3.2 凝聚定理　思考题

注: 凝聚定理 (Bolzano-Weierstrass(布尔查诺-魏尔斯特拉斯) 定理): 有界数列必有收敛子列.

1. 凝聚定理在实数系中成立, 在有理数集 $\mathbb{Q}$ 中不成立.

解答

这个在 $\mathbb{Q}$ 中不成立指的是无法收敛到 $\mathbb{Q}$ 中的某个数. 也就是说凝聚定理的基础数列的收敛性不受保证.

如 $\left\{a_n = \sqrt{2}\text{小数点前 n 位处截断}\right\}$, 即 $a_1 = 1.4, a_2 = 1.41, a_3 = 1.414\cdots$

这个数列在 $\mathbb{Q}$ 中不收敛. 而选出的子列的下标必须单调递增, 也就是说无论以何种方式选出的子列在有理数集中都不收敛.

可以猜出, 凝聚定理不成立的一个充分条件是原数列在实数系中收敛到 $\xi \in \mathbb{R}$ 且 $\xi \notin \mathbb{Q}$, 这样所有的子列在实数系中都收敛到 ξ, 这时在有理数集中凝聚定理就不成立了.

结合实数系中的凝聚定理, 可以改写一下表述, 即有理数集上的有界数列不一定能选出收敛到有理数的子列, 也即选出的所有收敛子列都收敛到实数.

另一个例子就是

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{2}\text{小数点前 n 位处截断}, 2 \mid n \\ \sqrt{3}\text{小数点前 n 位处截断}, 2 \nmid n \end{cases}$$

即 $a_1 = 1.4, a_2 = 1.73, a_3 = 1.414\cdots$

这个数列可以选出许多个在实数系中分别收敛到 $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{3}$, 但这两个数在有理数集中都不存在.