第一章 实数系的基本定理

1.1 Cauthy 收敛准则

定义 1.1. 基本数列

称数列 $\{x_n\}$ 为基本数列 (或 Cauthy 数列), 如果对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得对每一对正整数 $n, m > N$, 成立估计式 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

定理 1.1. Cauthy 收敛准则

数列收敛的充分必要条件是该数列为基本数列.

定义 1.2. 压缩映射

设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上定义,$f([a,b]) \subset [a,b]$, 并存在一个常数 k, 满足 $0 < k < 1$, 使得对一切 $x, y \in [a,b]$ 成立不等式 $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$, 则称 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射, 称常数 k 为压缩常数.

定理 1.2. 压缩映射原理

设 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射, 则

(1) f 在 $[a,b]$ 中存在唯一的不动点 $\xi = f(\xi)$;

(2) 由任何初始值 $a_0 \in [a,b]$ 和递推公式 $a_{n+1} = f(a_n), n \in N_+$ 生成的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛于 ξ;

(3) 成立估计式 $|a_n - \xi| \leqslant \dfrac{k}{1-k}|a_n - an - 1|$ 和 $|a_n - \xi| \leqslant \dfrac{k^n}{1-k}|a_1 - a_0|$(即事后估计与先验估计).

1.1.1 思考题

例 1.1.1 Cauthy 收敛准则在有理数集 $\mathbb{Q}$ 中不不成立.

解 原因和上一节相同, 都是可能存在在实数系中的极限但是不在有理数集中.

这个链接有更加专业的解释, 可以参考下图.

完备空间上，比如Hilbert空间、Euclid空间等，已经被证明的一个重要的性质就是基本序列(Cauchy序列)都在相同的度量空间内存在极限。

而在非完备集上，以数集为例，整数集，有理数集中的基本序列的极限也可能存在于不同的度量空间中，所以非完备集中情况就复杂一些，同时这也是实数系扩充的方法之一。

1.1.2 练习题

练习 1.1.1 满足以下条件的数列 $\{x_n\}$ 是否一定是基本数列? 若回答" 是", 请做出证明; 若回答" 不一定是", 请举出反例:

(1) 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 是, 成立 $|x_n - x_N| < \varepsilon$;

解 是. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 由题设知可以得到 N, 使得当 $n > N$ 时成立 $|x_n - x_N| < \dfrac{\varepsilon}{2}, |x_m - x_N| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 则 $|x_n - x_m| < |x_n - x_N| + |x_m - x_N| < \varepsilon$.

(2) 对所有 $n, p \in N_+$, 成立不等式 $|x_{n+p} - x_n| \leqslant \frac{p}{n}$;

解 不一定是. 显然基本数列满足这个条件, 但例如 $x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, 显然成立题设条件, 甚至我们可以直接得到估计, 但是我们知道 $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 所以这不一定是基本数列.

(3) 对所有 $n, p \in N_+$, 成立不等式 $|x_{n+p} - x_n| \leqslant \frac{p}{n^2}$;

解 是. 根据题设, 我们可以得到更精确的估计:$|x_{n+p} - x_n| < |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} \frac{1}{i^2}$. 根据我们之前得到的结论,$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ 收敛, 所以只需 N 足够大就可以得到 $|x_{n+p} - x_n| < S_{n+p} - S_n < \varepsilon$.

(4) 对每个正整数 p, 成立 $\lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n+p}) = 0$.

解 不一定是. 例如 (2) 中的例子 $x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, 对每个固定的 p 都满足题设, 但它不是基本数列.

✍ **练习 1.1.2** 用对偶法则于数列收敛的 Cauthy 收敛准则, 以正面方式写出数列发散的充分必要条件.

解

Cauthy 收敛准则:$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+$, 当 $n, m > N \to |x_n - x_m| < \varepsilon \Longleftrightarrow \exists x \in R, \lim_{n\to\infty} x_n = x$;

数列发散充要条件: 数列 $\{x_n\}$ 发散 $\Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall N \in N_+, \exists n, m > N, |x_n - x_m| \geqslant \varepsilon$.

✍ **练习 1.1.3** 证明下列数列为基本数列, 因此都是收敛数列:

(1) $a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, n \in N_+$;

解 不妨设 $m \geqslant n > 0$, 而显然 $|a_m - a_n| = \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{m!} < \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^m}$, 而后者是收敛的, 知对任意 ε 都可以找到题目需要的 N.

(2) $b_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, n \in N_+$;

解 $|x_m - x_n| = \left|(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1} + \cdots + (-1)^{m+1}\frac{1}{m}\right|$, 若 $m - n$ 为奇数, 则知从第二项开始可以每两项凑成一对, 而且他们都与第一项正负相反; 同时 $|x_m - x_n|$ 与第一项同正负 (因为最后一项和第一项同正负, 而去掉第一项之后又可以两两凑成一对, 这样的对子和第一项同正负), 即 $\left|(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1} + \cdots + (-1)^{m+1}\frac{1}{m}\right| < \left|\frac{1}{n+1}\right|$.

例如 $\left|1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right| = \underbrace{\left|(1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{3}\right|}_{\text{可以看出此式与 1 同号}} = \underbrace{\left|1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3})\right|}_{\text{可以看出绝对值小于 1}}$.

如果 $m - n$ 为偶数, 则两两凑成一对即知式子绝对值小于第一项绝对值. 综上只需取 N 使得 $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ 即可.

(3) $c_n = \frac{\sin 2x}{2(2 + \sin 2x)} + \frac{\sin 3x}{3(3 + \sin 3x)} + \cdots + \frac{\sin nx}{n(n + \sin nx)}, n \in N_+$.

解 显然有 $|x_m - x_n| \leqslant \left|\frac{1}{(n+1)(n)} + \frac{1}{m(m-1)}\right|$, 裂项相消即可.

✍ **练习 1.1.4** 设 $a_n = \sin 1 + \frac{\sin 2}{2!} + \cdots + \frac{\sin n}{n!}, n \in N_+$, 证明:

(1) 数列 $\{a_n\}$ 有界, 但不单调;

解 显然 a_n 不单调; 而 $a_n \leqslant |\sin 1| + \cdots + \left|\frac{\sin n}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, 由 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}$ 收敛知 $\{a_n\}$ 有界.

(2) $\{a_n\}$ 收敛.

解 任意两项之差绝对值可以按照 (1) 放缩, 由 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}$ 收敛知使差绝对值 $< \varepsilon$ 的 N 是存在的, 按照 Cauthy 收敛准则知 $\{a_n\}$ 收敛.

✍ **练习 1.1.5** 设从某个数列 $\{x_n\}$ 定义 $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, y_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|, n \in N_+$, 若数列 $\{y_n\}$ 收敛, 证明数列 $\{x_n\}$ 也收敛.

(本题可以看成是上一题和例题 3.4.1 的推广.)

解 有 $|x_m - x_n| \leqslant y_m - y_n$, 而因为 $\{y_n\}$ 收敛, 由 Cauthy 收敛准则知对任意 ε 可以找到 N 使 $y_m - y_n < \varepsilon$, 而根据前边不等式知这个 N 对 $\{x_n\}$ 也成立, 即 $\{x_n\}$ 也是基本数列, 故 $\{x_n\}$ 收敛.

✍ **练习 1.1.6** 设 $S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, n \in N_+$, 其中 $p \leqslant 1$, 证明 $\{S_n\}$ 发散.

解