第一章 实数系的基本定理

1.1 Cauthy 收敛准则

定义 1.1. 基本数列

称数列 $\{x_n\}$ 为基本数列 (或 Cauthy 数列), 如果对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得对每一对正整数 $n, m > N$, 成立估计式 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

定理 1.1. Cauthy 收敛准则

数列收敛的充分必要条件是该数列为基本数列.

定义 1.2. 压缩映射

设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上定义,$f([a,b]) \subset [a,b]$, 并存在一个常数 k, 满足 $0 < k < 1$, 使得对一切 $x, y \in [a,b]$ 成立不等式 $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$, 则称 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射, 称常数 k 为压缩常数.

定理 1.2. 压缩映射原理

设 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射, 则

(1) f 在 $[a,b]$ 中存在唯一的不动点 $\xi = f(\xi)$;

(2) 由任何初始值 $a_0 \in [a,b]$ 和递推公式 $a_{n+1} = f(a_n), n \in \mathbb{N}_+$ 生成的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛于 ξ;

(3) 成立估计式 $|a_n - \xi| \leqslant \dfrac{k}{1-k}|a_n - an - 1|$ 和 $|a_n - \xi| \leqslant \dfrac{k^n}{1-k}|a_1 - a_0|$(即事后估计与先验估计).

1.1.1 思考题

例 1.1.1 Cauthy 收敛准则在有理数集 $\mathbb{Q}$ 中不不成立.

解 原因和上一节相同, 都是可能存在在实数系中的极限但是不在有理数集中.

这个链接有更加专业的解释, 可以参考下图.

完备空间上，比如Hilbert空间、Euclid空间等，已经被证明的一个重要的性质就是基本序列(Cauchy序列)都在相同的度量空间内存在极限。

而在非完备集上，以数集为例，整数集，有理数集中的基本序列的极限也可能存在于不同的度量空间中，所以非完备集中情况就复杂一些，同时这也是实数系扩充的方法之一。

1.1.2 练习题

练习 1.1.1 满足以下条件的数列 $\{x_n\}$ 是否一定是基本数列? 若回答" 是", 请做出证明; 若回答" 不一定是", 请举出反例:

(1) 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 是, 成立 $|x_n - x_N| < \varepsilon$;

解 是. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 由题设知可以得到 N, 使得当 $n > N$ 时成立 $|x_n - x_N| < \dfrac{\varepsilon}{2}, |x_m - x_N| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 则 $|x_n - x_m| < |x_n - x_N| + |x_m - x_N| < \varepsilon$.

(2) 对所有 $n,p\in\mathbb{N}_+$, 成立不等式 $|x_{n+p}-x_n|\leqslant\dfrac{p}{n}$;

解 不一定是. 显然基本数列满足这个条件, 但例如 $x_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$, 显然成立题设条件, 甚至我们可以直接得到估计, 但是我们知道 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 所以这不一定是基本数列.

(3) 对所有 $n,p\in\mathbb{N}_+$, 成立不等式 $|x_{n+p}-x_n|\leqslant\dfrac{p}{n^2}$;

解 是. 根据题设, 我们可以得到更精确的估计:$|x_{n+p}-x_n|<|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\leqslant\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1}\frac{1}{i^2}$. 根据我们之前得到的结论,$S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$ 收敛, 所以只需 N 足够大就可以得到 $|x_{n+p}-x_n|<S_{n+p}-S_n<\varepsilon$.

(4) 对每个正整数 p, 成立 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n-x_{n+p})=0$.

解 不一定是. 例如 (2) 中的例子 $x_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$, 对每个固定的 p 都满足题设, 但它不是基本数列.

✍ **练习 1.1.2** 用对偶法则于数列收敛的 Cauthy 收敛准则, 以正面方式写出数列发散的充分必要条件.

解

Cauthy 收敛准则:$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+$, 当 $n,m>N\to|x_n-x_m|<\varepsilon\iff\exists x\in R,\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=x$;
数列发散充要条件: 数列 $\{x_n\}$ 发散 $\iff\exists\varepsilon>0,\forall N\in\mathbb{N}_+,\exists n,m>N,|x_n-x_m|\geqslant\varepsilon$.

✍ **练习 1.1.3** 证明下列数列为基本数列, 因此都是收敛数列:

(1) $a_n=1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!},n\in\mathbb{N}_+$;

解 不妨设 $m\geqslant n>0$, 而显然 $|a_m-a_n|=\dfrac{1}{(n+1)!}+\cdots+\dfrac{1}{m!}<\dfrac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\dfrac{1}{2^m}$, 而后者是收敛的, 知对任意 ε 都可以找到题目需要的 N.

(2) $b_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n},n\in\mathbb{N}_+$;

解 $|x_m-x_n|=\left|(-1)^{n+2}\dfrac{1}{n+1}+\cdots+(-1)^{m+1}\dfrac{1}{m}\right|$, 若 $m-n$ 为奇数, 则知从第二项开始可以每两项凑成一对, 而且他们都与第一项正负相反; 同时 $|x_m-x_n|$ 与第一项同正负 (因为最后一项和第一项同正负, 而去掉第一项之后又可以两两凑成一对, 这样的对子和第一项同正负), 即 $\left|(-1)^{n+2}\dfrac{1}{n+1}+\cdots+(-1)^{m+1}\dfrac{1}{m}\right|<\left|\dfrac{1}{n+1}\right|$.

例如 $\left|1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right|=\underbrace{\left|(1-\dfrac{1}{2})+\dfrac{1}{3}\right|}_{\text{可以看出此式与 1 同号}}=\underbrace{\left|1+(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3})\right|}_{\text{可以看出绝对值小于 1}}$.

如果 $m-n$ 为偶数, 则两两凑成一对即知式子绝对值小于第一项绝对值. 综上只需取 N 使得 $\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$ 即可.

(3) $c_n=\dfrac{\sin 2x}{2(2+\sin 2x)}+\dfrac{\sin 3x}{3(3+\sin 3x)}+\cdots+\dfrac{\sin nx}{n(n+\sin nx)},n\in\mathbb{N}_+$.

解 显然有 $|x_m-x_n|\leqslant\left|\dfrac{1}{(n+1)(n)}+\cdots+\dfrac{1}{m(m-1)}\right|$, 裂项相消即可.

✍ **练习 1.1.4** 设 $a_n=\sin 1+\dfrac{\sin 2}{2!}+\cdots+\dfrac{\sin n}{n!},n\in\mathbb{N}_+$, 证明:

(1) 数列 $\{a_n\}$ 有界, 但不单调;

解 显然 a_n 不单调; 而 $a_n\leqslant|\sin 1|+\cdots+\left|\dfrac{\sin n}{n!}\right|\leqslant\dfrac{1}{1!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$, 由 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}$ 收敛知 $\{a_n\}$ 有界.

(2) $\{a_n\}$ 收敛.

解 任意两项之差绝对值可以按照 (1) 放缩, 由 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}$ 收敛知使差绝对值 $<\varepsilon$ 的 N 是存在的, 按照 Cauthy 收敛准则知 $\{a_n\}$ 收敛.

练习 1.1.5 设从某个数列 $\{x_n\}$ 定义 $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, y_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|, n \in \mathbb{N}_+$, 若数列 $\{y_n\}$ 收敛, 证明数列 $\{x_n\}$ 也收敛.

笔记 本题可以看成是上一题和例题 3.4.1 的推广.

解 有 $|x_m - x_n| \leqslant y_m - y_n$, 而因为 $\{y_n\}$ 收敛, 由 Cauthy 收敛准则知对任意 ε 可以找到 N 使 $y_m - y_n < \varepsilon$, 而根据前边不等式知这个 N 对 $\{x_n\}$ 也成立, 即 $\{x_n\}$ 也是基本数列, 故 $\{x_n\}$ 收敛.

练习 1.1.6 设 $S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, n \in \mathbb{N}_+$, 其中 $p \leqslant 1$, 证明 $\{S_n\}$ 发散.

解 只需证明无论多大的 N 都可以找到 $n, m > N$ 且 $|x_m - x_n| > \varepsilon$(参照), 按照前边的做法, 只需取 n 使得 $n > N, n = 2^k, m = 2^{k+1}$, 则 $|x_m - x_n| > \frac{1}{2}$, 由 Cauthy 收敛准则的反面表述知 S_n 发散.

练习 1.1.7 天文学中的 Kepler(开普勒) 方程 $x - q\sin x = a(0 < q < 1)$ 是一个超越方程, 没有求根公式. 求近似解的一个方法是通过迭代. 取定 x_1, 然后用递推公式 $x_{n+1} = q\sin x_n + a, n \in \mathbb{N}_+$. 证明这个方法的正确性.

解 容易看出 $f(x) = q\sin x + a$ 是一个 $[a-q, a+q]$ 上的压缩映射,q 就是一个压缩因子. 而且由于 $\sin x$ 的特性, 从第二项开始就 $\{x_n\}$ 就落入了 $[a-q, a+q]$ 中, 根据压缩映射原理知此函数的不动点, 也即开普勒方程的解即为 $\{x_n\}$ 的极限.