第一章 实数系的基本定理

定义 1.1. 开覆盖

设有 $[a,b] \subset \bigcup_{\alpha} \mathcal{O}_{\alpha}$, 其中每个 $\mathcal{O}_{\alpha}$ 是开区间, 则称 $\{\mathcal{O}_{\alpha}\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖. ♣

定理 1.1. 覆盖定理

如果 $\{\mathcal{O}_{\alpha}\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 则存在 $\{\mathcal{O}_{\alpha}\}$ 的一个有限子集 $\{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \cdots, \mathcal{O}_n\}$, 它是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 也就是说有 $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$. ♡

1.1 覆盖定理

1.1.1 思考题

例 1.1.1 如果将定理中的" 每个开区间" 改为闭区间, 举出不成立的反例.

解 例如 $\{\mathcal{O}_i\}$ 是这样的:$\left\{\mathcal{O}\middle|\left[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right], i \in \mathbb{N}_+\right\} \bigcup \{[-1,0]\}$, 很明显 $\{\mathcal{O}_i\}$ 覆盖 $[0,1]$, 但是 $\{\mathcal{O}_i\}$ 的任意有限子集都无法覆盖 $[0,1]$.

1.1.2 练习题

✍ **练习 1.1.1** 对开区间 $(0,1)$ 构造一个开覆盖, 使得它的每一个有限子集都不能覆盖 $(0,1)$.

解 这样的开覆盖可以是 $\left\{\mathcal{O}\middle|\left(\frac{1}{i}, 1\right), i \in \mathbb{N}_+\right\}$.