3.1 确界的概念和确界存在定理

1. 试证明确界的唯一性.

解: 反证. 不妨设有 a > b 都为 A 上确界,

取 $0 < \varepsilon < a - b$, 则由确界定义知 $\exists a_n > a - \varepsilon > b$ 且 $a_n < a$; 这与 b 也为上确界矛盾, 故上确界唯一. 下确界同理可证.

2. 设对每个 $x \in A$ 成立 x < a. 问: 在 $\sup A < a$ 和 $\sup A \leqslant a$ 中哪个是对的?

解:后者.显然 $\sup A \leq a$ 必然成立.

设 $A = \left\{1 - (\frac{1}{2})^n \mid n \in N_+\right\}$, 显然 x < 1 对 $x \in A$ 都成立, 而无论多小的 ε , 都 $\exists n \in N_+ s.t. 1 - (\frac{1}{2})^n > 1 - \varepsilon$, 即 $\sup A = 1$.

3. 设数集 A 以 β 为上界, 又有数列 $\{x_n\} \subset A$ 和 $\lim_{n\to\infty} x_n = \beta$. 证明 $\beta = \sup A$.

解: 由收敛定义可知无论多小的 $\varepsilon > 0$ 都 $\exists N \in N_+ s.t. \, n > N, \beta - x_n < \varepsilon \Rightarrow \beta - \varepsilon < x_n$. 这就是上确界定义.

- 4. 求下列数集的上确界和下确界:
 - (1) $\{x \in Q \mid x > 0\};$

解: 显然下确界是 0, 上确界是 $+\infty$.

- (2) $\{y \mid y = x^2, x \in (-\frac{1}{2}, 1)\};$
- $(3) \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in N_+ \right\};$
- (4) $\{ne^{-n} \mid n \in N_+\};$
- (5) $\{\arctan x \mid x \in (-\infty, +\infty)\};$
- (6) $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \mid n \in N_+ \right\};$
- $(7) \left\{ 1 + n \sin \frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in N_+ \right\}.$
- 5. 证明:
 - $(1) \sup\{x_n + y_n\} \leqslant \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\};$

- (2) $\inf\{x_n + y_n\} \geqslant \inf\{x_n\} + \inf\{y_n\}.$
- 6. 设有两个数集 A 和 B, 且对数集 A 中的任何一个数 x 和数集 B 中的任何一个数 y 成立不等式 $x \leq y$. 证明:sup $\{x_n\} \leq \{y_n\}$.
- 7. 设数集 A 有上界, 数集 $B = \{x + c \mid x \in A\}$, 其中 c 是一个常数. 证明:

$$\sup B = \sup A + c, \inf B = \inf A + c.$$

- 8. 设 A, B 是两个有上界的数集, 又有数集 $C \subset \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$, 则 $\sup C \leq \sup A + \sup B$. 举 出成立严格不等号的例子.
- 9. 设 A, B 是两个有上界的数集, 又有数集 $C \supset \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$, 则 $\sup C \geqslant \sup A + \sup B$. 举 出成立严格不等号的例子.

解:

(合并以上两题可见: 当且仅当 $C = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ 时成立 $\sup C = \sup A + \sup B$.)