

3.2 闭区间套定理 练习题

1. 如果数列是 $\{(-1)^n\}$, 开始的区间是 $[-1, 1]$. 试用例题 3.2.2 中的方法具体找出一个闭区间套和相应的收敛子列. 又问: 你能否用这样的方法在这个例子中找出 3 个收敛子列?

解答

顺着例题操作来即可.

取中点将 $[-1, 1]$ 分成两部分, 两边都具有无穷多项, 任取一边, 不妨设取了 $[0, 1]$, 则之后只能取 $[\frac{1}{2}, 1], [\frac{3}{4}, 1], \dots$.

不能用这个方法获得 3 个收敛子列. 在第一次选择之后就没得选择了 (按这个方法的流程来的话).

2. 如闭区间套定理中的闭区间套改为开区间套 $\{(a_n, b_n)\}$, 其他条件不变, 则可以举出例子说明结论不成立.

解答

如闭区间套 $\{(0, (\frac{1}{2})^n)\}$, 显然 $0 \notin \{(0, (\frac{1}{2})^n)\}$, 而对 $(0, \frac{1}{2})$ 之间的任意数, 都存在 N 使 $n > N$ 时该数不在之后的区间套中.

也就是说 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{(0, (\frac{1}{2})^n)\} = \emptyset$

3. 如 $\{(a_n, b_n)\}$ 为开区间套, 数列 $\{a_n\}$ 严格单调递增, 数列 $\{b_n\}$ 严格单调减少, 又满足条件 $a_n < b_n, n \in \mathbb{N}_+$, 证明 $\bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \neq \emptyset$.

解答

显然 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是单调有界数列, 不妨设分别收敛到 a, b .

如果 $a \neq b$, 则取 $\xi \in (a, b)$ 即可; 否则取 $\xi = a = b$, 由题知对任意 n 始终成立 $a_n < \xi < b_n$, 也即 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$.

故结论成立.

4. 用闭区间套定理证明确界存在定理.

解答

5. 用闭区间套定理证明单调有界数列的收敛定理.

解答