UNMSM

ESCUELA DE ESTUDIOS GENERALES
UNMSM

ESCUELA DE ESTUDIOS GENERALES
ÁREA DE INGENIERÍA
Algebra y Geometría Analítica
2020-II

Unidad 2

Semana 08

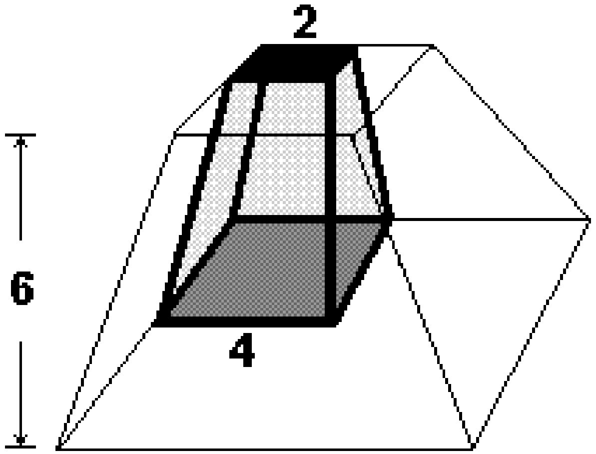
- Teorema de factorización única. Multiplicidad de una raíz de un polinomio
- Raíces complejas y conjugadas.
- Raíces de la forma $a + \sqrt{b}$
- Raíces enteras y raíces racionales.
- Regla de signos de descartes

Situación problemática

Historia : La resolución de ecuaciones algebraicas, o la determinación de las raíces de polinomios, está entre los problemas más antiguos de la matemática. Sin embargo, la elegante y práctica notación que utilizamos actualmente se desarrolló a partir del siglo XV.

En el problema 14º del papiro de Moscú (ca. 1890 a. C.) se pide calcular el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular. El escriba expone los pasos: eleva al cuadrado 2 y 4, multiplica 2 por 4, suma los anteriores resultados y multiplícalo por un tercio de 6 (h); finaliza diciendo: «ves, es 56, lo has calculado correctamente».

En notación algebraica actual sería: $V = \frac{h(t^2+b^2+tb)}{3}$, un polinomio de cuatro variables (*V*, *h*, *t*, *b*) que, conociendo tres, permite obtener la cuarta variable. Algunos polinomios, como $p(x) = x^2 + 1$, no tienen ninguna raíz que sea número real. Sin embargo, si el conjunto de las raíces posibles se extiende a los números complejos.



$$V = \frac{h(t^2 + b^2 + tb)}{3}$$

TEOREMA DE FACTORIZACION UNICA $K[x]$

Teorema:

Todo polinomio $P(x) \in K[x]$ se puede factorizar de manera única en la forma :

$P(x) = a_n P_1(x)P_2(x) \ldots . PK(x)$, siendo a_n el coeficiente principal de $P(x)$ y los $P_i(x)$ polinomios mónicos irreducibles en $K[x], i = 1,2, \ldots, k$.

La factorización es única en el sentido de que cualquier otra factorización solo puede diferir en el orden de los factores $P_i(x)$. $i = 1,2, \ldots, k$.

Ejemplo:

- $P(x) = x^3 - 7x \in Q[x]$, se puede factorizar como $P(x) = x(x^2 - 7)$, pero si $P(x) = x^3 - 7x \in \mathbb{R}[x]$, se puede factorizar como $P(x) = x(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$
- $P(x) = x^3 - 2x \in Q[x]$, se puede factorizar como $P(x) = x(x^2 - 2)$, pero si $P(x) = x^3 - 2x \in \mathbb{R}[x]$, se puede factorizar como $P(x) = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

MULTIPLICIDAD DE UNA RAIZ DE UN POLINOMIO

Un elemento a $\in \mathrm{K}(x)$ se denomina **raíz** de **multiplicidad** n de $p(x)$ cuando hay un **polinomio** $q(x)$ tal qu

entonces a recibirá el calificativo de **raíz** simple. s(x) ? 0 $y\, p(x) = (x-a)^k q(x).\, Si\ k = 1$

$$a\ es\ una\ raíz\ de\ multiplicidad\ k\ de\ p(x) \leftrightarrow p(x) = (x-a)^k q(x); q(a) \neq 0.$$

Ejemplo 01:

$Si\ \ p(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = 0$

Solución

tiene como raíces a 1 y − 4 y puede escribirse

de esta forma, $p(x) = (x+4)(x-1)^2$

$$x + 4 = 0 \longrightarrow x = -4$$

$$x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$$

Esto significa que 1 es una raíz de multiplicidad 2,

y − 4 es correspondiente a una raíz simple.

(multiplicidad 1).

Ejemplo 02:

$p(x) = (x-3)^4(x-2)^3(x+1) = 0$

Hallar la raíces del polinomio.

Solución

$$x - 3 = 0 \longrightarrow x = 3$$

$$x - 2 = 0 \longrightarrow x = 2$$

$$x + 1 = 0 \longrightarrow x = -1$$

3 es una raíz de multiplicidad 4

2 es una raíz de multiplicidad 3

-1 es una raíz simple.

RAICES COMPLEJOS Y CONJUGADOS

Teorema : Si un número complejo $z = a + bi$ es raíz de la ecuación polinomial

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 + a_0, \qquad a_i \epsilon \ \mathbb{R},$$

Entonces el conjugado $\bar{z} = a - bi$ también es raíz de la ecuación.

Ejemplo : Si $x = 1 + i$ es una raíz de la ecuación $p(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$ determine las otras raíces de la ecuación.

Solución. Como $x = 1 + i$ es raíz de la ecuación entonces $x = 1 - i$ también es raíz de la ecuación,

Así $x - (1 + i)$ y $x - (1 - i)$ son factores de p(x), en consecuencia podemos escribir

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = \big(x - (1 + i)\big)\big(x - (1 - i)\big)q(x) = 0.$$

Como $\big(x - (1 + i)\big)\big(x - (1 - i)\big) = x^2 - 2x + 2$ entonces el polinomio se puede escribir como

$x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = (x^2 - 2x + 2)q(x) = 0$, de donde $q(x)\frac{x^3-4x^2+6x-4}{(x^2-2x+2)} = x - 2.$

Tenemos $p(x) = \big(x - (1 + i)\big)\big(x - (1 - i)\big)(x - 2) = 0$, por lo tanto las raíces pedidas son:

$$x = 1 + i, x = 1 - i, x = 2.$$

RAICES DE LA FORMA $a+\sqrt{b}$

Teorema : Si un binomio irracional cuadrático de la forma $a+\sqrt{b}$ es la raíz del polinomio real p(x) con coeficientes racionales, entonces el binomio irracional cuadrático $a-\sqrt{b}$ es también raíz de p(x).

Ejemplo 1: Determinar todas las raíces del polinomio $p(x)=x^4-9x^3+27x^2-33x+14,$ sabiendo que $3+\sqrt{2}$ es una de sus raíces.

Solución

Si $r_1=3+\sqrt{2}\longrightarrow r_2=3+\sqrt{2}$ es también raíz de p.

Formando la ecuación cuadrática con $r_1\ y\ r_2$ se tiene:

$S=r_1+\ r_2=\left(3+\sqrt{2}\right)+\left(3-\sqrt{2}\right)=6$

$P=r_1.r_2=\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)=9-2=7$

Luego, si $x^2-Sx+P=0\ \Rightarrow x^2-6x+7=0$

Dividiendo p(x) entre $x^2-6x+7=0,$

Obtenemos $q(x)=x^2-3x+2$

Cuyas raíces $x_1=1\ y\ \ x_2=2$ son también raíces de p(x).

Por lo tanto, las raíces de p(x) son:

$x_1=1$

$x_2=2$

$x_3=3+\sqrt{2}$

$x_4=3-\sqrt{2}$

RAICES ENTERAS Y RACIONALES

Teorema : Sea $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} \cdots + a_{n-1}x + a_n,\ con\ a_0 \neq 0\ y\ a_n \neq 0\ ,\ \ a_i \epsilon\ \mathbb{R}$, un polinomio cuyos coeficientes son enteros. Si el número racional $\frac{P}{q}$, expresado en forma irreductible, es una Raíz de p(x), entonces p es el divisor exacto de a_n y q es el divisor exacto de a_0.

Ejemplo : Hallar todas las raíces del polinomio

$$p(x) = 12x^4 - 44x^3 + 37x^2 + 11x - 10$$

Solución

Divisores del término independiente:

a_n: $p = \pm 1, \pm 2, \pm 5$

Divisores del coeficiente de:

x^4, a_0: $q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$

Entonces, los factores binomios probables de p(x) son:

$$(x \pm 1), (x \pm 2), (x \pm 5), \left(x \pm \frac{1}{2}\right), \left(x \pm \frac{1}{3}\right), (x \pm 1/4)$$

$$\left(x \pm \frac{2}{3}\right), \left(x \pm \frac{5}{2}\right), \left(x \pm \frac{5}{3}\right), \left(x \pm \frac{5}{4}\right).$$

Mediante la división sintética encontramos que ± 1 no son Raíces de $p(c)$.

Para x=2

	12	-44	37	11	-10
2		24	-40	-6	10
	12	-20	-3	5	0

Por tanto, x=2 es una raíz de p(x) y

$$P(x) = (x - 2)(12x^3 - 20x^2 - 3x + 5)$$

Los otros factores probables de p(x) lo son de

$$q(x) = 12x^3 - 20x^2 - 3x + 5$$

Usando nuevamente la división sintética, encontramos

que -2 y ± 5 no son rices de q(x).

Para $x = 1/2$

	12	-20	-3	5
1/2		6	-7	-5
	12	-14	-10	0

Por tanto, x=1/2 es una raíz de q(x), entonces:

$$P(x) = (x-2)(x-1/2)(12x^2 - 14x - 10)$$

$$P(x) = (x-2)(2x-1)(6x^2 - 7x - 5)$$

$$P(x) = (x-2)(2x-1)(2x+1)(3x-5)$$

Luego: $\{x \epsilon q / p(x) = 0\}$= $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{3}, 2\right\}$

REGLA DE SIGNOS DE DESCARTES

Teorema : Si p(x)=0 es una ecuación entera con coeficientes reales y con raíces reales , entonces:

a. El número de raíces positivas de p(x)=0 es igual al número de variaciones que representan los signos de los coeficientes de p(x), o es menor que este número en un número par.

b. El número de raíces negativas de p(x)=0 es igual al número de variaciones de p(-x), o es menor que este número en un número par.

Esta proposición, conocida como la "Regla de los signos de Descartes", también proporciona Información acerca de raíces complejas. Sabemos que si el polinomio p(x) es de grado n, entonces tiene exactamente n raíces; por tanto, el número de raíces complejas es igual a n menos el número de raíces positivas y negativas.

Ejemplo : Hallar toda la información posible acerca de la naturaleza de las raíces del polinomio:

$p(x) = x^9 + 5x^8 - x^3 + 7x + 2.$

Solución

Por la regla de los signos de descartes, tenemos:

$$p(x) = x^9 + \underbrace{5x^8 -}_{v} \underbrace{x^3 + 7x}_{v} + 2.$$

$$p(-x) = -\underbrace{x^9 +}_{v} 5x^8 + \underbrace{x^3 -}_{v} \underbrace{7x +}_{v} 2.$$

Veamos que $p(x)$ tiene dos variaciones, entonces la ecuación $p(x) = 0$ tendrá, a lo más 2 o 0 raíces positivas.

P(-x) tiene 3 variaciones, entonces la ecuación P(x)=0 tendrá, a lo más, 3 o 1 raíces negativas. Si designamos por *c* todas las raíces complejas, el siguiente cuadro ilustra las posibles combinaciones entre las raíces positivas, negativas y complejas.

$+$	2	2	0	0
$-$	3	1	3	1
c	4	6	6	8

La suma de cada columna debe ser igual al grado del polinomio

Ejemplo : Determinar el mínimo número de raíces complejas del polinomio :

$p(x) = 11x^9 + 5x^6 - 2x^5 + 4x^3 + 2x^2 - 6x - 2.$

Solución

Por la regla de los signos de descartes, tenemos:

$$p(x) = 11x^9 + 5x^6 - 2x^5 + 4x^3 + 2x^2 - 6x - 2$$

V V V

$$p(-x) = -11x^9 + 5x^6 + 2x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 6x - 2$$

V V V V

$p(x)$ tiene tres variaciones, luego la ecuación

$$p(x) = 0$$

tiene a lo más, 3 o 1 raíces positivas.

$p(-x)$ tiene 4 variaciones, entonces la ecuación

$$p(x) = 0$$

tiene, por lo menos 4, 2 o 0 raíces negativas.

$+$	3	3	3	1	1	1
$-$	4	2	0	4	2	0
c	2	4	6	4	6	8

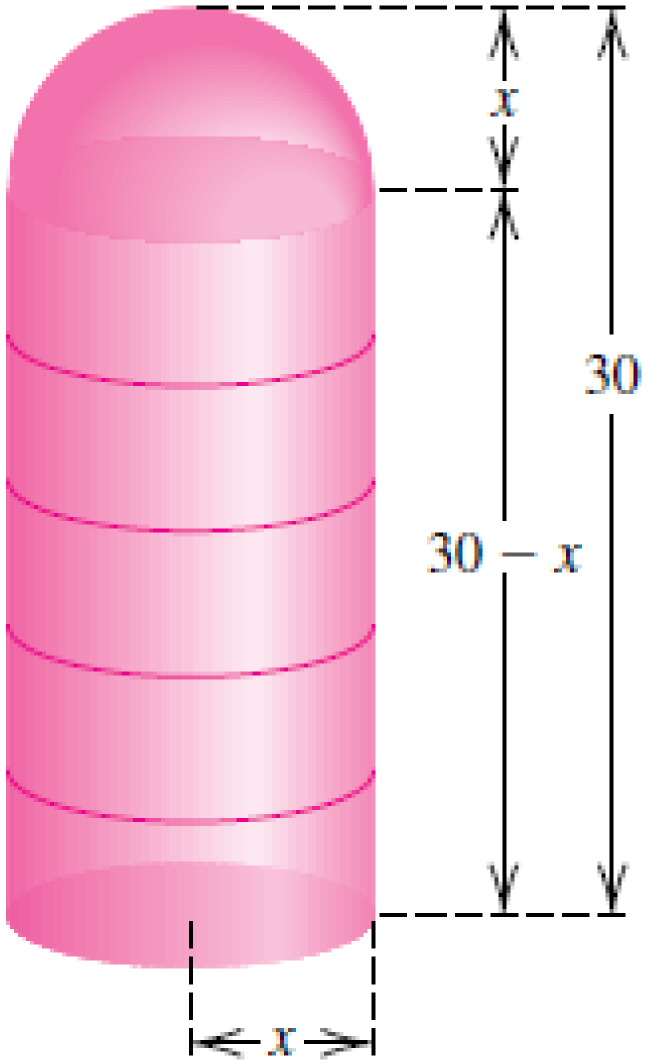
En el cuadro se observa que el polinomio $p(x)$

Tiene como mínimo 2 raíces complejas.

Hallar el radio de un silo para granos:

Un silo para granos tiene la forma de un cilindro circular recto con una semiesfera unida en la parte superior. Si la altura total de la estructura es de 30 pies, encuentre el radio del cilindro que resulte en un volumen total de $1008p\ pies^3$.

Solución: Con x denotemos el radio del cilindro, como se muestra en la figura. El volumen del cilindro es $\pi x^2 h = \pi x^2(30 - x)$ y el volumen la semi esfera es $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$, de modo que despejamos x como sigue:



$\pi x^2(30 - x) + \frac{2}{3}\pi r^3 = 1008\pi$ el volumen total es 1008π

$3x^2(30 - x) + 2x^3 = 3024$ se multiplicó por $\frac{3}{\pi}$

$90x^2 - x^3 = 3024$ se simplificó

$x^3 - 90x^2 + 3024 = 0$ ecuación equivalente.

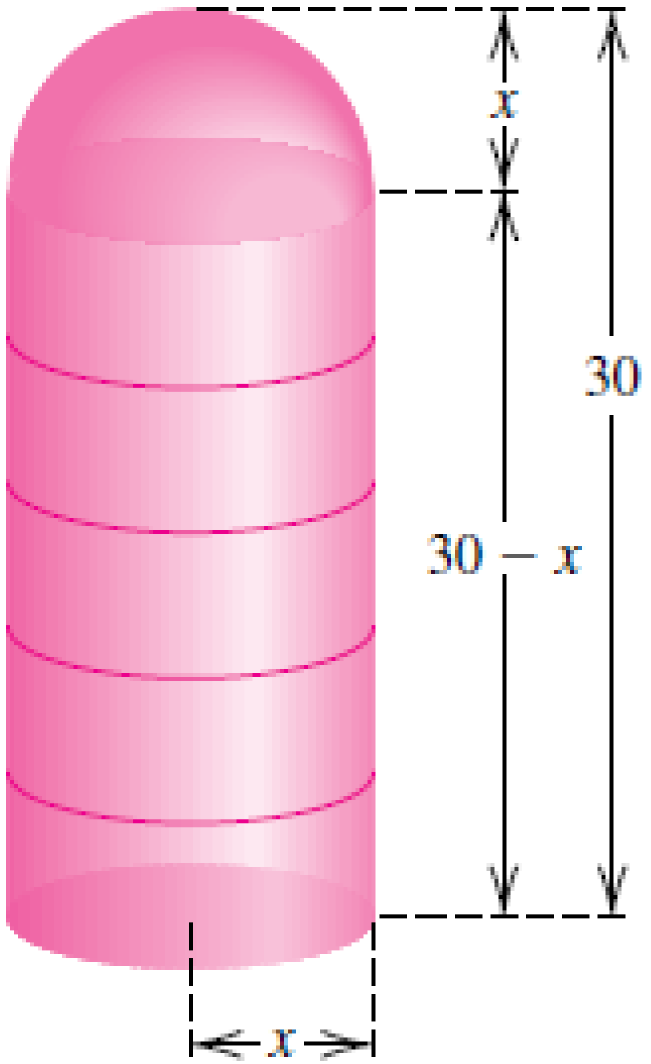
Como el coeficiente principal del polinomio del lado izquierdo de la última ecuación es 1, cualquier raíz racional tiene la forma $\frac{c}{1} = c$, donde c es un factor de 3024.

Hallar el radio de un silo para granos:

Si factorizamos 3024 en primos, encontramos que $3024 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$. Se deduce que algunos de los factores positivos de 3024 son 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, . . . Para ayudar a decidir cuál de estos números probar primero, hagamos una estimación aproximada del radio al suponer que el silo tiene forma de cilindro circular recto de 30 pies de altura. En ese caso, el volumen sería $\pi r^2 h = 30\pi r^2$. Como este volumen debe ser cercano a 1008π, vemos que $30r^2 = 1008$ o $r^2 = \frac{1008}{30} = 33{,}6$.

Esto sugiere que usaremos 6 en nuestra primera división sintética, como sigue:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -90 & 0 & 3024 \\ 6 & & 6 & -524 & -3024 \\ \hline & 1 & -84 & -524 & 0 \end{array}$$



Por lo tanto, 6 es una solución de la ecuación $x^3 - 90x^2 + 3024 = 0$. Las dos soluciones restantes de la ecuación se pueden hallar al resolver la ecuación reducida $x^2 - 84x - 504 = 0$. Estos ceros son aproximadamente -0,62 y 89,62 ninguno de los cuales satisface las condiciones del problema. En consecuencia, el radio deseado es 6 pies.

UNMSM

EEG

ESCUELA DE ESTUDIOS GENERALES UNMSM

GRACIAS