目录

第 1 章 实数系的基本定理

1.1 凝聚定理

1.1.1 思考题

例 1.1 凝聚定理在实数系中成立, 在有理数集 $\mathbb{Q}$ 中不成立.

解 这个在 $\mathbb{Q}$ 中不成立指的是无法收敛到 $\mathbb{Q}$ 中的某个数. 也就是说凝聚定理的基础数列的收敛性不受保证.

如 $a_n = \sqrt{2}$ 小数点前 n 位处截断, 即 $a_1 = 1.4, a_2 = 1.41, a_3 = 1.414\cdots$

这个数列在 $\mathbb{Q}$ 中不收敛. 而选出的子列的下标必须单调递增, 也就是说无论以何种方式选出的子列在有理数集中都不收敛.

可以猜出, 凝聚定理不成立的一个充分条件是原数列在实数系中收敛到 $\xi \in \mathbb{R}$ 且 $\xi \notin \mathbb{Q}$, 这样所有的子列在实数系中都收敛到 ξ, 这时在有理数集中凝聚定理就不成立了.

结合实数系中的凝聚定理, 可以改写一下表述, 即有理数集上的有界数列不一定能选出收敛到有理数的子列, 也即选出的所有收敛子列都收敛到实数.

另一个例子就是

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{2}\text{小数点前 n 位处截断}, 2 \mid n \\ \sqrt{3}\text{小数点前 n 位处截断}, 2 \nmid n \end{cases}$$

即 $a_1 = 1.4, a_2 = 1.73, a_3 = 1.414\cdots$

这个数列可以选出许多个在实数系中分别收敛到 $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{3}$, 但这两个数在有理数集中都不存在.

1.1.2 练习题

✍ 练习 1.1 对于给定的数列 $\{x_n\}$ 和数 a, 证明: 在 a 的每个邻域中都有 $\{x_n\}$ 的无穷多项的充分必要条件是,a 是数列 $\{x_n\}$ 某个子列的极限.

解 充分性比较显然. 由极限定义知, 只需将 ε 取为邻域长度一半即可. 下证必要性.

可以选择一收敛于 0 的数列 $\{\varepsilon_n\}$, 由题知对于每个 $\varepsilon_n \in \{\varepsilon_n\}$, 都可以找出 $a_n \in \{x_n\}$ 且在 a 的邻域内, 这样就选出了一个收敛到 a 的子列.

✍ 练习 1.2 证明: 有界数列发散的充分必要条件是存在两个收敛于不同极限值的子列.

解 充分性显然. 这也是之前证明的数列收敛的必要条件. 下证必要性.

利用 Bolzano 二分法, 不过稍微做些改造. 每次将选择的区间分为三个子区间, 对于每个具有数列中无穷多项的子区间都进一步分割, 如果某次分割时得到不相邻的两个有数列中无穷多项的子区间, 那么分别在这两个区间中应用 Bolzano 二分法即可得到两个趋向不同极限的子列.

下证在有限步中可以得到不相邻的两个或以上的子区间. 反证, 如果在进行的时候每次只能得到一个或者相邻的两个子区间, 对于前者可知形成了一个闭区间套, 应用闭区间套定理即知数列收敛. 矛盾. 对于后者, 取左子区间的左端和右子区间的右端即可得到一列闭区间套同样可以得到数列收敛. 矛盾.

综上, 定理成立.

✍ 练习 1.3 证明: 若 $\{x_n\}$ 无界, 但不是无穷大量, 则存在两个子列, 其中一个子列收敛, 另一个子列是无穷大量.

解 由题知, 数列无界, 则任意选定一 M, 取任意一 $|x_{n_1}| > M$ 作为子列第一项, 然后选取 $|x_{n_2}| > |x_{n_1}|$ 且 $n_2 > n_1$ 作为子列第二项, 重复这个过程即可得到一无穷大量.

由数列并非是无穷大量知,$\exists M > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists n > N, |x_n| < M$, 这样可以选出一个有界子列, 由凝聚定理知可以选出一个收敛于有限极限的子列.

✍ **练习 1.4** 用凝聚定理证明单调有界数列的收敛定理.

解 由凝聚定理知, 单调有界数列存在一收敛子列, 设收敛到 a, 且不妨设单调递增.

对于任意小的 $\varepsilon > 0$, 由于子列收敛, 可以得到 N_k 使得 $n_k > N_k$ 时 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. 由于数列 $\{x_n\}$ 单调, 则 $n > N_k$ 的任意 x_n, 都有 $x_{n_k} < x_n < x_{n_{k+1}}$, 也即也成立 $|x_n - a| < \varepsilon$. 也即 $\{x_n\}$ 收敛到 a.

证毕.

1.2 Cauthy 收敛准则

1.2.1 思考题

✍ **练习 1.5** Cauthy 收敛准则在有理数集 $\mathbb{Q}$ 中不陈列馆 i

解

1.2.2 练习题

✍ **练习 1.6** 满足以下条件的数列 $\{x_n\}$ 是否一定是基本数列? 若回答" 是", 请做出证明; 若回答" 不一定是", 请举出反例:

- 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 是, 成立 $|x_n - x_N| < \varepsilon$;