3.1 确界的概念和确界存在定理

1. 试证明确界的唯一性.

> **解:** 反证. 不妨设有 $a > b$ 都为 A 上确界,
>
> 取 $0 < \varepsilon < a - b$, 则由确界定义知 $\exists a_n > a - \varepsilon > b$ 且 $a_n < a$; 这与 b 也为上确界矛盾, 故上确界唯一. 下确界同理可证.

2. 设对每个 $x \in A$ 成立 $x < a$. 问: 在 $\sup A < a$ 和 $\sup A \leqslant a$ 中哪个是对的?

> **解:** 后者. 显然 $\sup A \leqslant a$ 必然成立.
>
> 设 $A = \left\{1 - (\dfrac{1}{2})^n \,\middle|\, n \in N_+\right\}$, 显然 $x < 1$ 对 $x \in A$ 都成立, 而无论多小的 ε, 都 $\exists n \in N_+ \, s.t. \, 1 - (\dfrac{1}{2})^n > 1 - \varepsilon$, 即 $\sup A = 1$.

3. 设数集 A 以 β 为上界, 又有数列 $\{x_n\} \subset A$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$. 证明 $\beta = \sup A$.

> **解:** 由收敛定义可知无论多小的 $\varepsilon > 0$ 都 $\exists N \in N_+ \, s.t. \, n > N, \beta - x_n < \varepsilon \Rightarrow \beta - \varepsilon < x_n$. 这就是上确界定义.

4. 求下列数集的上确界和下确界:

   (1) $\{x \in Q \,|\, x > 0\}$;

   > **解:** 显然下确界是 0, 上确界是 $+\infty$.

   (2) $\{y \,|\, y = x^2, x \in (-\dfrac{1}{2}, 1)\}$;

   (3) $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \,\middle|\, n \in N_+\right\}$;

   (4) $\{ne^{-n} \,|\, n \in N_+\}$;

   (5) $\{\arctan x \,|\, x \in (-\infty, +\infty)\}$;

   (6) $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}(-1)^{n+1} \,\middle|\, n \in N_+\right\}$;

   (7) $\left\{1 + n \sin \dfrac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in N_+\right\}$.

5. 证明:

   (1) $\sup\{x_n + y_n\} \leqslant \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\}$;

(2) $\inf\{x_n+y_n\} \geqslant \inf\{x_n\}+\inf\{y_n\}$.

6. 设有两个数集 A 和 B, 且对数集 A 中的任何一个数 x 和数集 B 中的任何一个数 y 成立不等式 $x \leqslant y$. 证明:$\sup\{x_n\} \leqslant \{y_n\}$.

7. 设数集 A 有上界, 数集 $B=\{x+c \mid x \in A\}$, 其中 c 是一个常数. 证明:

$$\sup B=\sup A+c, \inf B=\inf A+c.$$

8. 设 A, B 是两个有上界的数集, 又有数集 $C \subset \{x+y \mid x \in A, y \in B\}$, 则 $\sup C \leqslant \sup A+\sup B$. 举出成立严格不等号的例子.

9. 设 A, B 是两个有上界的数集, 又有数集 $C \supset \{x+y \mid x \in A, y \in B\}$, 则 $\sup C \geqslant \sup A+\sup B$. 举出成立严格不等号的例子.

解:

(合并以上两题可见: 当且仅当 $C=\{x+y \mid x \in A, y \in B\}$ 时成立 $\sup C=\sup A+\sup B$.)