第一章 实数系的基本定理

定义 1.1. 开覆盖

设有 $[a,b]\subset\bigcup_\alpha \mathcal{O}_\alpha$, 其中每个 $\mathcal{O}_\alpha$ 是开区间, 则称 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖. ♣

定理 1.1. 覆盖定理

如果 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 则存在 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ 的一个有限子集 $\{\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2,\cdots,\mathcal{O}_n\}$, 它是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 也就是说有 $[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i$. ♡

1.1 覆盖定理

1.1.1 思考题

例 1.1.1 如果将定理中的" 每个开区间" 改为闭区间, 举出不成立的反例.

解 例如 $\{\mathcal{O}_i\}$ 是这样的:$\left\{\mathcal{O}\middle|\left[\frac{1}{i+1},\frac{1}{i}\right],i\in\mathbb{N}_+\right\}\bigcup\{[-1,0]\}$, 很明显 $\{\mathcal{O}_i\}$ 覆盖 $[0,1]$, 但是 $\{\mathcal{O}_i\}$ 的任意有限子集都无法覆盖 $[0,1]$.

1.1.2 练习题

练习 1.1.1 对开区间 $(0,1)$ 构造一个开覆盖, 使得它的每一个有限子集都不能覆盖 $(0,1)$.

解 这样的开覆盖可以是 $\left\{\mathcal{O}\middle|\left(\frac{1}{i},1\right),i\in\mathbb{N}_+\right\}$.

练习 1.1.2 用闭区间套定理证明覆盖定理

解 反证.

如果不存在有限子覆盖, 那么将区间分为两半, 至少其中一边不存在有限子覆盖; 如果都不存在则取其中之一. 将操作进行无限次, 可以得到一个闭区间套, 其长度都是前一个的一半. 由闭区间套定理知最终闭区间套的两端会收敛到 $[a,b]$ 中的一个数 ε. 但是根据题设条件,$[a,b]$ 存在开覆盖, 对于其中的某一点至少存在一个开区间覆盖它, 也即对于单个点一定存在有限子覆盖. 矛盾.

笔记 参照《微积分学教程 第一卷》P148.

练习 1.1.3 用覆盖定理证明闭区间套定理

解 闭区间套定理的叙述是: 如果存在一组闭区间 $\{I_n\}$,$I_{n+1}\subset I_n$, 则