第一章 实数系的基本定理

定义 1.1. 开覆盖

设有 $[a,b]\subset\bigcup_\alpha \mathcal{O}_\alpha$, 其中每个 $\mathcal{O}_\alpha$ 是开区间, 则称 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖.

定理 1.1. 覆盖定理

如果 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 则存在 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 的一个有限子集 $\{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2,\cdots,\mathcal{O}_n\}$, 它是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 也就是说有 $[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i$.

1.1 覆盖定理

1.1.1 思考题

例 1.1.1 如果将定理中的" 每个开区间" 改为闭区间, 举出不成立的反例.

解 例如 $\{\mathcal{O}_i\}$ 是这样的:$\left\{\mathcal{O}\middle|\left[\dfrac{1}{i+1},\dfrac{1}{i}\right],i\in\mathbb{N}_+\right\}\bigcup\{[-1,0]\}$, 很明显 $\{\mathcal{O}_i\}$ 覆盖 $[0,1]$, 但是 $\{\mathcal{O}_i\}$ 的任意有限子集都无法覆盖 $[0,1]$.

1.1.2 练习题

练习 1.1.1 对开区间 $(0,1)$ 构造一个开覆盖, 使得它的每一个有限子集都不能覆盖 $(0,1)$.

解 这样的开覆盖可以是 $\left\{\mathcal{O}\middle|\left(\dfrac{1}{i},1\right),i\in\mathbb{N}_+\right\}$.

练习 1.1.2 用闭区间套定理证明覆盖定理

解 反证.

如果不存在有限子覆盖, 那么将区间分为两半, 至少其中一边不存在有限子覆盖; 如果都不存在则取其中之一. 将操作进行无限次, 可以得到一个闭区间套, 其长度都是前一个的一半. 由闭区间套定理知最终闭区间套的两端会收敛到 $[a,b]$ 中的一个数 ε. 但是根据题设条件,$[a,b]$ 存在开覆盖, 对于其中的某一点至少存在一个开区间覆盖它, 也即对于单个点一定存在有限子覆盖. 矛盾.

笔记 参照《微积分学教程 第一卷》P148.

练习 1.1.3 用覆盖定理证明闭区间套定理

解 闭区间套定理的叙述是: 如果一组闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足 $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$, 则 $\bigcap\limits_{i=1}[a_i,b_i]\neq\varnothing$.

反证, 如果闭区间套定理不成立, 那么反面叙述为: 存在一组闭区间套,$\bigcap\limits_{i=1}[a_i,b_i]=\varnothing$.

则此时可以得到 I_2 的一个开覆盖:$A=\{(a_1,a_2),(b_2,b_1),(a_1,a_3),(b_3,b_1),\cdots\}$, 即第 n 组两个开区间为 $(a_1,b_1)-(a_{n+1},b_{n+1})=(a_1,b_1)-\bigcap\limits_{i=1}^{n+1}[a_i,b_i]$ 拆分出的两个开区间. 由于 $\bigcap\limits_{i=1}[a_i,b_i]=\varnothing$, 所以这个集合是 $[a_2,b_2]$ 的一个无限开覆盖. 由开覆盖定理, 存在一个有限子覆盖同样能够覆盖 $[a_2,b_2]$, 不妨设选出的子覆盖为 $B=\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$, 由此开区间生成规则可以看出, 每个开区间不与闭区间套中自某一 n 开始的所有闭区间相交, 也即对 $I_i,\exists\,[a_{n_i},b_{n_i}],[a_{n_i},b_{n_i}]\bigcup I_i=\varnothing$. 由于这是闭区间套, 故存在一个最小的闭区间 (属于 $[a_2,b_2]$), 和 B 中所有的开区间都不相交, 与 B 是其有限子覆盖矛盾.

笔记 这一证明想到一半的时候有点摸不着怎么说明 A 的任意一个有限子集都不可能是 $[a_2, b_2]$ 的开覆盖，这时参照了这个链接的一部分，另外这个证明也非常巧妙，应该掌握直接根据区间中的每一个点都生成一个对应集合的方法.

练习 1.1.4 用覆盖定理证明凝聚定理.

解 凝聚定理的否定叙述是:$\exists \{a_n\}$ 有界，对 $\forall a > 0, \exists \varepsilon_0 > 0$，在 $(a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0)$ 中只有 $\{a_n\}$ 的有限项. 进一步可以选取足够小的 ε 使得 $(a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0)$ 仅有数列中的一项甚至没有项.

反证. 取闭区间为 $[\inf\{a_n\}, \sup\{a_n\}]$，遍历此区间中的所有点，如果定理不成立则对每个点都可以找到一个开区间满足否定叙述，由于这种取法遍历了所有点，所以 $A = \{\mathcal{I}_{x,\varepsilon_x} \mid \}$ 是闭区间的一个开覆盖. 由覆盖定理知存在一个 A 的有限子集是闭区间开覆盖. 然而由取法知 A 的有限子集的元素的并最多覆盖到 $\{a_n\}$ 中有限个元素，矛盾.

练习 1.1.5 试对于例题 3.5.2 的证明举出两个具体例子，即 (1) 数集 A 无上界;(2)A 有上界，且有 $b < \xi = \sup A$ 和 $\xi \notin A$.