{3}{2})(sin(2\pi x_2) + \frac{3}{2}) e^t)$

$\theta(t, x_1, x_2) = (cos(3\pi x_1) + \frac{3}{2})(sin(3\pi x_2) + \frac{3}{2}) e^t$

Соответственно, к правым частям уравнений добавляются следующие выражения:

1. $fg = 1 + e^t sin(2\pi x_1) sin(2\pi x_2) \frac{-2\pi sin(2\pi x_1)}{cos(2\pi x_1) + \frac{3}{2}} + e^{-t} sin(2\pi x_1) sin(2\pi x_2) \frac{2\pi cos(2\pi x_2)}{sin(2\pi x_2) + \frac{3}{2}} +$ $+ 2\pi e^t cos(2\pi x_1) sin(2\pi x_2) + 2\pi e^{-t} sin(2\pi x_1) cos(2\pi x_2)$

2. $fu1 = e^t sin(2\pi x_1) sin(2\pi x_2)+$
$+2\pi e^{2t} sin(2\pi x_1) sin^2(2\pi x_2) cos(2\pi x_1) + 2\pi sin(2\pi x_2) sin^2(2\pi x_1) cos(2\pi x_2)+$
$+Re^t(cos(3\pi x_1)+\frac{3}{2})(sin(3\pi x_2)+\frac{3}{2})\frac{-2\pi sin(2\pi x_1)}{cos(2\pi x_1)+\frac{3}{2}}+$
$-3\pi Re^t sin(3\pi x_1)(sin(3\pi x_2)+\frac{3}{2}) - res,$

   где $res1 = \big[-\frac{4}{3}\mu 4\pi^2 e^t sin(2\pi x_1) sin(2\pi x_2) - \mu 4\pi^2 e^t sin(2\pi x_1) sin(2\pi x_2)+$
$+\frac{1}{3}\mu 4\pi^2 e^{-t} cos(2\pi x_1) cos(2\pi x_2)\big]/res2$

   $res2 = e^{g(t,x_1,x_2)},$

3. $ft = res1 - res3/res2 - res4/res2 - res5/res2 + res6,$

   где $res1 = c_v\big[(cos(3\pi x_1)+1.5)(sin(3\pi x_2)+1.5)e^t - 3\pi sin(3\pi x_1)(sin(3\pi x_2)+$
$1.5)e^{2t} sin(2\pi x_1) sin(2\pi x_2) + 3\pi(cos(3\pi x_1)+1.5) cos(3\pi x_2) sin(2\pi x_1) sin(2\pi x_2)\big],$

   $res2 = e^{g(t,x_1,x_2)},$

   $res3 = -9\pi^2\kappa e^t\big[cos(3\pi x_1)(sin(3\pi x_2)+\frac{3}{2}) - (cos(3\pi x_1)+\frac{3}{2}) sin(3\pi x_2)\big]$

   $res4 = -\frac{2}{3}\mu 4\pi^2\big[cos^2(2\pi x_1) sin^2(2\pi x_2) e^{2t} + sin^2(2\pi x_1) cos^2(2\pi x_2) e^{-2t}+$
$+2cos(2\pi x_1) cos(2\pi x_2) sin(2\pi x_1) sin(2\pi x_2)\big]$

   $res5 = 2\mu 4\pi^2\big[(cos(2\pi x_1) sin(2\pi x_2) e^{2t})(cos(2\pi x_1) sin(2\pi x_2))+$
$+(sin(2\pi x_1) cos(2\pi x_2) e^{-2t})(sin(2\pi x_1) cos(2\pi x_2))+$
$+0.5(cos(2\pi x_1) sin(2\pi x_2) e^t + sin(2\pi x_1) cos(2\pi x_2) e^{-t})(cos(2\pi x_1) sin(2\pi x_2) e^t+$
$sin(2\pi x_1) cos(2\pi x_2) e^{-t})\big]$

   $res6 = R\theta(t,x_1,x_2)\big[2\pi cos(2\pi x_1) sin(2\pi x_2) e^t + 2\pi sin(2\pi x_1) cos(2\pi x_2) e^{-t}\big]$

4. Отладочный тест: результаты в таблицах

В результате работы программы были получены следующие таблицы норм ошибок для различных μ (в каждой ячейке записано 3 числа: первое - норма ошибки в C, второе - норма ошибки в L_2, третье - время работы программы на данной сетке):

$\mu = 0.1$:

Таблица для u_1

$\tau \setminus h_1, h_2$	$h_1 = 0.05000$, $h_2 = 0.05000$	$h_1 = 0.02500$, $h_2 = 0.02500$	$h_1 = 0.01250$, $h_2 = 0.01250$
0.01250	$3.391e-001$ $2.224e-001$ $1.572e+001$	$2.159e-001$ $1.264e-001$ $1.760e+002$	$0.000e+000$ $0.000e+000$ $8.310e+002$
0.00625	$3.164e-001$ $1.816e-001$ $2.309e+001$	$1.095e-001$ $7.261e-002$ $1.623e+002$	$1.081e-001$ $5.637e-002$ $2.260e+003$
0.00313	$3.048e-001$ $1.670e-001$ $3.226e+001$	$8.687e-002$ $4.920e-002$ $1.806e+002$	$5.263e-002$ $2.988e-002$ $1.391e+003$
0.00156	$3.037e-001$ $1.618e-001$ $5.411e+001$	$7.589e-002$ $3.984e-002$ $2.700e+002$	$2.798e-002$ $1.747e-002$ $1.643e+003$

Таблица для u_2

$\tau \setminus h_1, h_2$	$h_1 = 0.05000$, $h_2 = 0.05000$	$h_1 = 0.02500$, $h_2 = 0.02500$	$h_1 = 0.01250$, $h_2 = 0.01250$
0.01250	$7.500e-002$ $5.556e-002$ $1.572e+001$	$4.380e-002$ $3.040e-002$ $1.760e+002$	$0.000e+000$ $0.000e+000$ $8.310e+002$
0.00625	$6.488e-002$ $4.499e-002$ $2.309e+001$	$2.298e-002$ $1.753e-002$ $1.623e+002$	$1.698e-002$ $1.260e-002$ $2.260e+003$
0.00313	$6.835e-002$ $4.200e-002$ $3.226e+001$	$1.830e-002$ $1.244e-002$ $1.806e+002$	$9.000e-003$ $6.809e-003$ $1.391e+003$
0.00156	$6.987e-002$ $4.112e-002$ $5.411e+001$	$1.716e-002$ $1.049e-002$ $2.700e+002$	$5.897e-003$ $4.208e-003$ $1.643e+003$

Таблица для g

$\tau \setminus h_1, h_2$	$h_1 = 0.05000$, $h_2 = 0.05000$	$h_1 = 0.02500$, $h_2 = 0.02500$	$h_1 = 0.01250$, $h_2 = 0.01250$
0.01250	$1.254e+000$ $4.536e-001$ $1.572e+001$	$8.020e-001$ $2.640e-001$ $1.760e+002$	$0.000e+000$ $0.000e+000$ $8.310e+002$
0.00625	$1.225e+000$ $3.715e-001$ $2.309e+001$	$4.160e-001$ $1.454e-001$ $1.623e+002$	$4.470e-001$ $1.159e-001$ $2.260e+003$
0.00313	$1.212e+000$ $3.504e-001$ $3.226e+001$	$3.446e-001$ $9.449e-002$ $1.806e+002$	$2.064e-001$ $5.991e-002$ $1.391e+003$
0.00156	$1.221e+000$ $3.472e-001$ $5.411e+001$	$3.067e-001$ $7.410e-002$ $2.700e+002$	$1.198e-001$ $3.373e-002$ $1.643e+003$

Таблица для θ

$\tau \setminus h_1, h_2$	$h_1 = 0.05000$, $h_2 = 0.05000$	$h_1 = 0.02500$, $h_2 = 0.02500$	$h_1 = 0.01250$, $h_2 = 0.01250$
0.01250	$3.038e+000$ $1.572e+000$ $1.572e+001$	$2.110e+000$ $7.368e-001$ $1.760e+002$	$0.000e+000$ $0.000e+000$ $8.310e+002$
0.00625	$3.023e+000$ $1.536e+000$ $2.309e+001$	$1.203e+000$ $4.803e-001$ $1.623e+002$	$1.199e+000$ $3.706e-001$ $2.260e+003$
0.00313	$2.994e+000$ $1.546e+000$ $3.226e+001$	$7.032e-001$ $3.890e-001$ $1.806e+002$	$6.492e-001$ $2.057e-001$ $1.391e+003$
0.00156	$2.975e+000$ $1.559e+000$ $5.411e+001$	$6.751e-001$ $3.682e-001$ $2.700e+002$	$3.396e-001$ $1.332e-001$ $1.643e+003$

$\mu = 0.01$: Таблица для u_1

$\tau \setminus h_1, h_2$	$h_1 = 0.05000$, $h_2 = 0.05000$	$h_1 = 0.02500$, $h_2 = 0.02500$	$h_1 = 0.01250$, $h_2 = 0.01250$
0.01250	$4.906e-001$ $3.189e-001$ $1.709e+001$	$2.310e-001$ $1.111e-001$ $9.365e+001$	$0.000e+000$ $0.000e+000$ $4.798e+002$
0.00625	$4.810e-001$ $2.303e-001$ $2.002e+001$	$1.996e-001$ $6.532e-002$ $8.678e+001$	$1.550e-001$ $5.198e-002$ $7.202e+002$
0.00313	$4.906e-001$ $2.091e-001$ $3.641e+001$	$1.932e-001$ $4.914e-002$ $1.289e+002$	$7.405e-002$ $2.743e-002$ $6.707e+002$
0.00156	$5.180e-001$ $1.910e-001$ $5.986e+001$	$1.922e-001$ $4.474e-002$ $1.921e+002$	$4.634e-002$ $1.619e-002$ $8.967e+002$

Таблица для u_2

$\tau \setminus h_1, h_2$	$h_1 = 0.05000$, $h_2 = 0.05000$	$h_1 = 0.02500$, $h_2 = 0.02500$	$h_1 = 0.01250$, $h_2 = 0.01250$
0.01250	$9.064e-002$ $8.098e-002$ $1.709e+001$	$5.769e-002$ $2.876e-002$ $9.365e+001$	$0.000e+000$ $0.000e+000$ $4.798e+002$
0.00625	$7.414e-002$ $6.253e-002$ $2.002e+001$	$3.915e-002$ $1.903e-002$ $8.678e+001$	$3.235e-002$ $1.332e-002$ $7.202e+002$
0.00313	$7.533e-002$ $5.909e-002$ $3.641e+001$	$3.366e-002$ $1.524e-002$ $1.289e+002$	$1.817e-002$ $7.562e-003$ $6.707e+002$
0.00156	$8.258e-002$ $5.682e-002$ $5.986e+001$	$3.368e-002$ $1.394e-002$ $1.921e+002$	$1.097e-002$ $4.905e-003$ $8.967e+002$

Таблица для g

$\tau \setminus h_1, h_2$	$h_1 = 0.05000$, $h_2 = 0.05000$	$h_1 = 0.02500$, $h_2 = 0.02500$	$h_1 = 0.01250$, $h_2 = 0.01250$
0.01250	$8.337e+000$ $1.030e+000$ $1.709e+001$	$4.300e+000$ $4.793e-001$ $9.365e+001$	$0.000e+000$ $0.000e+000$ $4.798e+002$
0.00625	$7.367e+000$ $9.047e-001$ $2.002e+001$	$2.547e+000$ $2.873e-001$ $8.678e+001$	$1.199e+000$ $1.558e-001$ $7.202e+002$
0.00313	$7.884e+000$ $9.019e-001$ $3.641e+001$	$1.772e+000$ $2.087e-001$ $1.289e+002$	$6.096e-001$ $8.368e-002$ $6.707e+002$
0.00156	$8.341e+000$ $9.467e-001$ $5.986e+001$	$1.508e+000$ $1.842e-001$ $1.921e+002$	$4.192e-001$ $5.282e-002$ $8.967e+002$

Таблица для θ

$\tau \setminus h_1, h_2$	$h_1 = 0.05000$, $h_2 = 0.05000$	$h_1 = 0.02500$, $h_2 = 0.02500$	$h_1 = 0.01250$, $h_2 = 0.01250$
0.01250	$2.744e+000$ $1.333e+000$ $1.709e+001$	$1.757e+000$ $5.688e-001$ $9.365e+001$	$0.000e+000$ $0.000e+000$ $4.798e+002$
0.00625	$2.837e+000$ $1.409e+000$ $2.002e+001$	$8.977e-001$ $3.837e-001$ $8.678e+001$	$1.238e+000$ $2.883e-001$ $7.202e+002$
0.00313	$2.861e+000$ $1.457e+000$ $3.641e+001$	$6.701e-001$ $3.445e-001$ $1.289e+002$	$5.822e-001$ $1.523e-001$ $6.707e+002$
0.00156	$2.874e+000$ $1.490e+000$ $5.986e+001$	$6.542e-001$ $3.481e-001$ $1.921e+002$	$2.805e-001$ $1.000e-001$ $8.967e+002$

$\mu = 0.001$: Таблица для u_1

$\tau \setminus h_1, h_2$	$h_1 = 0.05000$, $h_2 = 0.05000$	$h_1 = 0.02500$, $h_2 = 0.02500$	$h_1 = 0.01250$, $h_2 = 0.01250$
0.01250	$8.488e-001$ $9.445e-001$ $2.531e+001$	$0.000e+000$ $0.000e+000$ $5.190e+002$	$0.000e+000$ $0.000e+000$ $1.335e+003$
0.00625	$8.684e-001$ $9.625e-001$ $3.565e+001$	$2.794e-001$ $7.005e-002$ $7.374e+001$	$2.119e-001$ $6.755e-002$ $5.373e+002$
0.00313	$8.769e-001$ $9.704e-001$ $6.287e+001$	$2.180e-001$ $4.772e-002$ $1.037e+002$	$9.314e-002$ $3.229e-002$ $4.528e+002$
0.00156	$8.755e-001$ $9.677e-001$ $1.183e+002$	$1.882e-001$ $4.319e-002$ $1.859e+002$	$6.364e-002$ $1.686e-002$ $7.523e+002$

Таблица для u_2

$\tau \setminus h_1, h_2$	$h_1 = 0.05000$, $h_2 = 0.05000$	$h_1 = 0.02500$, $h_2 = 0.02500$	$h_1 = 0.01250$, $h_2 = 0.01250$
0.01250	$2.215e-001$ $2.428e-001$ $2.531e+001$	$0.000e+000$ $0.000e+000$ $5.190e+002$	$0.000e+000$ $0.000e+000$ $1.335e+003$
0.00625	$2.189e-001$ $2.414e-001$ $3.565e+001$	$5.841e-002$ $2.495e-002$ $7.374e+001$	$5.940e-002$ $1.919e-002$ $5.373e+002$
0.00313	$2.177e-001$ $2.406e-001$ $6.287e+001$	$5.782e-002$ $1.996e-002$ $1.037e+002$	$3.529e-002$ $1.065e-002$ $4.528e+002$
0.00156	$2.159e-001$ $2.382e-001$ $1.183e+002$	$5.177e-002$ $1.820e-002$ $1.859e+002$	$1.938e-002$ $6.411e-003$ $7.523e+002$

Таблица для g

$\tau \setminus h_1, h_2$	$h_1 = 0.05000$, $h_2 = 0.05000$	$h_1 = 0.02500$, $h_2 = 0.02500$	$h_1 = 0.01250$, $h_2 = 0.01250$
0.01250	$5.199e+001$ $3.420e+000$ $2.531e+001$	$0.000e+000$ $0.000e+000$ $5.190e+002$	$0.000e+000$ $0.000e+000$ $1.335e+003$
0.00625	$9.421e+001$ $5.210e+000$ $3.565e+001$	$6.330e+000$ $4.978e-001$ $7.374e+001$	$4.808e+000$ $3.083e-001$ $5.373e+002$
0.00313	$1.335e+002$ $7.121e+000$ $6.287e+001$	$3.287e+000$ $2.901e-001$ $1.037e+002$	$2.279e+000$ $1.626e-001$ $4.528e+002$
0.00156	$1.623e+002$ $8.528e+000$ $1.183e+002$	$2.378e+000$ $2.365e-001$ $1.859e+002$	$1.161e+000$ $8.999e-002$ $7.523e+002$

Таблица для θ

$\tau \setminus h_1, h_2$	$h_1 = 0.05000$, $h_2 = 0.05000$	$h_1 = 0.02500$, $h_2 = 0.02500$	$h_1 = 0.01250$, $h_2 = 0.01250$
0.01250	$3.850e+000$ $2.683e+000$ $2.531e+001$	$0.000e+000$ $0.000e+000$ $5.190e+002$	$0.000e+000$ $0.000e+000$ $1.335e+003$
0.00625	$4.111e+000$ $2.822e+000$ $3.565e+001$	$1.388e+000$ $4.098e-001$ $7.374e+001$	$1.662e+000$ $3.356e-001$ $5.373e+002$
0.00313	$4.203e+000$ $2.859e+000$ $6.287e+001$	$8.085e-001$ $3.561e-001$ $1.037e+002$	$8.553e-001$ $1.715e-001$ $4.528e+002$
0.00156	$4.224e+000$ $2.861e+000$ $1.183e+002$	$6.828e-001$ $3.573e-001$ $1.859e+002$	$4.267e-001$ $1.058e-001$ $7.523e+002$

Из таблиц можно сделать вывод, что решение РС сходится с регламентированной скоростью $O(\tau+h^2)$. Также из таблиц видно, что из-за отчасти явного характера схемы существуют некоторые ограничения на шаги сетки по времени и по пространству, однако для получения желаемой точности решения, можно при фиксированном шаге h по пространству достаточно существенно уменьшать шаг по времени τ, что лишь линейно повлияет на время работы программы.

5. Вложенные сетки

Для получения ответа на вопрос о точности решения, полученного на сетке $Q_{\tau,\mathbf{h}}$, в случае, когда точное решение неизвестно, используют расчёты на вложенных сетках $Q_{\tau/2^k,\mathbf{h}/2^k}$. В данном случае точная функция известна, и вышеуказанные таблицы позволяют нам судить о том, что сходимость РС есть, однако в качестве дополнительной проверки, произведём расчёты на вложенных сетках.

Ниже в таблицах, в столбцах 1, 2, 3 представлены значения норм ошибок решения, полученного на сетках $Q_{\tau/2,\mathbf{h}/2}$, $Q_{\tau/4,\mathbf{h}/4}$ и $Q_{\tau/8,\mathbf{h}/8}$ соответственно. В первом столбце представлены нормы ошибок для оригинальной сетки $Q_{\tau,\mathbf{h}}$.

$\mu = 0.1$: Таблица для u_1

$k \setminus \tau, h$	1	2	original
$\tau = 0.01250,$ $h = 0.05000$	$2.450e-001$ $6.677e-002$	$3.058e-001$ $8.518e-002$	$3.391e-001$ $2.227e-001$
$\tau = 0.00625,$ $h = 0.02500$	$7.020e-002$ $1.923e-002$	$9.343e-002$ $2.636e-002$	$1.095e-001$ $7.263e-002$

Таблица для u_2

$k \setminus \tau, h$	1	2	original
$\tau = 0.01250,$ $h = 0.05000$	$5.387e-002$ $1.699e-002$	$6.729e-002$ $2.161e-002$	$7.500e-002$ $5.563e-002$
$\tau = 0.00625,$ $h = 0.02500$	$1.437e-002$ $4.833e-003$	$1.915e-002$ $6.499e-003$	$2.298e-002$ $1.754e-002$

Таблица для g

$k \setminus \tau, h$	1	2	original
$\tau = 0.01250,$ $h = 0.05000$	$8.546e-001$ $1.313e-001$	$1.097e+000$ $1.672e-001$	$1.254e+000$ $4.541e-001$
$\tau = 0.00625,$ $h = 0.02500$	$2.513e-001$ $3.639e-002$	$3.440e-001$ $5.052e-002$	$4.160e-001$ $1.455e-001$

Таблица для θ

$k \setminus \tau, h$	1	2	original
$\tau = 0.01250,$ $h = 0.05000$	$2.424e+000$ $5.240e-001$	$2.860e+000$ $6.339e-001$	$3.038e+000$ $1.574e+000$
$\tau = 0.00625,$ $h = 0.02500$	$6.955e-001$ $1.370e-001$	$9.408e-001$ $1.777e-001$	$1.203e+000$ $4.805e-001$

Как видно из таблиц, нормы ошибок на вложенных сетках оценивают нормы ошибок, полученных на точном решении, снизу, причём эта оценка улучшается с возрастанием параметра k, в чём и требовалось убедиться.

6. Задача протекания

Постановка задачи

Напомним, что расчёты производятся в области $\Omega = \Omega_{00} \cup \Omega_{10} \cup \Omega_{20} \cup \Omega_{11} \cup \Omega_{21}$ (рис.2). В область Ω через границу AF набегает поток, имеющий отличные от газа внутри области характеристики: плотность, скорость и температуру. Отметим, что вследствие этого несколько меняются значения статусов границ, подробнее об этом будет изложено ниже.

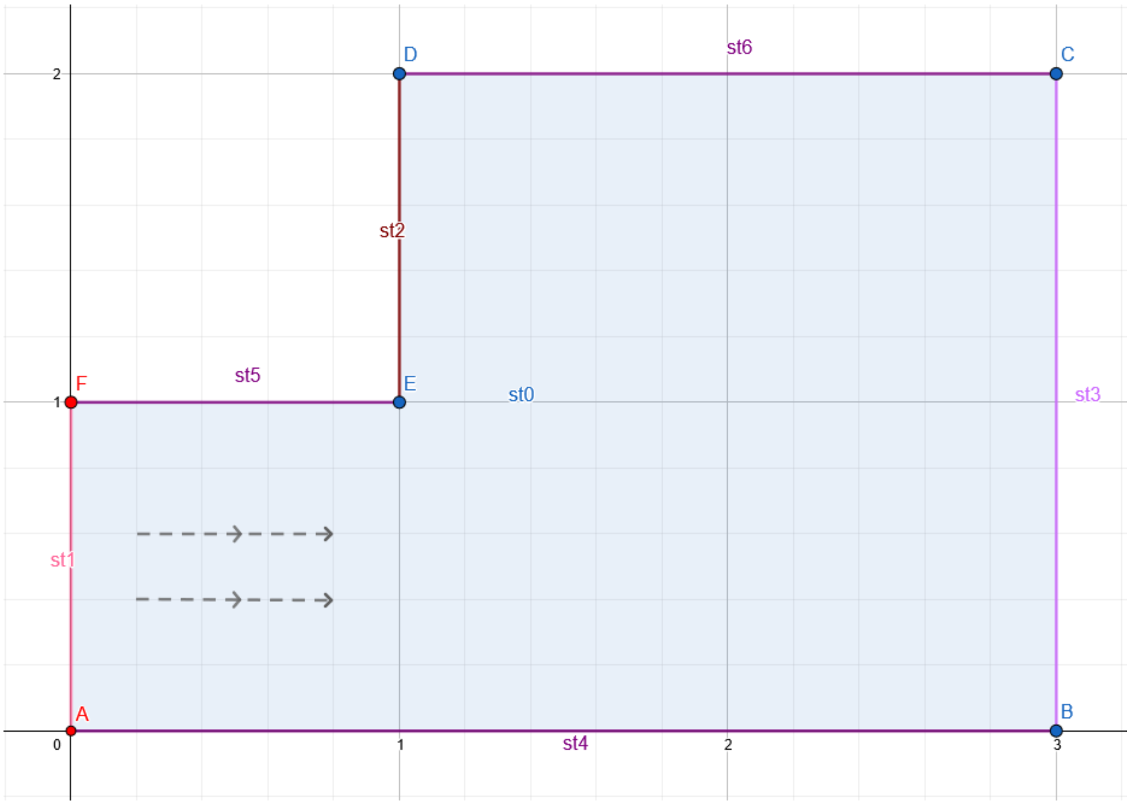


рис.2

Важным в данном случае является изменение начальных и краевых условий:

1. $\mathbf{u}(0,\mathbf{x}) = g(0,\mathbf{x}) = 0,$

2. Характеристики набегающего потока

   (a) $u_1(t,0,x_2) = \tilde{v} = const > 0$, $u_2(t,0,x_2) = 0,$

   (b) $g(t,0,x_2) = \tilde{g} = const > 1,$

   (c) $\theta(t,0,x_2) = \tilde{\theta} = const > 293(K), 0 \le x_2 \le 1$

3. (a) $u_1(t,0,x_2) = 0$, $u_2(t,0,x_2) = 0,$

   (b) $g(t,0,x_2) = 0,$

   (c) $\theta(t,0,x_2) = 293(K), 1 < x_2 \le 2$

4. $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}|_{x_1=X_1} = 0$

5. $u_1(t,x_1,X_2) = 0$, $u_1(t,x1,0) = 0$, $u_2(t,\mathbf{X}) = 0$, $u_2(t,x1,0) = 0,$

6. $\frac{\partial \theta}{\partial \vec{n}}|_{x_2=0,\mathbf{x}=\mathbf{X}} = 0$ - характеризует теплоизолированность "верхних"и "нижних"стенок, стабилизацию температуры на правой границе.

Таким образом, левые границы области становятся различными по своей сути - через границу AF газ втекает, а на границе DE выполняются условия прилипания.

Вычисления будут производиться до момента времени $N\tau$, для которого $||(G^{N\tau}, \mathbf{V}^{N\tau}, T^{N\tau}) - (G^{n_{st}}, \mathbf{V}^{n_{st}}, T^{n_{st}})||_C < \epsilon$, где ϵ определяется опытным путём. Ввиду изменившихся начально-краевых условий, схема также претерпит модификации:

1. Из (4),(6):

$$\hat{V}_{1_{M1,m2}} - \hat{V}_{1_{M1-1,m2}} = 0,\ m2 = 0, ..M_2$$

$$\hat{T}_{M1,m2} - \hat{T}_{M1-1,m2} = 0,\ m2 = 0, ..M_2$$

$$\hat{T}_{m1,1} - \hat{T}_{m1,0} = 0,\ m1 = 0, ..M_1$$

$$\hat{T}_{m1,M2} - \hat{T}_{m1,M2-1} = 0,\ m1 = 0, ..M_1$$

2. Из условиq (2),(4) следует исчезновение уравнения (2) и замена разностного уравнения (3):

$$G_t + \left(V_{1_{M1,m2}} \frac{\hat{G}_{M1,m2} - \hat{G}_{M1-1,m2}}{h_1} \right) = 0,\ m2 = 0, ..M_2$$

7. Задача протекания: результаты в таблицах

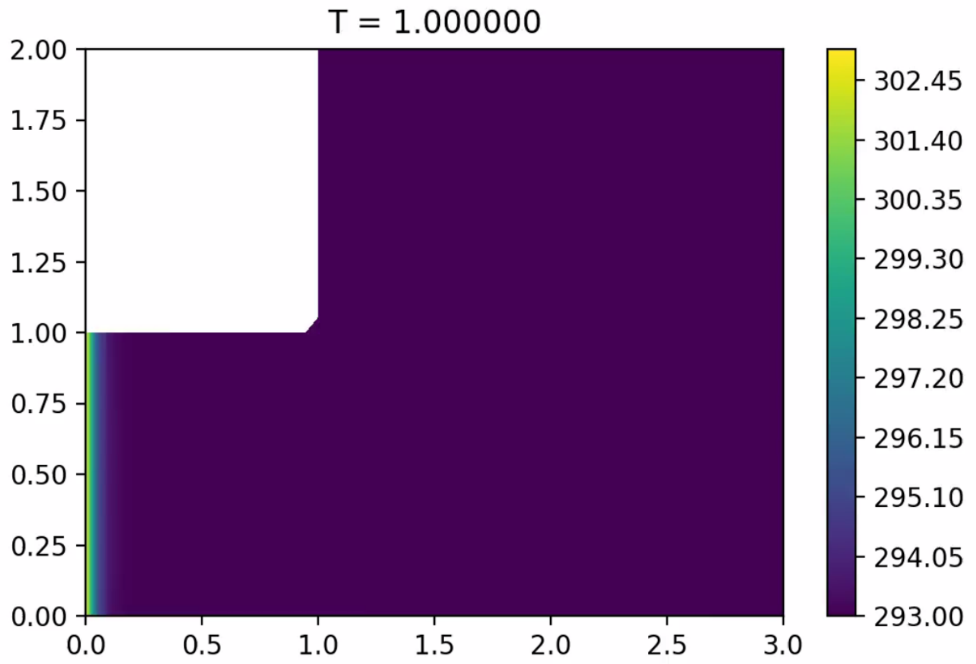
Таблицы с временем стабилизации функций, $\tau = 0.0125$, $\mathbf{h} = 0.025$

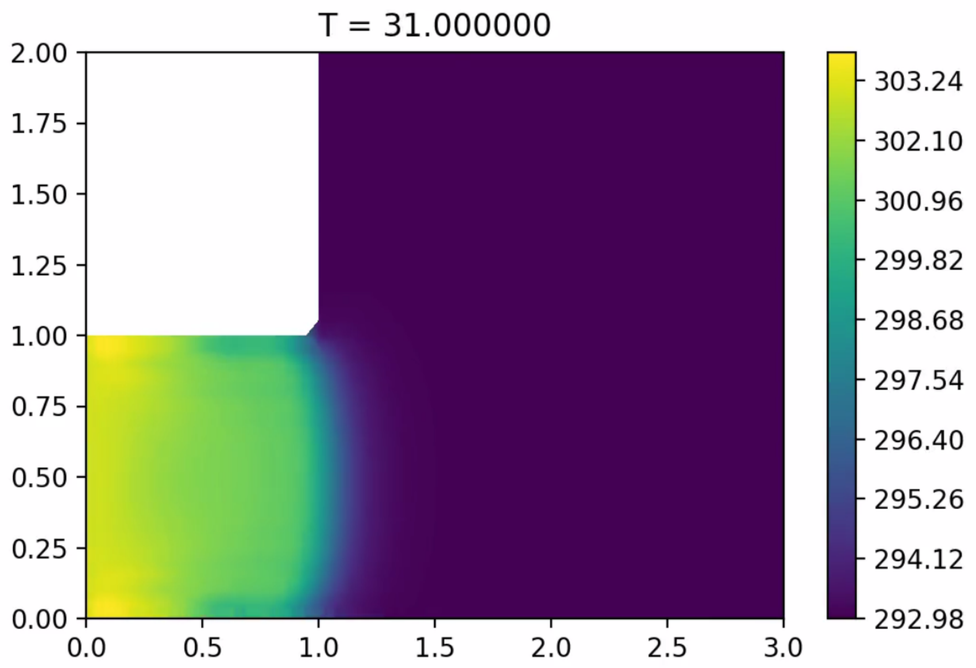
$\mu = 0.1$, $\epsilon = 0.1$

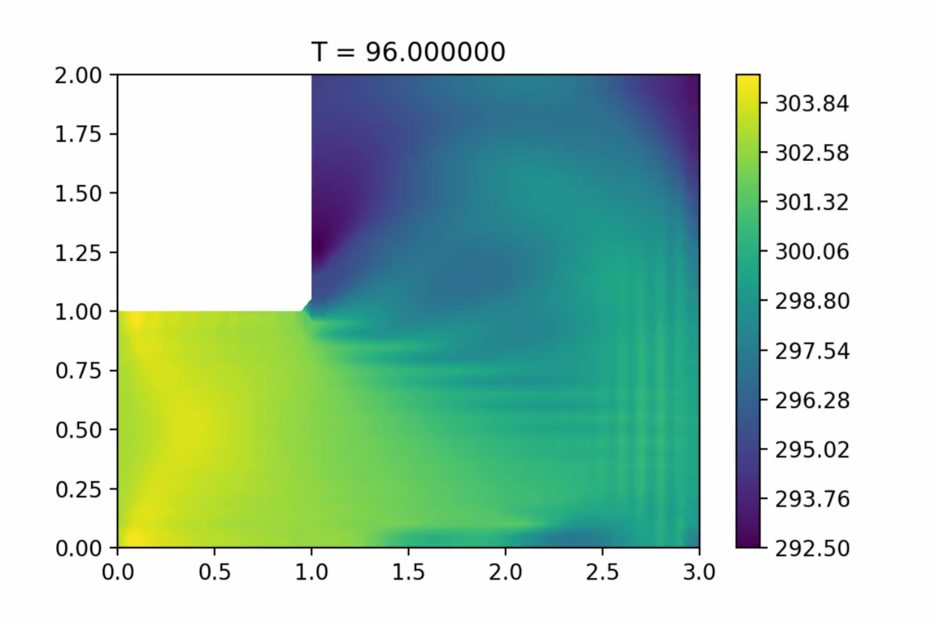
	$\tilde{v} \setminus \tilde{g}$	0.5	1	1.5	2
$\tilde{\theta} = 293$	1	$5.026e{+}001$	$4.401e{+}001$	$6.276e{+}001$	$1.878e{+}002$
	2	$1.901e{+}001$	$5.026e{+}001$	$0.000e{+}000$	$3.754e{+}002$
$\tilde{\theta} = 303$	1	$7.526e{+}001$	$8.776e{+}001$	$6.276e{+}001$	$5.651e{+}001$
	2	$8.776e{+}001$	$7.526e{+}001$	$7.526e{+}001$	$5.026e{+}001$
$\tilde{\theta} = 313$	1	$1.128e{+}002$	$1.253e{+}002$	$1.253e{+}002$	$2.503e{+}002$
	2	$1.253e{+}002$	$1.878e{+}002$	$0.000e{+}000$	$3.754e{+}002$

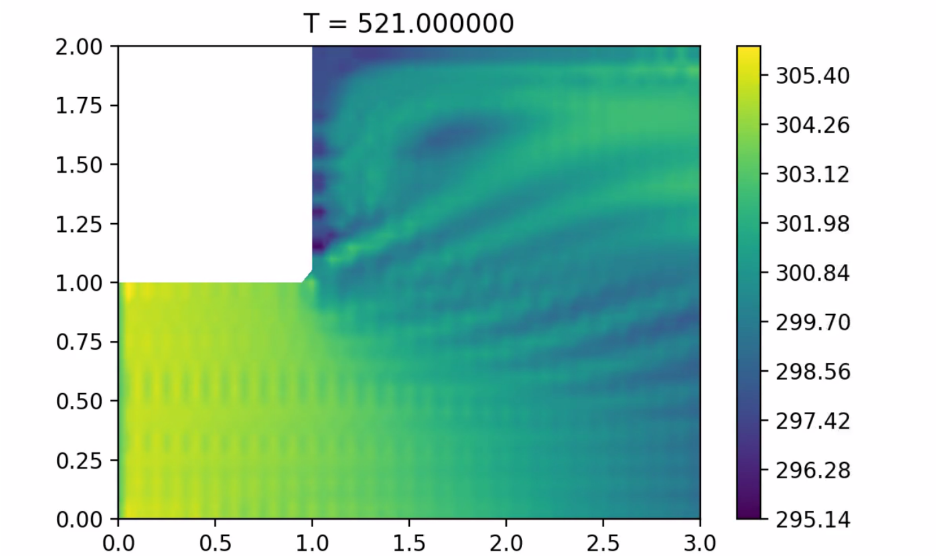
Из таблицы прослеживается, что время стабилизации возрастает с увеличением $\tilde{\theta}$ (температуры набегающего потока). Также время стабилизации преимущественно возрастает с ростом значения $\tilde{g}$ (логарифма плотности набегающего потока). Чёткой зависимости от $\tilde{v}$ (скорости набегающего потока) не прослеживается, хотя в большинстве случаев видно, что с увеличением этого параметра время стабилизации увеличивается.

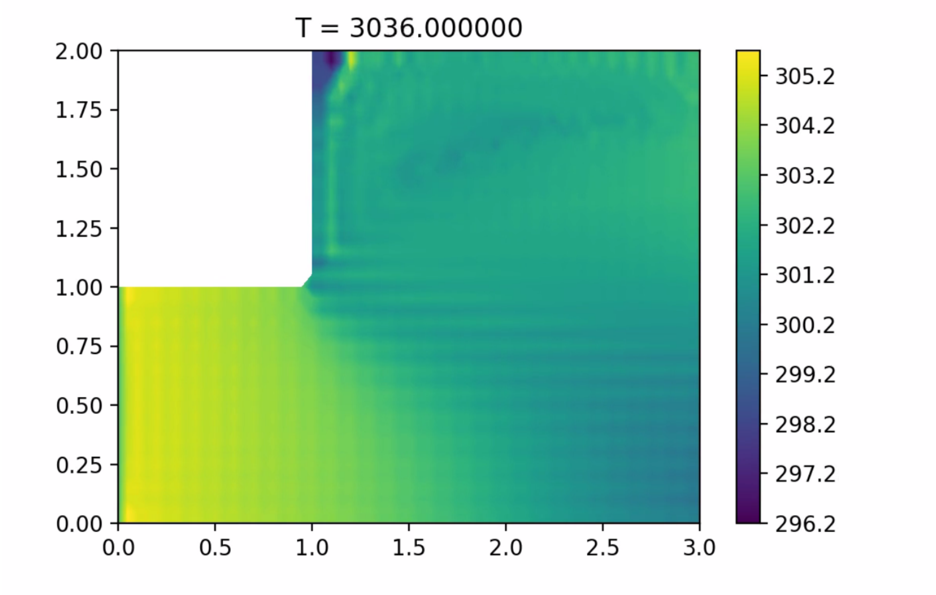
Ниже приведены кадры из созданной в рамках данной курсовой видеомодели течения газа. На этих кадрах изображены тепловые карты газа в области, однако эти карты также наглядно показывают по какой траектории движется газ в области.






T = 96.000000
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
303.84
302.58
301.32
300.06
298.80
297.54
296.28
295.02
293.76
292.50


T = 521.000000
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
305.40
304.26
303.12
301.98
300.84
299.70
298.56
297.42
296.28
295.14


T = 3036.000000
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
305.2
304.2
303.2
302.2
301.2
300.2
299.2
298.2
297.2
296.2

8. Заключение

По результатам, полученным в ходе работы, можно сделать вывод, что описанная РС может быть использована для моделирования нестационарного течения газа в областях непрямоугольной формы, причём получаемые результаты обладают высоким порядком точности $O(\tau + h^2)$. Конечно, в силу отчасти явного характера РС (при подсчёте скорости-плотности используются значения температуры с нижнего слоя) существуют ограничения на шаги τ, h. Помимо прочего, для задач протекания, по мнению автора, требуется более педантичный подход к физической подоплёке процесса. Например, численные эксперименты показали, что при сильно малых значениях параметра вязкости ($\mu = 10^{-4}$) решение в задаче протекания не выходит на стационар: в видео-моделях фиксируются, после некоторого времени протекания, внезапные всплески значений плотности и температуры. Чем объяснить такие всплески - недостатками схемы или же реальными физическими процессами - пока неясно. Однако поставленную задачу можно считать выполненной.

Список литературы

[1] Попов А.В., Численное моделирование нестационарного течения газа с использованием неявных разностных схем, 2022;

[2] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М., Численные методы, 2011;