第一章 实数系的基本定理

1.1 Cauthy 收敛准则

定义 1.1. 基本数列

称数列 $\{x_n\}$ 为基本数列 (或 **Cauthy** 数列), 如果对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得对每一对正整数 $n, m > N$, 成立估计式 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

定理 1.1. Cauthy 收敛准则

数列收敛的充分必要条件是该数列为基本数列.

定义 1.2. 压缩映射

设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上定义,$f([a,b]) \subset [a,b]$, 并存在一个常数 k, 满足 $0 < k < 1$, 使得对一切 $x, y \in [a,b]$ 成立不等式 $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$, 则称 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射, 称常数 k 为压缩常数.

定理 1.2. 压缩映射原理

设 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射, 则

(1) f 在 $[a,b]$ 中存在唯一的不动点 $\xi = f(\xi)$;

(2) 由任何初始值 $a_0 \in [a,b]$ 和递推公式 $a_{n+1} = f(a_n), n \in N_+$ 生成的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛于 ξ;

(3) 成立估计式 $|a_n - \xi| \leqslant \dfrac{k}{1-k}|a_n - an - 1|$ 和 $|a_n - \xi| \leqslant \dfrac{k^n}{1-k}|a_1 - a_0|$(即事后估计与先验估计).

1.1.1 思考题

例 1.1 Cauthy 收敛准则在有理数集 $\mathbb{Q}$ 中不不成立.

解 原因和上一节相同, 都是可能存在在实数系中的极限但是不在有理数集中.

这个链接有更加专业的解释, 可以参考下图.

完备空间上，比如Hilbert空间、Euclid空间等，已经被证明的一个重要的性质就是基本序列(Cauchy序列)都在相同的度量空间内存在极限。

而在非完备集上，以数集为例，整数集，有理数集中的基本序列的极限也可能存在于不同的度量空间中，所以非完备集中情况就复杂一些，同时这也是实数系扩充的方法之一。

1.1.2 练习题

练习 1.1 满足以下条件的数列 $\{x_n\}$ 是否一定是基本数列? 若回答" 是", 请做出证明; 若回答" 不一定是", 请举出反例:

(1) 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 是, 成立 $|x_n - x_N| < \varepsilon$;

解 是. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 由题设知可以得到 N, 使得当 $n > N$ 时成立 $|x_n - x_N| < \dfrac{\varepsilon}{2}, |x_m - x_N| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 则 $|x_n - x_m| < |x_n - x_N| + |x_m - x_N| < \varepsilon$.

(2) 对所有 $n,p\in N_+$, 成立不等式 $|x_{n+p}-x_n|\leqslant \dfrac{p}{n}$;

解 不一定是. 显然基本数列满足这个条件, 但例如 $a_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i}$, 显然成立题设条件, 甚至我们可以直接得到估计, 但是我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 所以这不一定是基本数列.

(3) 对所有 $n,p\in N_+$, 成立不等式 $|x_{n+p}-x_n|\leqslant \dfrac{p}{n^2}$;

解 是. 根据题设, 我们可以得到更精确的估计:$|x_{n+p}-x_n|<|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\leqslant \sum\limits_{i=n}^{n+p-1}\dfrac{1}{i^2}$. 根据我们之前得到的结论,$S_n=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{i^2}$ 收敛, 所以只需 N 足够大就可以得到 $|x_{n+p}-x_n|<S_{n+p}-S_n<\varepsilon$.

(4) 对每个正整数 p, 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n+p})=0$.

解 不一定是.