

确界的概念和确界存在定理

1. 试证明确界的唯一性.
2. 设对每个 $x \in A$ 成立 $x < a$. 问: 在 $\sup A < a$ 和 $\sup A \leq a$ 中哪个是对的?
3. 设数集 A 以 β 为上界, 又有数列 $\{x_n\} \subset A$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta$. 证明 $\beta = \sup A$.
4. 求下列数集的上确界和下确界:

(1) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$;

(2) $\{y \mid y = x^2, x \in (-\frac{1}{2}, 1)\}$;

(3) $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in N_+ \right\}$;

(4) $\{ne^{-n} \mid n \in N_+\}$;

(5) $\{\arctan x \mid x \in (-\infty, +\infty)\}$;

(6) $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}(-1)^{n+1} \mid n \in N_+ \right\}$;

(7) $\left\{ 1 + n \sin \frac{n\pi}{2} \mid n \in N_+ \right\}$.

5. 证明:

(1) $\sup\{x_n + y_n\} \leq \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\}$;

(2) $\inf\{x_n + y_n\} \geq \inf\{x_n\} + \inf\{y_n\}$.

6. 设有两个数集 A 和 B , 且对数集 A 中的任何一个数 x 和数集 B 中的任何一个数 y 成立不等式 $x \leq y$. 证明: $\sup\{x_n\} \leq \inf\{y_n\}$.
7. 设数集 A 有上界, 数集 $B = \{x + c \mid x \in A\}$, 其中 c 是一个常数. 证明:

$$\sup B = \sup A + c, \inf B = \inf A + c.$$

8. 设 A, B 是两个有上界的数集, 又有数集 $C \subset \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$, 则 $\sup C \leq \sup A + \sup B$. 举出成立严格不等号的例子.
9. 设 A, B 是两个有上界的数集, 又有数集 $C \supset \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$, 则 $\sup C \geq \sup A + \sup B$. 举出成立严格不等号的例子.

解:

(合并以上两题可见: 当且仅当 $C = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ 是成立 $\sup C = \sup A + \sup B$.)