考研竞赛凯哥高等数学讲义

2022
考研数学

请尽情畅游在
凯哥的高等数学世界吧

B站专属

主编：王凯冬

目录

NO.1 函数极限计算

主讲人：凯哥

函数极限的计算方法众多，但核心是三大基本方法——等价无穷小替换、洛必达法则、泰勒展开。其它重要的方法还有拉格朗日中值定理法、凑导数定义法等等。一道函数极限的题目，往往需要多种方法综合使用，十分灵活，大家在解题时一定要注意一题多解，对比不同方法的优劣。

本讲义基本涵盖了期末考试、考研数学、大学生数学竞赛里面所有求函数极限的常用方法和经典题型，可以这么说——吃透了这份讲义，函数极限的计算将再也难不倒你！

在利用三大方法解题时，我们一定要记住游戏规则(必须背下来！)——

等价无穷小：在求极限时，如果想对某部分使用等价无穷小，需要保证该部分与其余整体构成乘除关系，不能在加减中等价，也不能在局部乘除中等价；

泰勒公式：使用泰勒公式的关键，是确定好需要展开的阶数——阶数展少了肯定出错，阶数展多了又没必要，徒增计算量，至于具体展开到多少阶，需要具体问题具体分析；

洛必达法则：洛必达法则是一个“后验法则”——洛必达能不能用，需要洛完以后才知道。如果f'/g'极限为A，则f/g极限也为A；如果f'/g'极限为$\pm\infty$，则f/g极限也为$\pm\infty$；如果f'/g'极限为震荡不存在，则洛必达法则失效，f/g的极限有可能存在，也可能不存在，其值需要通过其它方法求解。特别值得注意的是，如果题干只告诉了函数$f(x)$可导，未告诉导函数$f'(x)$连续，那么求带有函数$f(x)$的极限时，千万不能使用洛必达法则，因为$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$和$f'(x_0)$是否相等并不清楚，所以洛必达后出现的$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$无法处理，这是易错点！

在进行函数极限计算时，有两个高频易错点——

① 局部代入：有的同学在进行函数极限计算时，总喜欢把某一个局部的极限先算出来，如计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^3}$时，很多人认为反正$\cos x$的极限为1，所以直接将$\cos x$替换成1，故该题变成计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$——这显然是荒谬的！因为学了泰勒公式以后就可以看出，当$\cos x$展开到二阶，即$-\dfrac{x^2}{2}$时，与$\sin x$相乘后，仍然会得到三阶项，而分母恰好也是三阶，所以直接将$\cos x$换成1是不精确的。所以我们不能先局部计算出某一部分的极限后，再计算余下部分的极限。

记住一句话(背！)——如果你想局部计算出某一部分的极限，则需要保证这一部分本身的极限非零，且该部分与其余整体呈乘除关系。也就是说——非零因子才能局部计算！

② 随意拆开：有的同学在进行函数极限计算时，喜欢一来就把一个极限拆成两个极限，这是不好的习惯。因为极限能不能拆开，要先看拆开以后的极限是否各自都存在，这是极限的四则运算法则的要求。

还有一个有趣的现象是——在学习函数极限计算的时候，总是有人夸大泰勒公式的作用，贬低另外两大方法的价值，但事实上，纵观考研数学历年真题可以发现，几乎没有出现过非用泰勒公式才能解出函数极限计算题（但是有些题用泰勒的确会快很多）。所以，凯哥认为，“能等价时先等价；当等价无穷小精度不够时，使用泰勒展开；洛必达法则偶尔用用，可能会起到奇效”，让每个方法都能发挥自己最大的价值，才能最快速度的解出题目。做个题而已，千万不要做出优越感来了。

本讲义中共有数十道函数极限的计算题，其中第一组为入门难度，计算量小，方法单一，是从零基础到期末难度的水平，但这些题基本涵盖函数极限计算中的所有主流方法与技巧；第二组题目综合性稍强，稍显灵活，计算量也略有变大，这一组习题搞定以后，函数极限这一章你就彻底出师了！

这几十道题目，希望大家认真做、反复做，尽量做到一题多解。

一、函数极限入门训练

(本组习题不具体分类，都是一些很常规很容易的题目。这些题我就不留空白了，比较简单，大家可以另附一页纸来记笔记。)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\left(e^{x^2}-1\right)(e^x+1)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\arctan x\cdot\tan x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\ln(1+2x)}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\ln(1+2x)}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\cdot\arctan x^2}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{\sin^2 x}}{x^4}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

(10) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x\left(\text{或}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)$

(11) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$

(12) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}\ \ (\alpha>0)$

(13) $\lim\limits_{x\to 0}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}}$

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^x-1}{x\cdot\ln x}$（若改为$x\to 1$呢）

(15) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

(17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\right)$

(19) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$

(20) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$

(21) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\dots+e^{nx}}{n}\right)^{e/x}$

(22) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

(23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x\cos x}{\arctan x-\arcsin x}$

(24) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+4x+2}\right)$

(25) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1+\sqrt{4x^2+x-1}}{\sqrt{x^2+\arctan x}}\right)$

(26) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

(27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+2\tan x)^x-3^x}{3\sin^2 x+x^3\cos\frac{1}{x}}$

经过以上27道简单题目的训练(其中有几道还是竞赛题呢~)，我们已经熟练掌握了极限计算的基本游戏规则，见识了一些主要的计算方法。我们知道什么时候可以用等价无穷小，什么时候不得不使用泰勒公式；知道什么时候极限可以拆开，什么时候可以先局部代入计算出来；知道了分子(分母)有理化，知道了有时候需要先通分再求极限，知道了有些极限需要分左右；知道了对幂指函数取指对数，知道了不同函数的“趋向速度”，还知道了加减中高阶无穷小可以被吸收(被扔掉)……

接下来的一组习题，我们将集中训练一些重要的题型，尤其是泰勒公式的使用，以及计算复杂函数极限的思维方式。可以这样说，本页是入门难度，下一页开始，才是考研难度——当然，其中的竞赛题我都标注出来了，其目的不是让大家避开这些题，而是让大家知道——竞赛题也不过如此。

二、重点套路汇总

套路一 妙用添项减项，凑出需要的结构

我们在求极限时，通常会对表达式进行变形，强行凑出需要的等价无穷小，再分项求极限，是求函数极限时的基本操作（前提是被分离出来的部分极限存在，也就是满足极限的四则运算法则——当拆开之后的极限都存在时，可以拆；当拆开之后的极限有一个存在，另一个不确定时，可以拆；当拆开之后的极限各自均不存在时，不能直接拆）

例题 1 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$

例题 2 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$

例题 3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\ldots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$ (第十届大学生数学竞赛，改编)

注： 竞赛题，不过如此…所以大家放平心态，大学里的竞赛主要是为了激发大家学习兴趣而已。所以吃透我们的这个讲义以后，我建议大家去参加“大学生数学竞赛”，不出意外的话，保底二等奖，何乐不为？再比如下面两个题，都是最新的竞赛题，直接看出答案——

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}\right)}$ (第十一届大学生数学竞赛)

(2) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}$ (第十二届大学生数学竞赛)

例题 4 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}$

套路二 见到幂指函数，一般要取指对数

在极限题中，0^0和1^∞这两种类型均属于"幂指函数求极限"，而见到幂指函数，我们一般都要取指对数进行处理。若$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)]^{g(x)}$是$1^\infty$型，那么取完指对数以后紧接着一个等价无穷小，变为$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}g(x)[f(x)-1]}$，这是考试常考的一个操作，不论是考研还是竞赛，都特别喜欢考。

例题 1 计算$\lim\limits_{x\to \pi/4}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$

例题 2 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

注：此题居然是某一年数二的一个大题，10 分，真就是白给。

例题 3 计算$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ (第二届大学生数学竞赛)

例题 4 计算$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x}+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$ (第一届大学生数学竞赛)

例题 5 设$f(x),g(x)$在$x=0$的某邻域U内有定义，对任意$x\in U$，$f(x)\neq g(x)$，且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=a>0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=$__________ (第十二届大学生数学竞赛)

注：本题可以先提公因式，再取指对数，更快。

例题 6 (1) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$　(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}x(\ln x)^2$　(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln\sin x$　(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(e^x-1)}{\ln(\tan x)}$　(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\arcsin x)}{\ln(\ln(1+x))}$

注 1：观察这 5 个题的结果，你能总结出哪些结论?

注 2：对于**注 1** 中的结论，提到了“等价无穷大”这个词，它的使用条件和等价无穷小一样，也需要“整体乘除”，不能在加减中替换，也不能在局部乘除中替换！至此，我们对等价无穷小和等价无穷大都有一定的了解了，下面试试这道题，希望大家不要超过 2 分钟——

例题 7 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right](a>1)$ (第四届大学生数学竞赛)

例题 8 请利用例题 5 中得到的小结论，解决下列三道题目。

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

注：本题是某一年的考研题，得分率不高，利用小结论可轻松秒杀。

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1-x)^{\frac{1}{\ln x}}$

注：和上一个题基本一样

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{x^x-1}$

注：套娃题，你怕不怕？

套路三 当等价无穷小的精度不够时，通常采用泰勒展开求极限

当等价无穷小的精度不够时，我们不得不采用泰勒展开。利用泰勒公式求极限的关键，是确定出函数需要展开到几阶，这需要细心地分析。一般来说，考研难度的题目，会把分母设置成一个非常简单的函数，可以一眼看出它的阶，所以只需要对分子进行泰勒展开即可；又因为$\lim \dfrac{\text{高阶}}{\text{低阶}}=0$，故只需将分子展开到余项均为分母的高阶无穷小即可。下面，我们通过一些具体的例子来体会泰勒展开。

注:其实，套路一中的所有题目，也可以用泰勒公式解决，只是有点麻烦而已。在前期的学习中，大家一定要学一题多解，这叫发散思维。然后，在众多的解法中，慢慢找到自己最得心应手的方法，养成自己特有的解题风格。

例题 1 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}+\cos x-2}{x^4}$

例题 2 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)\ln(1-x)-\ln(1-x^2)}{x^4}$

注：像这种两个函数相乘进行泰勒展开，那么其中一个函数需要展开的最高阶数，是取决于另一个函数展开后的最低阶数的，大家一定要做到“不重不漏”。比如求上面的$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^3}$和$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$也是可以用泰勒展开的，大家不妨一试。

例题 3 设$f(x)$在x_0处二阶可导，求$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}$

注：这题当然也可以洛必达，但是一定要记住两点：①对h求极限时，h才是变量，其它视为常数；②此题洛必达只能用一次，然后紧接着用导数定义。这是因为题干只说了$f''(x_0)$存在，其余点处的二阶导是否存在都不知道，又怎么能洛必达呢？

例题 4 设$f'''(x_0)$存在，求极限$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+3h)-3f(x_0+2h)+3f(x_0+h)-f(x_0)}{h^3}$

注：本题和上题几乎一样，知道方法即可，不用算了。

套路四 无分母时的泰勒展开

大家一定要牢记——所谓的“等价无穷小”，可通俗地理解为“泰勒展开后的第一项”，所以，如果直接给你一个复杂的函数$f(x)$，让你寻找它的等价无穷小(即，没有分母提示你需要展开到多少阶了)，那么，其方法和套路三一样，仍然是泰勒展开；可是这种题，需要展开到多少阶呢？

答：展开到最低次系数合并后不为 0 时为止。说白了，就是展开到不能再抵消为止。此时，暴露出来的第一项，就是整个式子的等价无穷小量。

例题 1 请寻找：$x\to 0$时，$e^x+\cos x-2-x$的等价无穷小量

例题 2 请寻找：$x\to 0$时，$2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}$的等价无穷小量

套路五 求参数的值，使得无穷小的阶数尽可能的高

对于一个带参数的函数，如何选取参数的值，才能让阶数尽可能高呢？

要知道，对于无穷小而言，“低阶+高阶~低阶”，所以只要低阶量还在，那么高阶量都是没有价值的，所以要让阶数尽可能高的话，则需要消去尽可能多的低阶无穷小！至于具体展开到多少阶，我们只有采取“尝试法”，具体问题具体分析，不能一概而论。

例题 1 $f(x)=x-(ax+b\sin x)\cos x$，求$a,b$的值，使得当$x\to 0$时，$f(x)$为$x$的尽可能高阶的无穷小。

例题 2 设$f(x)=e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$，求$a,b$的值，使得当$x\to 0$时，$f(x)$为$x$的尽可能高阶的无穷小。

例题 3 设$f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$，求a,b的值，使得当$x\to 0$时，$f(x)$为x的尽可能高阶的无穷小。

套路六 变限积分函数的等价无穷小

在选择题中，出题人经常会让我们判断若干个等价无穷小的阶，并按高低顺序排列。这种题，我们主要的方法是采用泰勒展开，因为“所谓的等价无穷小，可以通俗地理解为泰勒展开的第一项”。

有一种函数的等价无穷小特别受出题人的青睐，那就是——变限积分的等价无穷小。标准答案在确定变限积分的等价无穷小时，一般都是假设它与ax^n等价，然后相除后使用洛必达，但是这种方法太慢了。

实际上，对于变限积分的等价无穷小，我们只需要记住一句话——“将被积函数和积分限分别使用等价无穷小替换，然后积分，积分出来的结果，就是原来那个函数的等价无穷小 0”。记住这个结论，那么在考研范围内，判断变限积分的等价无穷小基本就是送分题。

值得注意的是，这种方法，对于上下限都为关于x的函数的变限积分，不太适用(尤其是上下限为等价无穷小时，你敢把上下限直接等价了，那么积分结果就是 0 了，这显然是荒谬的)。

不过所幸的是，我们现在研究的是考研，考研一般都会把变限积分的下限设置为 0，从而大大减小问题的难度。下面，让我们来看看下面几个题目——

例题 1 请求出下列函数在$x\to 0$时的等价无穷小

(1) $\int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$ (2) $\int_0^{\tan x-\sin x} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$

(3) $\int_0^{x-\ln(1+x)} \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$ (4) $\int_0^{\sin x} (\cos t)^{2020}\mathrm{d}t$

例题 2 已知可导函数$f(x)$满足$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=2$，求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x} f^2(t)\mathrm{d}t}{(\tan x-\sin x)f(x)}$

注：套路六，只是讲了"变限积分的等价无穷小"，但是这个等价无穷小到底什么时候能用，还是服从之前讲的"整体乘除"原则，千万不要因为这个套路六学了以后，看到任何的变限积分极限题，都直接对变限积分等价。其实——对于变限积分的极限题，我们往往还是通过洛必达的方法，去掉积分号，比如下面这两道：

例题 3 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2u^2}\mathrm{d}u}$（第六届大学生数学竞赛）

例题 4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t - x - \frac{x^2}{2}}{(\tan x - x)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$

套路七 已知一个极限，求另一个极限

考研范围内，对于“已知一个函数极限，求另一个与之相关的函数极限”的题，方法一般有两种：

①利用极限与无穷小的关系(也就是很多人口中的“脱帽法”)，先将 $f(x)$ 反解出来，然后代入欲求的极限式中即可；

②把题干给出的那个极限中能泰勒展开的全部展开，然后化简整理，即得欲求极限。

当这两种方法不太适用时，我们也要学会具体问题具体分析，不要思维僵化。

例题 1 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$

例题 2 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$ (第六届大学生数学竞赛)

套路八 已知极限，反求参数

这种问题，我们一般没有固定的方法，大多是时候是具体问题具体分析，有时候会采用逻辑推理的方法来推出要求的参数必须等于几。(这种题最好不要洛必达)

例题 1 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-b)\sin x}{e^x-a}=3$，求$a,b$的值

例题 2 确定常数a,b的值，使得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax-bx^2}{x^2}=4$成立。

注：已知极限，反求参数的题目，**最好不要使用洛必达法则（有时候可以）**，因为洛必达法则是“后验法则”，就算题干所给的原极限等于 4，也不代表洛完以后的极限也是 4。这种题，洛必达法则即使能求出正确答案，在逻辑上也有一些瑕疵。

例题 3 设$\alpha\geqslant 5$，问k为何值时，极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^\alpha+8x^4+x)^k-x\right]$存在，并求此时的极限值

例题 4 确定a,b,c的值，使得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\displaystyle\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c$（其中$c\neq 0$）

例题 5 设$f(x)$在$x=0$的某邻域二阶可导，$f''(0)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}x}{x^a-\sin x}=b\neq 0$，求$a$与$b$

套路九 给出抽象函数$f(x)$在$x=0$时的函数值和各阶导数值，求相关极限

在求极限时，若题目告诉了抽象函数$f(x)$在具体一点处的函数值、一阶导、二阶导等，我们可以直接利用泰勒公式将抽象函数$f(x)$在该点展开，从而避开使用繁琐且不严谨的洛必达法则。

例题 1 设f二阶连续可导，$f(0)=f'(0)=0, f''(0)=6$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}$（第九届大学生数学竞赛）

注：看到题干条件，你的第一反应就应该是“$x\to 0$时，$f(x)=\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)\sim 3x^2$”

例题 2 设$f(x)$在$x=0$的某邻域内二阶可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=0$，求$f(0)$、$f'(0)$、$f''(0)$和$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+f(x)}{x^2}$

套路十 复合函数的泰勒展开

在求极限时，我们有时候不得不对复合函数进行泰勒展开，我个人的习惯是先确定出内层函数的等价量，因为只有确定了内层函数的等价量，才能确定出外层函数应该展开的最高阶数。(至于外层函数展开完毕以后，每一个内层函数自己又需要展开到多少阶，则需要具体问题具体分析)

例题 1 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$ (此题方法众多，拉格朗日、泰勒、和差化积都可以搞定)

例题 2 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}\left[\ln(1+\sin^2 x)-6\left(\sqrt[3]{2-\cos x}-1\right)\right]$

例题 3 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(A+Bx+Cx^2)}{x^3}=D(D\neq 0)$，求$A,B,C,D$

注：此题的本质其实就是让你求函数$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$的泰勒展开式，学有余力的同学可以直接背下来。背下这个泰勒展开后，有些极限题直接一眼看出答案，比如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$

例题 3 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2[1-\ln(1+x)]}{x}$ (第三届大学生数学竞赛)

注： 本题即使不会$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$的泰勒展开也能做出来，取指对数然后拆开就 OK 了，属于简单题。

例题 4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{x^4}$

注： 这题纯粹是整人的，方法仍然是复合函数的泰勒展开，但是计算量有点爆炸，等你算完这题，考试都结束了。答案为$-\dfrac{1}{12}$。

套路十一 如何处理“$\infty-\infty$”形式的极限

在几种未定式中，最烦人的就是“$\infty-\infty$”形式的极限，它们不太好处理。最基本的方法是通分，从而变成“$\dfrac{\infty}{\infty}$”的形式，这样我们就可以使用洛必达、等价、泰勒等工具了。

当然，有的时候，这种“$\infty-\infty$”的极限，根本就没有分母，那么又该如何处理呢？对于简单一点的题目，我们可以采用“倒代换”的方法(尤其是减号前后这两个无穷大基本都是幂函数形式时，倒代换比较方便)，但是有的题倒代换以后会更加复杂。

我们注意到，对于“$\infty-\infty$”形式的极限，减号前后这两个无穷大一般是等价的无穷大(否则的话，最后的结果就是无穷大了，这种题意义不大)，所以我个人的习惯一般是找出它们到底等价于谁，然后把这个等价无穷大量给提出来，使得“$\infty-\infty$”变成“$\infty\cdot 0$”，方便我们后续的处理。

当然，这种题的解法也不能一概而论，有时候我们也会采用添项减项、拉格朗日的方法处理，总之十分灵活。下面，我们看几道典型的例题（那种通分就可以解决的题，比如$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$这种题，此处就不浪费时间列举了，我们主要讲几道不太容易下手的题目）

例题 1 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)\cdot e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$ (第三届大学生数学竞赛)

注： 这种添项减项，将$\sqrt{1+x^6}$转化为x^3的小技巧值得学习(其实这里的x^3就是这两个无穷大的等价无穷大量)，下面这个题是例题 1 的升级版，方法完全类似。

例题 2 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}\right]$

例题 3 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xe^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}-\dfrac{\pi}{4}x\right]$

例题 4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{e\cdot x^{1+x}}{(1+x)^x}-x\right]$

例题 5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$

套路十二 x既不趋向于0，也不趋向于∞时的极限计算方法

这种题其实并无本质上的困难，只是我们看着有点别扭而已，如果实在不习惯，我们可以考虑换元，将问题变为x趋向于0时的情形，如求$\lim\limits_{x\to x_0}$时的极限，我们可以令$t=x-x_0$，从而将$\lim\limits_{x\to x_0}$变为$\lim\limits_{t\to 0}$，看着更舒服。

例题 1 求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{x^m-1}-\dfrac{n}{x^n-1}\right)$，其中$m,n$为正整数

例题 2 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}\right]$，其中$n$为正整数

套路十三 综合题

基本的方法也罗列得差不多了，接下来我们看几道综合性的题目。

例题 1 设函数$f(x)$在$x=0$的邻域内二阶连续可导，且$f(0),f'(0),f''(0)$均不为0，证明：存在唯一一组实数k_1,k_2,k_3，使得$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3f(3h)-f(0)}{h^2}=0$（第二届大学生数学竞赛）

例题 2 $f(x)$二阶连续可导,$f(0)=f'(0)=0,f''(x)>0$.在曲线$y=f(x)$上任一点$(x,f(x))\ (x\neq 0)$处作切线，交x轴于点$(u,0)$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(u)}{uf(x)}$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^u f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ （第四届大学生数学竞赛，改编）

例题 3 求极限$I=\lim\limits_{t\to 0^+}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{t}\sin y^2\mathrm{d}y}{\left[\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}\right)^x-1\right]\arctan t^{\frac{3}{2}}}$

例题 4 求$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x\left[1+f\left(t-\sin t+1,\sqrt{1+t^3}+1\right)\right]^{\frac{1}{\ln(1+t^3)}}\mathrm{d}t$，其中函数$f(u,v)$具有连续偏导数，满足$f(tu,tv)=t^2f(u,v)$，$f(1,2)=0$，$f_u'(1,2)=3$

NO.2 函数连续性的相关证明

主讲人：凯哥

连续是可导的必要条件，是可积的充分条件，函数的很多性质都和连续性有关。

这一次课，我们主要讲三个方面的内容，分别是：

(1) 如何证明一个函数是连续函数；

(2) 闭区间上的连续函数具有哪些优良的性质，如何利用它们解题；

(3) 连续函数具有哪些局部性质，如何利用它们解题。

题型一 证明一个函数连续

(1) 证明$f(x)$在点$x=x_0$处连续：即证$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，或$\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$；

(2) 证明$f(x)$在区间I上为连续函数：先在区间I上任取一点$x=x_0$，按照(1)中的方法证明出$f(x)$在$x=x_0$处连续，最后补一句“根据x_0的任意性可知，$f(x)$在区间I上处处连续，证毕”。

例题 1 假设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有定义，$f(x)$在$x=0$处连续，且对于一切的$x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，均有$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，证明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内处处连续。

注 1：如果补充条件“$f'(0)$存在”，则可利用微分方程求出$f(x)$的表达式，类似的题目还有：(1) 设$f(x)$对任意的x_1,x_2，均满足$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，且$f'(0)=1$，求$f(x)$；

(2) 设$f(x)$对任意的$x_1,x_2>0$，均满足$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，且$f'(1)$存在，求$f(x)$；

(3) 设$f(x)$对任意的x_1,x_2，均满足$f(x_1+x_2)=e^{x_1}f(x_2)+e^{x_2}f(x_1)$，且$f'(0)=1$，求$f(x)$

注 2：如果不补充条件，其实也能求出$f(x)$，但非数学系的考研学生不需要掌握其方法，有兴趣的读者可以自行查阅“柯西方程”的相关文献。

例题 2 假设$f(x)$在$(0,1)$有定义，且$e^x f(x)$和$e^{-f(x)}$都是增函数，证明：$f(x)$是连续函数。

题型二 与闭区间上连续函数有关的证明题（重点）

闭区间上的连续函数具有良好的整体性质，这些性质在证明题中发挥了巨大的作用。如：

(1) 有界性定理：闭区间上的连续函数一定是有界函数；

(2) 最值定理：闭区间上的连续函数一定存在最大值M与最小值m。

(3) 零点定理：若$f(x)\in C[a,b]$，且$f(a)\cdot f(b)<0$，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$；

(4) 介值定理：闭区间上连续函数的值域必是区间(可缩为一点)。

注 1：对于介值定理，更常见的说法是："若$f(x)\in C[a,b]$，且常数k满足$m\leq k\leq M$，则$\exists\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=k$"。

注 2：介值定理并非是连续函数特有的性质。比如，一个可导函数$f(x)$的导函数$f'(x)$不一定是连续函数，但即使$f'(x)$不连续，它仍然具有"介值性"，这就是著名的"达布定理"。

例题 1 请证明以下问题：

(1) 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$连续，$f(a)>g(a),f(b)<g(b)$，证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=g(\xi)$；

(2) 设$f(x)$在$[0,1]$连续，$f(0)=0,f(1)=1$，证：$\exists\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=1-\xi$

(3) 证明：方程$x=a\sin x+b(a,b>0)$至少有一个不超过$a+b$的正根。

注：函数$f(x)$的零点就是方程$f(x)=0$的根，所以零点存在定理也被称为根的存在定理。

例题 2 设$f(x)$在$[a,b]$连续，且$a<c<d<b$，证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$，其中p,q为正实数。

注 1：题干出现若干个函数值之和时，一般可以用介值定理，将其合并为同一个点的函数值；

注 2：这里的p,q必须为正实数，因为如果系数小于零，会造成不等式反向，请自行领会。

类题 $f(x)$在(a,b)内连续，$a<x_1<x_2......<x_n<b$，证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$

例题 3 $f(x)\in C[0,1]$，$0<x_1<x_2<\cdots<x_n<1(n\geqslant 3)$，证：$\exists\xi\in(x_1,x_n)$, s.t. $f(\xi)=\frac{\sum_{i=1}^{n}f(x_i)}{n}$

注 1：本题非常经典，它与上一道题目看起来几乎没什么区别，但二者的难度却大不相同。我们平常在使用介值定理时，已经习惯了中值ξ在闭区间上，所以如果将本题要证的结论换为“$\exists\xi\in[x_1,x_n]$, s.t. $f(\xi)=\frac{\sum_{i=1}^{n}f(x_i)}{n}$”，那么我们将绝杀，可是换不得。

本题让你证明的ξ是在开区间(x_1,x_n)内，这是一个比闭区间更强的结论，想想看，该如何探索解题思路呢？我在这里提出一个思维方向：

1.中值ξ位于开区间的定理都有哪些？$\Longrightarrow$ 零点定理、微分中值定理、推广的积分中值定理；

2.结合题目条件，本题最该和哪个定理建立联系、对比思考？$\Longrightarrow$ 零点定理；

3.思考零点定理的ξ为什么一定在开区间?怎么才能才能让介值定理的ξ也能在开区间?

为此，我们在这里将这两个定理罗列出来，进行对比：

1) 零点定理：若$f(x)\in C[a,b]$，且$f(a)\cdot f(b)<0$，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$；

2) 介值定理：若$f(x)\in C[a,b]$，且常数k满足$m\leqslant k\leqslant M$，则$\exists\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=k$。

对比以上两个定理可以发现，零点定理的ξ之所以是开区间，是因为 0 既不是左端点的函数值$f(a)$，也不是右端点的函数值$f(b)$，天然地就把$\xi=a$和$\xi=b$这两种情况排除掉了；而介值定理的ξ之所以是闭区间，是因为k本身的范围也是闭区间$[m,M]$，如果我们能够想办法确定出k的范围也是开区间，即$k\in(m,M)$，那么此时的结论就可以修改为$\xi\in(a,b)$——这是因为我们只需要构造函数$F(x)=f(x)-k$，然后对$F(x)$用零点定理即可，接下来的思路就非常清晰了。

注 2：从解题过程中可以看出，题干中的$n\geqslant 3$是必须的，该条件不能删去。

例题 4 设$f(x)\in C[0,1]$，$f(0)=f(1)$，证明：对$\forall n\in N^*$，$\exists\xi\in(0,1)$，使得$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi)$

注 1：一般来说，我们使用零点定理时，通常都是希望找到两个函数值异号的点；而此题的思路是找到若干个函数值之和等于 0 的点，从而推出这若干个点的函数值要么全为 0，要么至少存在两个异号的点，这种想法很有新意。并且，在对x进行赋值时，我们巧妙地利用了"$\xi+\frac{1}{n}$与ξ的间隔(步长)为$\frac{1}{n}$"的特点，使得赋值后的式子刚好呈现出"裂项相消"的感觉，这种手法在以后的题目中会经常遇到(不只是这种题型中)；

接下来，我们趁热打铁，先秒杀两个类似的题目。

类题 1 设$f(x)\in C[0,1]$，$f(0)=f(1)$，证明：$\exists\xi\in\left[\frac{1}{3},1\right]$，使得$f(\xi)=f\left(\xi-\frac{1}{3}\right)$

类题 2 设$f(x)\in C[0,1]$，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证:对$\forall n\geq 2$，$\xi\in[0,1]$，使得$f\left(\xi-\frac{1}{n}\right)=f(\xi)-\frac{1}{n}$

注 2：例题 4 还可以采用反证法。不过在进行反证时，需要注意一个小结论——"对于连续函数$f(x)$而言，若$f(x)$的函数值不取k，则$f(x)$的所有函数值均与k具有恒定的大小关系(否则就与介值定理矛盾)"。也就是说，只要连续函数$f(x)$没有零点，则$f(x)$要么恒正，要么恒负。

这是一个非常重要的小结论，为了巩固该结论，我们来看这样两道好题：

类题 3 若 $f(x)\in C[a,b]$，$f[f(x)]=x$，证明：$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\xi$

类题 4 若 $f(x)\in C[a,b]$，且对 $\forall x\in[a,b]$，总存在对应的 $y\in[a,b]$，使得 $|f(y)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(x)|$ 成立，

证明：$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$（思考：如果把题干中的“$|f(y)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(x)|$”改为“$|f(y)|\geqslant 2|f(x)|$”，又能推出什么样的结论）

注 3：类题 4 最直接的解法其实并不是反证法，而是采用“反复迭代+取极限”的经典思想，但利用该方法解这道题的时候，最后一步用到了凝聚定理，也就是“有界数列必有收敛子列”，这个定理这对于非数学系是超纲内容，所以我只有含恨舍去这种解法。

“反复迭代+取极限”是高等数学中最重要的思想之一，它体现了一种逼近的思想。我在 2020 年 12 月 11 日、2021 年 1 月 7 日、2021 年 1 月 16 日均讲过对应的题目，回放已经上传到了 B 站，非常推荐大家去看看这三个视频（其中，2021 年 1 月 7 日的题最难，可以最后听）。学会这个思想以后，大家可以秒杀下面这道题目：

类题 5 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，在 $x=0$ 连续且 $f(0)=2$，证明：$f(2x)=f(x)\mathrm{e}^x$ 的充分必要条件是 $f(x)=2\mathrm{e}^x$。

例题 5 请默写并证明“积分中值定理”和“积分第一中值定理”

注 1： 事实上，这两个定理中的ξ均可由“$\xi\in[a,b]$”加强为“$\xi\in(a,b)$”，但是加强到开区间以后，就不能再用介值定理来证明了，而要构造辅助函数，利用拉格朗日中值定理来证明；

注 2： 很多同学看到“注 1”以后，容易产生一些错误的认识，我们先提前进行一些说明：

有的同学会想——既然结论中的“$\xi\in[a,b]$”可以加强为“$\xi\in(a,b)$”，那就说明~~这两个定理中的ξ一定不能在端点中取到~~....——这种想法显然是错误的！正确的认识应当是“**这两个定理中的ξ一定可以在开区间中取到，而至于能不能恰好取到端点，就不一定了**”。之所以有这种错误的认识，不是因为大家数学没学好，而是因为语文和逻辑没学好。

最后，我们来解决大名鼎鼎的压缩映像原理。

例题 6 设$a\leqslant x\leqslant b$且$a\leqslant f(x)\leqslant b$，若存在常数$k\in(0,1)$，使得对区间$[a,b]$上的任意两点$x_1,x_2$，均有$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant k|x_2-x_1|$，试证明：

(1) 存在唯一的$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\xi$；

(2) 对于$\forall x_1\in[a,b]$，定义$x_{n+1}=f(x_n)$，证明$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$

题型三 连续函数的局部性质

连续函数的局部性质，其实就是“局部保号性”，通俗的理解就是“某点的函数值为正(负)，则该点邻域内的函数值也全都为正(负)”，其几何意义非常直观。

用数学语言来描述“局部保号性”的话，那就是——

“假设$f(x)$在$x=x_0$连续，若$f(x_0)>0$，则$\exists\delta>0$，使得当$x_0-\delta<x<x_0+\delta$时，$f(x)>0$”

这个不起眼的小结论，其实可以证明相当多的问题，下面简单举两个例子。

例题 1 请判断下列命题是否正确?若正确，给出证明；若错误，给出反例。

(1) 设$f(x)$为可积函数，若$f(x)\geqslant 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$；

(2) 设$f(x)$为连续函数，若$f(x)\geqslant 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$；

(3) 设$f(x)$为连续函数，若$f(x)>0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$

例题 2 设$f(x)$在区间I上连续，且有唯一极值点$x=x_0$，证明：若$f(x_0)$为极大(小)值，则$f(x_0)$必为最大(小)值。

凯哥后记：数学很大，我们很小。考研大纲里的任何一个专题都可以命制相当多的题目，我们没有时间穷尽所有的题目，而我能做的也只是将其中的好题目收集起来，用最合理的方式将其归类，尽力阐述思想方法、总结解题套路，让后来的人可以缩短自己在黑暗中摸索的时间。

最后，欢迎大家关注我的 B 站账号“考研竞赛凯哥”，讲义里的题目我会逐题精讲，并上传到 B 站，也欢迎大家在评论区和私信中给我多提建议，我们一起努力，让数学变简单~

NO.3 中值定理解题方法大汇总

主讲人：凯哥

中值定理博大精深，其中的优秀题目更是浩如烟海。不论是考研还是竞赛，中值定理中那些眼花缭乱的证明题仿佛一个个拦路虎，让广大学子望而却步。回想起当年自己在考研复习时面对中值定理的恐惧，我觉得我有责任编写出一份全面且系统的《中值定理解题方法汇总》讲义，让后来的学子们能够早日克服这个难关。

作者根据多年来的教学经验，将中值定理中的题目按照题型进行详细分类，编写了这份讲义。讲义里共包含了 69 道题目，学会以后可以横扫考研范围内一切的中值定理证明题，甚至对竞赛党和数学专业的同学也是大有裨益的，所以希望大家好好研究这份讲义。

讲义里的所有题目我都会进行直播讲解，请大家关注我的 B 站账户“考研竞赛凯哥”，我会在第一时间将直播的回放上传到 B 站。

解题套路汇总

套路一 若要证明“$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f'(\xi)=0$”，一般直接对$f(x)$使用罗尔定理即可，无需构造新的辅助函数；若要证明“$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f'(\xi)=k$”，则只需令$F(x)=f(x)-kx$，然后对$F(x)$使用罗尔定理即可；若要证明“$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f''(\xi)=0$或$f'''(\xi)=0$”之类的，只需对$f(x)$多次使用罗尔定理即可。总之，这是中值定理中最简单的题型。

例题 1 设$f(x)$三阶可导，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=0$，证:$\exists\xi\in(0,1)$，s.t. $f'''(\xi)=0$

注：对于连续函数而言，只要满足$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=c$，即可推出$f(a)=b$且$f'(a)=c$.

例题 2 设$f(x)$在$[0,1]$三阶可导，$f(0)=f(1)=0$，令$F(x)=x^3f(x)$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$, s.t. $F'''(\xi)=0$

例题 3 请叙述并证明拉格朗日中值定理、柯西中值定理。

例题 4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$f'_{+}(a)f'_{-}(b)>0$，$\exists\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=0$

注：一个点处的导数正负无法判断函数的单调性，但至少可以判断出这个点的去心邻域的函数值与该点本身的函数值的大小关系。利用这个思想，我们可以轻松证明费马定理。

类题 请叙述并证明费马定理、导数零点定理、导数介值定理(也叫达布定理)

注 1：本题给出了一个非常重要的结论——“**导函数天生满足零点定理和介值定理(无论导函数是否连续)**”；

注 2：根据导数零点定理可以推出——**若 $f'(x)$ 无零点，则 $f'(x)$ 要么恒正、要么恒负，故 $f(x)$ 一定单调；**

注 3：通过本例可以发现，如果欲证结论是 $f'(\xi)=0$，那么除了最常用的罗尔定理以外，还有费马定理。有一些题目的条件太少，不足以找到 $f(x)$ 的两个零点（或函数值相等的点），此时很可能只有使用费马定理才能搞定。这种题目往往很难，我们在后面的题目中会偶尔遇到，请大家留心！

例题 5 设$a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$ (a_i均为常数). 证明方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$在$(0,1)$至少有一个解.

注：本题极具代表性。该题说明：如果直接证明$f(x)$有零点比较困难的话，可以考虑去证明$f(x)$的原函数$F(x)$有两个零点，然后对$F(x)$使用罗尔定理即可。利用本题的思想，可以解决下面这道类题——

例题 6 假设某n次多项式多项式$P_n(x)$的一切根均为实根，证明:$P_n'(x),P_n''(x),\cdots,P_n^{(n-1)}(x)$也仅有实根

注：该题的结论和证明过程都非常有趣，后面我们在学习“导数的几何应用”时，判断函数的零点个数、极值点个数、拐点个数的时候会用到这个结论。

套路二 若欲证结论为“$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)=0$”，此时可令辅助函数为$F(x)=f(x)e^{\int g(x)dx}$，然后对$F(x)$使用罗尔定理，得到$F'(\xi)=0$，并对$F'(\xi)=0$进行适当变形即可得到欲证结论。值得注意的是，指数部分$\int g(x)\mathrm{d}x$的结果不需要加任意常数C，因为我们只需要找到一个辅助函数就够了。

例题 1 请说明套路二的原理是什么，即$F(x)=f(x)e^{\int g(x)dx}$到底是如何构造出来的（此处务必看B站视频）

注：只有真正掌握了方法的原理，用起来才更加的安稳。

例题 2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$f(a)=f(b)=0$，证明以下结论:

(1) $\exists\xi\in(a,b)$，使 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$；　　(2) $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

注 1：第(1)问其实是一个错题，必须补充条件才能解决。我刻意把它放在这类题型的第一道，希望大家引起重视，以后在做这类题的时候，一定要检验“被约去的部分是否不为 0”——这种看似不起眼的步骤，在考试的时候往往是致命的；

注 2：第(2)问利用不同的方法构造出的辅助函数并不相同，比如采用汤家凤老师的“还原法”，在等式两边同时除以 $f^2(\xi)$，得到的辅助函数是 $F(x)=\dfrac{1}{f(x)}-x$，但是很遗憾这个辅助函数无法解出此题。当然，这不代表不同老师的方法有高低之分，只是每一种方法都有自己的适用范围而已——请大家牢记这句话，并思考下面这道难题该如何解决。

类题 设 $f(x)$ 可导，$f(0)=1$，$f(1)=0.5$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f^2(\xi)+f'(\xi)=0$.

注 3：对于辅助函数的构造，向来都是“难者不会，会者不难”，命题人在这里乐此不疲地出了一大堆题目想要为难我们，但是只要掌握了方法和套路，这些题不过也就是一些送分题而已。

学会以后，“构造函数+罗尔定理+化简整理”，三步搞定一道题，逼格满满。不妨再看以下几例——

例题 3 设$f(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，$a>0$，$f(a)=0$，证: $\exists\xi\in(a,b)$，$s.t.\ f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$

例题 4 设$f(x)$在$[0,3]$上二阶可导, $2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$, 证: $\exists\xi\in(a,b), s.t.\ f''(\xi)-2f'(\xi)=0$

注 1：教材里的积分中值定理，ξ是属于闭区间，其证明方法是用介值定理；但是我们知道，其实ξ的范围可以加强到开区间，此时就需要构造变上限积分函数然后用拉格朗日中值定理来证明(真题考过，请自行证明)。很明显，开区间是一个更强的结论，更方便我们后续的处理。所以我以后在讲涉及到积分中值的题目时，一律默认ξ在开区间内，不再重复。

注 2：本题结论中虽含有二阶导，但是只需将$f'(\xi)$视为一个“整体”，即可套用上述公式了。利用该思想不难看出，对于任何形如“$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f^{(n)}(\xi)+f^{(n-1)}(\xi)g(\xi)=0$”的题，只需将结论中的$f^{(n-1)}(\xi)$看成整体，构造$F(x)=f^{(n-1)}(x)e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$即可，并没有本质上的困难。这种整体的思想，还可以解决下面这道题目。

例题 5 $f(x)$在$[a,b]$二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，证: $\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f''(\xi)=f(\xi)$

注 1：本题的结论是$f''(\xi)=f(\xi)$，最直观的感觉就是“中间差了个一阶导”。这种题目，一般来说都要人为引入一阶导$f'(\xi)$，比如这题可以在等式两边加上f'，然后将$f+f'$视为整体，构造辅助函数；当然，也可以两边减去f'，并将$f'-f$视为整体构造辅助函数；

注 2：有的题目，其结论中已经同时出现$f(\xi),f'(\xi),f''(\xi)$了，那么此时就不需要再人为引入$f'(\xi)$了，只需要将$f'(\xi)$合理“分配”给$f(\xi)$和$f''(\xi)$，然后利用“整体”的思想构造辅助函数即可。比如，我们可以将例题 5 的结论改为“$f''(\xi)-3f'(\xi)+2f(\xi)=0$”，此时该如何构造辅助函数呢？利用这个思想，我们可以解决相当多的题目，请看下面的两道类题（注：这两道题都比较难，尤其是类题 2）——

类题 1 $f(x)$在$(0,+\infty)$二阶可导，证：对$\forall a>0$，$\exists c\in(2a,4a)$，使得$f(4a)-2f(3a)+f(2a)=a^2f''(c)$

类题 2 设$f(x)$在$[0,2\pi]$二阶可导，$f''(x)\neq f(x)$，证明：$\exists\xi\in(0,2\pi)$，使得$\tan\xi=\dfrac{2f'(\xi)}{f(\xi)-f''(\xi)}$

注：这道题我自己在第一遍做的时候，花了非常大的功夫。我尝试了近 20 分钟，但是连辅助函数都没搞出来。因为我一直想着怎么去套公式，当公式套不出来的时候，我又想用“微分方程法”硬解，但是都失败了。直到我真的冷静下来，尝试用“分析法”去重新审视欲证结论和题干条件的时候，这道题的思路才逐渐清晰，最终被我轻松解决。至于何为“分析法”，请见下面的套路三。

套路三 **本套路其实不算套路，更应该称为“思想方法”**。辅助函数的构造虽然可以套用公式，比如有所谓的“还原法”、“公式法”、“微分方程法”、“K 值法”，但是几乎没有一个方法是万能的，我认为真正最核心的方法是“分析法”——也就是观察式子结构，通过“具体问题具体分析”的方法寻找辅助函数。这句话看似是一句废话，但其实指导了我解决相当一部分的中值定理难题。比如，虽然在套路二中我们已经学习了构造辅助函数的“通用公式”，但在套路二中例题 2 的类题却需要通过两种不同方法构造出两种不同的辅助函数，这就叫“具体问题具体分析”；再比如，当欲证结论为 $f''(\xi)+f'(\xi)g(\xi)=0$ 时，可将 f' 视为整体，令 $\varphi(x)=f'(x)e^{\int g(x)dx}$ 即可；再比如，若要证明的结论为 $f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)=K$ 且 $K\neq 0$ 时，又该怎么办呢？此时，我们可以仿造之前探索辅助函数的方法，先在等式两边乘以 $e^{\int g(x)dx}$，那么等式左边仍可视为 $F(x)=f(x)e^{\int g(x)dx}$ 的导数，若再能求出等号右边 $Ke^{\int g(x)dx}$ 的原函数 $G(x)$，那么辅助函数便构造出来了，此时只需令 $H(x)=F(x)-G(x)$ 即可。当然，这种例子不胜枚举，毕竟具体问题具体分析是马克思主义“活的灵魂”。说了这么多，总之记住一个核心即可——**“去思考欲证等式到底是由什么函数求导并变形后得到的，然后想办法将其还原”，即去思考“你要证的东西是怎么来的”**。

例题 1 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，$f(0)=f(1)$，证明: $\exists\xi\in(0,1)$，s.t. $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

例题 2 设 $f(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 可导，$f(0)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，$f(1)=\dfrac{1}{2}$，证明：对 $\forall a$，均存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+a[f(\xi)-\xi]=1$

例题 3 设$f(x)$在$[0,1]$可导，$f(0)=0$，$\forall x\in(0,1]$，$f(x)>0$，证:$\exists\xi\in(0,1)$, s.t. $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

注 1：本题在构造辅助函数时，有两种不同的思维方式，一种是联想到$[\ln f(x)]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$，另一种是先去分母，然后联想到$(uv)'=u'v+uv'$，这两种思维方式构造出的辅助函数是殊途同归的，可相互借鉴对方的思想；

注 2：请思考，本题有没有秒杀解法?

注 3：类似的题目还有很多，但是方法本质都是一样的，比如下面两道类题。

类题 1 设$f(x)$在$[0,1]$可导，$f(0)=0$，$\forall x\in(0,1]$，$f(x)>0$，证明：对于任意的正数a，$\exists\xi\in(0,1)$，使得$\dfrac{af'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

类题 2 设$f(x)$在$[a,b]$可导，$f(a)=0$，$\forall x\in(a,b]$，$f(x)>0$，证明：对于任意$m,n>0$，$\exists\lambda,\mu\in(a,b)$，使得$\dfrac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}=\dfrac{m}{n}\dfrac{f'(\mu)}{f(\mu)}$

注：类题 2 本身的难度其实不大(~~对我来说~~)，但是迷惑性极强，如果没有前面两题的铺垫，很多人对这题是束手无策的（当然，本题不止这一种解法）。我曾在 2020 年 10 月 8 日讲过这道题，这里就不再赘述了，请大家去看当年的视频即可。

例题 4 设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，$g'(x)\neq 0$，证：$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

例题 5 设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$二阶可导，$g''(x)\neq 0$，$g(a)=g(b)=f(a)=f(b)=0$，证明：

(1)在(a,b)内，$g(x)\neq 0$ (2)$\exists\xi\in(a,b)$，使得$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

注：有时候一眼看不出来辅助函数是什么，套公式也不好套，那么我们可以直接对欲证等式进行积分，若能积出来，那么积分的结果就是辅助函数。这并不是什么高级的方法，不过是贯彻了“**<u>去思考你要证的东西是怎么来的</u>**”这个核心思想而已。类似的题目还有下面一道。

例题 6 设函数$f(x)$与$g(x)$在区间$[a,b]$二阶可导，$f(a)=f(b)=g(a)=0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)g(\xi)+2f'(\xi)g'(\xi)+f(\xi)g''(\xi)=0$

注：若再补充条件$g(b)=0$，则满足条件的ξ不止一个，你会证吗？

接下来，让我们看一道精彩的考研真题。

例题 7 $f(x)$二阶可导，$f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，证：$f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$在$(0,1)$内至少有两个根．

最后，让我们用一道极为精彩的题目来作为这个题型的谢幕。

例题 8 $f(x)$在$[a,b]$连续，且存在$c\in(a,b)$满足$f'(c)=0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

注 1：本题的辅助函数很好构造，但是难点在于很难找到两个函数值相同的点，而且条件中的$f'(c)=0$似乎也不知道如何使用。这个时候，该如何思考问题呢？（其实解决方案在前文中已经提到过了哟~）

注 2：利用费马定理才能搞定的中值定理题目，往往难度很大。最经典的例子莫过于下面这道。对于该题，我在 2020 年 6 月 23 日和 2020 年 11 月 26 日分别用常规解法和秒杀解法各讲了一次，有兴趣的同学可以前往观看，此处从略。

$\boxed{f(x)\text{在}[-2,2]\text{二阶可导，}|f(x)|<1\text{，}[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4\text{，证：}\exists\xi\in(-2,2)\text{，s.t. }f(\xi)+f''(\xi)=0}$

套路四 有一类题，其欲证等式为含有“$a,b,\xi,f(\xi),f'(\xi)$”的混合项(其中a,b通常为区间端点)，这种题的一般做法是——将含有区间端点a,b的项与带有中值ξ的项，分离到等式的左右两端，然后分析带有a,b的项是否可以变形为$f(b)-f(a)$或者$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$的形式，然后用拉格朗日中值定理或者柯西中值定理处理，即得欲证结论；当然，也可以分析带有中值ξ的项，去思考它是否可以看成由某个函数用完拉格朗日中值定理以后或者某一对函数用完柯西中值定理以后的结果，如果可以，将其还原。这种题，是期末考试的常考题型，难度非常小。

(当然，若含a,b的项与含ξ的项不可分离，那么可以尝试“套路三”中“例题 4”的方法)

例题 1 $f(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，证:$\exists\xi\in(a,b)$，使得$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$

注 1：请思考，该题是否还有其它解法呢?

注 2：该题不仅有其它解法，并且还只能用这个“其它解法”——因为题干条件不足以确定出$\xi\neq 0$，所以根本无法使用柯西中值定理。我故意把这个题放到套路四的第 1 道题，你又上当了。

注 3：如果补充条件“$b>a>0$”，则可以使用柯西中值定理。

例题 2 设$a,b>0$，证:$\exists\xi\in(a,b)$，使得$ae^b-be^a=(1-\xi)e^\xi(a-b)$

套路五 **双中值问题 1**——若要证明的等式中，不止含有一个中值，比如同时含有ξ和η，此时的解法一般是：抓住两个中值中的“主要矛盾”——将ξ和η中较为复杂的中值项抽离出来单独分析，<u>去思考它是由哪个函数用完拉格朗日中值定理以后或者哪一对函数用完柯西中值定理以后的结果，然后将其还原</u>（**这又是上面所说的“核心思想”!**），对还原以后的式子稍作变形，再用一次中值定理，便可以出现另一个中值，证毕。知道了这个思想以后，自己都可以编题玩儿了~并且，这个思想完全使用于“三中值”甚至“四中值”题目的求解。

例题 1 设$f(x)$在$[a,b]$可导,$f(a)=f(b)=1$，证明:$\exists \xi_1,\xi_2\in(a,b),s.t.\ e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2)+f(\xi_2)]=1$；

例题 2 设$f(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，且$a>0$，$\exists \xi,\eta\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=(a+b)\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$

例题 3 $f(x)\in C[a,b]$，在(a,b)可导，且$0<a<b<\dfrac{\pi}{2}$，证：$\exists \xi,\eta\in(a,b)$，使得$f'(\eta)\tan\dfrac{a+b}{2}=f'(\xi)\dfrac{\sin\eta}{\cos\xi}$

注：利用同样的方法，我们可以处理含有三个中值、四个中值的证明题，比如以下两例。

例题 4 设$f(x)$在$[1,2]$连续，$(1,2)$可导，$f'(x)\neq 0$，证明：$\exists\xi$、η、$\gamma\in(1,2)$，$s.t.\ \dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\dfrac{\xi}{\eta}$

注 1： 这个套路研究到现在，相信大家已经融会贯通了，甚至摩拳擦掌的准备去秒杀辅导书中的同类题目。**但是在我看来，这种题是有 bug 的**——因为题中没有限定这些中值必须不同，所以…嘿嘿…你们可看好了：

例题 1 中，如果我取$\xi_1=\xi_2$，则该题变为单中值问题，瞬间秒杀；

例题 2 中，如果我取$\xi=\eta=\dfrac{a+b}{2}$，恒成立，秒杀；

例题 3 中，如果我取$\xi=\eta=\dfrac{a+b}{2}$，恒成立，秒杀；

例题 4 中，如果我取$\xi=\eta=\gamma$，恒成立，秒杀….

啊这….还没开始做，这题就结束了

注 2： 看了注 1 的新解法以后，总会有人觉得不可思议，甚至心里会有这种疑惑——“题干没说这些中值可以相等啊，你凭什么让它们相等，你这不是相当于把题目都改了吗？”

现在，是时候打消你的疑惑了——

(1) 首先，题目没说这些中值可以相等，也没说必须不等，题目只是让你证明“存在这样的一些中值，使得等式成立”即可。也就是说，我如果令这些中值相等以后，发现结论也可以成立，那么我不仅证明了这样的中值是存在的，而且证明了它们“在相等的前提下也能存在”，这是一个更强的结论！

打个比方吧，比如别人让你证明某个方程有解，结果你直接把解等于几求出来了，那你当然更牛逼了…

（同理，如果你能够证明出这些中值不仅存在，而且还互不相等，那么也是证明了更强的结论！）

(2) 其次，就算使用参考答案给出的“标准解法”，也没有证出这些中值一定不相同！因为两次中值定理都是在同一个区间上使用的，这样得到的中值本来就可能相等。所以，如果你认为我的新解法是错的，那你所谓的标准解法其实也是错的！

当然，这样的新解法也有一个弊端，那就是——既然令中值相等以后，结论增强了，那么很有可能增强后的结论是证不出来的，或者说比原命题更加难证（比如套路三中例题 3 的类题 2，其中的两个中值满足的条件是$\lambda+\mu=a+b$，而不是$\lambda=\mu$），这样就和我们的初衷背道而驰了。

最后，再来欣赏一道三中值定理的题目。

例题 5 设$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$二阶连续可导，$f'(0)=0$，证: $\exists\xi$、η、$\omega\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，s.t. $f'(\xi)=\dfrac{\pi}{2}\eta\cdot\sin2\xi\cdot f''(\omega)$

套路六 **双中值问题 2**——对于含有两个中值ξ和η的题，如果题目中还明确要求了$\xi\neq\eta$，那么就不能再像“套路五”那样做了，因为两次中值定理的区间都是$[a,b]$，所以你无法保证ξ和η一定不相等!所以，唯一的解决方法就是将区间$[a,b]$拆分成$[a,c]$和$[c,b]$，然后在区间$[a,c]$和$[c,b]$上分别使用一次中值定理，使得$\xi\in(a,c)$，而$\eta\in(c,b)$，由于两个区间没有交集，那么自然就保证了$\xi\neq\eta$。很显然，这种题型中，分段点$x=c$的选取是核心。至于如何选择一个恰当的c，方法有两种——①用待定系数法倒推，推出c需要满足的条件(这是最重要的方法)；②根据题目的提示(一般有第一问作为铺垫，难题变成水题)。该思想完全适用于三个中值甚至n个中值的题目。**相较于套路五而言，套路六才是考试重点（不论是考研还是竞赛，真题里都考过这种题哟~）**

以下的题目，如果有第一问，请将其跳过。第一问是给弱者做的(~~考试的时候请忘掉这句话，装逼有风险~~)。

例题 1 设$f(x)$在$[0,1]$连续，$(0,1)$可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证:

(1) $\exists c\in(0,1)$，使得$f(c)=\dfrac{1}{2}$

(2) $\exists\xi,\eta\in(0,1)$且$\xi\neq\eta$，使得$\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2$

注: 此题的结论可进行推广，以此为题源可命制相当多的题目，如下:

类题 1 $f(x)$在$[0,1]$可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证:$\exists\xi\neq\eta$，s.t. $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b(a,b>0)$

类题 2 $f(x)$在$[0,1]$单调可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证: 存在互不相同的ξ_i，使得$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{f'(\xi_i)}=n$

类题 3 $f(x)$在$[0,1]$单调可导, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1(\lambda_i>0)$,

证: $\exists$不同的$\xi_i\in(0,1)$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{f'(\xi_i)}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$

例题 2 设$f(x)$在$[0,1]$连续，$(0,1)$可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证:

(1)$\exists c\in(0,1)$，使得$f(c)=1-c$　　　　(2)$\exists\xi,\eta\in(0,1)$且$\xi\neq\eta$，使得$f'(\xi)f'(\eta)=1$

例题 3 $f(x)\in C[0,1]$，在$(0,1)$可导，$f(0)=0,\ f(1)=\frac{1}{4}$，证:$\exists\xi\neq\eta$，s.t. $f'(\xi)+f'(\eta)=\eta-\xi$

注：本题的两个辅助函数均不难构造，但由于结论中的ξ和η并不对称，所以需要思考ξ到底是位于$(0,c)$还是位于$(c,1)$。当然，本题我也没有太好的预判方法，只有使用“尝试法”。

例题 4 设$f(x)\in C[0,1]$，$\int_0^1 f(x)dx\neq 0$，证明:存在互异的三个数$\xi_1,\xi_2,\xi_3\in[0,1]$，满足下列等式——

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{1}{1+\xi_1^2}\int_0^{\xi_1}f(x)dx+f(\xi_1)\arctan\xi_1\right]\xi_3=\left[\frac{1}{1+\xi_2^2}\int_0^{\xi_2}f(x)dx+f(\xi_2)\arctan\xi_2\right](1-\xi_3)$$

接下来，让我们以一道极为精彩的综合题作为本题型的谢幕，该题融合了之前讲过的很多思想。

例题 5 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$f'(x)\neq 0$，$f(a)=0$，$f(b)=2$，证明：$\exists \xi,\eta\in(a,b)$ 且 $\xi\neq\eta$ 使得 $f'(\eta)\left[f(\xi)+\xi f'(\xi)\right]=f'(\xi)\left[bf'(\eta)-1\right]$

（事实上，本题在视频里并未讲解，视频的最后，是另一道题：

设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，$\int_0^1 f(x)dx=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$，证明：存在两个不同的点 ξ，η，使得 $f'(\xi)=g'(\xi)\left[f(\eta)-f(\xi)\right]$。）

套路七 若要证明的式子中含有高阶导数(如 $f''(\xi)$、$f'''(\xi)$、$f^{(4)}(\xi)$ 等)，一般要用带拉格朗日余项的泰勒公式，即：

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$。在具体操作中，最重要的就是选取恰当的展开点和被展开点(即 x_0 和 x)。观察上面的泰勒公式我们可以得出以下经验——在选取展开点和被展开点时，总的思路是“**选取导数值信息多的点作为 x_0，而选取仅告知了函数值信息的点为 x**”。当然，有时也会选取其它的展开方式，如——将两端点均在中点处展开、将中点分别在两个端点处展开、两端点处相互展开、在任意点处展开…至于该选择哪种展开方式，我们需要具体情况具体分析，不能一概而论。

例题 1 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 三阶连续可导，$f(-1)=0$，$f'(0)=0$，$f(1)=1$，证：$\exists\xi\in(-1,,1)$，s.t. $f'''(\xi)=3$

注：由达布定理可知，这里的“三阶连续可导”可弱化为“三阶可导”，下面的部分题目也有类似的情况。

例题 2 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$[f(x)]_{\min}=-1$，证: $\exists\xi\in(0,1)$，s.t. $f''(\xi)\geqslant 8$

注：极值点蕴含了导数的信息，所以常常将函数在极值点处泰勒展开。

例题 3 设$f(x)$在$x=x_0$的邻域内四阶可导，$|f^{(4)}(x)|\leqslant M\,(M>0)$，证:对此邻域上任意一个不同于$x_0$的点$a$，

有$\left|f''(x_0)-\dfrac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}\right|\leqslant\dfrac{M}{12}(a-x_0)^2$（其中$b$是$a$关于$x_0$的对称点）

注：从这个例子可以看出，如果题干中没有告诉任何具体点的导数信息，那么可以观察欲证结论，同样也能得出展开点和被展开点应该如何选取。这种思想还可以解决下面两道类题，它们的方法一模一样。

类题 1 $f(x)$在$[a,b]$二阶连续可导,证: $\exists\xi\in(a,b)$,使$f(a)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)=\dfrac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$

类题 2 $f(x)$在$[a,b]$三阶连续可导，证：$\exists\xi\in(a,b)$，使$f(b)=f(a)+f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)(b-a)+\dfrac{(b-a)^3}{24}f'''(\xi)$

例题 4 在一条笔直的道路上，一辆汽车从开始启动到刹车停止用单位时间走完了单位路程，证明：至少有一个时间点，其加速度的绝对值不小于 4

注：对于这种端点处的函数、导数信息都已知的题目，初学者可能会选择“两端点处相互展开”的方法，但是这样得到的估计不够精确。为了得到更精确的估计，通常是将中点在端点处展开，充分利用“对称美”。请看下面这道类似的题目。

类题 $f(x)$在$[a,b]$上n阶可导$(n\geq 2)$，满足$f^{(i)}(a)=f^{(i)}(b)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$|f^{(n)}(\xi)|\geq\dfrac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|$

目前为止，我们遇到的题目都或多或少提示了你该如何选择展开点和被展开点，总之核心思想就是“将题干中导数信息多的点作为展开点x_0，将仅告知函数值的点作为被展开点x”。

但是，有一些题目，题干条件中没有告诉任何具体点处函数值和导数值，那么该如何选取展开点和被展开点呢?这就需要我们更加深入地去分析了，这种题目的难度比前几道更大，下面举几道最为经典的例子。

例题 5 $f(x)$在$(0,+\infty)$三阶可导，且$f(x)$和$f'''(x)$有界，证明：$f'(x)$和$f''(x)$在$(0,+\infty)$也有界

注 1：本题我在 2021 年 3 月 10 日已经讲过，请大家关注我的 B 站账户“考研竞赛凯哥”，此处从略。

注 2：本题只是让你证明“有界”，但是没有让你求出这个“界”到底是多少。而下面的三道题目，出题人明确给出了具体的界，那么又该如何思考呢?

例题 6 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，且$|f(x)|\leqslant a$，$|f''(x)|\leqslant b$，证：$|f'(x)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{2}$恒成立

注：本题最后一步的放缩极为关键。在作者看来，这本应该是高中的常识问题，无需多讲。但是根据多年来的教学经验发现，很多学生对最后一步的不等号方向非常不理解，甚至很多老师也在这个地方犯过错误，所以希望大家在这里一定要仔细思考！ 为了彻底搞清楚上题的“注 2”，我们再来看这样一道题目。

类题 1 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$二阶可导，记$M_i=\max|f^{(i)}(x)|\ (i=0,1,2)$，证明：$M_1^2\leqslant 2M_0M_2$

类题 2 设$f(x)$在$(0,+\infty)$二阶可导，记$M_i=\max|f^{(i)}(x)|\ (i=0,1,2)$，证明：$M_1^2\leqslant 4M_0M_2$

注：由于类题 2 的定义域缩小为了$(0,+\infty)$，对称美消失了，所以得到的界没有那么精确，这是正常的。

套路八 有一些题目告诉了二阶导函数$f''(x)$恒正或者恒负，然后让你证明某个不等式。这个时候往往需要将函数泰勒展开，然后利用二阶导函数不变号的特点扔掉拉格朗日余项，从而得到一个不等式。这是一个极其重要的手法，与函数凹凸性有关的很多性质都可以利用这个方法进行证明；并且，该方法中的“二阶导”可以改为“偶数阶导”，操作方式仍然不变。比如告诉你四阶导函数恒正，那么你可以泰勒展开（余项为含四阶导的拉格朗日余项），然后将余项扔掉即可构造出不等式了。比如让你证明$e^x\geqslant 1+x$、$e^x\geqslant 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$时，都可以采用这种方法，这比移项求导快得多。

例题 1 设$f''(x)>0$，证明：(1) $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$；(2) $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geqslant f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

注 1：众所周知，$f''(x)>0$时函数为凹函数，而本题相当于给出了凹函数必定成立的两个不等式。这两个不等式非常重要，并且有十分清晰的几何意义——第一问的不等式，其几何意义是“对于凹函数而言，曲线总在切线上方”；第二问的不等式，其几何意义是“对于凹函数而言，中点处的函数值小于函数值的中点”

注 2：本题的第(2)问可以推广为如下的类题——

类题 设$f(x)$在$[a,b]$二阶可导，$f''(x)>0$，取$x_i\in[a,b]\,(1\leqslant i\leqslant n)$，设$k_i>0$且$k_1+k_2+\cdots k_n=1$，证明：

$$f(k_1x_1+k_2x_2+\cdots k_nx_n)\leqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots k_nf(x_n)$$

注 1：可以发现，$f\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\leqslant\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$ 和 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 均是上题的特例；

注 2：类题和注 1 中的不等式，称为“琴生不等式”。与均值不等式、柯西不等式一样，琴生不等式也是不等式证明中最常用的不等式之一（考研用得不多），以后在《不等式证明专题》时我会详细介绍。

例题 2 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，则(　　)

(A) 当$f'(x)<0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$　　(B) 当$f''(x)<0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

(C) 当$f'(x)>0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$　　(D) 当$f''(x)>0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

注：本题是 2018 年考研真题，利用本套路的方法可以轻松解决。当然，毕竟是选择题，也可以画图搞定。

例题 3 设$f''(x)>0$，取$x=x_0$，$\Delta x>0$，令$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，试比较$\Delta y$和$\mathrm{d}y$的大小，并解释其几何意义。

套路九 对于一些需要用泰勒中值定理解决的题，其实可以采用【辅助多项式】的方法搞定。所谓辅助多项式，指的是当欲证结论为“$f^{(n)}(\xi)=k$，且$k\neq 0$”之类的形式，且题干中关于$f(x)$的信息较多时，我们可以构造一个n次多项式$P(x)$，使得$P(x)$满足题干中$f(x)$所满足的一切条件，再令$F(x)=f(x)-P(x)$，此时$F(x)$一定会有很多的零点，然后对$F(x)$多次使用罗尔定理即可得到欲证结论。(构造出$F(x)$后，有时仍需对其泰勒展开，但是此时泰勒会比一开始就用泰勒要简单一些)。**注意：该方法并非必须掌握，属于选学内容。有兴趣的同学可以自行研究，我在这里只讲几道最的典型例题，目的在于抛砖引玉。**

例题 1 设$f(x)$在$[0,4]$二阶可导，$f(0)=0, f(1)=1, f(4)=2$，证明：$\exists\xi\in(0,4)$，使得$f''(\xi)=-\dfrac{1}{3}$

接下来，让我们用这个方法秒杀 2019 年的考研数学真题。

例题 2 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，证明:$\exists\eta\in(0,1)$，使得$f''(\eta)<-2$.

注：原题原本还有第一问的，被我去掉了。大家**平时训练**的时候，可以刻意避开第一问，直接思考第二问，这样会大幅提高自己的分析能力。

例题 3 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$[f(x)]_{\min}=-1$，证:$\exists\xi\in(0,1)$，s.t. $f''(\xi)\geq 8$

注：本题在题型七中其实已经讲过，我们现在用辅助多项式的方法重新证明了一遍，别是一番风味。尤其应当注意的是，这里$f(x)$的最小值点和多项式$P(x)$的最小值点不一定是同一个点（也就是说，f和P拥有相同的最小值，但是取到最小值的横坐标并不一定相同），所以需要分类讨论。

利用这个分类讨论的思想又可以轻松秒杀 2007 年的考研真题，如下——

类题 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，并且$f(x)$和$g(x)$在(a,b)内存在相等的最大值，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=g''(\xi)$

例题 4 设$f(x)$在$[-1,1]$三阶连续可导，$f(-1)=0$，$f'(0)=0$，$f(1)=1$，证: $\exists\xi\in(-1,,1)$，s.t. $f'''(\xi)=3$

注 1：前文中已经提过，在使用辅助多项式解题时，若欲证结论为$f^{(n)}(\xi)=k$，则需要构造一个n次多项式进行拟合。n次多项式有$n+1$个系数，但若题干中只有n个独立的条件，则无法顺利解出$P(x)$中的所有系数，此时我们需要给$P(x)$“强行附加约束条件”，使得构造出的$F(x)$能够成功解出题目。至于需要附加一个什么样的条件，则又需要“具体问题具体分析”了，不能一概而论，但核心原则是“差什么补什么”。

注 2：回顾辅助多项式的解题过程，我们可以发现：由于$P(x)$是一个n次多项式，而我们最后总是对辅助函数$F(x)=f(x)-P(x)$连续求了n次导，得到了$F^{(n)}(\xi)=0$，所以真正影响最终结论的只有$P(x)$中的最高次项的系数，至于那些低次项都在一次次的求导过程中消失殆尽。所以，以后在草稿纸上计算$P(x)$的系数时，只要发现计算出的最高次项的系数刚好能够证出你想要的结论，那么这个题就基本搞定了，接下来就是悠闲地求出其他系数，并且按部就班地写一下过程即可。

套路十 有一种题目，是让你计算中值定理中的中值θ的极限. 这种题目的思想其实特别简单，只需要自己将$f(x)$重新展开一次，然后和题干给出的展开式对比，得到一个简单等式，然后想办法把θ分离出来即可。多说无益，我们来看几道典型例题！

例题 1 设$f(x)=\arctan x$，$x\in[0,a]$，若$f(a)-f(0)=af'(\theta a)$，$\theta\in(0,1)$. 求$\lim\limits_{a\to 0}\theta^2$

注：本题是这类题中最简单的一类题：直接把θ的表达式求出来即可，没什么好做的。

例题 2 $f(x)$二阶连续可导，$f''(x)\neq 0$，若$f(x+h)=f(x)+f'(x+\theta h)h$ $(0<\theta<1)$，证:$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$

例题 3 $f(x)$有$n+1$阶连续导数，若$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\dfrac{f''(a)}{2}h^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n$ $(0<\theta<1)$，且$f^{(n+1)}(a)\neq 0$，证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$

例题 4 $f(x)$有n阶连续导数，$f^{(k)}(x_0)=0(k=2,3,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h)$，其中$0<\theta<1$，证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$

小知识 众所周知，常规的罗尔定理需要“闭区间连续，开区间可导”，但是我们可以对其进行推广，让它在开区间甚至无穷区间也成立。对于有限开区间上的罗尔定理，我们只需要在端点处补充定义，即可将开区间转化为闭区间；对于无限区间上的罗尔定理，我们需要通过变量代换（一般是正切换元），将无限区间转化为有限区间。这两种操作的本质都体现了“化归思想”。所谓化归思想，指的是通过一定的操作转化，让新问题转化为曾经解决过的旧问题。化归思想是最为重要的数学思想方法之一。

下面，我们利用这种操作方法，来解决**广义罗尔定理**的证明吧！（证明之前可以先想一下图像，很直观）

例题 1 (1) 设$f(x)$在(a,b)可导，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$

(2) 设$f(x)$在$[0,+\infty)$可导，且$f(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，证明：$\exists\xi\in(0,+\infty)$，使得$f'(\xi)=0$

注 1：将无限区间转化为有限区间时的变量代换，不一定非要是正切换元，但它是最常用的一种；

注 2：广义罗尔定理并非只有理论上的价值，事实上，在很多证明题中都可以看到它的身影，下面请看两道最经典的例子。

例题 2 $f(x)$在$[0,+\infty)$可导，且$0\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{x}{1+x^2}$，证明：$\exists\xi>0$，使得$f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$

例题 3 $f(x)$在$[0,+\infty)$可导，$f(0)=1$，且$|f(x)|\leqslant e^{-x}$，证明：$\exists\xi>0$，使得$f'(\xi)+e^{-\xi}=0$

罗列至此，中值定理证明题的常见题型和解题方法已经全部覆盖了。（至于 K 值法，我以后会重新开个视频单独讲解，大家不用急）

大家一定要好好的研究这份讲义以及配套的 B 站视频。我相信，**只要真的吃透了这份讲义，任何一本考研辅导书中的中值定理证明题都如同探囊取物。**

最后，让我们以 2020 年的一道真题作为全篇的收尾。该题本身的难度并不算大，但是作为考研题来说确实有点“过分”了，这道题绝对是考研历史上最难的中值定理证明题，没有之一。前面讲的所有套路全部失效，只有“具体问题具体分析”才是真正的核心。

(2020) $f(x)$在$[0,2]$连续可导，$f(0)=f(2)=0$，记$M=\max|f(x)|$，证明：

(1) 存在$\xi\in(0,2)$，使得$|f'(\xi)|\geqslant M$

(2) 若对$\forall x\in(0,2)$，均有$|f'(x)|\leqslant M$，则$M=0$

注：本题的第(2)问，本质是证明$f(x)\equiv 0$，这种问题可以称为“函数归零问题”。事实上，函数归零问题的出题角度非常多，里面不乏各种优秀的题目，如果有空的话我会做一个合集进行专门的讲解，此处从略。

后记

想讲的题目还有太多太多，但限于篇幅，只好忍痛割爱、就此停笔。

回顾整份讲义，其实很多细节都存在着不足，很多文字表达也不算清晰，不同题目之间的过渡也并不自然。我本想再打磨打磨，但是承诺的讲课时间已经临近，老拖下去也不是个办法。所以，请原谅我将这份不成熟的讲义展现给了大家；但是我相信，你们的反馈会让她日趋完美。

在讲完中值定理以后，可能我又要匆匆开始不定积分计算、定积分计算、积分不等式等专题的编写。我很想将这些美妙的知识和题目呈现在大家眼前，但又总怕自己能力有限、误人子弟。我在 B 站的视频也总是删了又讲、讲了又删，反反复复。作为既非数学系又非师范生的我，深知自己专业水平的不足，所以唯有在讲课上多花功夫，才对得起大家对我的信任和期待。

讲课，曾经是我的兴趣，后来逐渐变成了热爱，直到现在，它成了我的信仰。我非常感谢讲课这件事情，它让我不再浑浑噩噩，让我终于找到了自己存在的意义。曾经的我，没有任何的人生目标，总觉得“长路漫漫”，我还有很多的时间可以挥霍；现在的我，终于找到了真正热爱的事，才恍然发觉人生太短，甚至不够我做好这一件事。我希望在有限的生命中，我可以讲出更多精彩的课程；我自知自己没有什么创新的才能，所以我只有尽自己最大的努力，将几百年前就早已存在的经典知识/题目稍作整理，讲给大家听——也许，这就是我人生的意义吧。

最后，希望大家也能找到自己热爱的事情，共勉！

凯哥

2021 年 4 月 10 日

成都

NO.4-1 不定积分解题方法（上）

——有理函数和三角有理函数的积分

主讲人：凯哥

不定积分是很多同学在复习考研数学时的一个拦路虎，这是因为不定积分的题目解法众多，并且不易总结。

很多同学向我反映（以下都是真实的反馈）——

“凯哥，不定积分的题目，怎么一个题目一个方法啊，感觉根本没有固定方法，这可怎么办啊？”

“凯哥，三角函数的各种积分，各种变形简直太灵活了，完全想不到啊！”

“凯哥，我拿到一个不定积分题目以后，要么不知道如何下手，要么就在草稿纸上瞎做，把一个很简单的积分题越算越复杂，算到最后直接放弃了”。

……

为了解决广大学子提出的这些疑惑，我仓促间编写了这份讲义，取名为《不定积分解题方法大全（共3讲）》。这是第 1 讲的讲义，主要内容为“有理函数的积分”和“三角有理函数的积分”，其中虽然也会用到一些换元法和分部积分法，但它们并不是这一次课的重点，只是解题过程中避不开的一些操作而已。我们会在第 2 次课详细介绍考研数学中的换元法和分部积分。

总之，你只要配合我的视频，把本讲义（共 3 讲）的题目全部吃透，对付考研的不定积分如同探囊取物。

套路一 有理函数的积分

（一） 有理函数积分的通用方法

当遇到题目是有理函数的积分时，我们一般采用有理函数积分的标准解法——“裂项+待定系数法”，对于某些特定有理函数的积分，也许有更加“巧妙”的方法，我们后面的例题也会涉及；但是希望大家不要过于追求这种巧妙的解法，还是应当以基本方法为主；

至于裂项的时候怎么裂，这是很多同学一直都搞不懂的问题，我简要总结如下——

我们将有理函数从宏观上分为真分式和假分式，而任何一个假分式都可以通过多项式的除法变成多项式与真分式之和，由于多项式的积分是简单的，所以解决有理函数的积分，本质上就变成了解决有理真分式的积分。

而对于真分式的积分，我们有如下**固定套路**——

Step1 将该真分式分母进行因式分解(一直分解到无法再分解为止)；

Step2 然后进行裂项，裂项的原则为——

①只要分母中含有$(x-a)^k$，则裂项后的式子中一定含有$\dfrac{A_1}{x-a}+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\dfrac{A_k}{(x-a)^k}$；

②只要分母中含有$(x^2+px+q)^k$(注:因为已经分解到不能再分解了，所以这里的$p^2-4q<0$)，则裂项后的式子中一定含有$\dfrac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^1}+\dfrac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\dfrac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}$

Step3 将裂项以后所得的所有项进行通分，根据“通分后的分子与原被积函数的分子的对应系数相等”的原则，列出待定系数满足的方程，然后解出待定系数。这样，就将真分式分解成了各个基本分式之和。

Step4 对于①中所得到的的一系列基本分式，它们的积分十分容易；

对于②中所得到的一系列基本分式，其计算稍微复杂一点，但其实所有形如$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x$的积分，求解也有通用方法；尤其是在考研范围内，分母中的k要么为 1，要么为 2，不可能更高，所以我们只需要把$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$和$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$的计算学会就可以了。我们在下面的例题 1 和例题 2 中，会详细介绍这两个积分的计算方法。至此，整个有理函数的积分便已找到了一个完善的方法。

总之，通过裂项，最终会归结于计算$\int \frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x$、$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$和$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$的三类积分。

例题 1 $\int \frac{x+3}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$

注：通过该题，可以总结出一切$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$的积分，其套路为“改造分子，拆分为两个积分，其中第一个积分直接凑微分，第二个积分配方后套公式即可”。

例题 2 $\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$

提示：三角换元当然可行，下面的类题也是如此，大家可以尝试一下。但是，本题是否有其它方法？

再提示：分母次数太高了，有没有什么办法可以降低分母的次数呢？（答：分部积分!）

类题 $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$

注 1:通过以上 2 题,可以推出所有 $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$ 的积分的计算方法,如计算 $\int \frac{x+2}{(x^2+2x+10)^2}\mathrm{d}x$。其方法可以总结为:“改造分子、拆分为两个积分➞对分母配方、换元➞归结于计算 $\int \frac{1}{(a^2+t^2)^2}\mathrm{d}t$”;

注 2：思考，所有形如 $\int \frac{x^2}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$ 的积分，又该如何计算？

至此，$\int \frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x$、$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$ 和 $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$ 这三类积分的求解方法我们都已经学会，铺垫已大功告成。所以，对于一切有理函数积分，我们都已经找到了完整的解题套路。下面看几道典型的例题

例题 3 $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$ (此为 2019 年的一道 10 分大题，居然只有一个考点，出题人真是极其无聊)

例题 4 $\int \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$

例题 5 若不定积分$\int \frac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$的结果中不含反正切函数，求$a$

（二） 有理函数积分的特殊解法

从理论上而言，一切有理函数积分都可以用上面的待定系数法去硬肛，但是，通法不一定是最优解法，待定系数法的工作量往往很大。很多有理函数的积分都有着自己独特的解法，这些解法不能一概而论，需要我们仔细分析被积函数的结构，**具体问题具体分析**。大家一定要记住，学数学是一个“积累”的过程，下面的很多解法都比较灵活，但希望大家不要产生畏难情绪。

例题 6 $\int \frac{1}{1-x^4}\mathrm{d}x$

注：我们在进行有理函数积分时，有时候会**根据分母的形式，去改造分子**，同样可以实现“裂项”的目的。

类似的题目还有以下几道——

类题 1 $\int \frac{1}{x^{8}(1+x^{2})}\mathrm{d}x$

注：本题用倒代换$x=\frac{1}{t}$也可以做，大家可以尝试一下。（倒代换一般适用于分母的次数远高于分子时）

类题 2 $\int \frac{1+x^{4}}{1+x^{6}}\mathrm{d}x$ (一道神仙题，最后一步侮辱智商)

类题 3 $\int \frac{1}{x(x^{3}+27)}\mathrm{d}x$

例题 7 $\int \frac{1+x^{2}}{1+x^{4}}\mathrm{d}x$

注 1：本题非常经典，其解法颇具特色。通过这个题目，我们可以解决所有形如$\int \frac{1\pm x^2}{1+kx^2+x^4}\mathrm{d}x$的积分；

注 2：本题也可以对$1+x^4$强行因式分解，变为$1+x^4=(1+x^2)^2-2x^2=\left(1+x^2+\sqrt{2}x\right)\left(1+x^2-\sqrt{2}x\right)$，但是该解法在裂项后计算系数时运算量太大，不太理智。

类似的题目还有以下几道——

类题 1 $\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$

注：利用以上两题，我们可求出积分$\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x+\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x\right]=\cdots$

类题 2 $\int \frac{1}{1+x^6}\mathrm{d}x$

特别声明：例题 7 以及两个类题，在恒等变形时，制造出了无定义点，导致积分出来的函数并不连续。我在 2020 年 12 月 9 日发布了一个视频，指出了这种解法的漏洞。该视频一出，引起了非常大的争议，很多人觉得这个视频是哗众取宠。其实，从严谨性上来说，确实需要通过视频里的方法补充定义，使得积分出来的函数连续才行——这是原函数的定义所要求的；但根据笔者调研的大量文献、教材、辅导书发现，很多时候书中用的都是这个有点瑕疵的解法。所以，笔者现在认为，很多时候，我们会为了“简便性”而牺牲一些“严谨性”，这是一种让步和妥协，而不是一种完全的错误。当然，从学术角度来说，确实是需要补充定义使积出来的函数连续才行，只是如果每个题都考虑这个问题的话，工作量就太大了，尤其是后面的三角有理函数积分。毕竟，很多时候，不定积分只是为定积分服务的——如果是在定积分的积分区间内部存在无定义点，那么则需要分段

使用 N-L 公式，然后将这些积分加起来；如果是不定积分以后的结果存在无定义点，就睁一只眼闭一只眼吧。

套路二 三角有理函数的积分

（一） 三角有理函数积分的通用方法

一切三角有理函数的积分，只需利用万能公式，令$\tan(x/2)=t$，就总能将三角有理函数的积分化为有理函数的积分。而由于一切有理函数的积分方法我们都已经学会，所以——“从理论上来说”，三角有理函数的积分本身并没有本质上的困难；但就像前文所述，通法并不一定是好方法，利用万能公式计算三角有理函数的积分是下下策，因为这种解法的计算量往往会很大，尤其是被积函数的次数太高时，计算量是不可想象的。

所以，我们常常希望避开万能公式去求解三角有理函数的积分。当然，为了不出现知识盲区，我们还是以两道题目为例，来展示一下三角有理函数的万能公式解法。

例题 1 $\displaystyle\int\frac{1}{3+5\cos x}\mathrm{d}x$

例题 2 $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

（二） 三角有理函数积分的特殊解法

我们一般都是具体问题具体分析，灵活使用三角函数的各种恒等变形和凑微分技巧，达到快速求解的目的。总的来说，有以下几个小技巧——

(1) 擅于使用“缩分母”技巧

如果分母为$1+\cos x$或者$1+\sin x$，那么我们可以尝试分子分母乘以共轭表达式，使分母从两项变为一项，达到“缩分母”的效果。因为，对于一个不定积分而言，如果分母项数太多，将是非常难于处理的；而如果分母只有一项，分子就算有很多项相加，我们也可以将整个积分拆分成若干个小积分，分别计算即可。所以，“缩分母”是一个很重要的思想。当然，除了乘以共轭表达式以外，还可以利用$1+\cos x$的二倍角公式，也能达到缩分母的效果。

例题 3 $\int \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

类题 1 $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$

提示：本题可以分子+1-1 然后拆开，然后转化为上一题；也可以直接分子分母乘以$1-\sin x$。

类题 2 $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

注： 辅助角公式$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$虽然用的频率不高，但是也需要记住，偶尔会产生奇效。

类题 3 $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

(2) 若$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，若$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可将$\cos x$凑到d后面，变出$\mathrm{d}\sin x$

例题 4 $\int \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos x}\mathrm{d}x$

例题 5 $\int \frac{\cos^3 x-2\cos x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}\mathrm{d}x$

例题 6 $\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x$

注：本题除了利用$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$外，还可以使用分部积分，然后出现积分重现，即可解出我们需要的$\int\sec^3 x\,\mathrm{d}x$了。利用这个思想，我们解决下面两个类题——

类题 1 $\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

类题 2 请思考如何计算积分$I_n=\int\sec^n x\,\mathrm{d}x\,(n\geqslant 3)$

提示：分奇偶，$I_{2n}=\int\sec^{2n}x\,\mathrm{d}x$直接凑$\mathrm{d}\tan x$，很简单；$I_{2n+1}=\int\sec^{2n+1}x\,\mathrm{d}x$的计算方法和$\int\sec^3 x\,\mathrm{d}x$类似，也是“分部积分+积分重现”，然后得到$I_{2n+1}$和$I_{2n-1}$之间的递推关系。大家可以利用这个思想去计算一下$\int\sec^4 x\,\mathrm{d}x$和$\int\sec^5 x\,\mathrm{d}x$。

类题 3 请推导出积分$I_n=\int\tan^n x\,\mathrm{d}x$ $(n\geqslant 2)$的递推公式

类题 4 请推导出积分$I_n=\int \sin^n x\,\mathrm{d}x\ (n\geqslant 2)$的递推公式

类题 5 根据类题 4 的结论，可推导出定积分中大名鼎鼎的“点火公式”——

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{ 为奇数}\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

(3) 若$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，若$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可将$\sin x$凑到d后面，变出$\mathrm{d}\cos x$

注： 这种情况和上面的情形类似，所以只用两个简单的例子作为说明即可。

例题 7 $\int\dfrac{1}{\sin x\cdot\cos^2 x}\mathrm{d}x$

例题 8 $\int \frac{5+4\cos x}{(2+\cos x)^2 \cdot \sin x} \mathrm{d}x$

(4) 若$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$，若$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$，则可想办法制造出$\sec^2 x\mathrm{d}x$，凑出$\mathrm{d}\tan x$。我们有时候喜欢分子分母同时除以$\cos^2 x$，使分子出现$\sec^2 x\mathrm{d}x$，就是这个原因。

例题 9 $\int \frac{1}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x$

例题 10 $\int \frac{1}{(3\sin x + 2\cos x)^2} \mathrm{d}x$

例题 11 $\displaystyle\int \frac{1}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$

例题 12 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}\mathrm{d}x$

注：如果把被积函数中的分子分母颠倒，改为$\displaystyle\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \mathrm{d}x$后，虽然也可以凑$\mathrm{d}\tan x$，但后续操作并不容易（当然，也能做）；但是若能灵活地使用二倍角公式，变为$\displaystyle\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \cdot \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$，则后续操作会容易很多。这再一次体现了不定积分特别容易出现一题多解的情况，希望大家具体问题具体分析。

例题 13 $\displaystyle\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$

(5) 对于形如$\int \frac{A\sin x + B\cos x}{C\sin x + D\cos x}\mathrm{d}x$的积分，我们一般假设“分子$=p\cdot$分母$+q\cdot$(分母)$'$”，解出$p$和$q$即可；

例题 14 $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$

注：本题当然也可以归结于$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$的类型，然后凑$\mathrm{d}\tan x$，同一个题有很多解法。

(6) 当被积函数中出现不用角度的三角函数时，我们一般先用倍角公式统一角度；

例题 15 $\int \frac{1}{\sin x\cdot\sin 2x}\mathrm{d}x$

例题 16 $\int \frac{\cos 2x - \sin 2x}{\sin x + \cos x}dx$

(7) 对于形如$\int \sin ax \cdot \sin bx \, dx \, (a \neq b)$之类的题，我们可以直接采用积化和差公式，一步秒杀。

例题 17 $\int \sin 2x \cdot \sin 3x \, dx$

(8) 要善于使用二倍角公式处理三角有理函数的积分——当然，很多用到二倍角公式处理的题，本质上和使用万能公式换元没有区别，只是省略了换元的步骤而已，请大家自行体会这句话；

例题 18 $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$

类题 1 $\int \frac{1}{\sin x \cdot \sin 2x} dx$

类题 2 $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x} dx$

(9) 有些题，我也不知道归为哪一类，总之，具体问题具体分析，才是最核心的思想

例题 19 $\displaystyle\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

例题 20 $\displaystyle\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$

例题 21 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^6 x+\cos^6 x}\mathrm{d}x$

例题 22 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}\mathrm{d}x$

注：本题涉及到了三角有理函数的裂项，它们没有通法（或许是我不知道），只有观察式子结构，不断尝试，类似的还有下面这道题。

例题 23 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\mathrm{d}x$（其中$\sin(a-b)\neq 0$）

罗列至此，有理函数和三角有理函数积分的题型基本已经全覆盖了，希望大家在听课以后自己再独立地做两三遍这份讲义，那么这一块的内容你就完全没有任何问题了。

下一次课，我们讲的是“换元法+分部积分法”，这两个方法占据了考研数学不定积分的半壁江山。

凯哥

2021 年 5 月 17 日

成都

NO.4-2 不定积分解题方法（下）

——换元法、分部积分、综合题

主讲人：凯哥

套路三 换元法的基本套路

换元法最重要的作用就是“打开局面”。在做积分题时，只要我们选择恰当的换元，就可以让一些看似很复杂的积分变得非常的简洁。尤其是在处理带有根式的积分时，常常会使用换元法。

(1) 整体换元

一般来说，只要见到被积函数中出现了“$\sqrt{\text{一次函数}}$、$\sqrt{\dfrac{\text{一次函数}}{\text{一次函数}}}$、$\sqrt{e^{ax}+b}$、$\sqrt{\dfrac{e^{ax}+b}{e^{ax}-b}}$”，可以直接将整个根号令成$t$，达到消去根号的作用。

当然，值得指出的是，这个方法虽然肯定可行，但并不一定是最简单的方法。我们拿到一个题目以后，也要学会具体问题具体分析，寻找最适合那个题目的解法。

例题 1 $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$

注：换元以后不要把dx解出来，而应该直接分部积分。因为如果把dx具体计算出来的话，反而会升高分母的阶，导致整个积分的次数特别高。这个思想我们在后面的**一道真题**中也会用到，请大家先留个心眼。

类题 1 $\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$

类题 2 请计算$\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ 和 $\displaystyle\int\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)dx$ 两个积分

注：换元法固然可行，但请思考，本题有没有简便方法？（提示：分子有理化，然后裂开，折成 2 个积分）

类题 3 $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-2}}\mathrm{d}x$

类题 4 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}\mathrm{d}x$

注： 本题如果是第一次做，想不到很正常。(本题是同济版高等书教材的课后习题)

例题 2 $\int \frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

注： 为了同时消去 $\sqrt[3]{x}$ 和 $\sqrt{x}$ 的根号，很明显需要令 $x=t^6$。这说明我们在换元的时候，不要拘泥于具体的形式，而应该具体问题具体分析。总之记住一点——换元的目的是简化被积函数，是为了打开局面！下面是一个类似的题目。

类题 $\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{6}}}\mathrm{d}x$ (提示：令 $\mathrm{e}^{\frac{x}{6}}=t$，然后转化为有理函数的积分)

(2) 三角换元

如果在被积函数中出现了“$\sqrt{二次函数}$”，则一般采用三角换元，具体而言又分为以下几种情况：

1) 若根号里面没有一次项，只有平方项和常数项：

① 形如“$\sqrt{a^2-x^2}$”，则令$x=a\sin t$；

② 形如“$\sqrt{a^2+x^2}$”，则令$x=a\tan t$；

③ 形如“$\sqrt{x^2-a^2}$”，则令$x=a\sec t$；

(注：有时候不一定非要出现根号才用三角换元，如：$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$，也可以利用三角换元+二倍角处理)

2) 若根号里面含有一次项，则需先对根号里面的二次函数配方，消去一次项后，便转化为了上面的问题；

下面的这几道例题，**我故意选得比较简单**，自己在草稿本上演算即可。因为我们这份讲义的重头戏在后面，所以前面这些基础的内容只进行简要的回顾即可。

例题 3 $\int\frac{1}{x^4}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

提示：令$x=2\sin t$，即可转化为三角有理函数积分。

例题 4 $\int\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$

提示：令$x=\tan t$

例题 5 $\int\frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}dx$

提示：先配方，变形为$\int\frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\mathrm{d}x$，再令$x-2=2\sin t$

例题 6 $\int x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$

提示：先配方，变形为$\int x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int x\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$，再令$x-1=\sin t$

例题 7 $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

总结：令$x=\sec t$当然可以做，但其实本题可以归为一种模型——一切可化为$\int\frac{1}{(x+d)\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$

和$\int\frac{1}{(x+d)^2\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$的不定积分，都可以先用倒代换$x+d=\frac{1}{t}$，将被积函数大大简化后再积分。

现在，我们以两个最典型的例子作为演示，如下：

类题 1 $\int\frac{1}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}\mathrm{d}x$

类题 2 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{2x^2+2x+1}}\mathrm{d}x$

至此为止，我们的换元法就讲到这里。

套路四 分部积分法的基本套路

见到不同种类函数相乘，一般要用分部积分公式，$\displaystyle\int u\,\mathrm{d}v = uv-\int v\,\mathrm{d}u$。分部积分的使用原则如下：

(1) 口诀：按照“**对反幂三指**”的顺序，谁排在后面，就把谁凑到微分符号d后面去，然后分部积分；

(2) 思想：我们之所以有上述口诀，其本质是因为——“对/反”这两类函数“很怕求导”，这俩一旦求导，就不再是这两类函数了，也就是说，求导会将它们“瓦解”。既然它们怕求导，那我们就要想办法对它们求导，那么怎么才能对它们求导呢?那当然是把除了“对/反”这两类函数以外的其它函数，凑到微分符号d后面去，然后分部积分，因为分部积分以后，会交换u和v的位置，而$\mathrm{d}u$就相当于是对u在求导了；同理，当指数函数和幂函数相乘，为什么要把指数函数凑到d后面去?因为幂函数怕求导，指数函数完全不怕。

总之——谁怕求导，我们就要想办法对谁求导，所以就要将其余部分凑到d后面去！

例题 1 $\displaystyle\int x\cdot\arctan x\,\mathrm{d}x$

注：在分部积分时，要善于在d后面增减一个恰当的常数，使得分部积分以后的式子更加简洁。

类题 $\displaystyle\int x\cdot\ln(1+x^2)\cdot\arctan x\,\mathrm{d}x$

例题 2 $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$，

注：当被积函数为指数函数和三角函数相乘时，我们需要连续两次分部积分，出现“积分重现”以后，问题才得以解决，并且需要注意——这两次分部积分，每一次凑到d后面的函数，必须是同一种类的函数，否则会原路返回。

类题 $\int x \cdot e^{x} \cdot \sin x \, dx$

例题 3 $\int \ln^{2}\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right) dx$

套路五 换元法+分部积分

换元以后，紧接着一步分部积分，是考研中比较常见的出题风格，大家一定要对这种题目特别熟练！而且大家一定要记住，当我们预判出某一个题既要换元，又要分部积分的时候，**我个人的建议是**先用换元法，因为**换元法是用来打开局面的**，换元以后，会让你的整个被积表达式看起来更加的“清爽”，有利于后续的操作。

下面，请看几道针对性的例题。

例题 1 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^{x}-1}\,dx$ (该题是 2018 年考研数学大题，明明毫无难度，但得分率并不高)

类题 1 请计算 $\int \frac{x \cdot e^{\arctan x}}{(1+x^{2})^{\frac{3}{2}}} dx$ 和 $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^{2})^{\frac{3}{2}}} dx$ (考研真题

类题 2 $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

类题 3 请计算$\int \frac{\arctan\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x-1}}dx$和$\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}dx$

例题 2 $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx$ （考研真题）

特别注意：本题换元以后不需要解出dx，即——在换元以后，宜直接进行分部积分，以消去对数符号。若按照平时的做题习惯，解出$x=\frac{1}{t^2-1}$后，将dx具体计算出来，再代入被积表达式，那么接下来的计算，就反而更加繁琐了。类似的题目还有以下几道——

类题 1 $\int \arctan\left(1+\sqrt{x}\right)dx$

类题 2 $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

套路六 利用分部积分，对分母进行降阶

如果分母的次数太高，我们除了可以利用倒代换进行降阶以外，还可以利用分部积分进行降阶。在具体操作时，最核心的步骤就是"想办法将分母凑到d后面，然后分部积分"。

比如我们在第一次课讲过的 $\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$，就是利用这个了这个思想。下面请看一些类似的典型例题。

例题 1 $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

类题 1 $\int \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$

类题 2 $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$

以上三个题目，将分母凑到d后面去是非常容易的。下面，我们再来看一个难一点的例题，它需要用到"强制凑微分"的技巧，但是其核心思想仍然是"利用分部积分，对分母进行降阶"。

例题 2 $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$

例题 3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$

注： 本题在 2020 年 9 月 3 日已经讲过，请大家在 B 站关注“**考研竞赛凯哥**”，查看本题的视频讲解。

套路七 利用分部积分，实现“积分抵消”

有些题目，需要把一个积分拆成两个积分，其中一个积分 I_1 暂时不动，另一个积分 I_2 使用分部积分，而分部积分后得到的新积分，刚好和 I_1 相互抵消。这种题，被积函数中“一般”都含有指数函数 e^x（并且一定含有）。

例题 1 $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

注： 本题的题源其实非常简单，即 $\displaystyle\int \mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]\mathrm{d}x$。对于这个积分，当然可以拆开以后，利用“分部积分+积分抵消”的思想来做，但是如果还记得基本公式 $[\mathrm{e}^x f(x)]'=\mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]$，那么这类题我将绝杀。

类题 1 $\displaystyle\int \frac{(1+\sin x)\mathrm{e}^x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

类题 2 $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}x$

类题 3 $\int \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$

注：前面 4 个题目，被积函数中全都含有e^x，不禁让人联想——难道“分部积分+积分抵消”的思想，只能用在被积函数出现e^x的情形吗？ 其实也不尽然，有的题目，被积函数中出现的是$\mathrm{e}^{f(x)}$，也可以尝试这个方法。请看下面的几个例题。

例题 2 $\int \frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\cdot\sin 2x}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x$

注：本题十分综合，如果是几天前，可能这题我们难以下手；但是，经过两三次课的洗礼，以我们现在的功力来看，本题不过是一道送分题。所以，把我的不定积分讲义和视频吃透，足够你应付任何一本辅导书中的不定积分计算题。

例题 3 $\int \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$

类题 1 $\int \mathrm{e}^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

注：此题表明，有时候需要对两个积分同时使用分部积分，使得分部积分以后的两个新的积分相互抵消。

类题 2 $\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$

注： 以上几个题，要么含有e^x，要么含有$e^{f(x)}$，但事实上，“分部积分+积分抵消”思想的应用范围远不止如此。很多题目没有出现指数类的函数，但也能用这个思想，请看下面几道题目。

例题 3 $\int\left(\ln\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)dx$

例题 4 已知$f''(x)$连续，$f'(x)\neq 0$，求$\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3}\right]dx$

例题 5 $\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$

注： 很多考研辅导书都有此题，但标准答案的解法和我并不相同。标答的解法，我会在下一个套路讲解。

套路八 对复杂因子求导，期待出现奇迹

有时候，当被积函数中的某一部分，出现了一个比较复杂的“整体”时(这个整体一般来说是一个复合函数或者两个函数的乘积)，那么我们可以尝试对这个整体求求导，看一下它的导函数有什么特点(比如这个整体求导以后的函数，会不会刚好是被积函数的分子呢?)，这便于我们后续的凑微分等操作。

例题 1 $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+[x(\ln x-1)]^2}}\mathrm{d}x$

例题 2 $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x$

类题 $\displaystyle\int \frac{1+x\cos x}{x(1+x\mathrm{e}^{\sin x})}\mathrm{d}x$

注 1：其实通过上面的例题 2 和类题，我们甚至可以自己总结出一个**出题模板**，如下——

$$\int \frac{1+xf'(x)}{x(1+x\mathrm{e}^{f(x)})}\mathrm{d}x=\int \frac{[1+xf'(x)]\mathrm{e}^{f(x)}}{x\mathrm{e}^{f(x)}(1+x\mathrm{e}^{f(x)})}\mathrm{d}x=\int \frac{[x\mathrm{e}^{f(x)}]'}{x\mathrm{e}^{f(x)}(1+x\mathrm{e}^{f(x)})}\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x\mathrm{e}^{f(x)}}{1+x\mathrm{e}^{f(x)}}\right|+C$$

如果取定 $f(x)=\arctan x$，代入出题模板，稍作变形，即可原创一道题目 $\displaystyle\int \frac{1+x+x^2}{(1+x^2)(x+x^2\mathrm{e}^{\arctan x})}\mathrm{d}x$，

要不，拿去考考你的研友？

注 2：下面的题目，难倒了很多的考研学生，很多人即使看了答案也不知道为何要那么做。现在，请将下面的题目，和上面的两个题做对比，猜测每个题的第一步应该如何操作，就可以将下面这些难题转化为上面的题型（或者类似的题型）。

例题 3 $\displaystyle\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$

注：其实，如果稍微敏感一点的话，我们看到 $1-\ln x$ 的时候，就应该想到 $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'$ 了，就如同看到 $1+\ln x$ 就可以联想 $(x\ln x)'$ 一样。

类题 1 $\int \frac{e^x(x-1)}{(x-e^x)^2}dx$

类题 2 $\int \frac{x+\sin x\cdot\cos x}{(\cos x-x\cdot\sin x)^2}dx$

好了，差不多了，能讲的基本讲完了。恭喜你，出师了。

凯哥

2021 年 5 月 20 日

成都

NO.5-1 定积分的区间再现公式

主讲人：凯哥

在定积分的各种计算技巧中，最重要的技巧之一就是“区间再现公式”。

所谓区间再现公式，指的是$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$，该公式的证明非常简单，只需使用简单的换元即可；但就是这个简单的公式，却蕴含着巨大的能量。

本讲义就是对区间再现公式进行了一个全面且细致的剖析，包括区间再现公式的证明、几何意义、使用方法、典型例题。大家只要吃透了这份讲义，区间再现公式这个大杀器你就彻底掌握了！本讲义的所有题目，我均在B站进行了详细的讲解，请关注B站用户——考研竞赛凯哥，观看配套视频。

（一）区间再现公式

例题 1 (1) 证明区间再现公式——$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$

(2) 尝试从几何意义去理解区间再现公式，并推测为何$\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$往往比$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$要更加好算；

(3) 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$，验证你在(2)中的猜想。

例题 2 计算$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{\alpha}x}\mathrm{d}x$（$\alpha$为常数）

类题 $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^{2})(1+x^{\alpha})}\mathrm{d}x$

注:对于一些原函数比较难求，甚至没有初等原函数的积分，利用 N-L 公式已经不可能。如果连对称性和点火公式之类的都无法使用时，我们还可以使用区间再现公式进行尝试，有可能会产生“奇效”，这是考研中的常用技巧。值得注意的是，区间再现公式用完以后，往往是把两个积分加起来除以二再进行计算，在这个过程中，可能会对被积函数进行一些恒等化简，很多同学之所以最后没做出来下面的积分题，很大程度上是因为没有看出这些恒等变形。

类似的题目非常多，下面是我筛选出的一些经典例题。

例题 3 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\arctan e^{x})\cdot\sin^{2}x\,\mathrm{d}x$

类题 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^{-2x}} \mathrm{d}x$

例题 4 $\int_{-2}^{2} x \ln(1+\mathrm{e}^x) \mathrm{d}x$

例题 5 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)} \mathrm{d}x$

例题 6 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos x} \mathrm{d}x$

提示：请思考一切形如$\int \frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)} \mathrm{d}x$（其中$\sin(a-b) \neq 0$）的积分应该如何计算

例题 7 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x \, dx$

类题 1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} dx$

类题 2 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot \ln\cos x}{1+\sin x+\cos x} dx$ （套娃题）

例题 8 计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ 和 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx$

例题 9 计算$\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x$

类题 设$a_n=\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x$，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=$___ （仅数一、数三）

例题 10 $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-x+1}}\mathrm{d}x$

例题 11 $\int_0^1 x\cdot\arcsin\left(2\sqrt{x-x^2}\right)\mathrm{d}x$

特别提醒：之前讲的区间再现公式，都是将两个积分相加再除以二，从而将原积分简化。但事实上，有些题目，只需用一次区间再现，无需相加，就可以直接将积分简化。这样的题不是很多，请看下面几个典型例题。

例题 12 计算积分$\int_0^1 (1-x)^{100} x \,\mathrm{d}x$

注：对于$\int_a^b x^m (a+b-x)^n \,\mathrm{d}x$（$m,n$为正整数），若$m$较小，$n$较大，都可以利用区间再现"转移矛盾"。

例题 13 计算积分$\int_0^2 x(x-1)(x-2) \,\mathrm{d}x$

注：本题可以区间再现，也可以先做平移换元，构造对称的积分区间$\int_{-1}^1 (t+1)t(t-1)\mathrm{d}t$，从而利用奇偶性得出积分为 0。其实后面这种方法，本质是利用了"广义奇偶性"，主要是观察到被积函数的对称中心的横坐标恰好为积分区间的中点，所以通过平移变换即可立即将广义奇偶性变成普通奇偶性。

类题 计算积分$\int_0^{2n} x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\cdots[x-(2n-1)](x-2n) \,\mathrm{d}x$

（二）由区间再现导出的另一个重要公式

由区间再现公式，可以推导出一个非常经典的公式——设$f(x)$连续，则$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$，关于该公式，有一些非常常见的使用误区，我会单独开一个文档，介绍这个公式，此处暂时从略。

凯哥

2021 年 6 月 8 日

成都

NO.5-2 定积分计算（上）

主讲人：凯哥

定积分的计算依赖于不定积分的计算，其基本方法是利用 N-L 公式——$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$，即算出$f(x)$的原函数$F(x)$后，在区间$[a,b]$的端点上作差即可。

但是，一个函数“在区间$[a,b]$上可积”与“在区间$[a,b]$上存在原函数”是两个截然不同的概念。

有些函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，但是却不存在原函数；

有的函数$f(x)$在区间$[a,b]$上存在原函数$F(x)$，但是却不可积。

所以，利用 N-L 公式计算定积分的前提是——函数$f(x)$在区间$[a,b]$上不仅存在原函数，而且还可积。

显然，对于那些可积却又不存在原函数的函数$f(x)$，在求其定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$时，无法使用 N-L 公式。并且，即便一个函数$f(x)$既存在原函数，也可积，但是其**原函数很有可能不是初等函数**（通俗一点来说，指的是这种函数的原函数$F(x)$理论上是存在的，但是你求不出它的具体表达式，比如$\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$、$\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$之类的），所以虽然 N-L 公式理论上是成立的，但是却无法用其进行定积分的计算。（因为$F(x)$的表示你都求不出来）。

基于以上种种原因，我们需要找到一些其它的方法来计算定积分的值，常用的技巧有如下几个——

(1) 利用定积分的几何意义。如计算$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$ （若不用几何意义，应如何计算?）；

(2) 利用奇偶性简化计算，即——“若$f(x)$为奇函数，则$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$；若$f(x)$为偶函数，则$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$”。如计算$\int_{-1}^1\sin^2 x\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$和$\int_{-1}^1\frac{x+1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x$；

(3) 利用周期性平移和缩小积分区间。即——若$f(x)$可积且周期为T，则$\int_a^{a+nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.(其中$a$可取任意的实数)。请证明该结论，并计算$\int_2^{2+10\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$、$\int_0^\pi\sqrt{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$和$\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^1\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x$；

(4) 利用区间再现公式简化计算，即——“$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$”请证明该公式，并给出该公式的几何意义，然后计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$；

(5) 利用 Wallis 公式$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}, & n\text{为奇数}\end{cases}$，简化积分计算。该公式也被形象地称为“点火公式”。比如计算$\int_0^\pi\sin^4 x\,\mathrm{d}x$（若不用此公式，应如何计算?）；

注：请思考，$\int_0^\pi\sin^n x\,\mathrm{d}x$、$\int_0^\pi\cos^n x\,\mathrm{d}x$，$\int_0^{2\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x$、$\int_0^{2\pi}\cos^n x\,\mathrm{d}x$、$\int_{-\pi}^\pi\sin^n x\,\mathrm{d}x$等积分，又该如何计算?

(6) 利用一个常见的积分公式——设 $f(x)$ 连续，则 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$，可简化计算。

请利用区间再现公式证明本公式，并计算 $\int_0^{\pi} x\sqrt{\sin^2 x-\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$；

下面，请看配套例题——**只要你把本系列讲义吃透，任何考研书上的定积分，你都能随意秒杀。**

套路一 定积分的常规计算技巧

下面这几个题，都是比较常规的题目，要么直接利用 N-L 公式，要么利用上文中介绍的几个基本技巧。

例题 1 利用 N-L 公式，直接计算下列定积分

(1) $\int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_1^{16} \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}\,\mathrm{d}x$

注 1： 以上几道题，本质上其实就是不定积分的计算，只是多了最后一步“代入上下限”而已。

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \ln\sin x \, dx$

注 2：本题的被积函数出现了瑕点$x=0$，所以本质上其实是一个收敛的反常积分。

注 3：本题若直接采用分部积分并代入上下限，则无法成功计算出结果。解决这种 bug 的方法有两种——

① 先计算出对应的不定积分，然后整体带入上下限(此时用的是“推广的 N-L 公式”，因为最终计算的不是$F(x)$在端点处的函数值，而是极限值。比如积分$\int_0^1 \ln x \, dx$的计算，用的也是“推广的 N-L 公式”)；

② 分部积分前，巧妙在d后面加减一个恰当的常数，使得分部积分以后计算出的极限是收敛的。

例题 2 计算定积分$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$

注 1：利用 N-L 公式“$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$”计算定积分时，不要忘了$F(x)$是$f(x)$的一个<u>**原函数**</u>，既然是原函数，那就必须连续。所以，如果在积分区间的<u>**内部**</u>，存在函数$F(x)$的无定义点，是万万不能直接使用 N-L 公式的。对于这种 bug，我们的处理方法是——将积分区间从无定义点处拆开，拆分成若干个小积分之和。对于每一个小积分而言，无定义点都在积分区间的端点处，而不在区间内部。此时，对每个小积分使用“推广的 N-L 公式”，即可正确计算出积分值。（当然，也可以在计算积分之前，利用周期性和对称性，提前将无定义点从积分区间内部移出，比如$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$，也是很好的方法。）

类似的题还有$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$，请大家自己练习。

注 2：如果本题是求不定积分$\int\frac{1}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x$的话，可以不考虑变形过程中产生的无定义点。也就是说，在考场上，如果你的过程是$\int\frac{1}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sec^2x}{1+\sec^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2+\tan^2x}\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C$，通常情况下不会被扣分。虽然这个过程其实不太严谨，但是我在讲不定积分的时候就已经提过，我们偶尔需要为了“简洁性”而放弃一点点“严谨性”，这是一种让步。但是，在定积分的计算中，这种问题绝对不能让步！因为定积分的结果是一个数字，如果忽略了这个问题，那么算出来的结果都不一样，这就是大问题了！

类题 1 以下计算是否正确？为什么？如果错了，请将其更正。

$$\int_{-1}^{1}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)'\mathrm{d}x=\arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=\arctan 1-\arctan(-1)=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

类题 2 设$f(x)=\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$，计算$I=\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$

注：本题方法和前两个题类似，方法也是拆分区间，分别计算。答案为$\arctan\frac{32}{27}-2\pi$

例题 3 设$I_n=\int_0^{2\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x$，$J_n=\int_0^{2\pi}\cos^n x\,\mathrm{d}x$，请背住下列常用结论。

(1) 对于任意正整数n，均有$I_n=J_n$

(2) 当n是偶数时，$I_n=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$

(3) 当n是奇数时，$I_n=0$

注：时间有限，证明略过。本题可以直接当成结论，在考试中使用。并且，类似的结论在三角函数的积分中非常常见，只要你对几何图形比较敏感，那么利用周期性和对称性，可以一眼看出这些结论显然成立。

接下来，我们将学习一组关于三角函数定积分的计算题，这些题其实有深刻的背景，即 Dirichlet 核与 Fejer 核，在傅里叶级数中会学习到。下面我们只是讲解它在不定积分和定积分中的一些题目。

例题 4 计算$\int \dfrac{\sin 10x}{\sin x}\mathrm{d}x$

注 1：一般的，我们有如下公式——$\dfrac{\sin 2nx}{\sin x}=2\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x$ ；$\dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x}=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos 2kx$，这两个恒等式都可以在分子添项减项，然后积化和差，和分子的$\sin x$约分后得到。

注 2：利用这两个恒等式，我们可以迅速求出相应的定积分，请看下面的题目。

例题 5 计算$I_n=\int_0^{\pi}\dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x$

注：看到这儿，有人会说——"这种题，如果没见过的话，怎么可能想得到呢！考试的时候肯定不会出这么偏的题吧！" 来，我改变一下这道题的问法，就可以将此题变成一道考研风格的题目，请看我的改编——

改编：请证明：$a_n=\int_0^{\pi}\dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\pi$

注：很多人看到这个改编，心里肯定会想——"你 TM 在逗我？这题改成证明题有什么区别吗？"。其实，为了提示得更加明显一点，我已经把I_n改写为a_n了，就是想告诉你——"本题其实是一道数列题！"

仿造这个思路，我们再来看一道本题的升级版——

例题 6 若$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x$，计算$a_n$

下一个套路，我们将会对区间再现公式进行史上最为全面的剖析。在这里，我们先小试牛刀，举几个比较简单的例子，展示该公式的威力。

我在前面讲区间再现公式时已经提过，我们很少直接使用$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$来计算定积分，因为$\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$的计算并不比$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$简单多少。所以我们通常是把这两个积分相加并除以 2，得到积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$，而积分$\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$往往会比原积分好算得多。

但是——凡事都有例外，有的题目直接利用$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$就能大大的简化积分！下面是几个比较典型的例题，希望大家记住。

题 7 计算积分$\int_0^1(1-x)^{100}x\ \mathrm{d}x$

注：本题代表了一种模型——对于积分$\int_a^b x^m(a+b-x)^n\mathrm{d}x$（其中$m,n$为正整数），当$m$很小，而$n$很大时，若想将$(a+b-x)^n$展开，计算量不可想象；但利用区间再现得到$\int_a^b x^m(a+b-x)^n\mathrm{d}x=\int_a^b(a+b-x)^m x^n\mathrm{d}x$，就只需将$(a+b-x)^m$展开，计算量骤减！

例题 8 计算积分$\int_0^2 x(x-1)(x-2)\,\mathrm{d}x$

注：本题的几何意义是广义奇偶性，也就是巧妙地利用了被积函数中心对称的特点。不过这个东西，emmm，不需要深究，知道怎么算就可以了。类似的题目还有下面这道，方法一模一样，区间再现一步秒杀——

类题 计算积分$\int_0^{2n} x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\cdots[x-(2n-1)](x-2n)\,\mathrm{d}x$

最后，我们用一道看起来很复杂的题目，作为本套路的谢幕。

例题 9 $\int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|^5 x^n(1-x)^n \mathrm{d}x$

罗列至此，定积分计算的常规技巧就介绍完毕了。

在下一讲中，我们会花大量的时间专攻“区间再现公式”，精彩不容错过。

2021 年 5 月 27 日

成都

凯哥

NO.5-3 定积分计算（下）

——定积分计算中的综合题

主讲人：凯哥

第 1 次课中，我们学习了定积分计算的基本技巧——利用几何意义、奇偶性和周期性、点火公式等；

第 2 次课中，我们详细剖析了定积分计算中最重要的公式之一——区间再现公式；

第 3 次课中，我们利用区间再现证明了 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$，并对该公式进行了细致的分析；

所以，前 3 次课听完以后，整个定积分计算的基本方法已经全部介绍完毕。本讲义，主要讲授一些定积分计算中的综合题型，每一个题可能以大题的形式出现在真题中，这些题虽然不算难题，但却是考研的绝对重点！历年真题中特别喜欢考察定积分的综合计算，所以希望大家彻底吃透本讲义。

综合题型一 被积函数中含有变限积分函数的定积分计算

当需要计算的定积分的被积函数中，含有变限积分函数时，我们的处理手段有两种——

① **利用分部积分**：将被积函数中，除了变限积分以外的其余函数全部凑到 d 后面去，然后分部积分——这样就可以消掉变上限积分函数了；

② **利用二重积分**：毕竟是积分号里套积分，所以明显可以视为累次积分，然后交换积分次序即可。

例题 1 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$，计算 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ (三个方法)

类题 1 设 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$，计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

类题 2 设$f'(x)=\arctan(x-1)^2$，且$f(0)=0$，求$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

类题 3 已知函数$f(x)$在$\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]$连续，在$\left(0,\frac{3}{2}\pi\right)$内是$\frac{\cos x}{2x-3\pi}$的一个原函数，$f(0)=0$

(1) 求$f(x)$在$\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]$上的平均值　　(2)证明$f(x)$在$\left(0,\frac{3}{2}\pi\right)$内有唯一零点

注：本题是2016年的压轴题，当年很多学生连题目都没看懂——比如有的人根本不知道什么叫"$f(x)$在区间$\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]$上的平均值"，导致这题没法下笔；还有的憨憨根本就不知道函数$y=\frac{\cos x}{2x-3\pi}$没有初等原函数，妄想把积分$\int\frac{\cos x}{2x-3\pi}\mathrm{d}x$硬算出来。这说明了很多学生复习了一年了，结果连常识都没有，多么悲哀。

当然，也并非所有变限积分出现在被积函数中时，都要采用分部积分，比如下面这道经典题——

例题 2 设$f(x)$为非负连续函数，满足$f(x)\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\sin^4 x$，求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$

注：该题的思想非常不错，类似的还有下面这道题目，请大家自行练习——

类题 设$f(x)$为连续函数，且$x>-1$时，$f(x)\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+1\right]=\dfrac{x\mathrm{e}^x}{2(1+x)^2}$，求$f(x)$

综合题型二 被积函数中含有导函数的定积分计算

这种题目，只需要把导函数凑到 d 后面，然后分部积分即可。这种题过于简单，大家可以自行练习。

例题 设$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$，$f(2)=1$，$f'(2)=0$，求$\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x$

综合题型三 已知一个积分，求另一个积分

要建立两个积分的关系，我们有两种方法——

① 利用分部积分，因为分部积分会产生一个新的积分。

对于这种题目，在分部积分的时候，到底把谁凑到 d 后面去，把谁留下来，不需要在遵循“反对幂指三”之类的口诀，没用！这类题你要看清楚你要计算的积分和题干已知的积分，观察二者的区别与联系，然后去思考到底把谁凑进去才能够使两个积分之间相互转化，大家学东西的时候千万不要学的太死了！

② 换元法

例题 1 设$\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=A$，求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cdot\cos x}{x+1}\mathrm{d}x$

例题 2 已知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，求$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$、$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$、$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

注：积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$是著名的狄利克雷积分，考研学生只需要知道它收敛，且收敛于$\frac{\pi}{2}$即可，至于为什么等于$\frac{\pi}{2}$，需要用到含参积分，是超纲内容。

例题 3 设$f(x)$连续，证明：$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，其中$a>0$.

例题 4 设$f(x)$连续，证明：$\int_1^4 f\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\ln 2\int_1^4 f\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

综合题型四 利用“定积分的结果是一个数字”来求解某些待定函数的问题

一般来说，求函数表达式往往会想到建立微分方程（这确实是常规思路），但是还有一类更简单的题——$f(x)$的具体形式已经完全告诉，只是其表达式中含有一个未知的积分，我们只需要想办法把这个积分求解出来，那么这个函数的表达式就完全确定下来了。具体的解题方法有 2 种：

① 等式两边再次积分，可得到一个关于该积分的方程，即可解出该待定积分；② 待定系数法无脑秒杀。

例题 1 设$f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求$f(x)$

例题 2 设$f(x)$为连续函数，$f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$，求$f(x)$

例题 3 连续函数f和g满足$f(x)=3x^2+1+\displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$，$g(x)=-x+6x^2\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求$f(x)$、$g(x)$

综合题型五 利用分部积分，导出积分的递推公式

例题 1 请默写并推导点火公式

例题 2 求积分$J_n=\int_0^1 x\ln^n x\,\mathrm{d}x$的递推关系，并计算$J_n$

例题 3 设$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，判断$J_n$的单调性，并利用分部积分，导出$J_n$和$J_{n+2}$的递推关系，并计算$\lim\limits_{n\to\infty} nJ_n$

例题 4 设$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, $b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cdot\cos^n x\,\mathrm{d}x$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$

例题 5 证明:$J_n \overset{\text{记}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2^{n+1}}\left(2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n}\right)$，其中$n$为自然数

综合题型六 分段函数的定积分

只需要将积分区间拆开，在每一段上分别积分，然后相加即可。这种题型是考研的重点，但不是难点。

例题 1 设$f(x)=\int_0^1 |t^2-x^2| \mathrm{d}t \, (x>0)$，求$f'(x)$并求$f(x)$的最小值

例题 2 设$f(x)=\begin{cases} 2x+\frac{3}{2}x^2, & 0 \leqslant x<1 \\ \frac{1+x}{x(1+x\mathrm{e}^x)}, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$，求函数$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式

例题 3 已知$x \geqslant 0$时，$f(x)=x$，且$g(x)=\begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x<\frac{\pi}{2} \\ 0, & x \geqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$，求$F(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t \, (x \geqslant 0)$