3.2 闭区间套定理　练习题

1. 如果数列是 $\{(-1)^n\}$, 开始的区间是 $[-1,1]$. 试用例题 3.2.2 中的方法具体找出一个闭区间套和相应的收敛子列. 又问: 你能否用这样的方法在这个例子中找出 3 个收敛子列?

   解答

   顺着例题操作来即可.

   取中点将 $[-1,1]$ 分成两部分, 两边都具有无穷多项, 任取一边, 不妨设取了 $[0,1]$, 则之后只能取 $[\frac{1}{2},1],[\frac{3}{4},1],\cdots$.
   不能用这个方法获得 3 个收敛子列. 在第一次选择之后就没得选择了 (按这个方法的流程来的话).

2. 如闭区间套定理中的闭区间套改为开区间套 $\{(a_n,b_n)\}$, 其他条件不变, 则可以举出例子说明结论不成立.

   解答

   如闭区间套 $\left\{(0,(\frac{1}{2})^n)\right\}$, 显然 $0 \notin \left\{(0,(\frac{1}{2})^n)\right\}$, 而对 $(0,\frac{1}{2})$ 之间的任意数, 都存在 N 使 $n > N$ 时该数不在之后的区间套中.

   也就是说 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{(0,(\frac{1}{2})^n)\right\} = \varnothing$

3. 如 $\{(a_n,b_n)\}$ 为开区间套, 数列 $\{a_n\}$ 严格单调递增, 数列 $\{b_n\}$ 严格单调减少, 又满足条件 $a_n < b_n, n \in \mathsf{N}_+$, 证明 $\bigcap_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n) \neq \varnothing$.

   解答

   显然 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都是单调有界数列, 不妨设分别收敛到 a,b.

   如果 $a \neq b$, 则取 $\xi \in (a,b)$ 即可; 否则取 $\xi = a = b$, 由题知对任意 n 始终成立 $a_n < \xi < b_n$, 也即 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$.

   故结论成立.

4. 用闭区间套定理证明确界存在定理.

   解答

   参照 Bolzano 二分法,$[a_1,b_1]$ 中 a_1 从 A 中选出,b_1 为任意一个上界. 如果相等则结束,$a_1 = b_1$ 即为上确界.

   如果不等则取中点, 若 A 中存在更大的数则令 $a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$, 否则令 $b_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$. 按此流程下去知 $[a_n,b_n]$ 满足

   ① 区间套长度趋 0

   ②$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ 中元素满足 $\geqslant A$ 中所有元素且 $\leqslant$ 所有上界.

   由闭区间套定理知最后得到的单点集中元素即为所求上确界. 下确界做法类似.

5. 用闭区间套定理证明单调有界数列的收敛定理.

解答

如果数列单调递增有上界, 则类似上题, 从 $\{a_n\}$ 中任取一个作为初始区间套下界, 任取一个上界作为初始区间套上界, 再遵照 Bolzano 二分法即可得到结论. 单调递减类似.