

### 3.1 确界的概念和确界存在定理

1. 试证明确界的唯一性.

**解:** 反证. 不妨设有  $a > b$  都为  $A$  上确界,

取  $0 < \varepsilon < a - b$ , 则由确界定义知  $\exists a_n > a - \varepsilon > b$  且  $a_n < a$ ; 这与  $b$  也为上确界矛盾, 故上确界唯一. 下确界同理可证.

2. 设对每个  $x \in A$  成立  $x < a$ . 问: 在  $\sup A < a$  和  $\sup A \leq a$  中哪个是对的?

**解:** 后者. 显然  $\sup A \leq a$  必然成立.

设  $A = \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \mid n \in N_+ \right\}$ , 显然  $x < 1$  对  $x \in A$  都成立, 而无论多小的  $\varepsilon$ , 都  $\exists n \in N_+$  s.t.  $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 1 - \varepsilon$ , 即  $\sup A = 1$ .

3. 设数集  $A$  以  $\beta$  为上界, 又有数列  $\{x_n\} \subset A$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta$ . 证明  $\beta = \sup A$ .

**解:** 由收敛定义可知无论多小的  $\varepsilon > 0$  都  $\exists N \in N_+$  s.t.  $n > N, \beta - x_n < \varepsilon \Rightarrow \beta - \varepsilon < x_n$ . 这就是上确界定义.

4. 求下列数集的上确界和下确界:

(1)  $\{x \in Q \mid x > 0\}$ ;

**解:**

(2)  $\{y \mid y = x^2, x \in (-\frac{1}{2}, 1)\}$ ;

(3)  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in N_+ \right\}$ ;

(4)  $\{ne^{-n} \mid n \in N_+\}$ ;

(5)  $\{\arctan x \mid x \in (-\infty, +\infty)\}$ ;

(6)  $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}(-1)^{n+1} \mid n \in N_+ \right\}$ ;

(7)  $\left\{ 1 + n \sin \frac{n\pi}{2} \mid n \in N_+ \right\}$ .

5. 证明:

(1)  $\sup\{x_n + y_n\} \leq \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\}$ ;

$$(2) \inf\{x_n + y_n\} \geq \inf\{x_n\} + \inf\{y_n\}.$$

6. 设有两个数集  $A$  和  $B$ , 且对数集  $A$  中的任何一个数  $x$  和数集  $B$  中的任何一个数  $y$  成立不等式  $x \leq y$ . 证明:  $\sup\{x_n\} \leq \{y_n\}$ .

7. 设数集  $A$  有上界, 数集  $B = \{x + c \mid x \in A\}$ , 其中  $c$  是一个常数. 证明:

$$\sup B = \sup A + c, \inf B = \inf A + c.$$

8. 设  $A, B$  是两个有上界的数集, 又有数集  $C \subset \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ , 则  $\sup C \leq \sup A + \sup B$ . 举出成立严格不等号的例子.

9. 设  $A, B$  是两个有上界的数集, 又有数集  $C \supset \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ , 则  $\sup C \geq \sup A + \sup B$ . 举出成立严格不等号的例子.

**解:**

(合并以上两题可见: 当且仅当  $C = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$  时成立  $\sup C = \sup A + \sup B$ .)