

第一章 实数系的基本定理

定义 1.1. 开覆盖

设有 $[a, b] \subset \bigcup_{\alpha} \mathcal{O}_{\alpha}$, 其中每个 \mathcal{O}_{α} 是开区间, 则称 $\{\mathcal{O}_{\alpha}\}$ 是区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖.



定理 1.1. 覆盖定理

如果 $\{\mathcal{O}_{\alpha}\}$ 是区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 则存在 $\{\mathcal{O}_{\alpha}\}$ 的一个有限子集 $\{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n\}$, 它是区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 也就是说有 $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i$.



1.1 覆盖定理

1.1.1 思考题

例 1.1.1 如果将定理中的"每个开区间"改为闭区间, 举出不成立的反例.

解 例如 $\{\mathcal{O}_i\}$ 是这样的: $\left\{ \mathcal{O} \left[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i} \right], i \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{[-1, 0]\}$, 很明显 $\{\mathcal{O}_i\}$ 覆盖 $[0, 1]$, 但是 $\{\mathcal{O}_i\}$ 的任意有限子集都无法覆盖 $[0, 1]$.

1.1.2 练习题

 **练习 1.1.1**