第一章 数列极限

1.1 参考题

1.1.1 第一组

✍ **练习 1.1.1** 设 $\{a_{2k-1}\},\{a_{2k}\},\{a_{3k}\}$ 都收敛, 证明:$\{a_n\}$ 收敛.

解 设 $\{a_{2k-1}\}$, 收敛到 p,$\{a_{2k}\}$ 收敛到 q, 而 $\{a_{3k}\}$ 中可以选出全属于 $\{a_{2k-1}\}$ 或 $\{a_{2k}\}$ 的子列 (事实上 $\{a_{3k}\}$ 中的项交替地从 $\{a_{2k-1}\}$ 和 $\{a_{2k}\}$ 中取出), 由于收敛数列子列收敛于同一极限, 也即 $p=q$, 而前证得 $\{a_{2k-1}\},\{a_{2k}\}$ 收敛于同一极限则 $\{a_n\}$ 也收敛于同一极限知 $\{a_n\}$ 收敛.

✍ **练习 1.1.2** 设 $\{a_n\}$ 有界, 且满足条件 $a_n \leqslant a_{n+2}, a_n \leqslant a_{n+3}, n \in \mathbb{N}_+$, 证明:$\{a_n\}$ 收敛.

解 由题知 $\{a_{2k-1}\},\{a_{2k}\},\{a_{3k}\}$ 收敛, 由上一小题知命题成立.

✍ **练习 1.1.3** 设 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 和 $\{a_n+a_{n+2}\}$ 都收敛, 证明:$\{a_n\}$ 收敛.

解 由题知 $\{a_{n+2}-a_{n+1}\}$ 也收敛, 而实质上这与 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 没有区别, 与 $\{a_{n+1}+a_n\}$ 相减即得 $\{a_n\}$ 收敛.

✍ **练习 1.1.4** 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 0, 又存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=a$. 证明:$a \leqslant 1$.

解 反证.

首先 $a_n \neq 0$, 否则 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 某项没有意义.

若 $a>1$, 则 $\exists a'$ 使得 $1<a'<a$, 而取 $\varepsilon<a-a'$, 无论多大的 N, 总 $\exists n>N, a_n \geqslant a_N \cdot a^{n-N} > \varepsilon$, 与 $\{a_n\}$ 收敛到 0 矛盾.

✍ **练习 1.1.5** 设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$,$n \in \mathbb{N}_+$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解 放缩.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}$$

而有 $\dfrac{n+1}{2n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{n+1}{2n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$(放成同一分母)

令 n 趋向 ∞ 由夹逼定理即知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{1}{2}$.

说明: 直接放缩会放过 $\Longrightarrow n\cdot\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-1\right)=\dfrac{n\cdot\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}\to 0$

✍ **练习 1.1.6** 用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p(n)}{n}=0$.

解 设 p_n 为第 n 个质数. 可以这样估计一个用于夹逼的上数列:

当 $\prod\limits_{i=1}^{k-1} p_i \leqslant n \leqslant \prod\limits_{i=1}^{k} p_i$ (也就是夹在 $p_1p_2\cdots p_{k-1}$ 和 $p_1p_2\cdots p_k$ 之间),

则 $\dfrac{p(n)}{n} \leqslant \dfrac{k}{p_1p_2\cdots p_k} < \dfrac{k}{k!}$, 由夹逼定理知原极限为 0.

说明: 事实上这就是一个对 $p(n)$ 的一个估计, 换个角度考虑, 就是怎么使 $\dfrac{p(n)}{n}$ 尽可能大, 也就是变相估计上界吧.

✍ **练习 1.1.7** 设 $a_0,a_1,\cdots,a_p$ 是 $p+1$ 个给定的数, 且满足条件 $a_0+a_1+\cdots+a_p=0$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p}\right)$.

解

$$\left|a_0\sqrt{n}+\cdots+a_p\sqrt{n+p}-0\right|=$$

$$\begin{aligned}&\left|a_0(\sqrt{n}-\sqrt{n})+a_1(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\cdots+a_p(\sqrt{n+p}-\sqrt{n})\right|\leqslant\\&\left|a_0(\sqrt{n}-\sqrt{n})\right|+\left|a_1(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right|+\cdots=\\&|a_0\cdot 0|+\left|a_1\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|+\cdots+\left|\frac{a_p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}\right|\to 0\end{aligned}$$

故极限为 0.

✍ **练习 1.1.8** 证明: 当 $0<k<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+n)^k-n^k\right]=0$.

解 显然 $0\leqslant(1+n)^k-n^k=n^k\left[(1+\frac{1}{n})^k-1\right]\leqslant n^k\left[(1+\frac{1}{n})-1\right]=\dfrac{n^k}{n}\to 0$.

笔记 另一思路也可以是证明单调有界, 但是没想到怎么证明单调减...

✍ **练习 1.1.9**

(1) 设 $\{a_n\}$ 收敛, 令 $y_n=n(x_n-x_{n-1}),n\in\mathbb{N}_+$, 问 $\{y_n\}$ 是否收敛?

解 不一定.

$$y_n=\begin{cases}x_{n-1}+\dfrac{1}{n},\ n\text{为完全平方数}\\x_{n-1},\ \text{其他}\end{cases}$$

可知 $\{x_n\}$ 不超过 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, 前证它收敛. 而对于 $\varepsilon<1$, 无论多大的 N 总 $\exists n>N$ 且 $y_n=1$, 即 $\{y_n\}$ 发散.

(2) 在上一小题中, 若 $\{y_n\}$ 也收敛, 证明:$\{y_n\}$ 收敛于 0.

解 设 $\{y_n\}$ 收敛到 a, 由 Stolz 知 $\left\{\dfrac{x_n-x_{n-1}}{\frac{1}{n}}\right\}$ 极限若存在则与 $\dfrac{x_n}{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}}$ 相同, 显然此数列收敛到 0(分母 $\to\infty$), 而由题知 $\left\{\dfrac{x_n-x_{n-1}}{\frac{1}{n}}\right\}$ 收敛, 也即 $a=0$.

✍ **练习 1.1.10**

(1) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=0$, 证明:$\{a_n\}$ 是正无穷大量.

解 事实上, 当 n 足够大时 $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\varepsilon<1$.

则当 $n>N$ 时,$\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{1}{a_N}\cdot\varepsilon^{n-N}$, 即 $a_n>\dfrac{a_N}{\varepsilon^{n-N}}>M$ 成立,(M 为一给定的任意大的数), 也即 $\{a_n\}$ 为无穷大量.

(2) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0$, 证明:$\{a_n\}$ 无界.

解 反证. 假设 $\{a_n\}$ 有上界 M; 而因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0\Rightarrow$ 对 $\varepsilon=\dfrac{1}{4}$,$\exists N$ 使得当 $n>N$ 时 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}<\varepsilon=\dfrac{1}{4}$. 那么可以推出 $4a_N<a_{N+1}+a_{N+2}, 16a_N<a_{N+2}+2a_{N+3}+a_{N+4},\cdots$.

因为 M 固定, 故 $\exists m$ 使得 $2^m a_N>M$, 即 $2^m M<4^m a_N<\underbrace{\cdots}_{2^m\text{个}\{a_n\}\text{中的项}}$.

由抽屉原理知, 至少有一个项 $>M$, 与假设矛盾. 故原命题成立.

说明: 只说无界是正确的, 不一定是正无穷大量.$\{a_n\}$ 可以是 $1!,1,2!,1,3!,1,\cdots$, 这也满足题设.

✍ **练习 1.1.11** 证明:$\left(\dfrac{n}{3}\right)^n<n!<\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$, 其中右边的不等式当 $n\geqslant 6$ 时成立.

解 与 2.5 练习题 7. 证法完全类似.

✍ **练习 1.1.12** 证明:$\left(\dfrac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$.

解 与 2.5 练习题 7. 证法完全类似.

✍ **练习 1.1.13** (对于命题 2.5.4 的改进) 证明:

(1) $n\geqslant 2$ 时成立:$1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{n!n}=3-\dfrac{1}{2!1\cdot 2}-\cdots-\dfrac{1}{n!(n-1)n}$;

解 也即证 $\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!n}=1-\frac{1}{2!1\cdot2}-\cdots-\frac{1}{n!(n-1)n}$.

用数归, 显然 $n=2$ 时 $\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!2}=1-\frac{1}{2!1\cdot2}$;

假设 $n=k$ 时成立, 即 $\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\frac{1}{k!k}=1-\frac{1}{2!1\cdot2}-\cdots-\frac{1}{k!(k-1)k}$,

当 $n=k+1$ 时,$\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{(k+1)!(k+1)}=1-\frac{1}{2!1\cdot2}-\cdots-\frac{1}{k!(k-1)k}+\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{(k+1)!(k+1)}-\frac{1}{k!k}$.

而通分后知 $\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{(k+1)!(k+1)}-\frac{1}{k!k}=-\frac{1}{(k+1)!k(k+1)}$,

即 $\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{(k+1)!(k+1)}=1-\frac{1}{2!1\cdot2}-\cdots-\frac{1}{k!(k-1)k}-\frac{1}{(k+1)!k(k+1)}$,

也即命题对 $n=k+1$ 也成立, 由数归知对所有 $n\geqslant2$ 都成立.

(2) $e=3-\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)!(k+1)(k+2)}$;

解 由 (1) 知 $3-\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)!(k+1)(k+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!n}\right)$

而前已证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$, 且显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!n}=0$, 由极限的四则运算知等式成立.

(3) 用 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!n}$ 计算 e 要比不加上最后一项好得多.

解 由 (1) 的右边可以看出 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!n}\right)$ 是大于 e 的.

也就是说, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ 单调增从下方逼近 e, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!n}\right)$ 单调减从上方逼近 e.

而他们和 e 的误差为 $\alpha_n=e-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$, $\beta_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!n}-e=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!(k-1)k}$.

显然 $\beta_n<\alpha_n$ 也就是说后者收敛得更快.

✍ **练习 1.1.14** 设 $a_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}, n\in\mathbb{N}_+$, 证明:$\{a_n\}$ 收敛.

解 $\because\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{2\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)\Rightarrow a_n<\left(-\sqrt{0}+\sqrt{1}\right)+\cdots+(-\sqrt{n-1}+\sqrt{n})-2\sqrt{n}=0$.

而考虑 $a_{n+1}-a_n$, 有差值为 $\frac{1}{\sqrt{n+1}}+2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})>0$, 故 a_n 单调递增有上界, 即 $\{a_n\}$ 收敛.

✍ **练习 1.1.15** 设已知存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$.

解 (有点取巧?)

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$.

✍ **练习 1.1.16** 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}=1$.

解 $\sqrt[n]{n!}<\sqrt[n]{n^n}=n$, 而前已证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 又显然 $(n!)^{1/n^2}>1$, 由夹逼定理得命题成立.

✍ **练习 1.1.17** 设对每个 n 有 $x_n<1$ 和 $(1-x_n)x_{n+1}\geqslant\frac{1}{4}$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

解 (解法类似 2.6 练习题 7.)

先证 $n\geqslant2$ 时 x_n 都为正数.

因为 $x_n<1$, 所以 $(1-x_n)>0$ 恒成立, 故 $x_{n+1}>0$, 也就是说从 $n=2$ 开始 $\{x_n\}$ 都为正数.

再证 $\{x_n\}\leqslant\frac{1}{2}$,

$(1-x_{n-1})x_n\geqslant\frac{1}{4}\Rightarrow x_n\geqslant\frac{1}{4(1-x_{n-1})}$, 但 $x_n<1$, 所以 $\frac{1}{4(1-x_{n-1})}<1\Rightarrow x_{n-1}<\frac{3}{4}$; 同理 $x_{n-1}<\frac{3}{4}\Rightarrow x_{n-2}<\frac{2}{3}\cdots$, 若 $x_n<m$, 则 $x_{n-1}<1-\frac{1}{4m}$, 易证这是个单调减趋向 $\frac{1}{2}$ 的序列, 令 n 趋向无穷便得到 $\{x_n\}$ 每一项都 $\leqslant\frac{1}{2}$.

从下方夹逼,

$x_1<1\Rightarrow(1-x_1)>0\Rightarrow x_2>0\Rightarrow(1-x_2)<1\Rightarrow x_3>\frac{1}{4}\Rightarrow x_4>\frac{1}{3}\cdots$, 同样可证这是一个单调增趋向 $\frac{1}{2}$ 的序列, 由夹逼定理知 $\{x_n\}$ 收敛且极限为 $\frac{1}{2}$.

练习 1.1.18 设 $a_1=b,a_2=c$, 再 $n\geqslant3$ 时,$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

解 一个方法是用特征根法解出通项为 $a_n=(\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}c)+\frac{4}{3}(c-b)(-\frac{1}{2})^n$, 令 n 趋向无穷便得到极限为 $\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}c$.

另外也可以像提示中那样证明奇数项和偶数项分别单调互为上下界.

练习 1.1.19 设 a,b,c 是三个给定的实数, 令 $a_1=a,b_1=b,c_1=c$, 并以递推公式定义

$$a_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2},b_{n+1}=\frac{a_n+c_n}{2},c_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},n\in\mathbb{N}+$$

. 求这三个数列的极限.

解 注意到有 $a_n+b_n+c_n=a+b+c$, 且 $a_{n+1}-b_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_n-b_n)\Rightarrow a_n-b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(a-b)$, 同理对 b_n,c_n 也可以得到类似的式子, 联立可以解出 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$, 最后可以得到极限为 $\frac{a+b+c}{3}$.

练习 1.1.20

(1) 设 $a_1>b_1>0,a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n},n\in\mathbb{N}+$, 证明: $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限.

解 解法类似例题 2.3.5, 分别证明 $\{a_n\},\{b_n\}$ 单调且互为上下界.

$a_n>b_n>0\Rightarrow a_n+b_n>2b_n\Rightarrow1>\frac{2b_n}{a_n+b_n}\Rightarrow a_n>\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$

$a_n>b_n>0\Rightarrow2a_n>a_n+b_n\Rightarrow a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}>b_n\Rightarrow b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}>b_n$

$a_n>b_n\Rightarrow a_{n+1}>\sqrt{a_{n+1}b_n}=b_{n+1}$

故两者都单调有界, 也即收敛.

任取其中一个递推式, 令 n 趋向无穷即得两者极限相同.

(2) 在 $a_1=2\sqrt{3},b_1=3$ 时, 证明上述极限等于单位圆的半周长 π.(这里可以利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{n}=\pi$.)

解 若 $\{a_n\}$ 为 m 边单位圆外切正多边形半周长,$\{b_n\}$ 为 m 边单位圆内接正多边形半周长, 则 $a_n=m\tan\frac{2\pi}{2m},b_n=m\sin\frac{2\pi}{2m}$.

验证知 $\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}=a_{n+1}=2m\tan\frac{2\pi}{2(2m)},\sqrt{a_{n+1}b_n}=b_{n+1}=2m\sin\frac{2\pi}{2(2m)}$, 即下一项为 $2m$ 边正多边形的半周长.

计算知 a_1,b_1 分别为正六边形外切 (内接) 圆半周长, 故 $a_n=6\cdot2^{n-1}\tan\frac{\pi}{6\cdot2^{n-1}}$,

$b_n=6\cdot2^{n-1}\sin\frac{\pi}{6\cdot2^{n-1}}$, 由提示知极限为 π.

笔记 本题与例题 2.3.5 完全不同. 实际上这就是计算圆周率的 Archimedes(阿基米德)-刘徽方法的迭代形式. 在 (2) 中的两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 就是单位圆的外切和内接正多边形的半周长 (请求出边数和 n 的关系).