第一章 实数系的基本定理

1.1 确界的概念和确界存在定理

✍ **练习 1.1.1** 试证明确界的唯一性.

解 反证. 不妨设有 $a > b$ 都为 A 上确界,

取 $0 < \varepsilon < a - b$, 则由确界定义知 $\exists a_n > a - \varepsilon > b$ 且 $a_n < a$; 这与 b 也为上确界矛盾, 故上确界唯一. 下确界同理可证.

✍ **练习 1.1.2** 设对每个 $x \in A$ 成立 $x < a$. 问: 在 $\sup A < a$ 和 $\sup A \leqslant a$ 中哪个是对的?

解 后者. 显然 $\sup A \leqslant a$ 必然成立.

设 $A = \left\{1 - (\frac{1}{2})^n \,\middle|\, n \in N_+\right\}$, 显然 $x < 1$ 对 $x \in A$ 都成立, 而无论多小的 ε, 都 $\exists n \in N_+ \; s.t. \; 1 - (\frac{1}{2})^n > 1 - \varepsilon$, 即 $\sup A = 1$.

✍ **练习 1.1.3** 设数集 A 以 β 为上界, 又有数列 $\{x_n\} \subset A$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$. 证明 $\beta = \sup A$.

解 由收敛定义可知无论多小的 $\varepsilon > 0$ 都 $\exists N \in N_+ \; s.t. \; n > N, \beta - x_n < \varepsilon \Rightarrow \beta - \varepsilon < x_n$. 这就是上确界定义.

✍ **练习 1.1.4** 求下列数集的上确界和下确界:

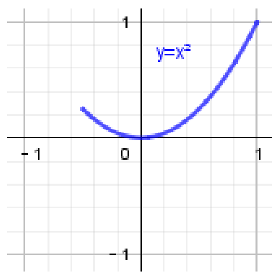

图 1.1

(1) $\{x \in Q \,|\, x > 0\}$;

解 显然下确界是 0, 上确界是 $+\infty$.

(2) $\{y \,|\, y = x^2, x \in (-\frac{1}{2}, 1)\}$;

解 如右图所示, 下确界为 0, 上确界为 1.

(3) $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \,\middle|\, n \in N_+\right\}$;

解 下确界为 2, 上确界为 e.

前已证 $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ 单调递增且极限为 e.

(4) $\{ne^{-n} \,|\, n \in N_+\}$;

解 前后两项的比值为 $\dfrac{1}{e} \cdot \dfrac{n+1}{n} < \dfrac{2}{e} < 1$, 故数列 $\left\{\dfrac{n}{e^n}\right\}$ 单调递减.

而且上一章已证 $\left\{\dfrac{n^q}{p^n}\right\} \to 0 (p > 1)$, 所以下确界为 0, 上确界为 $\dfrac{1}{e}$.

(5) $\{\arctan x \,|\, x \in (-\infty, +\infty)\}$;

解 上下确界为 $\pm\dfrac{\pi}{2}$. 下证上确界.

由于 $\arctan x$ 值域在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 而 $\tan x$ 在此集合上单调增, 故对任意小的 ε, 欲使 $\arctan n > \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$, 只需 $\tan(\arctan n) = n > \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$ 即可.

(6) $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}(-1)^{n+1} \,\middle|\, n \in N_+\right\}$;

解 上下确界为 ± 1.

从感性可以认知到集合中的数从中间向外边 (-1 和 1) 扩, 对于任意小的 ε, 只需取 n 使 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ 即可.

(7) $\left\{1 + n\sin\dfrac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in N_+\right\}$.

解 上下确界为 $\pm\infty$.

无论多大的 M, 都存在 $n > M$ 且为 $4k + 1$(k 为正整数) 使 $1 + n\sin\dfrac{n\pi}{2} = 1 + n > M$;

同理也存在 $n > -M-10$ 且为 $4k+3$(k 为正整数) 使 $1+n\sin\dfrac{n\pi}{2} =$
$1-n < M$.

练习 1.1.5 证明:

(1) $\sup\{x_n+y_n\} \leqslant \sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$;

解 因为对 $n \in N_+$ 都成立 $x_n+y_n < \sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$, 故 $\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$ 也为 $\{x_n+y_n\}$ 上界, 而由上确界定义 (上确界是所有上界中最小的一个) 知命题成立.

(2) $\inf\{x_n+y_n\} \geqslant \inf\{x_n\}+\inf\{y_n\}$.

解 解法与上题类似

练习 1.1.6 设有两个数集 A 和 B, 且对数集 A 中的任何一个数 x 和数集 B 中的任何一个数 y 成立不等式 $x \leqslant y$. 证明: $\sup\{x_n\} \leqslant \{y_n\}$.

解 由题知,$\{y_n\}$ 中元素全是 $\{x_n\}$ 上界, 而由定义知命题成立.

练习 1.1.7 设数集 A 有上界, 数集 $B=\{x+c\,|\,x\in A\}$, 其中 c 是一个常数. 证明:

$$\sup B = \sup A + c, \inf B = \inf A + c.$$

解 只证上确界.

显然 $\sup B \leqslant \sup A + c$. 由定义知无论多小的 ε, 都存在 n 使得 $a_n > \sup A - \varepsilon$, 即 $a_n + c > \sup A + c - \varepsilon$, 故 $\sup B = \sup A + c$. 下确界证法完全类似.

练习 1.1.8 设 A, B 是两个有上界的数集, 又有数集 $C \subset \{x+y\,|\,x\in A, y\in B\}$, 则 $\sup C \leqslant \sup A + \sup B$. 举出成立严格不等号的例子.

解 挺显然的.

因为由定义有 $x < \sup A, y < \sup B$, 即 $\sup A + \sup B$ 是 $\{x+y\,|\,x\in A, y\in B\}$ 一个上界,
故有 $\sup\{x+y\,|\,x\in A, y\in B\} \leqslant \sup A + \sup B$, 而 $C \subset \{x+y\,|\,x\in A, y\in B\}$,
所以 $\sup C \leqslant \{x+y\,|\,x\in A, y\in B\} \leqslant \sup A + \sup B$.
例如 $A=\{1,2\}, B=\{2,3\}; C=\{3\}$.

练习 1.1.9 设 A, B 是两个有上界的数集, 又有数集 $C \supset \{x+y\,|\,x\in A, y\in B\}$, 则 $\sup C \geqslant \sup A + \sup B$. 举出成立严格不等号的例子.

解 与上题完全类似.

笔记 (合并以上两题可见: 当且仅当 $C=\{x+y\,|\,x\in A, y\in B\}$ 时成立 $\sup C = \sup A + \sup B$.)