

Tableaux jointement échangeables dissociés

Yanis Zeghal

Encadré par

Laurent Davezies et Raphaël Lafrogne-Joussier

3 mai 2023

Résumé

En 1981, Aldous [Ald81] propose une représentation des tableaux lignes et colonnes échangeables par une transformation de variables *i.i.d.* Hoover [DNH79] propose une extension de cette représentation aux tableaux jointement échangeables, qui est démontrée à nouveau par Kallenberg [Kal89] et présentée dans *Probabilistic Symmetries and Invariance Principles* (chapitre 7) [Kal05]. Cette représentation d'Aldous-Hoover-Kallenberg (AHK) permet à L.Davezies, X.d'Haultfœuille et Y.Guyonvarch [DDG22] de proposer des théorèmes asymptotiques et de nouvelles méthodes économétriques spécifiques à aux modèles avec données jointement échangeables et dissociées. Ce rapport introduit les notions nécessaires, propose une preuve simplifiée de certains résultats de cet article, et leur application en économétrie. Une implémentation en R est aussi présentée en fin de rapport. Cet outil a été utilisé pour valider les résultats de l'étude de Frankel et Rose [FR98] par des étudiants de l'ENSAE.

Table des matières

1	Préliminaires et motivation du modèle	2
2	Démonstrations	6
2.1	Représentation d'Aldous-Hoover-Kallenberg	6
2.2	Théorème Central - Limite	7
2.3	Loi des grands nombres pour $d \geq 2$	10
2.4	Inférence pour les tableaux à 2 indices	12
2.5	Inférence pour les Moindres Carrés Ordinaires	14
2.6	Inférence pour les Doubles Moindres Carrés	18
3	Implémentation en R	20
3.1	Généralités	20
3.2	Génération de données de test	23
3.3	Tests sur données simulées	26

1 Préliminaires et motivation du modèle

Durant toute cette section, $(Y_{i_1, \dots, i_d})_{i_1 \dots i_d \in \mathbb{N}^*}$ est un tableau à d indices dans \mathbb{N} . C'est une variable aléatoire. On considère que les indices sont tous distincts. La notation rigoureuse est alors : $(Y_{i_1, \dots, i_d})_{(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^{*d}, \forall k \neq k' : i_k \neq i_{k'}}$. Par souci de simplicité, nous utiliserons la première notation. On définit les deux propriétés suivantes :

Définition 1

Echangeabilité jointe : On dit que $(Y_{i_1, \dots, i_d})_{i_1 \dots i_d \in \mathbb{N}^*}$ est jointement échangeable si pour toute permutation π de \mathbb{N}^* :

$$(Y_{\pi(i_1), \pi(i_2), \dots, \pi(i_d)})_{(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^{*d}, \forall k \neq k' : i_k \neq i_{k'}} \stackrel{\text{loi}}{=} (Y_{i_1, \dots, i_d})_{(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^{*d}, \forall k \neq k' : i_k \neq i_{k'}} \quad (1)$$

Définition 2

Dissociation : On dit que $(Y_{i_1, \dots, i_d})_{i_1 \dots i_d \in \mathbb{N}^*}$ est dissocié si pour tout $n > 0$:

$$(Y_{i_1, \dots, i_d})_{(i_1, \dots, i_d) \in \llbracket 1, n \rrbracket^d, \forall k \neq k' : i_k \neq i_{k'}} \perp\!\!\!\perp (Y_{i_1, \dots, i_d})_{(i_1, \dots, i_d) \in \llbracket n+1, \infty \rrbracket^d, \forall k \neq k' : i_k \neq i_{k'}} \quad (2)$$

On dit que $(Y_{i_1, \dots, i_d})_{i_1 \dots i_d \in \mathbb{N}^*}$ est un tableau jointement échangeable et dissocié s'il remplit ces deux conditions. On remarque alors trois propriétés importantes, qui justifient notre choix d'utilisation de ce modèle :

Propriété 0

Tous les éléments de $(Y_{i_1, \dots, i_d})_{i_1 \dots i_d \in \mathbb{N}^*}$ suivent la même loi, qui est la loi de $Y_{1, \dots, d}$.

Preuve : Pour une d -liste (i_1, \dots, i_d) donnée, prenons une permutation

$$\pi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$$

$$i_1 \mapsto 1$$

$$i_2 \mapsto 2$$

$$\dots$$

$$i_d \mapsto d$$

Puis appliquons l'équation 1. Les lois de Y avant et après permutations des indices étant les mêmes, les lois marginales de Y sont aussi inchangées. Il en résulte que

$$Y_{i_1, \dots, i_d} \stackrel{\text{loi}}{=} Y_{\pi(i_1), \pi(i_2), \dots, \pi(i_d)} \stackrel{\text{loi}}{=} Y_{1, \dots, d} \quad (3)$$

Propriété 1

Prenons deux d-listes d'incides (i_1, \dots, i_d) et $(j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{N}^d$ n'ayant pas d'indice en commun : $\forall t, t' \in \llbracket 1, d \rrbracket : i_t \neq j_{t'}$. Alors $Y_{i_1, \dots, i_d} \perp\!\!\!\perp Y_{j_1, \dots, j_d}$.

Preuve : Pour s'en rendre compte, on peut construire une permutation π telle que $\pi(\{i_1, \dots, i_d\}) = \llbracket 1, d \rrbracket$ On a donc $\forall t \in \llbracket 1, d \rrbracket, \pi(j_t) \geq d + 1$

Par l'équation 1, le tableau obtenu après permutation des indices a la même loi que la tableau obtenu avant permutation, puis en appliquant l'équation 2 avec $n=d$, on obtient que :

$Y_{i_1, \dots, i_d} \perp\!\!\!\perp Y_{j_1, \dots, j_d}$, car ils suivent les lois marginales de variables indépendantes.

Propriété 2

Ce raisonnement sera utilisé à plusieurs reprises dans les démonstrations. Les quadruplets de forme $(Y_{a,b}, Y_{b,a}, Y_{a,c}, Y_{c,a})$ ont la même loi que $(Y_{1,2}, Y_{2,1}, Y_{1,3}, Y_{3,1})$.

preuve : Prendre une permutation de forme :

$$\pi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$$

$$a \mapsto 1$$

$$b \mapsto 2$$

$$c \mapsto 3$$

Propriété 3

Choisissons $p < d$ indices (sans restriction de généralité, prenons les p premiers indices) et considérons les couples ayant ces p indices en commun, et n'ayant pas d'indice commun parmi les $d - p$ indices restants :

$(Y_{a_1, a_2, \dots, a_p, i_{p+1}, \dots, i_d}, Y_{a_1, a_2, \dots, a_p, j_{p+1}, \dots, j_d})$ tel que $\{i_{p+1}, \dots, i_d\} \cap \{j_{p+1}, \dots, j_d\} = \emptyset$. En considérant de nouveau que ce couple suit une loi marginale du tableau $(Y_{i_1, \dots, i_d})_{i_1 \dots i_d \in \mathbb{N}^*}$, et par l'équation 1, ce couple a la même loi que $(Y_{1, 2, \dots, p, \dots, d}, Y_{1, 2, \dots, p, d+1, \dots, 2*d-p+1})$ et que tous les couple de la même forme (ces p indices identiques, et le reste des indices disjoints). On montre ceci de la même façon que précédemment, en choisissant une permutation qui envoie les p premiers indices sur $\llbracket 1, p \rrbracket$, les $\{i_{p+1} \dots i_d\}$ sur $\{p+1 \dots d\}$ et $\{j_{p+1} \dots j_d\}$ sur $\{d+1 \dots 2*d-p+1\}$.

Motivation

Ces propriétés motivent l'utilisation du modèle. Il est courant d'être confronté à un jeu de données avec 2 indices. Dans l'étude de Frankel & Rose ([FR98]), les paires de pays forment un tableau à 2 indices i et j , qui sont distincts (il n'y a pas d'observation pour le commerce bilatéral d'un pays à lui-même). Un modèle de tableaux jointement échangeables et dissociés est adéquat pour les raisons suivantes :

Les observations sont indépendantes si elles n'ont pas d'indice commun ([propriété 1](#)). Ainsi, une observation pour le couple (France-Allemagne) n'est pas supposée indépendante d'une observation pour le couple (France-Belgique) car elles ont l'indice France en commun, mais est indépendante d'une observation pour le couple (Italie - Royaume-Uni), car elles n'ont pas d'indices commun. **Ce modèle définit les hypothèses de ce qui est indépendant ou non d'une manière plus réaliste que permet le clustering.**

En appliquant la [propriété 3](#) aux tableaux à 2 indices, les couples d'observation ayant un indice en commun sont corrélées de la même façon pour tous les pays. En termes économiques, cela signifie que les pays font leurs choix de partenaires économiques de la même manière. Cela reste une hypothèse.

Définition de l'outil

Pour les MCO On suppose que $(Y_{i,j}, X_{i,j})$ est un tableau jointement échangeable et dissocié tel que $Y_{i,j} = X'_{i,j}\beta_0 + \varepsilon_{i,j}$ avec $K = \dim(X) = \dim(\beta_0)$, $J = \mathbb{E}(X_{1,2}X'_{1,2})$ est inversible, $\mathbb{E}(Y_{1,2}^4 + \|X_{1,2}\|^4) < \infty$ et $\mathbb{E}(X_{i,j}\varepsilon_{i,j}) = 0$. On note $\hat{\beta}$ l'estimateur des MCO et $\hat{\varepsilon}_{i,j} = Y_{i,j} - X'_{i,j}\hat{\beta}$. On montre en section 2.5 les formules suivantes.

$$\sqrt{n} \left[\hat{J}^{-1} \hat{H} \hat{J}^{-1} \right]^{-1/2} (\hat{\beta} - \beta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, Id_K) \quad (4)$$

Avec :

$$\hat{J} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} X_{i,j} X'_{i,j} \quad (5)$$

et :

$$\hat{H} = \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_i \left(\sum_{j \neq i} X_{i,j} \hat{\varepsilon}_{i,j} + X_{j,i} \hat{\varepsilon}_{j,i} \right) \left(\sum_{j \neq i} X_{i,j} \hat{\varepsilon}_{i,j} + X_{j,i} \hat{\varepsilon}_{j,i} \right)' \quad (6)$$

Pour les DMC On suppose maintenant que $(Y_{i,j}, X_{i,j}, Z_{i,j})$ est un tableau jointement échangeable et dissocié tel que $Y_{i,j} = X'_{i,j}\beta_0 + \varepsilon_{i,j}$ avec $K = \dim(X) = \dim(\beta_0)$, $A = \mathbb{E}(Z_{1,2}Z'_{1,2})$ est inversible, $B = \mathbb{E}(Z_{1,2}X'_{1,2})$ est de plein rang colonne, $\mathbb{E}(Y_{1,2}^4 + \|Z_{1,2}\|^4 + \|X_{1,2}\|^2) < \infty$ et $\mathbb{E}(Z_{i,j}\varepsilon_{i,j}) = 0$. On note $\hat{\beta}$ l'estimateur des doubles moindres carrés et $\hat{\varepsilon}_{i,j} = Y_{i,j} - X'_{i,j}\hat{\beta}$. On montre en section 2.6 les formules suivantes.

$$\sqrt{n} \left[(\hat{B}' \hat{A}^{-1} \hat{B})^{-1} \hat{B} \hat{A}^{-1} \hat{H} \hat{A}^{-1} \hat{B} (\hat{B}' \hat{A}^{-1} \hat{B})^{-1} \right]^{-1/2} (\hat{\beta} - \beta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, Id_K) \quad (7)$$

Avec :

$$\hat{A} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} Z_{i,j} Z'_{i,j} \quad (8)$$

et :

$$\hat{B} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} Z_{i,j} X'_{i,j} \quad (9)$$

et :

$$\hat{H} = \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_i \left(\sum_{j \neq i} Z_{i,j} \hat{\varepsilon}_{i,j} + Z_{j,i} \hat{\varepsilon}_{j,i} \right) \left(\sum_{j \neq i} Z_{i,j} \hat{\varepsilon}_{i,j} + Z_{j,i} \hat{\varepsilon}_{j,i} \right)' \quad (10)$$

2 Démonstrations

2.1 Représentation d'Aldous-Hoover-Kallenberg

La démonstration des théorèmes énoncés repose sur la représentation de Aldous-Hoover-Kallenberg, pour les tableaux jointement échangeables dissociés à 2 indices. Soit des variables aléatoires $(U_i)_i$ et $(U_{i,j})_{i,j}$ telles que :

les $(U_i)_i$ sont *iid*

les $(U_{i,j})_{i,j}$ sont *iid*

$(U_i)_i \perp\!\!\!\perp (U_{i,j})_{i,j}$

les U_i et $U_{i,j}$ sont uniformes sur $[0, 1]$

Soit f une fonction mesurable de $[0, 1]^3$ dans \mathbb{R}^k . Le tableau $f(U_i, U_j, U_{\{i,j\}})_{i,j}$ est un tableau jointement échangeable et dissocié, car il remplit les conditions des définitions 1 et 2.

Echangeabilité jointe :

Soit π une permutation de \mathbb{N}^* . En appliquant π aux indices de $(U_i, U_j, U_{i,j})$, on obtient :

$$(U_{\pi(i)}, U_{\pi(j)}, U_{\pi(i), \pi(j)})_{i,j} \stackrel{loi}{=} (U_i, U_j, U_{i,j})_{i,j}$$

Puis

$$(f(U_{\pi(i)}, U_{\pi(j)}, U_{\pi(i), \pi(j)}))_{i,j} \stackrel{loi}{=} (f(U_i, U_j, U_{i,j}))_{i,j}$$

Dissociation :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$(U_i, U_j, U_{i,j})_{i,j \leq n} \perp\!\!\!\perp (U_i, U_j, U_{i,j})_{i,j > n}$$

Donc :

$$(f(U_i, U_j, U_{i,j}))_{i,j \leq n} \perp\!\!\!\perp (f(U_i, U_j, U_{i,j}))_{i,j > n}$$

[Ald81], [DNH79] et [Kal89] permettent d'admettre la réciproque :

Si $(Y_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}^2, i \neq j}$ est un tableau jointement échangeable et dissocié alors il existe une fonction f mesurable et des $(U_i)_i$ et $(U_{i,j})_{i,j}$ tels que :

$$Y_{i,j} = f(U_i, U_j, U_{\{i,j\}}).$$

Cette écriture est la représentation d'Aldous-Hoover-Kallenberg.

¹. On note $g(u) = \mathbb{E} [f(u, U_j, U_{\{i,j\}}) + f(U_j, u, U_{\{i,j\}})] = \mathbb{E} (Y_{i,j} + Y_{j,i} | U_i = u)$.

1. En général, ni la fonction f , ni les $(U_i)_i$ et $(U_{i,j})_{i,j}$ sont uniques. La fonction f peut être très irrégulière.

Remarquons que la définition de g ne dépend pas des indices i et j . En effet, tous les quadruplets de forme $(Y_{a,b}, Y_{b,a}, Y_{a,c}, Y_{c,a})$ ont bien la même loi que $(Y_{1,2}, Y_{2,1}, Y_{1,3}, Y_{3,1})$, en vertu de la [propriété 2](#).

Le résultat suivant sera utile par la suite :

$$\text{Cov}(Y_{12} + Y_{21}, Y_{13} + Y_{31}) = \mathbb{V}(\mathbb{E}(Y_{12} + Y_{21}|U_1)) = \mathbb{V}(g(U_1)). \quad (11)$$

On le démontre en utilisant la décomposition de la covariance (pour des vecteurs aléatoires) :

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(Y_{12} + Y_{21}, Y_{13} + Y_{31}) \\ &= \text{Cov}(\mathbb{E}(Y_{12} + Y_{21}|U_1), \mathbb{E}(Y_{13} + Y_{31}|U_1)) + \mathbb{E}\left(\underbrace{\text{Cov}(Y_{12} + Y_{21}, Y_{13} + Y_{31}|U_1)}_{=0}\right) \end{aligned}$$

En remarquant que le terme dans l'espérance est nul car $(Y_{12} + Y_{21}, Y_{13} + Y_{31}) = (f(U_1, U_2, U_{\{1,2\}}) + f(U_2, U_1, U_{\{2,1\}}), f(U_1, U_2, U_{\{1,2\}}) + f(U_2, U_1, U_{\{2,1\}}))$. *Conditionnellement* à U_1 , ces deux variables aléatoires sont seulement fonction de U_2 et $U_{1,2}$ d'une part et U_3 et $U_{1,3}$ d'autre part. Elles sont donc indépendantes et leur covariance *conditionnelle* à U_1 est nulle.

Pour le premier terme, on remarque que $\mathbb{E}(Y_{12} + Y_{21}|U_1) = \mathbb{E}(Y_{13} + Y_{31}|U_1)$, puisque ce sont les espérances d'une même fonction de U_2 et U_3 à U_1 fixé. On peut donc transformer la covariance en variance et obtenir l'équation ci-dessus.

2.2 Théorème Central - Limite

Dans cette partie, on montre un théorème central-limite pour les tableaux à 2 indices. Pour $\mathbb{E}(Y_{i,j}^2) < \infty$:

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} Y_{i,j} - \mathbb{E}(Y_{1,2}) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}(g(U)))$$

Premièrement, si $\mathbb{E}(Y_{1,2}) = 0$ on montre l'égalité suivante :

$$\mathbb{E} \left[\left\| \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} Y_{i,j} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i) \right\|^2 \right] = \frac{1}{n(n-1)} \left[\mathbb{E} \left(\frac{\|Y_{12} + Y_{21}\|^2}{2} \right) - \mathbb{E}(\|g(U_1)\|^2) \right] \quad (12)$$

Pour ce faire, on applique le théorème de pythagore à des variables aléatoires astucieusement regroupées. Premièrement, les termes $Y_{i,j} + Y_{j,i} - g(U_i) - g(U_j)$ sont orthogonaux deux à deux.

- S'ils n'ont pas d'indices communs, ce sont des fonctions de variables déjà indépendantes, et de plus :

$$\mathbb{E}(Y_{i,j} + Y_{j,i} - g(U_i) - g(U_j)) = \underbrace{\mathbb{E}(Y_{i,j} + Y_{j,i})}_{=0} - \underbrace{\mathbb{E}(g(U_i) - g(U_j))}_{=0}$$

- S'ils ont un indice a commun : En notant $\langle | \rangle$ le produit scalaire sur l'espace des vecteurs aléatoires, le terme $\mathbb{E}((Y_{a,i} + Y_{i,a})g(U_a))$ s'écrit $\langle Y_{a,i} + Y_{i,a} | g(U_a) \rangle$ puis par construction, $g(U_a)$ est le projeté orthogonal de $Y_{a,i} + Y_{i,a}$ sur $\sigma(U_a)$, d'où :

$$\begin{aligned} \langle Y_{a,i} + Y_{i,a} | g(U_a) \rangle &= \langle g(U_a) | g(U_a) \rangle + \underbrace{\langle Y_{a,i} + Y_{i,a} - g(U_a) | g(U_a) \rangle}_{=0} \\ &= \langle g(U_a) | g(U_a) \rangle \\ &= \mathbb{E}(g(U_a)^2) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'établir, parce qu'ils ont des indices i et j différents :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}((Y_{a,i} + Y_{i,a} - g(U_i) - g(U_a))(Y_{a,j} + Y_{j,a} - g(U_j) - g(U_a))) \\ &= \underbrace{\mathbb{E}((Y_{a,i} + Y_{i,a})(Y_{a,j} + Y_{j,a}))}_{=\mathbb{E}(g(U_a)^2) \text{ par eq11}} + \mathbb{E}(g(U_a)^2) - 2 \underbrace{\mathbb{E}((Y_{a,i} + Y_{i,a})g(U_a))}_{=\mathbb{E}(g(U_a)^2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On peut ensuite regrouper les termes comme suit :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left\| \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} Y_{i,j} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i) \right\|^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left\| \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} (Y_{i,j} - g(U_i)) \right\|^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left\| \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i \leq n} \sum_{j < i} (Y_{i,j} - g(U_i)) + \sum_{i \leq n} \sum_{j > i} (Y_{i,j} - g(U_i)) \right) \right\|^2 \right] \end{aligned}$$

Puis en renommant les indices i et j dans le deuxième terme, on obtient :

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[\left\| \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i \leq n} \sum_{j < i} (Y_{i,j} - g(U_i)) + \sum_{i \leq n} \sum_{j < i} (Y_{j,i} - g(U_j)) \right) \right\|^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left\| \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i \leq n} \sum_{j < i} (Y_{i,j} + Y_{j,i} - g(U_i) - g(U_i)) \right) \right\|^2 \right]
\end{aligned}$$

Tous les termes étant orthogonaux 2 à 2, on peut appliquer le théorème de pythagore (plusieurs fois) et écrire :

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n(n-1))^2} \sum_{i=2}^n \sum_{j < i} \mathbb{E} \left[\| (Y_{i,j} + Y_{j,i} - g(U_i) - g(U_i)) \|^2 \right] \\
&= \frac{1}{2n(n-1)} \mathbb{E} \left[\| Y_{1,2} + Y_{2,1} - g(U_1) - g(U_2) \|^2 \right] \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left[\mathbb{E} \left(\frac{\| Y_{1,2} + Y_{2,1} \|^2}{2} \right) - \mathbb{E} \left[\| g(U_1) \|^2 \right] \right]
\end{aligned}$$

L'équation 12 donne une convergence L^2 (donc en probabilité et en loi) en $O(\frac{1}{n^2})$. Dans le cas où $\mathbb{E}(Y_{1,2}) \neq 0$, on peut remarquer que $(Y_{i,j} - \mathbb{E}(Y_{1,2}))_{i,j}$ est toujours un tableau jointement échangeable dissocié. De plus, sa représentation d'Aldous Hoover Kallenberg est obtenue par translation de la fonction des variables centrées :

$$Y_{i,j} - \mathbb{E}(Y_{1,2}) = f(U_i, U_j, U_i, j)$$

et

$$\mathbb{E}(Y_{i,j} + Y_{j,i} | U_i) = \mathbb{E}(Y_{i,j} - \mathbb{E}(Y_{1,2}) + Y_{j,i} - \mathbb{E}(Y_{1,2}) | U_i) + 2\mathbb{E}(Y_{1,2}) = g(U_i) + 2\mathbb{E}(Y_{1,2}).$$

On gardera la notation g pour les variables centrées et $g + 2\mathbb{E}(Y_{1,2})$ pour les variables quelconques.

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} (Y_{i,j} - \mathbb{E}(Y_{1,2})) = \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} Y_{i,j} - \mathbb{E}(Y_{1,2}) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{g(U_i)}_{g \text{ centrées}} \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i)$$

Le premier terme est exactement celui de l'équation 12. Le second est une somme de variables iid. Puis en multipliant par \sqrt{n} , on obtient :

$$\frac{\sqrt{n}}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} (Y_{i,j} - \mathbb{E}(Y_{1,2})) = \underbrace{\sqrt{n} \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} Y_{i,j} - \mathbb{E}(Y_{1,2}) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i) \right)}_{O(n^{-\frac{3}{2}})} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n g(U_i)$$

Le premier terme tend vers 0 en probabilité, puisque c'est un $O(n^{-\frac{3}{2}})$ en norme 2. Sous l'hypothèse $\mathbb{E}(g(U_1)^2) < \infty$ le second tend en loi vers $\mathcal{N}(0, \mathbb{V}(g(U_1)))$. Le théorème de Slutsky permet alors de conclure :

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} Y_{i,j} - \mathbb{E}(Y_{1,2}) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}(g(U))) \quad (13)$$

2.3 Loi des grands nombres pour $d \geq 2$

On s'intéresse maintenant à un tableau dissocié jointement échangeable de dimension $d : (Y_{i_1, \dots, i_d})_{i_1, \dots, i_d \text{ distincts}}$. On montre dans cette section que si $\mathbb{E}(|Y_{1, \dots, d}|) < \infty$ alors

$$\frac{(n-d)!}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_d \leq n} Y_{i_1, \dots, i_d} \xrightarrow{P} \mathbb{E}(Y_{1, \dots, d})$$

Sans restreindre la généralité, nous prouverons nos résultats pour des variables aléatoires dans \mathbb{R} , puisque la convergence en probabilité de toutes les composantes d'une suite de vecteurs aléatoires est équivalente à la convergence en probabilité de la suite elle-même.

On montre ici la convergence :

$$\frac{(n-d)!}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_d \leq n} Y_{i_1, \dots, i_d} \xrightarrow{L^1} \mathbb{E}(Y_{1, \dots, d}) \quad (14)$$

Supposons dans un premier temps que $\exists M \in \mathbb{R} \quad tq \quad |Y_{1,2,\dots,d}| < M \quad p.s$, et que $\mathbb{E}(Y_{1,2,\dots,d}) = 0$. On montre alors que $\frac{(n-d)!}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_d \leq n} Y_{i_1, \dots, i_d}$ converge dans L^2 .

$$\begin{aligned} \left\| \frac{(n-d)!}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_d \leq n} Y_{i_1, \dots, i_d} \right\|_{L^2}^2 &= \left(\frac{(n-d)!}{n!} \right)^2 \mathbb{E} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_d \leq n \\ j_1, \dots, j_d \leq n}} Y_{i_1, \dots, i_d} Y_{j_1, \dots, j_d} \right) \\ &= \left(\frac{(n-d)!}{n!} \right)^2 \sum_{\substack{i_1, \dots, i_d \leq n \\ j_1, \dots, j_d \leq n}} \mathbb{E}(Y_{i_1, \dots, i_d} Y_{j_1, \dots, j_d}) \end{aligned}$$

La [propriété 1](#) permet d'écrire $\mathbb{E}(Y_{i_1, \dots, i_d} Y_{j_1, \dots, j_d}) = 0$ dès lors que (i_1, \dots, i_d) et (j_1, \dots, j_d) n'ont pas d'indices commun. On peut ensuite majorer les autres termes : $\mathbb{E}(|Y_{i_1, \dots, i_d} Y_{j_1, \dots, j_d}|) \leq M^2$. Le nombre de termes nuls dans la somme est donné par le nombre de $2d$ - listes d'éléments pris dans $\{1, \dots, n\}$ soit $\frac{n!}{(n-2d)!}$. Il reste donc

$$\underbrace{\left(\frac{n!}{(n-d)!} \right)^2}_{\text{nb total de termes}} - \underbrace{\frac{n!}{(n-2d)!}}_{\text{nb termes nuls}}$$

D'où :

$$\left(\frac{(n-d)!}{n!}\right)^2 \sum_{\substack{i_1, \dots, i_d \leq n \\ j_1, \dots, j_d \leq n}} \mathbb{E}(|Y_{i_1, \dots, i_d} Y_{j_1, \dots, j_d}|) \leq \left(1 - \underbrace{\frac{(n-d)!^2}{n!(n-2d)!}}_{\rightarrow 1}\right) M \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Cette convergence L^2 implique la convergence L^1 par l'inégalité de Hölder. Dans le cas où $Y_{1, \dots, d}$ n'est pas majorée presque sûrement, on montre que :

$$\forall \eta > 0 \quad \exists M > 0 \quad \text{tq} \quad \mathbb{E}(|Y_{1, \dots, d}| \mathbb{1}_{|Y_{1, \dots, d}| > M}) < \eta.$$

Pour cela, on peut remarquer que la suite de variables aléatoires $(|Y_{1, \dots, d}| \mathbb{1}_{|Y_{1, \dots, d}| > M})_{M \in \mathbb{N}}$ est majorée par $|Y_{1, \dots, d}| \in L^1$ et converge $p.s$ vers 0. Le théorème de convergence dominée (ou le théorème de convergence monotone) donne $E\left(|Y_{1, \dots, d}| \mathbb{1}_{|Y_{1, \dots, d}| > M}\right) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$

On peut ensuite décomposer :

$$\begin{aligned} Y_{i_1, \dots, i_d} &= Y_{i_1, \dots, i_d} \mathbb{1}\{|Y_{i_1, \dots, i_d}| \leq M\} - \mathbb{E}[Y_{1, \dots, d} \mathbb{1}\{|Y_{1, \dots, d}| \leq M\}] \\ &\quad + Y_{i_1, \dots, i_d} \mathbb{1}\{|Y_{i_1, \dots, i_d}| > M\} - \mathbb{E}[Y_{1, \dots, d} \mathbb{1}\{|Y_{1, \dots, d}| > M\}], \end{aligned}$$

Pour le second terme, l'inégalité triangulaire permet d'écrire :

$$\mathbb{E}(|Y_{i_1, \dots, i_d} \mathbb{1}\{|Y_{i_1, \dots, i_d}| > M\} - \mathbb{E}[Y_{1, \dots, d} \mathbb{1}\{|Y_{1, \dots, d}| > M\}]|) \leq 2\mathbb{E}[|Y_{1, \dots, d}| \mathbb{1}\{|Y_{1, \dots, d}| > M\}]$$

puis

$$\left(\frac{(n-d)!}{n!}\right) \sum_{i_1, \dots, i_d} \mathbb{E}(|Y_{i_1, \dots, i_d} \mathbb{1}\{|Y_{i_1, \dots, i_d}| > M\} - \mathbb{E}[Y_{1, \dots, d} \mathbb{1}\{|Y_{1, \dots, d}| > M\}]|) \leq \frac{\eta}{2}$$

pour M assez grand et pour tout $n \geq d$

Le premier terme $Y_{i_1, \dots, i_d} \mathbb{1}\{|Y_{i_1, \dots, i_d}| \leq M\} - \mathbb{E}[Y_{1, \dots, d} \mathbb{1}\{|Y_{1, \dots, d}| \leq M\}]$ est le terme général d'un tableau jointement échangeable dissocié. La [convergence 14](#) appliquée aux variables majorées en valeurs absolues et d'espérance nulle permet d'écrire :

$$\mathbb{E} \left[\left| \left(\frac{(n-d)!}{n!} \right) \sum_{i_1, \dots, i_d} Y_{i_1, \dots, i_d} \mathbb{1}\{|Y_{i_1, \dots, i_d}| \leq M\} - \mathbb{E}[Y_{1, \dots, d} \mathbb{1}\{|Y_{1, \dots, d}| \leq M\}] \right| \right] \leq \frac{\eta}{2}$$

pour n assez grand, avec M choisi ci-dessus

Ces deux inégalités étant vraies pour tout η , on a :

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left| \left(\frac{(n-d)!}{n!} \right) \sum_{i_1, \dots, i_d} Y_{i_1, \dots, i_d} \right| \right] = 0 \\ \Rightarrow & \frac{(n-d)!}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_d} Y_{i_1, \dots, i_d} \xrightarrow{L^1} 0 \\ \Rightarrow & \frac{(n-d)!}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_d} Y_{i_1, \dots, i_d} \xrightarrow{P} 0 \end{aligned}$$

Pour un $Y_{1, \dots, d}$ non centré, on peut appliquer cette convergence à $Y_{i_1, \dots, i_d} - \mathbb{E}(Y_{1, \dots, d})$ (qui est le terme général d'un tableau jointement échangeable dissocié) pour obtenir :

$$\frac{(n-d)!}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_d} Y_{i_1, \dots, i_d} \xrightarrow{P} \mathbb{E}(Y_{1, \dots, n}) \quad (15)$$

On remarque que cette convergence en probabilité généralise celle obtenue par l'[inégalité 12](#) aux variables aléatoires de L^1 (et non plus L^2) et à d et non plus 2 indices.

2.4 Inférence pour les tableaux à 2 indices

Dans cette partie, nous construisons un intervalle de confiance pour la moyenne du terme général d'un tableau jointement échangeable dissocié.

Soit $(Y_{i,j})_{i \neq j}$ un tableau jointement échangeable dissocié à 2 indices, avec $Y_{1,2} \in \mathbb{R}^d$ et $\mathbb{E}(\|Y_{1,2}\|^2) < \infty$.

On montre que $((Y_{i,j} + Y_{j,i})(Y_{i,k} + Y_{k,i}))_{i,j,k \text{ distincts}}$ est un tableau jointement échangeable dissocié à 3 indices.

On utilise la représentation d'[Aldous Hoover Kallenberg](#) de $(Y_{i,j})_{i \neq j}$.

Echangeabilité jointe :

$((Y_{i,j} + Y_{j,i})(Y_{i,k} + Y_{k,i}))_{i,j,k}$ est fonction de $(U_i, U_j, U_k, U_{i,j}, U_{i,k})_{i,j,k}$.

En appliquant une permutation π à ses indices, la loi suivante reste inchangée :

$$(U_{\pi(i)}, U_{\pi(j)}, U_{\pi(k)}, U_{\pi(i), \pi(j)}, U_{\pi(i), \pi(k)})_{i,j,k} \stackrel{\text{loi}}{=} (U_i, U_j, U_k, U_{i,j}, U_{i,k})_{i,j,k}$$

Car leur définition ne change pas (ce sont des lois uniformes *iid* sur $[0, 1]$, avec la même indexation).

Donc :

$$((Y_{i,j} + Y_{j,i})(Y_{i,k} + Y_{k,i}))_{i,j,k} \stackrel{\text{loi}}{=} ((Y_{\pi(i), \pi(j)} + Y_{\pi(j), \pi(i)})(Y_{\pi(i), \pi(k)} + Y_{\pi(k), \pi(i)}))'_{i,j,k}$$

Dissociation : $\forall n \in \mathbb{N}$, comme $(Y_{i,j})_{i,j}$ est dissocié : $((Y_{i,j}, Y_{j,i}, Y_{i,k}, Y_{k,i}))_{i,j,k \leq n} \perp\!\!\!\perp ((Y_{i,j}, Y_{j,i}, Y_{i,k}, Y_{k,i}))_{i,j,k > n}$.

Puis

$$((Y_{i,j} + Y_{j,i})(Y_{i,k} + Y_{k,i}))_{i,j,k \leq n} \perp\!\!\!\perp ((Y_{i,j} + Y_{j,i})(Y_{i,k} + Y_{k,i}))_{i,j,k > n}$$

Dans un premier temps, supposons $\mathbb{E}(Y_{1,2}) = 0$. On montre le résultat suivant :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} Y_{i,j} + Y_{j,i} \right) \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} Y_{i,j} + Y_{j,i} \right)' \xrightarrow{P} \mathbb{V}(g(U_1)) \quad (16)$$

La somme peut être décomposée :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} Y_{i,j} + Y_{j,i} \right) \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} Y_{i,j} + Y_{j,i} \right)' \\ &= \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i,j} (Y_{i,j} + Y_{j,i}) (Y_{i,k} + Y_{k,i})' \quad \left(\xrightarrow{P} \mathbb{V}(g(U_1)) \right) \\ &+ \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} (Y_{i,j} + Y_{j,i}) (Y_{i,j} + Y_{j,i})' \quad \left(\xrightarrow{P} 0 \right) \end{aligned}$$

Le premier terme converge vers $\mathbb{E}(((Y_{1,2} + Y_{2,1})(Y_{1,3} + Y_{3,1})'))$ par l'équation 15, qui s'écrit aussi $\mathbb{V}(g(U_1))$ par l'équation 11.

Le second terme converge vers 0 en remarquant que $((Y_{i,j} + Y_{j,i}) (Y_{i,j} + Y_{j,i}))'_{i,j}$ est aussi un tableau jointement échangeable et dissocié, de terme général intégrable en norme et en appliquant l'équation 15. Ceci conclut la preuve pour des variables centrées.

Pour des variables non centrées, on applique cette convergence à $Y_{i,j} - \mathbb{E}(Y_{1,2})$:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} Y_{i,j} + Y_{j,i} - 2\mathbb{E}(Y_{1,2}) \right) \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} Y_{i,j} + Y_{j,i} - 2\mathbb{E}(Y_{1,2}) \right)' \xrightarrow{P} \mathbb{V}(g(U_1))$$

En remarquant que les fonctions g définies pour les variables $Y_{i,j}$ et $Y_{i,j} - \mathbb{E}(Y_{1,2})$ ont la même variance. Pour construire un estimateur de la variance dans le cas non centré, on note $\bar{Y} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} Y_{i,j}$. Puis :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} Y_{i,j} + Y_{j,i} - 2\mathbb{E}(Y) \right) \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} Y_{i,j} + Y_{j,i} - 2\mathbb{E}(Y) \right)' \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} Y_{i,j} + Y_{j,i} - 2\bar{Y} - (2\mathbb{E}(Y) - 2\bar{Y}) \right) \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} Y_{i,j} + Y_{j,i} - 2\bar{Y} - (2\mathbb{E}(Y) - 2\bar{Y}) \right)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} Y_{i,j} + Y_{j,i} - 2\bar{Y} \right) \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} Y_{i,j} + Y_{j,i} - 2\bar{Y} \right)' \\
&\quad - \underbrace{\left(2\mathbb{E}(Y) - 2\bar{Y} \right) \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (Y_{i,j} + Y_{j,i}) - 2\bar{Y} \right)}_{=0} = 0 \\
&\quad - \underbrace{\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (Y_{i,j} + Y_{j,i}) - 2\bar{Y} \right) \left(2\mathbb{E}(Y) - 2\bar{Y} \right)'}_{=0} = 0 \\
&\quad + \left(2\mathbb{E}(Y) - 2\bar{Y} \right) \left(2\mathbb{E}(Y) - 2\bar{Y} \right)' \xrightarrow{P} 0 \text{ (théorème de continuité)}
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} Y_{i,j} + Y_{j,i} - 2\bar{Y} \right) \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} Y_{i,j} + Y_{j,i} - 2\bar{Y} \right)' \xrightarrow{P} V(g(U_1)) \quad (17)$$

Cette convergence donne un estimateur consistant de $V(g(U_1))$, et permet de procéder à des tests asymptotiques de niveau α pour $\mathbb{E}(Y_{1,2})$, en reprenant la [convergence 13](#). On note \widehat{V}_a l'estimateur de $V(g(U_1))$ ci-dessus.

$$(13) \Rightarrow \widehat{V}_a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{n}}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} Y_{i,j} - \mathbb{E}(Y_{1,2}) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, I_d)$$

Un intervalle de confiance de niveau α pour l'estimateur de $\mathbb{E}(Y_{1,2})$ peut être construit pour tester une hypothèse d'égalité sur un coefficient :

$$\begin{aligned}
H_0 &: \mathbb{E}(Y_{1,2}) = b \\
H_1 &: \mathbb{E}(Y_{1,2}) \neq b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sous } H_0 & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{H_0} \left(\bar{Y} \in \left[b - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n\widehat{V}_{a,j,j}^{-1/2}}}, b + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n\widehat{V}_{a,j,j}^{-1/2}}} \right] \right) = 1 - \alpha \\
\text{Sous } H_1 & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{H_0} \left(\bar{Y} \in \left[b - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n\widehat{V}_{a,j,j}^{-1/2}}}, b + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n\widehat{V}_{a,j,j}^{-1/2}}} \right] \right) = 0
\end{aligned}$$

2.5 Inférence pour les Moindres Carrés Ordinaires

Dans le cas d'un tableau jointement échangeable dissocié $(Y_{i,j}, X_{i,j})_{i,j}$ tel que $Y_{i,j} = X'_{i,j}\beta_0 + \varepsilon_{i,j}$ avec $K = \dim(X) = \dim(\beta_0)$, on note $J = \mathbb{E}(X_{1,2}X'_{1,2})$ (que l'on suppose inversible) et on suppose $\mathbb{E}(Y_{1,2}^4 + \|X_{1,2}\|^4) < \infty$ et $\mathbb{E}(X_{i,j}\varepsilon_{i,j}) = 0$. On note $\widehat{\beta}$

l'estimateur des MCO et $\hat{\varepsilon}_{i,j} = Y_{i,j} - X'_{i,j}\hat{\beta}$.

Les lois marginales $(X_{i,j})_{i,j}$, $(Y_{i,j})_{i,j}$ et les fonctions mesurables de ces variables (y compris $(\varepsilon_{i,j})_{i,j}$) sont des tableaux jointement échangeables dissociés. On définit :

$$\hat{J} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} X_{i,j} X'_{i,j}$$

La [convergence 15](#) donne :

$$\hat{J} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} X_{i,j} X'_{i,j} \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X_{1,2} X'_{1,2}) = J \quad (18)$$

On définit :

$$\widetilde{H} = \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_i \left(\sum_{j \neq i} X_{i,j} \varepsilon_{i,j} + X_{j,i} \varepsilon_{j,i} \right) \left(\sum_{j \neq i} X_{i,j} \varepsilon_{i,j} + X_{j,i} \varepsilon_{j,i} \right)$$

La [convergence 16](#) appliquée à $(X_{i,j} \varepsilon_{i,j})_{i,j}$ donne :

$$\frac{1}{n(n-1)^2} \sum_i \left(\sum_{j \neq i} X_{i,j} \varepsilon_{i,j} + X_{j,i} \varepsilon_{j,i} \right) \left(\sum_{j \neq i} X_{i,j} \varepsilon_{i,j} + X_{j,i} \varepsilon_{j,i} \right) \xrightarrow{P} \mathbb{E} \left((X_{12} \varepsilon_{12} + X_{21} \varepsilon_{21}) (X_{13} \varepsilon_{13} + X_{31} \varepsilon_{31})' \right)$$

On note H cette limite, et donc $\widetilde{H} \xrightarrow{P} H$.

L'estimateur des moindres carrés ordinaires vérifie :

$$\hat{\beta} - \beta_0 = \hat{J}^{-1} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} X_{i,j} \varepsilon_{i,j}$$

Comme $(X_{i,j} \varepsilon_{i,j})_{i,j}$ est jointement échangeable dissocié, la [convergence 16](#) et le théorème de Slutsky donnent directement $\hat{\beta} - \beta_0 \xrightarrow{P} 0$.

De plus, la [convergence 13](#) donne :

$$\frac{\sqrt{n}}{n(n-1)} \sum_{i,j} X_{i,j} \varepsilon_{i,j} \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left(0, \underbrace{\mathbb{E} \left((X_{12} \varepsilon_{12} + X_{21} \varepsilon_{21}) (X_{13} \varepsilon_{13} + X_{31} \varepsilon_{31})' \right)}_{=H} \right)$$

D'où :

$$\sqrt{n} (\hat{\beta} - \beta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N} (0, J^{-1} H J^{-1}) \quad (19)$$

Afin de pouvoir estimer la variance asymptotique, on souhaite utiliser \widetilde{H} en remplaçant les $\varepsilon_{i,j}$ par des $\widehat{\varepsilon}_{i,j}$

On note \widehat{H} la statistique :

$$\widehat{H} = \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_i \left(\sum_{j \neq i} X_{i,j} \widehat{\varepsilon}_{i,j} + X_{j,i} \widehat{\varepsilon}_{j,i} \right) \left(\sum_{j \neq i} X_{i,j} \widehat{\varepsilon}_{i,j} + X_{j,i} \widehat{\varepsilon}_{j,i} \right)$$

En écrivant

$$\widehat{\varepsilon}_{i,j} - \varepsilon_{i,j} = (Y_{i,j} - X'_{i,j} \widehat{\beta}) - (Y_{i,j} - X'_{i,j} \beta_0) = X'_{i,j} (\beta_0 - \widehat{\beta})$$

On peut décomposer \widehat{H} comme suit :

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_i \left(\sum_{j \neq i} X_{i,j} \varepsilon_{i,j} + X_{j,i} \varepsilon_{j,i} \right) \left(\sum_{j \neq i} X_{i,j} \varepsilon_{i,j} + X_{j,i} \varepsilon_{j,i} \right) \\ &\quad + \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_i \left(\sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) (\widehat{\beta} - \beta_0) \right) \left(\sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) (\widehat{\beta} - \beta_0) \right)' \\ &\quad + \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_i \left(\sum_{j \neq i} X_{i,j} \varepsilon_{i,j} + X_{i,j} \varepsilon_{i,j} \right) \left(\sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) (\widehat{\beta} - \beta_0) \right)' \\ &\quad + \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_i \left(\sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) (\widehat{\beta} - \beta_0) \right) \left(\sum_{j \neq i} X_{i,j} \varepsilon_{i,j} + X_{i,j} \varepsilon_{i,j} \right)' \end{aligned} \quad (*)$$

Le premier terme est \widetilde{H} . On montre que les trois autres termes convergent en probabilité vers 0. La convergence du deuxième terme se montre grâce à la norme de Frobenius définie par $\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$ sur l'espace des matrices réelles (de dimension quelconque). On utilise la propriété suivante.

$\forall A \in \mathcal{M}_{1,K}$:

$$\|AA'\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} (a_i^2 a_j^2)} = \sum_i a_i^2 = \|A\|_2^2$$

Comme $\forall i : \sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) (\hat{\beta} - \beta_0) \in \mathcal{M}_{1,K}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n(n-1)^2} \left\| \sum_i \left(\sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) (\hat{\beta} - \beta_0) \right) \left(\sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) (\hat{\beta} - \beta_0) \right)' \right\|_F \\
& \leq \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_i \left\| \left(\sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) (\hat{\beta} - \beta_0) \right) \left(\sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) (\hat{\beta} - \beta_0) \right)' \right\|_F \\
& \leq \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_i \left\| \sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) (\hat{\beta} - \beta_0) \right\|_2^2
\end{aligned}$$

En considérant $\sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i})$ comme la matrice d'une application linéaire, $\left\| \sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) (\hat{\beta} - \beta_0) \right\|_2 \leq \left\| \sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) \right\|_{\mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K} \left\| (\hat{\beta} - \beta_0) \right\|_2$. La norme $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K}$ étant équivalente à toute autre norme matricielle (on est dans un espace de dimension $K^2 < \infty$), on peut choisir à nouveau la norme de Froebenius, et
 $\exists C \in \mathbb{R}_+ :$

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) \right\|_{\mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K} & \leq C \left\| \sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) \right\|_F \\
& \leq C \sum_{j \neq i} (\|X_{i,j} X'_{i,j}\|_F + \|X_{j,i} X'_{j,i}\|_F) \\
& = C \sum_{j \neq i} (\|X_{i,j}\|_2^2 + \|X_{j,i}\|_2^2)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\left\| \sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) (\hat{\beta} - \beta_0) \right\|_2^2 \leq C^2 \left[\sum_{j \neq i} (\|X_{i,j}\|_2^2 + \|X_{j,i}\|_2^2) \right]^2 \left\| (\hat{\beta} - \beta_0) \right\|_2^2$$

Donc :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_i \left\| \sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) (\hat{\beta} - \beta_0) \right\|_2^2 \\
& \leq \underbrace{\frac{C^2}{n(n-1)^2} \sum_i \left[\sum_{j \neq i} (\|X_{i,j}\|_2^2 + \|X_{j,i}\|_2^2) \right]^2}_{\text{Majoré en espérance car } \mathbb{E}(\|X_{1,2}\|^4) < \infty} \underbrace{\left\| (\hat{\beta} - \beta_0) \right\|_2^2}_{\xrightarrow{P} 0}
\end{aligned}$$

Les deux derniers termes de la décomposition (*) étant transposés l'un de l'autre, on montre leur convergence vers 0 pour le deuxième seulement.

Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_{1,n} \times \mathcal{M}_{1,m}$:

$$\|AB'\|_F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i^2 b_j^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{j=1}^m b_j^2 = \|A\|_2 \|B\|_2$$

La norme du dernier terme est :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n(n-1)^2} \left\| \sum_i \left(\sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) (\hat{\beta} - \beta_0) \right) \left(\sum_{j \neq i} X_{i,j} \varepsilon_{i,j} + X_{i,j} \varepsilon_{i,j} \right)' \right\|_F \\ & \leq \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_i \left\| \left(\sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) (\hat{\beta} - \beta_0) \right) \left(\sum_{j \neq i} X_{i,j} \varepsilon_{i,j} + X_{i,j} \varepsilon_{i,j} \right)' \right\|_F \\ & \leq \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_i \underbrace{\left\| \left(\sum_{j \neq i} (X_{i,j} X'_{i,j} + X_{j,i} X'_{j,i}) (\hat{\beta} - \beta_0) \right) \right\|_2}_{\leq C \left[\sum_{j \neq i} (\|X_{i,j}\|_2^2 + \|X_{j,i}\|_2^2) \right] \|\hat{\beta} - \beta_0\|_2} \left\| \left(\sum_{j \neq i} X_{i,j} \varepsilon_{i,j} + X_{i,j} \varepsilon_{i,j} \right) \right\|_2 \\ & \leq \underbrace{\frac{C}{n(n-1)^2} \sum_i \left(\left(\sum_{j \neq i} \|X_{i,j}\|_2^2 + \|X_{j,i}\|_2^2 \right) \left(\sum_{j \neq i} \|X_{i,j} \varepsilon_{i,j}\|_2 + \|X_{i,j} \varepsilon_{i,j}\|_2 \right) \right)}_{\text{Majoré en espérance}} \underbrace{\|\hat{\beta} - \beta_0\|_2}_{\xrightarrow{P} 0} \end{aligned}$$

Comme $X_{1,2}$ et $Y_{1,2}$ sont dans L^4 , on ε est aussi dans L^4 , et la majoration en espérance du terme de gauche est possible grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et parce qu'aucun terme de la somme ne dépasse le degré 4.

Cette dernière convergence permet de conclure :

$$\widehat{H} - \widetilde{H} \xrightarrow{P} 0 \text{ et donc } \widehat{H} \xrightarrow{P} H \quad (20)$$

Les convergences 19, 18 et 20, le théorème de continuité et le théorème de Slutsky donnent la convergence 4 :

$$\sqrt{n} \left[\widehat{J}^{-1} \widehat{H} \widehat{J}^{-1} \right]^{-1/2} (\hat{\beta} - \beta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, Id_K)$$

2.6 Inférence pour les Doubles Moindres Carrés

Dans le cas d'un tableau jointement échangeable dissocié $(Y_{i,j}, X_{i,j}, Z_{i,j})$ tel que $Y_{i,j} = X'_{i,j} \beta_0 + \varepsilon_{i,j}$ avec $K = \dim(X) = \dim(\beta_0)$, on note $A = \mathbb{E}(Z_{1,2} Z'_{1,2})$ (que l'on suppose

inversible), et $B = \mathbb{E}(Z_{1,2}X'_{1,2})$ que l'on suppose de plein rang colonne. Les variables $\mathbb{E}(Y_{1,2}^4 + \|Z_{1,2}\|^4 + \|X_{1,2}\|^4) < \infty$ et $\mathbb{E}(Z_{i,j}\varepsilon_{i,j}) = 0$. On note $\hat{\beta}$ l'estimateur des doubles moindres carrés et $\hat{\varepsilon}_{i,j} = Y_{i,j} - X'_{i,j}\hat{\beta}$.

Les étapes de cette démonstration se font de la même manière que précédemment : On montre grâce à la [convergence 15](#) que :

$$\hat{A} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} Z_{i,j} Z'_{i,j} \xrightarrow{P} A$$

Comme $(Z_{i,j}X'_{i,j})_{i,j}$ est aussi un tableau jointement échangeable dissocié, on montre en utilisant la [convergence 15](#) une nouvelle fois que :

$$\hat{B} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} Z_{i,j} X'_{i,j} \xrightarrow{P} B$$

La [convergence 16](#) appliquée à $(Z_{i,j}\varepsilon_{i,j})_{i,j}$ donne :

$$\widetilde{H} = \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_i \left(\sum_{j \neq i} Z_{i,j} \varepsilon_{i,j} + Z_{j,i} \varepsilon_{j,i} \right) \left(\sum_{j \neq i} Z_{i,j} \varepsilon_{i,j} + Z_{j,i} \varepsilon_{j,i} \right)' \xrightarrow{P} H$$

avec

$$H = \mathbb{E} \left((Z_{12}\varepsilon_{12} + Z_{21}\varepsilon_{21}) (Z_{13}\varepsilon_{13} + Z_{31}\varepsilon_{31})' \right)$$

La définition de l'estimateur des doubles moindres carrés et la [convergence 13](#) permettent d'obtenir :

$$\sqrt{n} (\hat{\beta} - \beta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left(0, (B'A^{-1}B)^{-1} B'A^{-1} H A^{-1} B (B'A^{-1}B)^{-1} \right).$$

Par les mêmes arguments que dans la partie sur les moindres carrés ordinaires (2.5), mais avec des calculs plus lourds, on peut montrer que :

$$\widehat{H} = \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_i \left(\sum_{j \neq i} Z_{i,j} \hat{\varepsilon}_{i,j} + Z_{j,i} \hat{\varepsilon}_{j,i} \right) \left(\sum_{j \neq i} Z_{i,j} \hat{\varepsilon}_{i,j} + Z_{j,i} \hat{\varepsilon}_{j,i} \right)' \xrightarrow{P} H$$

Le théorème de continuité et le théorème de Slutsky et les équations ci-dessus donnent la [convergence 7](#) :

$$\sqrt{n} \left[(\hat{B}' \hat{A}^{-1} \hat{B})^{-1} \hat{B} \hat{A}^{-1} \widehat{H} \hat{A}^{-1} \hat{B} (\hat{B}' \hat{A}^{-1} \hat{B})^{-1} \right]^{-1/2} (\hat{\beta} - \beta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, Id_K).$$

□

3 Implémentation en R

3.1 Généralités

Un référentiel pour l'utilisation de ces estimateurs en R se trouve à :

<https://github.com/Yzeghal/Econometrics.git>.

Il contient entre autres un [Readme.md](#) et les scripts [Sandbox_tester.R](#) et [Jointly Exchangeable Dissociated Array OLS.R](#).

La configuration pour exécuter les fonctions dans leur version la plus simple est la suivante :

```
> sessionInfo()
R version 4.1.2 (2021-11-01)
Platform: x86_64-w64-mingw32/x64 (64-bit)
Running under: Windows 10 x64 (build 22621)

Matrix products: default

locale:
[1] LC_COLLATE=French_France.1252 LC_CTYPE=French_France.1252
[3] LC_MONETARY=French_France.1252 LC_NUMERIC=C
[5] LC_TIME=French_France.1252

attached base packages:
[1] stats      graphics  grDevices  utils      datasets  methods    base

other attached packages:
[1] aod_1.3.2      matrixcalc_1.0-6

loaded via a namespace (and not attached):
[1] compiler_4.1.2 tools_4.1.2
```

Pour utiliser les estimateurs déjà présents dans des packages, il faut y ajouter `AER_1.2-10` et `R.utils_2.12.2`

Par souci de compréhension, les estimateurs des MCO avec estimateur de la variance asymptotique robuste à l'hétéroscédasticité ont été codés à nouveau, ainsi que l'estimateur des DMC. L'écart avec les résultats des fonctions `lm()` et `ARE : :ivreg()` pour les $\hat{\beta}$, `sandwich : :vcovHC(reg, type = "HC0")` pour la variance asymptotique des MCO et `lmtest : :wald.test()` pour le test de Wald est de l'ordre

de 10^{-14} pour des données simulées avec endogénéité et hétéroscédasticité. Un tel écart est attribuable au choix des opérations et aux approximations d'encodage. Cependant, lorsque les données contiennent des NA distribués aléatoirement et en grand nombre, la convergence des estimateurs codés ici semble plus lente. De plus, certaines parties du code contient des boucles `for` qui sont beaucoup moins efficaces que des opérations vectorisées. Pour ces deux raisons, on préférera ne pas utiliser les estimateurs "maison". Lorsque le choix est possible, les fonctions ont un paramètre `built_in_reg` qui permet à l'utilisateur de choisir si les estimateurs à utiliser sont ceux codés dans le script ou dans les bibliothèques. Ces paramètres sont par défaut réglés sur `TRUE`.

Les deux fonctions de haut niveau destinées à l'utilisateur sont `OLS` et `IV_LS`, dont les appels et outputs sont illustrés ci-dessous :

```
OLS(X,Y,model="JEDA", hyp = 0, built_in_reg = TRUE)
```

```
>OLS_output_example
```

```
$coefs
```

	Beta_hat	Std_Err	Student_t	p-values	H0_hyp
[1,]	1.024731	0.71569157	1.431806	0.1522307	0
[2,]	1.999653	0.07511637	26.620737	0.0000000	0
[3,]	2.999165	0.07210449	41.594703	0.0000000	0

```
$var
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	5122.1442	489.99880	-497.94448
[2,]	489.9988	56.42469	-53.47473
[3,]	-497.9445	-53.47473	51.99057

```
$F
```

```
chi2
14947462
```

```
$R2
```

```
[1] 0.9498505
```

```
IV_LS(G, Z, X, Y, hyp =0, built_in_reg = TRUE)
```

```
> IV_LS_output_example # 2 controls, 2 X endogenous , 2 exogenous
```

```
$SLS
```

```
$SLS$coefs
```

	Beta_hat	Std_Err	Student_t	p-values	H0_hyp
[1,]	0.9902366	0.17125433	5.782257	9.168481e-08	0
[2,]	1.9981640	0.11523234	17.340305	0.000000e+00	0
[3,]	3.0139547	0.04194214	71.859824	0.000000e+00	0
[4,]	0.9870646	0.04196550	23.520861	0.000000e+00	0

```
$SLS$var
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]
[1,]	2.932804528	1.851999089	-0.190323246	0.003563466
[2,]	1.851999089	1.327849299	-0.001697847	-0.125237183
[3,]	-0.190323246	-0.001697847	0.175914305	-0.169749953
[4,]	0.003563466	-0.125237183	-0.169749953	0.176110290

```
$SLS$F
```

```
chi2
```

```
15137066
```

```
$SLS$R2
```

```
[1] 0.5610715
```

```
$FLS
```

```
$FLS$R2
```

```
[1] 0.4824312 0.4970774
```

```
$FLS$F
```

```
[1] 4777.926 6182.389
```

Les arguments de ces fonctions sont :

X : Variables explicatives (endogènes dans le cas des DMC, supposées exogènes dans le cas des OLS),

Array de valeurs de taille (n,n,d_X), dont la première dimension doit contenir des 1 dans le cas des OLS

Y : Variables expliquées,

Array de valeurs de taille (n,n,1)

G : Variables de contrôle (DMC seulement).
 Array de valeurs de taille (n,n,d_G), dont la première dimension doit contenir des 1 .

Z : Variables instrumentales (DMC seulement),
 Array de valeurs de taille (n,n,d_Z)

model : Spécification du modèle (MCO seulement, les DMC sont toujours en mode 'JEDA'.
 -'JEDA' pour le cas des tableaux jointement échangeables dissociés,
 -'BASIC' pour une variance asymptotique robuste à l'hétéroscadasticité,
 -'NO ASVAR' pour n'avoir que l'estimateur des MCO

hyp : Vecteur des hypothèses pour les tests de student, de la même longueur que β . Fixé à 0 par défaut.

3.2 Génération de données de test

Le fichier `Sandbox_tester.R` contient des exemples de génération de données et d'utilisation de l'outil.

Pour tester ces fonctions, il faut générer des tableaux jointement échangeables de variables endogènes et hétéroscédastiques, d'instruments et de variables de contrôle. Pour ce faire on utilise la [représentation d'Aldous Hoover Kallenberg](#) en générant des tableaux $(U_i, U_j, U_{i,j})_{i,j}$, auxquels on applique une fonction. Le test des DMC a été réalisé sur des données générées par une fonction `g2` dont on peut modifier les coefficients.

```
Beta_0 = matrix(c(1,2,3,1)) #constant coefficient included :(cst,G,X1,X2)
Beta_1 = matrix(c(10,10,5,7)) #(cst,Z1, Z2) #boost cst coef to max mean(x)
#and the OLS endogeneity error (on cst coef mainly)
Beta_2 = matrix(c(10,10,4,8)) #(cst,Z1, Z2)
n=100
Ui=runif(n,0,1)
Uij=matrix(runif(n^2,0,1),ncol=n)

g2<-function(UiUjUij){
  #UiUjUij is a vector c(Ui,Uj,Uij)
  #function that generates the X, IVs Z and G s.th G=1 for now
  U1=UiUjUij[1]
  U2=UiUjUij[2]
```

```

U12=UiUjUij[3]
p<-2*pi
N1=cos(p*U12) #orthogonal to all other random variables
N2=cos(3*p*U12)
G = U1+3*cos(7*p*U12) #orthogonal to U2, U12 and their cos(2pi n . ) for n !=7 but
eps1 = 30*(U1*U2/3+0.66)*N1
eps2 = 30*(U1*U2/3+0.66)*N2
eps3 = N1+N2 #Correlated to eps1, eps2 but not Z. Also heteroscedastic
Z1=U1
Z2=U2
X1=t(Beta_1)%*%matrix(c(1,G,Z1,Z2))+eps1 #correlate G and X to have impact on G co
X2=t(Beta_2)%*%matrix(c(1,G,Z1,Z2))+eps2
Y =t(Beta_0)%*%c(1,G,X1,X2)+eps3 #Y explained by X with endogeneity and heterosced
r=c(Y,1,G,Z1,Z2,X1,X2,eps1,eps2,eps3)
return (r)
}

# data generation
#----
M=array(0,c(n,n,3))
M[, ,1] = matrix(rep(Ui,n),c(n,n), byrow=FALSE)
M[, ,2] = matrix(rep(Ui,n),c(n,n), byrow=TRUE) #test with the same i and not i,j
M[, ,3] = Uij
A = apply(M,MARGIN = c(1,2),FUN = g2)
A=aperm(A,c(2,3,1)) #To have the dimensions we are used to work with

# for (i in 1:7){ #To dispatch NAs
#   A=dispatch_na(A,i)
# }

#A=diag_na(A) #To put NAs in the diagonal
# Not having NAs in the diagonal does not change correlation estimators too much

#regression inputs
Y = A[, ,1]
G = A[, ,2:3]
Z = A[, ,4:5]

```



```

X = A[, ,6:7]
#----
#to estimate correlations
e1=as.vector(A[, ,8])
e2=as.vector(A[, ,9])
e3=as.vector(A[, ,10])
x1=as.vector(X[, ,1])
x2=as.vector(X[, ,2])
z1=as.vector(Z[, ,1])
z2=as.vector(Z[, ,2])
k1=as.vector(G[, ,2])
y =as.vector(Y)

```

On peut ensuite mesurer les corrélations empiriques :

```

> cor(e3,x1)
[1] 0.4090581
> cor(e3,x2)
[1] 0.4112386
> cor(e3,z1)
[1] -0.003598975
> cor(e3,z2)
[1] -0.001295877
> cor(e3,k1) #k1 is the control variable
[1] -0.009015544
> sd(e3)
[1] 0.9977797

```

L'indépendance des $(U_i)_i$ peut être admise par la construction $U_i = \text{runif}(n, 0, 1)$ et l'orthogonalité est assurée par le fait que les fonctions $(t, \cos(2\pi t), \cos(4\pi t) \dots)$ forment une famille orthogonale sur $\mathcal{C}_{[0,1]}$.

L'orthogonalité entre Z_1 et ε_1 s'obtient de la façon suivante :

$$\mathbb{E}[(30(Z_1 Z_2 / 3 + 0.66)N_1)Z_1] = \mathbb{E}[(30(Z_1 Z_2 / 3 + 0.66)Z_1)] \underbrace{\mathbb{E}[N_1]}_{=0}$$

Car $N_1 \perp\!\!\!\perp Z_1, Z_2$. L'orthogonalité entre Z_1 et ε_2 s'obtient de la même manière, et l'orthogonalité entre Z_1 et ε_3 s'obtient par bilinéarité du produit scalaire (de même pour Z_2).

Remarquons qu'il n'est pas évident d'obtenir une corrélation empirique plus faible que 10^{-4} avec des données orthogonalement générées de cette manière, pour des

raisons attribuées à la vitesse de convergence des estimateurs calculés par `corr()`. En effet, la [convergence 15](#) implique que l'estimateur est bien consistant, mais pour $i, j \leq 10^3$, l'écart type reste élevé car il diminue en $O(n^{-1/2}) = O(n_{obs}^{-1/4})$.

3.3 Tests sur données simulées

L'endogénéité est forte pour cet exemple, mais elle permet d'illustrer le choix d'utiliser `IV_LS` plutôt que `OLS`. Les résultats pour un jeu de données généré comme en [section 3.2](#) sont les suivants :

```
GX=array(c(G,X),dim=c(dim(G)[1:2],dim(X)[3]+dim(G)[3])) #to compare with X
noIV<-OLS(GX,Y,model="JEDA")#runs OLS regression of Y on 1, G and X
noIV
regIV<-IV_LS(G,Z,X,Y,built_in_reg=TRUE) #runs the same 2SLS regression with IV
regIV
noIV>
```

```
$coefs
```

	Beta_hat	Std_Err	Student_t	p-values	H0_hyp
[1,]	-0.3468731	0.0146636866	-23.65525	0	0
[2,]	1.1510514	0.0123297996	93.35524	0	0
[3,]	3.0421935	0.0006330104	4805.91409	0	0
[4,]	1.0419322	0.0006435448	1619.05148	0	0

```
$var
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]
[1,]	0.0215023704	-0.0082740164	3.564109e-04	3.776149e-04
[2,]	-0.0082740164	0.0152023957	-7.505769e-04	-7.671067e-04
[3,]	0.0003564109	-0.0007505769	4.007021e-05	3.676179e-05
[4,]	0.0003776149	-0.0007671067	3.676179e-05	4.141499e-05

```
$F
```

```
chi2
```

```
623552578
```

```
$R2
```

```
[1] 0.9999946
```

```

> regIV
$SLS
$SLS$coefs
      Beta_hat      Std_Err Student_t      p-values H0_hyp
[1,]  1.112157  0.14397021   7.724909  1.080558e-11      0
[2,]  2.050817  0.08494876  24.141811  0.000000e+00      0
[3,]  2.963523  0.05934690  49.935594  0.000000e+00      0
[4,]  1.030611  0.05360177  19.227178  0.000000e+00      0

$SLS$var
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]
[1,]  2.0727422  1.1974832 -0.6009633  0.4737104
[2,]  1.1974832  0.7216291 -0.3210197  0.2457585
[3,] -0.6009633 -0.3210197  0.3522054 -0.3157811
[4,]  0.4737104  0.2457585 -0.3157811  0.2873150

$SLS$F
      chi2
46836418

$SLS$R2
[1] 0.7603437

$FLS
$FLS$R2
[1] 0.6481838 0.6540882

$FLS$F
[1] 19373.51 18701.85

```

Ici, le R^2 de la régression de première étape a été artificiellement abaissé par le coefficient 30 devant les ε . On constate bien que l'estimateur des OLS ne converge pas vers β_0 .

Références

- [Ald81] David J. ALDOUS. “Representations for partially exchangeable arrays of random variables”. In : *Journal of Multivariate Analysis* 11.4 (1981), p. 581-598. ISSN : 0047-259X. DOI : [https://doi.org/10.1016/0047-259X\(81\)90099-3](https://doi.org/10.1016/0047-259X(81)90099-3). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0047259X81900993>.
- [DNH79] D.N.HOOVER. “Relations on probability spaces and arrays of random variables (working paper)”. In : (1979). URL : <https://www.stat.berkeley.edu/~aldous/Research/hover.pdf>.
- [DDG22] Laurent DAVEZIES, Xavier D’HAULTFŒUILLE et Yannick GUYONVARCH. “The Marcinkiewicz–Zygmund law of large numbers for exchangeable arrays”. In : *Statistics & Probability Letters* 188 (2022), p. 109536. ISSN : 0167-7152. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.spl.2022.109536>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167715222001031>.
- [FR98] Jeffrey A. FRANKEL et Andrew K. ROSE. “The Endogeneity of the Optimum Currency Area Criteria”. In : *The Economic Journal* 108.449 (1998), p. 1009-1025. ISSN : 00130133, 14680297. URL : <http://www.jstor.org/stable/2565665>.
- [Kal89] Olav KALLENBERG. “On the representation theorem for exchangeable arrays”. In : *Journal of Multivariate Analysis* 30.1 (1989), p. 137-154. ISSN : 0047-259X. DOI : [https://doi.org/10.1016/0047-259X\(89\)90092-4](https://doi.org/10.1016/0047-259X(89)90092-4). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0047259X89900924>.
- [Kal05] Olav KALLENBERG. *Probabilistic Symmetries and Invariance Principles*. Springer New York, NY, 2005. ISBN : 978-0-387-28861-1. DOI : <https://doi.org/10.1007/0-387-28861-9>.