

TRATAMIENTO DE DATOS EXPERIMENTALES

EXPERIENCIA N° 2

Las matemáticas constituyen un lenguaje bello y elegante. Desafortunadamente la elegancia con demasiada frecuencia también significa: elegancia para el experto y oscuridad para el principiante.
ANÓNIMO

I. OBJETIVOS

1. Aprender a organizar y graficar los datos experimentales haciendo uso de tablas y papeles gráficos.
2. Aprender técnicas de ajuste de curvas, principalmente el método de regresión lineal y el método de mínimos cuadrados.
3. Obtener ecuaciones experimentales que describan el fenómeno físico e interpretarlas.

II. MATERIALES

El alumno traerá:

Calculadora científica

(6) Hojas de papel milimetrado

(2) Hojas de papel logarítmico

(1) Hoja de papel semilogarítmico

(Ver apéndice 1)

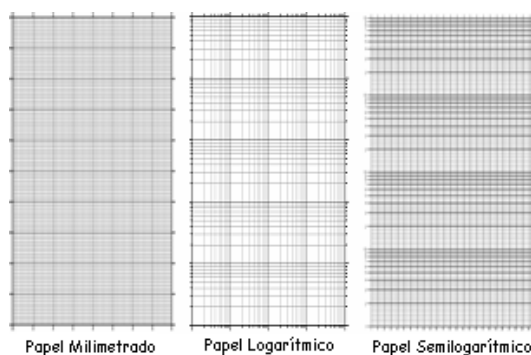


Fig. 1

III. FUNDAMENTO TEÓRICO

Los datos teóricos en un proceso de medición se organizan en tablas. Las tablas de valores así confeccionadas nos informan acerca de las relaciones existentes entre una magnitud y otra. Una alternativa para establecer dichas relaciones es hacer representaciones gráficas en un sistema de ejes coordenados con divisiones milimetradas, logarítmicas o semilogarítmicas según sea el caso con el fin de encontrar gráficas lineales (rectas) para facilitar la construcción de las fórmulas experimentales que representen las leyes que gobiernan el fenómeno.

USO DEL PAPEL MILIMETRADO

Empezaremos graficando los valores de la tabla de datos en el *papel milimetrado*:

1. Siempre tenga cuidado de escribir los valores de la variable independiente en el eje de las abscisas y las variables dependientes en el eje de las ordenadas.
2. La distribución de puntos así obtenida se unen mediante una curva suave, usando una regla curva o trazo a mano alzada.
3. Las representaciones gráficas que aparecen con más frecuencia son:

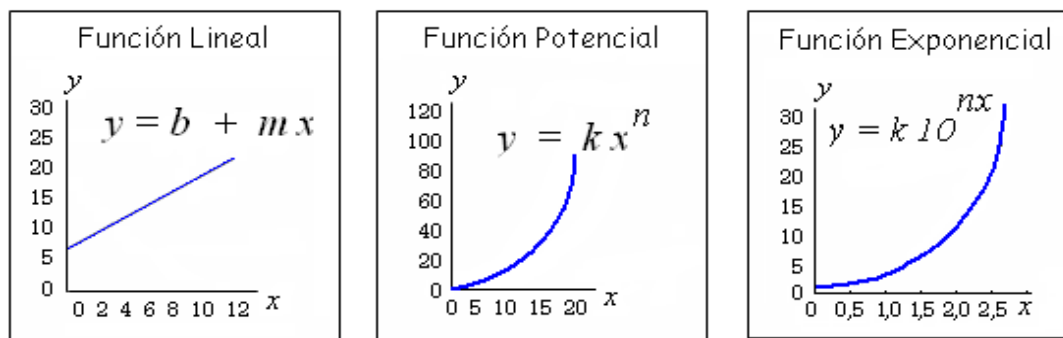


Fig. 2

Veamos el *primer caso*, si la *distribución de puntos en el papel milimetrado es de tendencia lineal*, entonces, se realiza el ajuste de la recta mediante el *método de regresión lineal por mínimos cuadrados*. (Ver Apéndice 2). Esto significa que la relación que se busca tiene la forma de una recta cuya ecuación es:

$$y = mx + b$$

En donde las constantes a determinar son: m la pendiente de la recta y b la ordenada en el origen (intercepto), siguiendo el procedimiento que se detalla a continuación.

Primero se construye una tabla de la forma:

Tabla 1			
x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
x_1	y_1	$x_1 y_1$	x_1^2
x_2	y_2	$x_2 y_2$	x_2^2
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
x_p	y_p	$x_p y_p$	x_p^2
$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i y_i$	$\sum x_i^2$

Luego se calculan la pendiente y el intercepto.

$$m = \frac{p \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{p \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{p \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

En el *segundo caso*, cuando la *distribución de puntos en el papel milimetrado no es de tendencia lineal*; se pasan los datos de la tabla a un papel logarítmico o semilogarítmico, en alguno de estos papeles la distribución de los puntos saldrá una recta.

USO DEL PAPEL LOGARITMICO

Las relaciones de la forma $y = k x^n$; ($n \neq 1$), son **funciones potenciales y sus gráficos en el papel logarítmico son rectas** de pendientes $m = n$, que cortan el eje vertical en $b = \log k$. Se recomienda preferentemente usar papel logarítmico 3x3; en donde cada ciclo esta asociado a una potencia de base 10. El origen de un eje coordenado logarítmico puede empezar con ..., 10^{-1} , 10^0 , 10^1 , 10^2 , 10^3 , ... etc.

Al tomar logaritmo decimal a la ecuación $y = k x^n$; ($n \neq 1$) obtenemos $\log y = m \log x + \log k$, que tiene la forma lineal $Y = m X + b$, en donde $X = \log x$, $Y = \log y$ y $b = \log k$. Concluimos entonces, que el método de regresión lineal puede ser aplicado a una distribución potencial de puntos, para ello se toma logaritmo decimal a cada uno de los datos de la tabla. Construya la siguiente tabla cuidando de colocar los valores con un mínimo de cuatro decimales de redondeo en cada columna.

x_i	y_i	$X_i = \log x_i$	$Y_i = \log y_i$	$X_i Y_i = \log x_i \log y_i$	$X_i^2 = \log x_i^2$
x_1	y_1	$\log x_1$	$\log y_1$	$\log x_1 \log y_1$	$\log x_1^2$
x_2	y_2	$\log x_2$	$\log y_2$	$\log x_1 \log y_2$	$\log x_2^2$
.
.
.
x_p	y_p	$\log x_p$	$\log y_p$	$\log x_p \log y_p$	$\log x_p^2$
		$\sum \log x_i$	$\sum \log y_i$	$\sum \log x_i \log y_i$	$\sum \log x_i^2$

Para determinar la ecuación de la recta en el papel logarítmico, se calculan ahora los valores de:

$$m = \frac{p \sum \log x_i \log y_i - \sum \log x_i \sum \log y_i}{p \sum (\log x_i)^2 - (\sum \log x_i)^2},$$

$$b = \frac{\sum (\log x_i)^2 \sum \log y_i - \sum \log x_i \sum \log x_i \log y_i}{p \sum (\log x_i)^2 - (\sum \log x_i)^2}$$

Para encontrar la ecuación de la función potencial $y = k x^n$ graficada en el papel milimetrado debemos determinar los valores de m y k . De párrafo anterior se tiene que $m = n$ y $k = 10^b$.

USO DEL PAPEL SEMILOGARITMICO

Para **relaciones exponenciales** de la forma $y = k 10^{xn}$ se utiliza **papel semilogarítmico** ¿Por qué? Construya adecuadamente su tabla para aplicar el método de regresión lineal.

EXTENSIÓN DEL MÉTODO DE REGRESIÓN LINEAL.

El estudio de este método relativamente sencillo y tiene doble interés: de un lado este tipo de dependencia es frecuente entre magnitudes físicas; por otro lado, muchas otras dependencias más complicadas pueden reducirse a la forma lineal mediante un cambio adecuado de variables, algunos casos se muestra en la siguiente tabla:

Función inicial	Cambio	Forma lineal
$y = ax^2$	$x^2 = z$	$y = az$
$y = a\sqrt{x}$	$\sqrt{x} = z$	$y = az$
$y = a \exp(nx)$	$\ln(y) = z ; \ln(a) = b$	$z = nx + b$
$y = ax^n$	$\ln(y) = z ; \ln(a) = b ; \ln(x) = t$	$z = b + nt$

USO DE LA CALCULADORA CIENTÍFICA.

Estas calculadoras presentan la función LR del inglés *linear regresión* lo cual nos permite obtener en forma directa los valores del intercepto (A) y la pendiente (B) de la recta y el factor de correlación (r) usando el método de regresión lineal por mínimos cuadrados.

Existen calculadoras modernas que grafican la tabla de datos y presentar otros modos de regresión tales como: lineal, logarítmica, exponencial, potencial, inversa y cuadrática, aquí el concepto del coeficiente de correlación juega un rol muy importante. (Ver apéndice 3)

Para hallar la fórmula experimental de la curva obtenida en papel milimetrado haga uso de la siguiente tabla:

Distribución de puntos en			Calculadora	
Papel Milimetrado	Papel logarítmico	Papel semilogarítmico	Tipo Regresión	Fórmula
Lineal			Lineal	$y = A + Bx$
Curva	Lineal		Potencial	$y = Ax^B$
Curva		Lineal	Exponencial	$y = A \exp(Bx)$
Curva	Lineal		Cuadrática	$y = A+Bx+Cx^2$

USO DEL COMPUTADOR

Se pueden construir programas en C. Fortran. Pascal o Basic para hacer los ajustes que se requieran. También se puede usar programas como Gnuplot, Microcal Origin, entre otros. Pero el mas accesible es el EXCEL (ver apéndice 4) que nos permite hacer graficas y presentar las curvas de regresión con sus respectivas fórmulas de correspondencia y coeficiente de correlación.

IV. PROCEDIMIENTO

Se analizarán tres experimentos: la conducción de corriente por un hilo conductor de micrón, la evacuación de agua de un depósito y la actividad radiactiva del radón.

- 4.1 En la Tabla 1 se tiene las medidas de intensidad de corriente eléctrica i conducida por un hilo conductor de micrón, y la diferencia de potencial V aplicada entre sus extremos.

TABLA 1

i (A)	V (V)
0.5	2.18
1.0	4.36
2.0	8.72
4.0	17.44

(Sears-Semansky, 1996)

- 4.2 La Tabla 2 muestra las medidas del tiempo de vaciado (t) de un depósito con agua y las medidas de las alturas del nivel de agua para cuatro llaves de salida de diferentes diámetros (D).

TABLA 2

h (cm)	30	20	10	4	1
D (cm)	Tiempo de vaciado t (s)				
1.5	73.0	59.9	43.0	26.7	13.5
2.0	41.2	33.7	23.7	15.0	7.8
3.0	18.4	14.9	10.5	6.8	3.7
5.0	6.8	5.3	3.9	2.6	1.5
7.0	3.2	2.7	2.0	1.3	0.8

- 4.3 La Tabla 3 muestra los porcentajes de las medidas de la actividad radiactiva del radón. El día cero se detectó una desintegración de 4.3×10^{18} núcleos.

TABLA 3

t (días)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A (%)	100	84	70	59	49	41	34	27	24	20	17

V. APLICACIONES

1. Grafique las siguientes distribuciones:

De la Tabla 1:

- a) Grafique en una hoja de papel milimetrado V vs. i .

De la Tabla 2:

- b) En una hoja de papel milimetrado grafique t vs. D , para cada una de las alturas.
c) En una hoja de papel milimetrado grafique t vs. h , para cada diámetro.
d) En una hoja de papel logarítmico grafique t vs. D , para cada una de las alturas.
e) En una hoja de papel logarítmico grafique t vs. h , para cada diámetro.
f) Haga el siguiente cambio de variables $z = 1/D^2$ y grafique $t = t(z)$ en papel milimetrado.

Obs. En cada hoja deberán presentar cinco gráficas.

De la Tabla 3:

- g) En una hoja de papel milimetrado grafique A vs. T .
h) En una hoja de papel semilogarítmico A vs. T .

2. Hallar las fórmulas experimentales:

- a) Obtenga las formulas experimentales usando el método de regresión lineal, para las gráficas obtenidas en los casos a), d), e) y f).
b) Haciendo uso de la calculadora científica encuentre las formulas experimentales e indique el factor de correlación para todos las gráficas obtenidas en los casos desde la a) hasta la h).
c) Haciendo uso del MS EXCEL grafique y presente formulas experimentales y el factor de correlación para todos los casos desde la a) hasta la h).
d) Compare sus resultados. ¿Cuál(es) de los métodos de regresión le parece confiable?

3. Interpolación y extrapolación:

Considerando sus gráficos (en donde ha obtenidos rectas):

- a) Calcular el tiempo en que se ha desintegrado el 50% de los núcleos de radón, según la Tabla 2.

b) Halle los tiempos de vaciado del agua si:

CASOS	ALTURA h (cm)	DIAMETRO d (cm)	TIEMPO t (s)
01	20	4.0	
02	40	1.0	
03	25	3.5	
04	49	1.0	

c) Compare sus resultados obtenidos en la parte a) y b) con los obtenidos con las fórmulas experimentales.

4. Haga $w = \frac{\sqrt{h}}{d^2}$ para las alturas y diámetros correspondientes y complete la tabla:

t (s)	73.0	43.0	26.7	15.0	10.5	3.9	1.5
w							

5. Grafique $t = t(w)$ en papel milimetrado. Si la distribución es lineal haga el ajuste respectivo. Luego encuentre la ecuación experimental correspondiente: $t = t(h, d)$.

6. Para investigar:

Para obtener la fórmula de una distribución de puntos en donde solo se relacionan *dos variables* $y = y(x)$, se utilizó la *regresión simple*.

Cuando se tiene *tres o mas variables*, $y = y(v, w, \dots, z)$ se tendrá que realizar la *regresión múltiple*.

a) Encuentre la fórmula $t = t(h, d)$, utilice la Tabla 2.

b) Hallar t para $h = 15\text{cm}$ y $D = 6\text{ cm}$

c) Hallar t para $h = 40\text{ cm}$ y $D = 1\text{ cm}$

VI. CONCLUSIONES