

Hartree-Fock理论

Sun Xinyu
sunxinyu347@gmail.com

2024 年 1 月 10 日

目录

1	前言	1
2	Hartree-Fock理论	2
2.1	高斯型基函数 (GTOs)	2
2.2	多电子Hartree-Fock近似	2
2.2.1	Fock算符	2
2.2.2	自旋轨道下的Hartree-Fock能量方程	3
2.2.3	空间轨道下的Hartree-Fock能量方程	5
2.2.4	N电子体系闭壳层限制性Hartree-Fock能量方程	6
2.2.5	电子积分	7
2.3	Roothan方程	8
3	程序编写	11
3.1	环境准备	11
3.2	程序流程	11
3.3	代码实现	11
4	后记	15
A	完整代码 (简易版)	17
B	完整代码 (Libcint版)	19

1 前言

Hartree-Fock（后文简称HF）方法是量子化学最经典的波函数方法，如今常用来为后续高级别算法提供初猜、选择活性空间等。我们仍有必要学习HF代码，其中的思想和专有名词是应用量子化学计算的必要知识储备，让初学者对量化软件的逻辑有一个基础且必须的了解，避免糊算乱算，并且在自己的计算过程中遇到的错误能有合理的解释和解决办法。

这是南开大学彭谦课题组新人入组手册系列之一，gitlab地址为https://github.com/Yxwxwx/Penglab_tutorial

2 Hartree-Fock理论

本章要求熟练掌握线性代数相关知识，熟悉《结构化学》中，量子力学基础部分。

2.1 高斯型基函数（GTOs）

我们使用的基组函数一般都是GTO，其数学表达形式为

$$|\phi^{GTO}\rangle = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{3/4} e^{-ar^2}$$

我们成为原始的Gaussian函数（primitive）；比如STO-3G对于H原子，使用三个GTO拟合一个STO，那么Gaussian函数的线性组合（CGTO）可以写为

$$\begin{aligned} |\phi^{CGTO}(r)\rangle = & d_1 \times \phi^{GTO}(a_1, \mathbf{r}) \\ & + d_2 \times \phi^{GTO}(a_2, \mathbf{r}) \\ & + d_3 \times \phi^{GTO}(a_3, \mathbf{r}) \end{aligned}$$

其中的系数 d 和指数 a 通过读取基组文件得到。

```
BASIS "ao basis" PRINT
#BASIS SET: (3s) -> [1s]
H      S
      3.42525091      0.15432897
      0.62391373      0.53532814
      0.16885540      0.44463454
```

2.2 多电子Hartree-Fock近似

2.2.1 Fock算符

根据变分原理，对于Slater行列式形式的波函数中，最优的波函数对应的是最低的能量：

$$E_0 = \langle \Psi_0 | \mathbf{H} | \Psi_0 \rangle \quad (1)$$

在单电子近似下，我们假设一个有效的单电子算符 $f(i)$ ，被称为Fock算符，其形式为：

$$f(i) = -\frac{1}{2}\nabla_i^2 - \sum_{A=1}^M \frac{Z_A}{r_{iA}} + v^{HF}(i) \quad (2)$$

$v^{HF}(i)$ 是 i 电子和其他电子的相互作用产生的平均势。所谓“自洽场”中的场，可以简单理解为这个平均势。Hartree-Fock近似的精髓在于将复杂的多

电子问题转化为单电子问题，单电子问题使用平均的方式处理复杂的电子排斥。

Fock算符是轨道的本征算符：

$$f|\chi_a\rangle = \epsilon_a|\chi_a\rangle \quad (3)$$

χ_a 是自旋轨道波函数，后文会经常用到。

2.2.2 自旋轨道下的Hartree-Fock能量方程

基态波函数的Slater行列式形式为：

$$\Psi_0 = \frac{1}{2^{1/2}} \begin{vmatrix} \chi_1(x_1) & \chi_2(x_1) \\ \chi_1(x_2) & \chi_2(x_2) \end{vmatrix} = |\chi_1\chi_2\rangle \quad (4)$$

以极小基 H_2 模型考虑。在Born-Oppenheimer近似下，双电子体系的哈密顿量为：

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \left(-\frac{1}{2}\nabla_1^2 - \sum_A \frac{Z_A}{r_{1A}} \right) + \left(-\frac{1}{2}\nabla_2^2 - \sum_A \frac{Z_A}{r_{2A}} \right) + \frac{1}{r_{12}} \\ &= h(1) + h(2) + \frac{1}{r_{12}} \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $h(1)$ 就是电子1的“核哈密顿量”，表示电子在核的势场中的动能和势能，对应后文的“单电子积分”， $\frac{1}{r_{12}}$ 对应双电子部分。为方便，我们将总哈密顿分成单电子和双电子部分：

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_1 &= h(1) + h(2) \\ \mathbf{O}_2 &= r_{12}^{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

矩阵元 $\langle\Psi_0|\mathbf{H}|\Psi_0\rangle = \langle\Psi_0|\mathbf{O}_1|\Psi_0\rangle + \langle\Psi_0|\mathbf{O}_2|\Psi_0\rangle$

$$\begin{aligned} \langle\Psi_0|h(1)|\Psi_0\rangle &= \int dx_1 dx_2 [2^{-\frac{1}{2}}(\chi_1(x_1)\chi_2(x_2) - \chi_2(x_1)\chi_1(x_2))]^* \\ &\quad \times h(r_1) [2^{-\frac{1}{2}}(\chi_1(x_1)\chi_2(x_2) - \chi_2(x_1)\chi_1(x_2))] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 [\chi_1^*(x_1)\chi_2^*(x_2)h(r_1)\chi_1(x_1)\chi_2(x_2) - \chi_1^*(x_1)\chi_2^*(x_2)h(r_1)\chi_2(x_1)\chi_1(x_2) \\ &\quad - \chi_2^*(x_1)\chi_1^*(x_2)h(r_1)\chi_1(x_1)\chi_2(x_2) + \chi_2^*(x_1)\chi_1^*(x_2)h(r_1)\chi_2(x_1)\chi_1(x_2)] \end{aligned} \quad (8)$$

根据自旋轨道的正交归一性，将 x_2 积掉，公式(6)只有两项：

$$\langle\Psi_0|h(1)|\Psi_0\rangle = \frac{1}{2} \int dx_1 \chi_1^*(x_1)h(r_1)\chi_1(x_1) + \frac{1}{2} \int dx_1 \chi_2^*(x_1)h(r_1)\chi_2(x_1) \quad (9)$$

对于重复操作, 可得: $\langle \Psi_0 | h(1) | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | h(2) | \Psi_0 \rangle$ 则:

$$\langle \Psi_0 | \mathbf{O}_1 | \Psi_0 \rangle = \int dx_1 \chi_1^*(x_1) h(r_1) \chi_1(x_1) + \int dx_1 \chi_2^*(x_1) h(r_1) \chi_2(x_1) \quad (10)$$

上式被称为**单电子积分**, 使用 $\langle i | h | j \rangle = \langle \chi_i | h | \chi_j \rangle = \int dx_1 \chi_1^*(x_1) h(r_1) \chi_1(x_1)$ 简化表示, 则有:

$$\langle \Psi_0 | \mathbf{O}_1 | \Psi_0 \rangle = \langle 1 | h | 1 \rangle + \langle 2 | h | 2 \rangle \quad (11)$$

现在计算 O_2 矩阵元:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0 | \mathbf{O}_2 | \Psi_0 \rangle &= \int dx_1 dx_2 [2^{\frac{-1}{2}} (\chi_1(x_1) \chi_2(x_2) - \chi_2(x_1) \chi_1(x_2))]^* \\ &\quad \times r_{12}^{-1} [2^{\frac{-1}{2}} (\chi_1(x_1) \chi_2(x_2) - \chi_2(x_1) \chi_1(x_2))] \\ &= \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 [\chi_1^*(x_1) \chi_2^*(x_2) r_{12}^{-1} \chi_1(x_1) \chi_2(x_2) - \chi_1^*(x_1) \chi_2^*(x_2) r_{12}^{-1} \chi_2(x_1) \chi_1(x_2) \\ &\quad - \chi_2^*(x_1) \chi_1^*(x_2) r_{12}^{-1} \chi_1(x_1) \chi_2(x_2) + \chi_2^*(x_1) \chi_1^*(x_2) r_{12}^{-1} \chi_2(x_1) \chi_1(x_2)] \end{aligned} \quad (12)$$

显然 $r_{12}^{-1} = r_{21}^{-1}$, 上式中的积分变量可以交换, 即第一项和第四项相同, 第二项与第三项相同, 因此:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0 | \mathbf{O}_2 | \Psi_0 \rangle &= \int dx_1 dx_2 \chi_1^*(x_1) \chi_2^*(x_2) r_{12}^{-1} \chi_1(x_1) \chi_2(x_2) \\ &\quad - \int dx_1 dx_2 \chi_1^*(x_1) \chi_2^*(x_2) r_{12}^{-1} \chi_2(x_1) \chi_1(x_2) \end{aligned} \quad (14)$$

与单电子积分类似, 我们同样以

$$\langle ij | kl \rangle = \langle \chi_i \chi_j | \chi_k \chi_l \rangle = \int dx_1 dx_2 \chi_i^*(x_1) \chi_j^*(x_2) r_{12}^{-1} \chi_k(x_1) \chi_l(x_2)$$

简化表示。那么就有:

$$\langle \Psi_0 | \mathbf{O}_2 | \Psi_0 \rangle = \langle 12 | 12 \rangle - \langle 12 | 21 \rangle \quad (15)$$

所以, Hartree-Fock基态能量为:

$$\begin{aligned} E_0 &= \langle \Psi_0 | \mathbf{H} | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 | \Psi_0 \rangle \\ &= \langle 1 | h | 1 \rangle + \langle 2 | h | 2 \rangle + \langle 12 | 12 \rangle - \langle 12 | 21 \rangle \end{aligned} \quad (16)$$

有时也常用**反对称双电子积分** $\langle ij || kl \rangle = \langle ij | kl \rangle - \langle ij | lk \rangle$ 上述使用的积分符号也被称为**物理学家符号**, 为方便, 本文所有公式推导均是在物理学家符号下。双电子积分具有以下对称性:

$$\begin{aligned} \langle ij | kl \rangle &= \langle ji | lk \rangle \\ \langle ij | kl \rangle &= \langle kl | ij \rangle^* \end{aligned} \quad (17)$$

对于孤立体系、不考虑相对论效应的情况下，双电子积分的矩阵元均为实数，所以双电子积分具有八重对称性。

还有一种符号计法，被称为化学家符号，自旋轨道中使用 \uparrow 表示，和物理学家符号的关系是：

$$\langle ij|kl\rangle = \langle \chi_i \chi_j | \chi_k \chi_l \rangle = [ik|jl] \quad (18)$$

对于空间轨道，化学家符号使用 $()$ 表示。事实上，常用的量子化学电子积分库Libint2, Libcint都是在化学家符号下计算的。

2.2.3 空间轨道下的Hartree-Fock能量方程

使用自旋轨道可以简化公式推导，但实际计算中自旋函数 α, β 必须积分掉才能将其约化为可数值计算的空间轨道和积分。（实际上，对于闭壳层，自旋轨道比空间轨道多浪费一个维度的资源）。

自旋轨道下Hartree-Fock基态能量为：

$$E_0 = \langle \chi_1 | h | \chi_1 \rangle + \langle \chi_2 | h | \chi_2 \rangle + \langle \chi_1 \chi_2 | \chi_1 \chi_2 \rangle - \langle \chi_1 \chi_2 | \chi_2 \chi_1 \rangle \quad (19)$$

我们知道，空间轨道和自旋轨道的关系为：

$$\begin{aligned} \chi_1(x) &= \psi_1(r) \alpha(w) = \psi_1 \\ \chi_2(x) &= \psi_1(r) \beta(w) = \overline{\psi_1} \end{aligned} \quad (20)$$

联立上述方程，可以得到空间轨道下的Hartree-Fock能量：

$$E_0 = \langle \psi_1 | h | \psi_1 \rangle + \langle \overline{\psi_1} | h | \overline{\psi_1} \rangle + \langle \psi_1 \overline{\psi_1} | \psi_1 \overline{\psi_1} \rangle - \langle \psi_1 \overline{\psi_1} | \overline{\psi_1} \psi_1 \rangle \quad (21)$$

对于单电子积分：

$$\langle \overline{\psi_1} | h | \overline{\psi_1} \rangle = \int dr \psi_1^*(r_1) \beta^* h(r_1) \psi_1(r_1) \beta \quad (22)$$

对于非相对论下，单电子算符是不依赖自旋的，根据正交归一性， $\langle \beta | \beta \rangle = 1$ ，所以显然：

$$\langle \overline{\psi_1} | h | \overline{\psi_1} \rangle = \langle \psi_1 | h | \psi_1 \rangle \quad (23)$$

对于双电子积分的第一项：

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 \overline{\psi_1} | \psi_1 \overline{\psi_1} \rangle &= \int dr_1 dr_2 dw_1 dw_2 \psi_1^*(r_1) \alpha^*(w_1) \psi_1(r_2) \alpha(w_2) r_{12}^{-1} \\ &\quad \times \psi_1^*(r_1) \beta^*(w_1) \psi_1(r_2) \beta(w_2) \end{aligned} \quad (24)$$

同样把 α, β 积掉，得到：

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 \overline{\psi_1} | \psi_1 \overline{\psi_1} \rangle &= \int dr_1 dr_2 \psi_1^*(r_1) \psi_1(r_2) r_{12}^{-1} \psi_1^*(r_1) \psi_1(r_2) \\ &= \langle \psi_1 \psi_1 | \psi_1 \psi_1 \rangle \end{aligned} \quad (25)$$

对于双电子积分的第二项:

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 \bar{\psi}_1 | \bar{\psi}_1 \psi_1 \rangle &= \int dr_1 dr_2 \psi_1^*(r_1) \alpha^*(w_1) \psi_1^*(r_2) \beta^*(w_2) r_{12}^{-1} \\ &\times \psi_1(r_1) \beta(w_1) \psi_1(r_2) \alpha(w_2) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

这是因为正交性 $\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle = 0$

所以, 空间轨道下的极小基H2的Hartree-Fock基态能量为:

$$\begin{aligned} E_0 &= 2\langle \psi_1 | h | \psi_1 \rangle + \langle \psi_1 \psi_1 | \psi_1 \psi_1 \rangle \\ &= 2\langle 1 | h | 1 \rangle + \langle 11 | 11 \rangle \end{aligned} \quad (27)$$

通常下, 空间轨道的公式会比自旋轨道下的更紧凑, 更好编程。

2.2.4 N电子体系闭壳层限制性Hartree-Fock能量方程

类似H2极小基的波函数, N电子系统的Hartree-Fock波函数为:

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle &= |\chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 \dots \chi_{N-1} \chi_N\rangle \\ &= |\psi_1 \bar{\psi}_1 \psi_2 \bar{\psi}_2 \dots \psi_{N/2} \bar{\psi}_{N/2}\rangle \end{aligned} \quad (28)$$

对于自旋轨道, Hartree-Fock能量方程为:

$$E_0 = \sum_i^N \langle i | h | i \rangle + \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_j^N \langle ij | ij \rangle - \langle ij | ji \rangle \quad (29)$$

其中的双电子部分, 共N/2对电子, 故有 $\frac{1}{2}$

自旋轨道波函数包括N/2个 α 自旋轨道和N/2个 β 自旋轨道, 我们将自旋轨道的求和分为两部分:

$$\sum_i^N \chi_i = \sum_i^{N/2} \psi_i + \sum_i^{N/2} \bar{\psi}_i \quad (30)$$

对于双求和:

$$\begin{aligned} \sum_i^N \sum_j^N \chi_i \chi_j &= \sum_i^N \chi_i \sum_j^N \chi_j \\ &= \sum_i^{N/2} (\psi_i + \bar{\psi}_i) \sum_j^{N/2} (\psi_j + \bar{\psi}_j) \\ &= \sum_i^{N/2} \sum_j^{N/2} \psi_i \psi_j + \psi_i \bar{\psi}_j + \bar{\psi}_i \psi_j + \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j \end{aligned} \quad (31)$$

我们将其转化为空间轨道方程。对于单电子积分：

$$\sum_i^N \langle i|h|i \rangle = \sum_i^{N/2} \langle i|h|i \rangle + \sum_i^{N/2} \langle \bar{i}|h|\bar{i} \rangle = 2 \sum_i^{N/2} \langle \psi_i|h|\psi_i \rangle \quad (32)$$

双电子积分项：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_j^N \langle ij|ij \rangle - \langle ij|ji \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_i^{N/2} \sum_j^{N/2} \langle ij|ij \rangle - \langle ij|ji \rangle + \frac{1}{2} \sum_i^{N/2} \sum_j^{N/2} \langle \bar{i}\bar{j}|\bar{i}\bar{j} \rangle - \langle \bar{i}\bar{j}|\bar{j}\bar{i} \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \sum_i^{N/2} \sum_j^{N/2} \langle \bar{i}j|\bar{i}j \rangle - \langle \bar{i}j|j\bar{i} \rangle + \frac{1}{2} \sum_i^{N/2} \sum_j^{N/2} \langle i\bar{j}|i\bar{j} \rangle - \langle i\bar{j}|\bar{j}i \rangle \\ &= \sum_i^{N/2} \sum_j^{N/2} 2 \langle \psi_i \psi_j | \psi_i \psi_j \rangle - \langle \psi_i \psi_j | \psi_j \psi_i \rangle \end{aligned} \quad (33)$$

因此，空间轨道下的闭壳层限制性Hartree-Fock能量方程是：

$$E_0 = 2 \sum_i^{N/2} \langle \psi_i | h | \psi_i \rangle + \sum_i^{N/2} \sum_j^{N/2} 2 \langle \psi_i \psi_j | \psi_i \psi_j \rangle - \langle \psi_i \psi_j | \psi_j \psi_i \rangle \quad (34)$$

2.2.5 电子积分

这里只介绍HF方法中使用到的电子积分，并不展开其计算的解析式。

• 单电子积分

- 重叠积分S: $S_{pq} = \langle \psi_p | \psi_q \rangle$
- 动能积分T: $T_{pq} = \langle \psi_p | -\frac{1}{2} \nabla^2 | \psi_q \rangle$
- 核-电子势能积分V: $V_{pq} = \langle \psi_p | \frac{1}{r_C} | \psi_q \rangle$
- 核-哈密顿矩阵 H^{core} : $H^{core} = T_{pq} + V_{pq}$

• 双电子积分

- I: $I_{pqrs} = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \phi_p^*(\mathbf{r}_1) \phi_q(\mathbf{r}_1) \frac{1}{r_{12}} \phi_r^*(\mathbf{r}_2) \phi_s(\mathbf{r}_2)$
- 库伦积分J: $J_{ij} = \langle \psi_i \psi_j | \psi_i \psi_j \rangle$
- 交换积分K: $K_{ij} = \langle \psi_i \psi_j | \psi_j \psi_i \rangle$

对于水分子在STO-3G下，共有10个电子、7个分子轨道，所以单电子积分为7*7的对称阵，双电子积分为7*7*7*7的四维矩阵，显然，双电子积分是自洽场计算中最耗时的部分，此处留个疑问：存储四维矩阵显然浪费，且处理四维矩阵更耗时，计算程序采用那些策略优化呢？

2.3 Roothan方程

Roothan方程一般是指限制性闭壳层HF方程，也称为Hartree-Fock-Roothan方程。以他为标题是因为下文的代码实现部分是如此。我们先推导一般性的HF方程。假设读者已经了解线性变分法（应该是结构化学的的知识）。

首先，给定一个线性变分尝试波函数：

$$|\Phi\rangle = \sum_{i=0}^N c_i |\Psi_i\rangle \quad (35)$$

其需要能量极小化的表达式为：

$$E = \langle \Phi | \mathbf{H} | \Phi \rangle = \sum_{ij} c_i^* c_j \langle \Psi_i | \mathbf{H} | \Psi_j \rangle \quad (36)$$

注意，尝试波函数需要满足归一化：

$$\langle \Phi | \Phi \rangle - 1 = \sum_{ij} c_i^* c_j \langle \Phi | \Phi \rangle - 1 = 0 \quad (37)$$

使用Lagrange不定乘子法，定义方程L和Lagrange乘子 ϵ ：

$$\begin{aligned} L &= \langle \Phi | \mathbf{H} | \Phi \rangle - \epsilon (\langle \Phi | \Phi \rangle - 1) \\ &= \sum_{ij} c_i^* c_j \langle \Psi_i | \mathbf{H} | \Psi_j \rangle - \epsilon \left(\sum_{ij} c_i^* c_j \langle \Phi | \Phi \rangle - 1 \right) \end{aligned} \quad (38)$$

进行线性变分：

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{ij} \delta c_i^* c_j \langle \Psi_i | \mathbf{H} | \Psi_j \rangle - \epsilon \sum_{ij} \delta c_i^* c_j \langle \Phi | \Phi \rangle \\ &\quad + \sum_{ij} c_i^* \delta c_j \langle \Psi_i | \mathbf{H} | \Psi_j \rangle - \epsilon \sum_{ij} c_i^* \delta c_j \langle \Phi | \Phi \rangle \\ &= 2 \sum_i \delta c_i^* \left(\sum_j \langle \Psi_i | \mathbf{H} | \Psi_j \rangle c_j - \epsilon \langle \Psi_i | \Psi_j \rangle c_j \right) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

我简单将复共轭合并，注意，索引*i,j*是等价的。

我们使用上文定义的 $H_{ij} = \langle \Psi_i | \mathbf{H} | \Psi_j \rangle$ 和重叠积分 $S_{ij} = \langle \Psi_i | \Psi_j \rangle$ ，HF方程可以写为：

$$\sum_j H_{ij} c_j = \epsilon \sum_j S_{ij} c_j \quad (40)$$

当然，一般写为：

$$\mathbf{H}\mathbf{c} = \epsilon \mathbf{S}\mathbf{c} \quad (41)$$

聪明的你显然注意到了，虽然我前文没有着墨声明：算符=矩阵，积分=张量，大家在符号中也能体会到了。

下面引入基函数，假设有*K*个已知的基函数（显然是我们上文提到的Gaussian形基函数），那么位置的分子轨道可以表示为基函数的线性展开：

$$\psi_i = \sum_{\mu}^K C_{\mu i} \phi_{\mu} \quad (42)$$

带入Fock算符，HF方程可写为

$$f \sum_v C_{vi} \phi_v = \epsilon_i \sum_v C_{vi} \phi_v \quad (43)$$

左乘波函数的复共轭得到：

$$\sum_v C_{vi} \langle \phi_v^* | f | \phi_v \rangle = \epsilon_i \sum_v C_{vi} \langle \phi_v^* | \phi_v \rangle \quad (44)$$

我们定义Fock矩阵 $F_{\mu\nu} = \langle \phi_{\mu}^* | f | \phi_{\nu} \rangle$ ，还有上文提到的重叠积分。那么，Roothan方程可以表示为：

$$\sum_v F_{\mu\nu} C_{vi} = \epsilon_i \sum_v S_{\mu\nu} C_{vi} \quad (45)$$

或者写成矩阵形式：

$$\mathbf{F}\mathbf{C} = \mathbf{S}\mathbf{C}\epsilon \quad (46)$$

那么聪明的你，猜猜这些矩阵的形状是什么呢？

我们定义总电荷密度：

$$\rho(r) = 2 \sum_a^{N/2} |\psi_a(r)|^2 \quad (47)$$

将波函数的线性展开带入其中得到：

$$\begin{aligned}
 \rho(r) &= 2 \sum_a^{N/2} \psi_a^*(r) \psi_a(r) \\
 &= 2 \sum_a^{N/2} \sum_v C_{va}^* \phi_v^*(r) \sum_\mu C_{\mu a} \phi_\mu(r) \\
 &= \sum_{\mu v} \left(2 \sum_a^{N/2} C_{va}^* C_{\mu a} \right) \phi_v^*(r) \phi_\mu(r) \\
 &= \sum_{\mu v} P_{\mu v} \phi_v^*(r) \phi_\mu(r)
 \end{aligned} \tag{48}$$

我们得到了一个重要的概念：密度矩阵 $P_{\mu v} = 2 \sum_a^{N/2} C_{va}^* C_{\mu a}$ 可以证明Fock算符是波函数的本征算符，结合上节的推导可得到其表达式：

$$\begin{aligned}
 f(1) &= h(1) + \sum_a^{N/2} 2J_a(1) - K_a(1) \\
 J_a(1) &= \int dr_2 \psi_a^*(2) r_{12}^{-1} \psi_a(2) \\
 K_a(1) \psi_i(1) &= \left(\int dr_1 \psi_a^*(2) r_{12}^{-1} \psi_i(2) \right) \psi_a(1)
 \end{aligned} \tag{49}$$

将波函数的线性展开带入Fock算符得到，并且写为矩阵形式（主要是好写）：

$$\begin{aligned}
 F_{\mu v} &= H_{\mu v}^{core} + \sum_a^{N/2} \sum_{ij} C_{ia} C_{ja}^* [2\langle ij|ij \rangle - \langle ij|ji \rangle] \\
 &= H_{\mu v}^{core} + \sum_{ij} P_{ij} [\langle ij|ij \rangle - \frac{1}{2} \langle ij|ji \rangle]
 \end{aligned} \tag{50}$$

我们发现，Fock矩阵只与密度矩阵有关，也就是Fock矩阵依赖于展开系数。展开系数又可以通过求解Roothan方程得到，如此迭代直到能量最低，这就是所谓“自洽（self-consistent）”。

3 程序编写

3.1 环境准备

对于开发来说，尤其是计算化学程序，Linux绝对是最好的选择，相比Windows下需要考虑的更少，开发效率更高、更灵活。显然大多数电脑系统还是Windows,所以建议大家安装WSL2（安装教程），安装好gcc和gfortran，建议使用Anaconda简化python库文件的管理，我们后续代码需要Numpy。其次建议使用MacOS系统。本文所有代码均在WSL2中运行，Python版本为3.10

教程使用Python，当然使用什么语言无所谓，C/C++、Fortran都可以，他们的效率可能更高，但需要一定熟练度，否则不一定快于Numpy（因为其底层还是用C/Fortran写的），使用Python我认为对新手更Friendly。我会提供单、双电子积分，可以直接load，如果想跑其他结构，建议安装Pyscf。

对于Python语法，我不会用很复杂，因为只涉及矩阵处理，但也没精力再写一遍Numpy教程。这里假设读者水平为大学上过编程课程，会使用Chat-GPT等AI大模型问问题，基本上课余时间一周肯定能写出来！

3.2 程序流程

根据Szabo和Ostlund书中146页描述，自洽场迭代步骤为：

- 步骤
 1. 得到一个密度矩阵初猜
 2. 根据电子积分和初猜构建Fock矩阵
 3. 对角化Fock矩阵
 4. 选择占据轨道并计算新的密度矩阵
 5. 计算HF能量
 6. 计算误差判断是否收敛
 - 如果不收敛，使用新的密度矩阵继续
 - 如果收敛，输出能量

3.3 代码实现

我们的任务目标是：根据提供的单、双电子积分，计算 H_2O 分子在STO-3G基组下的HF电子能量，参考值:-84.1513215474753
载入环境

```

1 import numpy as np
2 import scipy

```

将.npy二进制文件和python脚本文件放在同一文件夹中，载入单电子积分和双电子积分,同时获取轨道数`nao`。我们使用一个单位阵作为初猜，对应步骤1.值得注意，这是一种很粗糙的制作初猜的方式，不同的计算化学程序又不同的制作初猜的方法，初猜越准确，自洽场收敛越快。

```

1 overlap_matrix = np.load("overlap.npy")
2 H = np.load("core_hamiltonian.npy")
3 int2e = np.load("int2e.npy")
4 nao = len(overlap_matrix[0])
5 assert nao == len(int2e[0])
6 dm = np.eye(nao)

```

下面我们需要些两个函数，用于构建库伦积分 \mathbf{J} 和交换积分 \mathbf{K} ，传入函数的是密度矩阵 dm ，对应步骤2.因为双电子积分是四维矩阵，所以应该是四重循环。根据上文的公式，遍历壳层 p, q, r, s

```

1 # Calculate the coulomb matrices from density matrix
2 def get_j(dm):
3     J = np.zeros((nao, nao)) # Initialize the Coulomb matrix
4
5     # Loop over all indices of the Coulomb matrix
6     for p in range(nao):
7         for q in range(nao):
8             # Calculate the Coulomb integral for indices (p,q)
9             for r in range(nao):
10                for s in range(nao):
11                    J[p, q] += dm[r, s] * int2e[p, q, r, s]
12
13     return J
14
15 # Calculate the exchange matrices from density matrix
16 def get_k(dm):
17     K = np.zeros((nao, nao)) # Initialize the K matrix
18
19     # Loop over all indices of the K matrix
20     for p in range(nao):
21         for q in range(nao):
22             # Calculate the K integral for indices (p,q)
23             for r in range(nao):
24                 for s in range(nao):
25                     K[p, q] += dm[r, s] * int2e[p, r, q, s]
26
27     return K

```

我们还需要一个函数用于构建新的密度矩阵 dm ，将Fock矩阵传入函数。根据密度矩阵的公式，我们要遍历所有占据轨道的系数矩阵。对于本体系共10个电子，也就是5个占据轨道和2个空轨道。在这个函数中，我们要先完成步骤3，将Fock矩阵对角化，得到系数矩阵 \mathbf{C} 。我们需要将所有原子轨

道基函数正交化，一个可以的方法是对称正交化。例如定义一个矩阵 \mathbf{A} ，满足：

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{A} = 1$$

令 $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1/2}$ ，于是有：

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{S}^{1/2} \mathbf{S} \mathbf{S}^{-1/2} = \mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{S}^{1/2} = \mathbf{S}^0 = 1$$

我们借助矩阵 \mathbf{A} 将Roothan方程转换为本征方程（canonical eigenvalue equation），令 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{C}'$

$$\mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{C}' = \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{C}' \epsilon$$

$$\mathbf{A}^\dagger (\mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{C}') = \mathbf{A}^\dagger (\mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{C}') \epsilon$$

$$(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{F} \mathbf{A}) \mathbf{C}' = (\mathbf{A}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{A}) \mathbf{C}' \epsilon$$

$$\mathbf{F}' \mathbf{C}' = \mathbf{C}' \epsilon$$

于是我们可以通过将 \mathbf{F}' 矩阵对角化得到 \mathbf{C}' ，再将其转换回 \mathbf{C} 通过 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{C}'$ 可以通过Scipy库实现，我们使用了`scipy.linalg.fractional_matrix_power()`函数和`np.linalg.eigh()`函数

```

1  # Calculate the density matrix
2  def get_dm(fock, nocc):
3      dm = np.zeros((nao, nao))
4      S = overlap_matrix
5      A = scipy.linalg.fractional_matrix_power(S, -0.5)
6      F_p = A.T @ fock @ A
7      eigs, coeffsm = np.linalg.eigh(F_p)
8
9      c_occ = A @ coeffsm
10     c_occ = c_occ[:, :nocc]
11     for i in range(nocc):
12         for p in range(nao):
13             for q in range(nao):
14                 dm[p, q] += c_occ[p, i] * c_occ[q, i]
15     return dm

```

OK!准备工作已经充足，可以开始自洽场迭代了！对应步骤5、6

我们首先要确定收敛限和最大迭代次数。收敛限即最后收敛能量与上一次循环的HF能量变化小于一个值，我们设置为 $1.0e-10$ ，最大迭代次数为40次同时将能量初始化

```

1  # Maximum SCF iterations
2  max_iter = 100
3  E_conv = 1.0e-10
4  # SCF & Previous Energy
5  SCF_E = 0.0
6  E_old = 0.0

```

根据步骤6书写循环

```
1 for scf_iter in range(1, max_iter + 1):
2     # GET Fock matrix
3     F = H + 2 * get_j(dm) - get_k(dm)
4     assert F.shape == (nao, nao)
5
6     SCF_E = np.sum(np.multiply((H + F), dm))
7     dE = SCF_E - E_old
8     print('SCF Iteration %3d: Energy = %4.16f dE = % 1.5E' % (scf_iter, SCF_E, dE)
9           )
10
11     if (abs(dE) < E_conv):
12         print("SCF convergence! Congrats")
13         break
14     E_old = SCF_E
15
16     dm = get_dm(F, 5)
17
18 assert(np.abs(SCF_E + 84.1513215474753) < 1.0e-10)
```


4 后记

完整的代码我上传在gitlab上，从上面可以下载二进制积分文件.npy和源代码。本问的代码非常简单，只有几十行，而且有非常多可以改良的地方，比如`get_j`函数中使用了四重循环，这在python中是灾难性的代码；而且也并未考虑积分对称性。我列出几个可以继续思考的地方：

1. 结合参考书，实现UHF代码
2. 使用`np.einsum`代替循环和一些内置函数以提高效率
3. 考虑双电子积分的八重对称性加速构建Fock矩阵
4. 使用DIIS技术加速SCF收敛
5. 使用Cython, C/C++, Fortran等静态编程语言重写代码以加速
6. 安装并学习Pyscf, 尝试计算更多电子结构
7. ...

能自己写一个计算化学代码并且和自己常用的计算化学软件对应上，其实是一个很有成就感的过程。Keep coding! Keep thinking!

参考文献

- [1] Szabo and Ostlund. *Modern Quantum Chemistry: Introduction to Advanced Electronic Structure Theory*[M]. New York:Dover Publications,1996.

A 完整代码（简易版）

```

1 import numpy as np
2 import scipy
3
4 overlap_matrix = np.load("overlap.npy")
5 H = np.load("core_hamiltonian.npy")
6 int2e = np.load("int2e.npy")
7 nao = len(overlap_matrix[0])
8 assert nao == len(int2e[0])
9 assert int2e.shape == (nao, nao, nao, nao)
10 dm = np.eye(nao)
11
12 # Calculate the coulomb matrices from density matrix
13 def get_j(dm):
14     J = np.zeros((nao, nao)) # Initialize the Coulomb matrix
15
16     # Loop over all indices of the Coulomb matrix
17     for p in range(nao):
18         for q in range(nao):
19             # Calculate the Coulomb integral for indices (p,q)
20             for r in range(nao):
21                 for s in range(nao):
22                     J[p, q] += dm[r, s] * int2e[p, q, r, s]
23
24     return J
25
26 # Calculate the exchange matrices from density matrix
27 def get_k(dm):
28     K = np.zeros((nao, nao)) # Initialize the K matrix
29
30     # Loop over all indices of the K matrix
31     for p in range(nao):
32         for q in range(nao):
33             # Calculate the K integral for indices (p,q)
34             for r in range(nao):
35                 for s in range(nao):
36                     K[p, q] += dm[r, s] * int2e[p, r, q, s]
37
38     return K
39
40 # Calculate the density matrix
41 def get_dm(fock, nocc):
42     dm = np.zeros((nao, nao))
43     S = overlap_matrix
44     A = scipy.linalg.fractional_matrix_power(S, -0.5)
45     F_p = A.T @ fock @ A
46     eigs, coeffsm = np.linalg.eigh(F_p)
47
48     c_occ = A @ coeffsm
49     c_occ = c_occ[:, :nocc]
50     for i in range(nocc):
51         for p in range(nao):

```

```
52         for q in range(nao):
53             dm[p, q] += c_occ[p, i] * c_occ[q, i]
54     return dm
55     # Maximum SCF iterations
56     max_iter = 100
57     E_conv = 1.0e-10
58     # SCF & Previous Energy
59     SCF_E = 0.0
60     E_old = 0.0
61     for scf_iter in range(1, max_iter + 1):
62         # GET Fock matrix
63         F = H + 2 * get_j(dm) - get_k(dm)
64         assert F.shape == (nao, nao)
65
66         SCF_E = np.sum(np.multiply((H + F), dm))
67         dE = SCF_E - E_old
68         print('SCF Iteration %3d: Energy = %4.16f dE = % 1.5E' % (scf_iter, SCF_E, dE)
69               )
69
70         if (abs(dE) < E_conv):
71             print("SCF convergence! Congrats")
72             break
73         E_old = SCF_E
74
75         dm = get_dm(F, 5)
76
77     assert(np.abs(SCF_E + 84.1513215474753) < 1.0e-10)
```

B 完整代码 (Libcint版)

```

1  import numpy as np
2  import scipy
3  import ctypes
4  from pyscf import gto
5  import time
6
7  # slots of atm
8  CHARGE_OF      = 0
9  PTR_COORD      = 1
10 NUC_MOD_OF     = 2
11 PTR_ZETA       = 3
12 PTR_FRAC_CHARGE = 3
13 RESERVE_ATMLOT1 = 4
14 RESERVE_ATMLOT2 = 5
15 ATM_SLOTS      = 6
16
17
18 # slots of bas
19 ATOM_OF        = 0
20 ANG_OF         = 1
21 NPRIM_OF       = 2
22 NCTR_OF        = 3
23 KAPPA_OF       = 4
24 PTR_EXP        = 5
25 PTR_COEFF       = 6
26 RESERVE_BASLOT = 7
27 BAS_SLOTS      = 8
28
29 # Create a molecular object for H2O molecule
30 mol = gto.M(atom='O 0 0 0; H 0 -0.757 0.587; H 0 0.757 0.587', basis='6-31g')
31
32 # necessary parameters for Libcint
33 atm = mol._atm.astype(np.intc)
34 bas = mol._bas.astype(np.intc)
35 env = mol._env.astype(np.double)
36 nao = mol.nao_nr().astype(np.intc)
37 nshls = len(bas)
38 natm = len(atm)
39
40 _cint = ctypes.cdll.LoadLibrary('/home/yx/cint_and_xc/lib/libcint.so')
41
42 def get_ovlp_matrix():
43
44     ovlp_matrix = np.zeros((nao, nao), order='F')
45
46     _cint.cint1e_ovlp_sph.argtypes = [
47         np.ctypeslib.ndpointer(dtype=np.double, ndim=2),
48         (ctypes.c_int * 2),
49         np.ctypeslib.ndpointer(dtype=np.intc, ndim=2),
50         ctypes.c_int,
51         np.ctypeslib.ndpointer(dtype=np.intc, ndim=2),

```

```

52     ctypes.c_int,
53     np.ctypeslib.ndpointer(dtype=np.double, ndim=1)
54 ]
55
56
57     _cint.CINTcgto_spheric.restype = ctypes.c_int
58     _cint.CINTcgto_spheric.argtypes = [ctypes.c_int, np.ctypeslib.ndpointer(dtype=
        np.intc, ndim=2)]
59
60     for ipr in range(nshls):
61         di = _cint.CINTcgto_spheric(ipr, bas)
62         x = 0
63         for i in range(ipr):
64             x += _cint.CINTcgto_spheric(i, bas)
65
66         for jpr in range(nshls):
67             dj = _cint.CINTcgto_spheric(jpr, bas)
68             y = 0
69             for j in range(jpr):
70                 y += _cint.CINTcgto_spheric(j, bas)
71
72             buf = np.empty((di, dj), order='F')
73             _cint.cint1e_ovlp_sph(buf, (ctypes.c_int * 2)(ipr, jpr), atm, natm,
                bas, nshls, env)
74
75             # Update the overlap matrix with the values from buf
76             ovlp_matrix[x: x + di, y : y + dj] = buf
77
78     return ovlp_matrix
79 def get_core_hamiltonian():
80
81     core_h = np.zeros((nao, nao), order='F')
82
83     _cint.cint1e_nuc_sph.argtypes = [
84     np.ctypeslib.ndpointer(dtype=np.double, ndim=2),
85     (ctypes.c_int * 2),
86     np.ctypeslib.ndpointer(dtype=np.intc, ndim=2),
87     ctypes.c_int,
88     np.ctypeslib.ndpointer(dtype=np.intc, ndim=2),
89     ctypes.c_int,
90     np.ctypeslib.ndpointer(dtype=np.double, ndim=1)
91 ]
92     _cint.cint1e_kin_sph.argtypes = [
93     np.ctypeslib.ndpointer(dtype=np.double, ndim=2),
94     (ctypes.c_int * 2),
95     np.ctypeslib.ndpointer(dtype=np.intc, ndim=2),
96     ctypes.c_int,
97     np.ctypeslib.ndpointer(dtype=np.intc, ndim=2),
98     ctypes.c_int,
99     np.ctypeslib.ndpointer(dtype=np.double, ndim=1)
100 ]
101
102
103     _cint.CINTcgto_spheric.restype = ctypes.c_int

```

```

104     _cint.CINTcgto_spheric.argtypes = [ctypes.c_int, np.ctypeslib.ndpointer(dtype=
        np.intc, ndim=2)]
105
106     for ipr in range(nshls):
107         di = _cint.CINTcgto_spheric(ipr, bas)
108         x = 0
109         for i in range(ipr):
110             x += _cint.CINTcgto_spheric(i, bas)
111
112         for jpr in range(nshls):
113             dj = _cint.CINTcgto_spheric(jpr, bas)
114             y = 0
115             for j in range(jpr):
116                 y += _cint.CINTcgto_spheric(j, bas)
117
118             buf1 = np.empty((di, dj), order='F')
119             buf2 = np.empty((di, dj), order='F')
120
121             _cint.cint1e_nuc_sph(buf1, (ctypes.c_int * 2)(ipr, jpr), atm, natm,
                bas, nshls, env)
122             _cint.cint1e_kin_sph(buf2, (ctypes.c_int * 2)(ipr, jpr), atm, natm,
                bas, nshls, env)
123
124             # Update the overlap matrix with the values from buf
125             core_h[x: x + di, y : y + dj] += buf1
126             core_h[x: x + di, y : y + dj] += buf2
127
128     return core_h
129 def get_int2e():
130     int2e = np.zeros((nao, nao, nao, nao), order='F')
131
132     _cint.cint2e_sph.argtypes = [
133         np.ctypeslib.ndpointer(dtype=np.double, ndim=4),
134         (ctypes.c_int * 4),
135         np.ctypeslib.ndpointer(dtype=np.intc, ndim=2),
136         ctypes.c_int,
137         np.ctypeslib.ndpointer(dtype=np.intc, ndim=2),
138         ctypes.c_int,
139         np.ctypeslib.ndpointer(dtype=np.double, ndim=1),
140         ctypes.POINTER(ctypes.c_void_p)
141     ]
142     _cint.CINTcgto_spheric.restype = ctypes.c_int
143     _cint.CINTcgto_spheric.argtypes = [ctypes.c_int, np.ctypeslib.ndpointer(dtype=
        np.intc, ndim=2)]
144
145     for ipr in range(nshls):
146         di = _cint.CINTcgto_spheric(ipr, bas)
147         x = 0
148         for i in range(ipr):
149             x += _cint.CINTcgto_spheric(i, bas)
150
151         for jpr in range(nshls):
152             dj = _cint.CINTcgto_spheric(jpr, bas)
153             y = 0

```

```

154         for j in range(jpr):
155             y += _cint.CINTcgto_spheric(j, bas)
156
157         for kpr in range(nshls):
158             dk = _cint.CINTcgto_spheric(kpr, bas)
159             z = 0
160             for k in range(kpr):
161                 z += _cint.CINTcgto_spheric(k, bas)
162
163             for lpr in range(nshls):
164                 dl = _cint.CINTcgto_spheric(lpr, bas)
165                 w = 0
166                 for l in range(lpr):
167                     w += _cint.CINTcgto_spheric(l, bas)
168
169             buf = np.empty((di, dj, dk, dl), order='F')
170             _cint.cint2e_sph(buf, (ctypes.c_int * 4)(ipr, jpr, kpr, lpr),
171                             atm, natm, bas, nshls, env, ctypes.POINTER(ctypes.c_void_p)())
172
173             # Update the overlap matrix with the values from buf
174             int2e[x: x + di, y : y + dj, z : z + dk, w : w + dl] = buf
175             int2e.reshape([nao, nao, nao, nao])
176
177         return int2e
178 def make_j(D):
179     return np.einsum('pqrs,rs->pq', I, D, optimize=True)
180 def make_k(D):
181     return np.einsum('prqs,rs->pq', I, D, optimize=True)
182 def make_d(fock, norb):
183     eigs, coeffs = scipy.linalg.eigh(fock, S)
184     c_occ = coeffs[:, :norb]
185     return np.einsum('pi,qi->pq', c_occ, c_occ, optimize=True)
186
187 if __name__ == '__main__':
188     start = time.time()
189     S = get_ovlp_matrix()
190     H = get_core_hamiltonian()
191     I = get_int2e()
192     # SCF & Previous Energy
193     SCF_E = 0.0
194     E_old = 0.0
195     # start DM
196     D = make_d(H, 5)
197     # ==> RHF-SCF Iterations <==
198     for scf_iter in range(1, 100 + 1):
199
200         # GET Fock matrix
201         F = H + 2 * make_j(D) - make_k(D)
202         '''error vector = FDS - SDF'''
203         diis_r = F.dot(D).dot(S) - S.dot(D).dot(F)
204         SCF_E = np.einsum('pq,pq->', (H + F), D, optimize=True)
205         dE = SCF_E - E_old
206         dRMS = 0.5 * np.mean(diis_r ** 2) ** 0.5

```



```
206     print('SCF Iteration %3d: Energy = %4.16f dE = % 1.5E dRMS = %1.5E' % (  
      scf_iter, SCF_E, dE, dRMS))  
207  
208     if ( abs(dE) < 1e-10) and (dRMS < 1e-10):  
209         end = time.time()  
210         print("SCF convergence! Congrats")  
211         print("Time used: ", end - start)  
212         break  
213     E_old = SCF_E  
214     D = make_d(F, 5)
```