

第二章 数列极限 第一组参考题

1. 设 $\{a_{2k-1}\}, \{a_{2k}\}, \{a_{3k}\}$ 都收敛, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

解: 设 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛到 p , $\{a_{2k}\}$ 收敛到 q , 而 $\{a_{3k}\}$ 中可以选出全属于 $\{a_{2k-1}\}$ 或 $\{a_{2k}\}$ 的子列 (事实上 $\{a_{3k}\}$ 中的项交替地从 $\{a_{2k-1}\}$ 和 $\{a_{2k}\}$ 中取出), 由于收敛数列子列收敛于同一极限, 也即 $p = q$, 而前证得 $\{a_{2k-1}\}, \{a_{2k}\}$ 收敛于同一极限则 $\{a_n\}$ 也收敛于同一极限知 $\{a_n\}$ 收敛.

2. 设 $\{a_n\}$ 有界, 且满足条件 $a_n \leq a_{n+2}, a_n \leq a_{n+3}, n \in N_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

解: 由题知 $\{a_{2k-1}\}, \{a_{2k}\}, \{a_{3k}\}$ 收敛, 由上一小题知命题成立.

3. 设 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 和 $\{a_n + a_{n+2}\}$ 都收敛, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

解: 由题知 $\{a_{n+2} - a_{n+1}\}$ 也收敛, 而实质上这与 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 没有区别, 与 $\{a_{n+1} + a_n\}$ 相减即得 $\{a_n\}$ 收敛.

4. 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 0, 又存在极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a$. 证明: $a \leq 1$.

解: 反证.

首先 $a_n \neq 0$, 否则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 某项没有意义.

若 $a > 1$, 则 $\exists a'$ 使得 $1 < a' < a$, 而取 $\varepsilon < a - a'$, 无论多大的 N , 总 $\exists n > N, a_n \geq a_N \cdot a^{n-N} > \varepsilon$, 与 $\{a_n\}$ 收敛到 0 矛盾.

5. 设 $a_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right), n \in N_+$, 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

解: 放缩.

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} + 1}$$

$$\text{而有 } \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} \leq a_n \leq \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \quad (\text{放成同一分母})$$

令 n 趋向 ∞ 由夹逼定理即知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$.

说明: 直接放缩会放过 $\Rightarrow n \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right) = \frac{n \cdot \frac{1}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} \rightarrow 0$

6. 用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = 0$.

解: 设 p_n 为第 n 个质数. 可以这样估计一个用于夹逼的上数列:

当 $\prod_{i=1}^{k-1} p_i \leq n \leq \prod_{i=1}^k p_i$ (也就是夹在 $p_1 p_2 \cdots p_{k-1}$ 和 $p_1 p_2 \cdots p_k$ 之间),

则 $\frac{p(n)}{n} \leq \frac{k}{p_1 p_2 \cdots p_k} < \frac{k}{k!}$, 由夹逼定理知原极限为 0.

说明: 事实上这就是一个对 $p(n)$ 的一个估计, 换个角度考虑, 就是怎么使 $\frac{p(n)}{n}$ 尽可能大, 也就是变相估计上界吧.

7. 设 a_0, a_1, \cdots, a_p 是 $p+1$ 个给定的数, 且满足条件 $a_0 + a_1 + \cdots + a_p = 0$. 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 \sqrt{n} + a_1 \sqrt{n+1} + \cdots + a_p \sqrt{n+p}).$$

解:

$$\begin{aligned} & |a_0 \sqrt{n} + \cdots + a_p \sqrt{n+p} - 0| = \\ & |a_0(\sqrt{n} - \sqrt{n}) + a_1(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + \cdots + a_p(\sqrt{n+p} - \sqrt{n})| \leq \\ & |a_0(\sqrt{n} - \sqrt{n})| + |a_1(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})| + \cdots = \\ & |a_0 \cdot 0| + \left| a_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right| + \cdots + \left| \frac{a_p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

故极限为 0.

8. 证明: 当 $0 < k < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+n)^k - n^k] = 0$.

解: 显然 $0 \leq (1+n)^k - n^k = n^k \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1 \right] \leq n^k \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right] = \frac{n^k}{n} \rightarrow 0$.

说明: 另一思路也可以是证明单调有界, 但是没想到怎么证明单调减...

9. (1) 设 $\{a_n\}$ 收敛, 令 $y_n = n(x_n - x_{n-1}), n \in N_+$, 问 $\{y_n\}$ 是否收敛?

解: 不一定.

$$y_n = \begin{cases} x_{n-1} + \frac{1}{n}, & n \text{ 为完全平方数} \\ x_{n-1}, & \text{其他} \end{cases}$$

可知 $\{x_n\}$ 不超过 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, 前证它收敛. 而对于 $\varepsilon < 1$, 无论多大的 N 总 $\exists n > N$ 且 $y_n = 1$, 即 $\{y_n\}$ 发散.

(2) 在上一小题中, 若 $\{y_n\}$ 也收敛, 证明: $\{y_n\}$ 收敛于 0.

解: 设 $\{y_n\}$ 收敛到 a , 由 Stolz 知 $\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{\frac{1}{n}}\right\}$ 极限若存在则与 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ 相同, 显然此数列收敛到 0 (分母 $\rightarrow \infty$), 而由题知 $\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{\frac{1}{n}}\right\}$ 收敛, 也即 $a = 0$.

10. (1) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0$, 证明: $\{a_n\}$ 是正无穷大量.

解: 事实上, 当 n 足够大时 $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{a_n}{a_{n+1}} < \varepsilon < 1$.
 则当 $n > N$ 时, $\frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_N} \cdot \varepsilon^{n-N}$, 即 $a_n > \frac{a_N}{\varepsilon^{n-N}} > M$ 成立, (M 为一给定的任意大的数), 也即 $\{a_n\}$ 为无穷大量.

(2) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} = 0$, 证明: $\{a_n\}$ 无界.

解: 反证. 假设 $\{a_n\}$ 有上界 M ; 而因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} = 0 \Rightarrow$ 对 $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时 $\frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} < \varepsilon = \frac{1}{4}$. 那么可以推出 $4a_N < a_{N+1} + a_{N+2}$, $16a_N < a_{N+2} + 2a_{N+3} + a_{N+4}, \dots$.
 因为 M 固定, 故 $\exists m$ 使得 $2^m a_N > M$, 即 $2^m M < 4^m a_N < \underbrace{\dots}_{2^m \text{ 个 } \{a_n\} \text{ 中的项}}$.
 由抽屉原理知, 至少有一个项 $> M$, 与假设矛盾. 故原命题成立.
 说明: 只说无界是正确的, 不一定是正无穷大量. $\{a_n\}$ 可以是 $1!, 1, 2!, 1, 3!, 1, \dots$, 这也满足题设.

11. 证明: $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$, 其中右边的不等式当 $n \geq 6$ 时成立.

解: 与 2.5 练习题 7. 证法完全类似.

12. 证明: $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n}{2}\right)^n$.

解: 与 2.5 练习题 7. 证法完全类似.

13. (对于命题 2.5.4 的改进) 证明:

(1) $n \geq 2$ 时成立: $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!n} = 3 - \frac{1}{2! \cdot 2} - \dots - \frac{1}{n!(n-1)n}$;

解: 也即证 $\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!n} = 1 - \frac{1}{2! \cdot 2} - \cdots - \frac{1}{n!(n-1)n}$

用数归, 显然 $n=2$ 时 $\frac{1}{2!} + \frac{1}{2! \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2! \cdot 2}$;

假设 $n=k$ 时成立, 即 $\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{k!k} = 1 - \frac{1}{2! \cdot 2} - \cdots - \frac{1}{k!(k-1)k}$,

当 $n=k+1$ 时, $\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!(k+1)} = 1 - \frac{1}{2! \cdot 2} - \cdots - \frac{1}{k!(k-1)k} + \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!(k+1)} - \frac{1}{k!k}$.

而通分后知 $\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!(k+1)} - \frac{1}{k!k} = -\frac{1}{(k+1)!k(k+1)}$,

即 $\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!(k+1)} = 1 - \frac{1}{2! \cdot 2} - \cdots - \frac{1}{k!(k-1)k} - \frac{1}{(k+1)!k(k+1)}$,
也即命题对 $n=k+1$ 也成立, 由数归知对所有 $n \geq 2$ 都成立.

$$(2) e = 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)!(k+1)(k+2)};$$

解: 由 (1) 知 $3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)!(k+1)(k+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!n} \right)$

而前已证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$, 且显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!n} = 0$, 由极限的四则运算知等式成立.

(3) 用 $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!n}$ 计算 e 要比不加上最后一项好得多.

解: 由 (1) 的右边可以看出 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!n} \right)$ 是大于 e 的.

也就是说, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ 单调增从下方逼近 e , $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!n} \right)$ 单调减从上方逼近 e .

而他们和 e 的误差为 $\alpha_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$, $\beta_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!n} - e = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!(k-1)k}$.

显然 $\beta_n < \alpha_n$ 也就是说后者收敛得更快.

14. 设 $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$, $n \in N_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

解: $\because \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \Rightarrow a_n < (-\sqrt{0} + \sqrt{1}) + \cdots + (-\sqrt{n-1} + \sqrt{n}) - 2\sqrt{n} = 0$.

而考虑 $a_{n+1} - a_n$, 有差值为 $\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) > 0$, 故 a_n 单调递增有上界, 即 $\{a_n\}$

收敛.

15. 设已知存在极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

解: (有点取巧?)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0.$$

16. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{1/n^2} = 1$.

解: $\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n]{n^n} = n$, 而前已证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 又显然 $(n!)^{1/n^2} > 1$, 由夹逼定理得命题成立.

17. 设对每个 n 有 $x_n < 1$ 和 $(1 - x_n)x_{n+1} \geq \frac{1}{4}$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

解: (解法类似 2.6 练习题 7.)

先证 $n \geq 2$ 时 x_n 都为正数.

因为 $x_n < 1$, 所以 $(1 - x_n) > 0$ 恒成立, 故 $x_{n+1} > 0$, 也就是说从 $n = 2$ 开始 $\{x_n\}$ 都为正数.

再证 $\{x_n\} \leq \frac{1}{2}$,

$(1 - x_{n-1})x_n \geq \frac{1}{4} \Rightarrow x_n \geq \frac{1}{4(1 - x_{n-1})}$, 但 $x_n < 1$, 所以 $\frac{1}{4(1 - x_{n-1})} < 1 \Rightarrow x_{n-1} < \frac{3}{4}$; 同理 $x_{n-1} < \frac{3}{4} \Rightarrow x_{n-2} < \frac{2}{3} \cdots$, 若 $x_n < m$, 则 $x_{n-1} < 1 - \frac{1}{4m}$, 易证这是个单调减趋向 $\frac{1}{2}$ 的序列, 令 n 趋向无穷便得到 $\{x_n\}$ 每一项都 $\leq \frac{1}{2}$.

从下方夹逼,

$x_1 < 1 \Rightarrow (1 - x_1) > 0 \Rightarrow x_2 > 0 \Rightarrow (1 - x_2) < 1 \Rightarrow x_3 > \frac{1}{4} \Rightarrow x_4 > \frac{1}{3} \cdots$, 同样可证这是一个单调增趋向 $\frac{1}{2}$ 的序列, 由夹逼定理知 $\{x_n\}$ 收敛且极限为 $\frac{1}{2}$.

18. 设 $a_1 = b, a_2 = c$, 再 $n \geq 3$ 时, $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

解: 一个方法是用特征根法解出通项为 $a_n = (\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c) + \frac{4}{3}(c-b)(-\frac{1}{2})^n$, 令 n 趋向无穷便得到极限为 $\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c$.

另外也可以像提示中那样证明奇数项和偶数项分别单调互为上下界.

19. 设 a, b, c 是三个给定的实数, 令 $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c$, 并以递推公式定义

$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}, b_{n+1} = \frac{a_n + c_n}{2}, c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, n \in N+$$

. 求这三个数列的极限.

解: 注意到有 $a_n + b_n + c_n = a + b + c$, 且 $a_{n+1} - b_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_n - b_n) \Rightarrow a_n - b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a - b)$, 同理对 b_n, c_n 也可以得到类似的式子, 联立可以解出 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$, 最后可以得到极限为 $\frac{a + b + c}{3}$.

20. 注 本题与例题 2.3.5 完全不同. 实际上这就是计算圆周率的 Archimedes(阿基米德)-刘徽方法的迭代形式 (参见 [4,60]). 在 (2) 中的两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 就是单位圆的外切和内接正多边形的半周长 (请求出边数和 n 的关系).

- (1) 设 $a_1 > b_1 > 0, a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}, n \in N+$, 证明: $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限.

解: 解法类似例题 2.3.5, 分别证明 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 单调且互为上下界.

$$a_n > b_n > 0 \Rightarrow a_n + b_n > 2b_n \Rightarrow 1 > \frac{2b_n}{a_n + b_n} \Rightarrow a_n > \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$$

$$a_n > b_n > 0 \Rightarrow 2a_n > a_n + b_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} > b_n \Rightarrow b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} > b_n$$

$$a_n > b_n \Rightarrow a_{n+1} > \sqrt{a_{n+1}b_n} = b_{n+1}$$

故两者都单调有界, 也即收敛.

任取其中一个递推式, 令 n 趋向无穷即得两者极限相同.

- (2) 在 $a_1 = 2\sqrt{3}, b_1 = 3$ 时, 证明上述极限等于单位圆的半周长 π . (这里可以利用极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n} = \pi$.)

解: 若 $\{a_n\}$ 为 m 边单位圆外切正多边形半周长, $\{b_n\}$ 为 m 边单位圆内接正多边形半周长, 则 $a_n = m \tan \frac{2\pi}{2m}, b_n = m \sin \frac{2\pi}{2m}$.

验证知 $\frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = a_{n+1} = 2m \tan \frac{2\pi}{2(2m)}, \sqrt{a_{n+1}b_n} = b_{n+1} = 2m \sin \frac{2\pi}{2(2m)}$, 即下一项为 $2m$ 边正多边形的半周长.

计算知 a_1, b_1 分别为正六边形外切 (内接) 圆半周长, 故 $a_n = 6 \cdot 2^{n-1} \tan \frac{\pi}{6 \cdot 2^{n-1}}$,
 $b_n = 6 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{6 \cdot 2^{n-1}}$, 由提示知极限为 π .