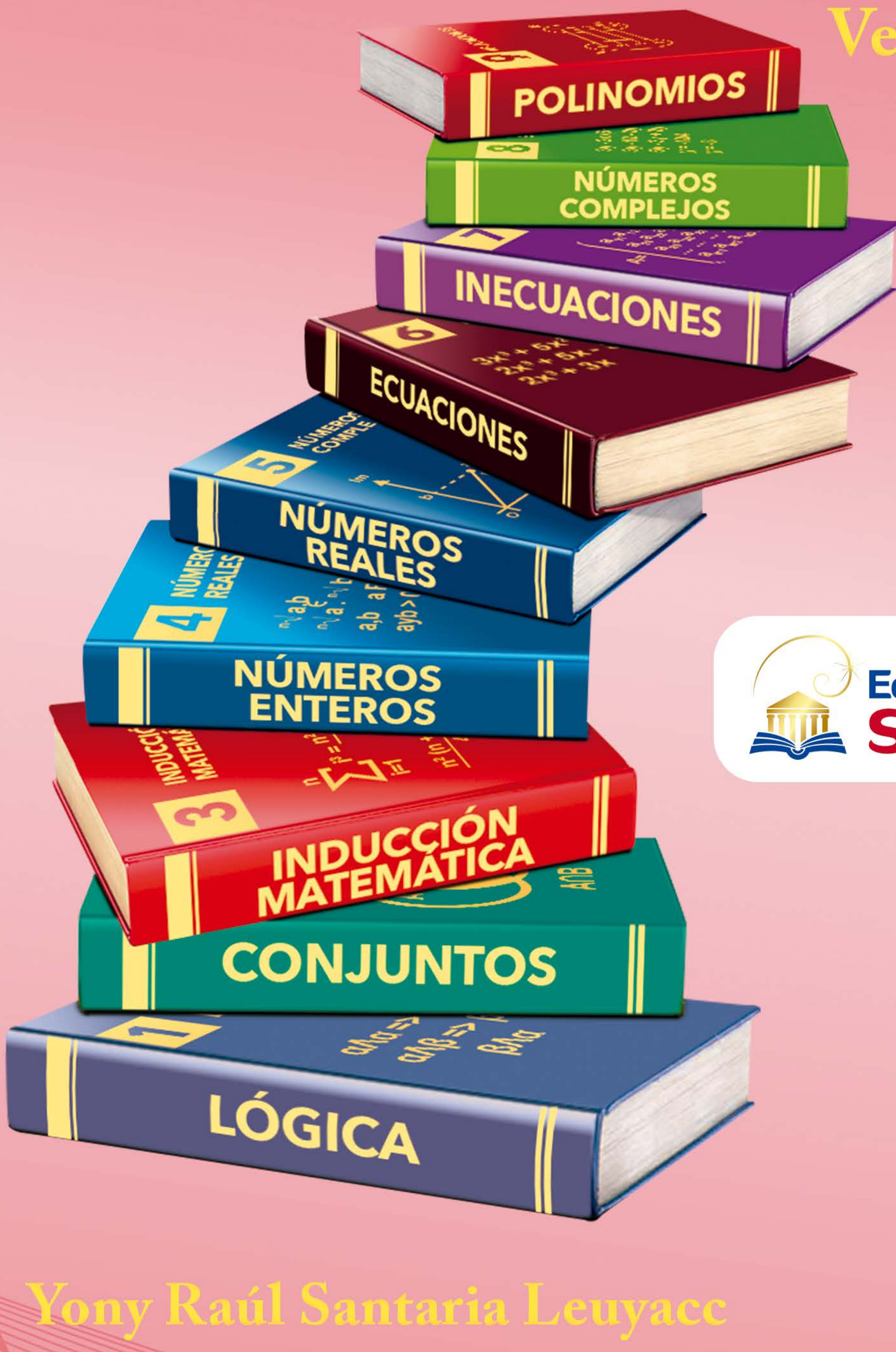
ÁLGEBRA SUPERIOR

Versión digital



Ediciones São Paulo

Yony Raúl Santaria Leuyacc

Versión 28 abril 2023

Estimado lector si encontrase algún error matemático o de digitación se agradece escribir al email ysantarial@unmsm.edu.pe para la corrección respectiva. Se recomienda descargar la versión más actualizada del presente libro en https://sites.google.com/view/yonyraul/librosdigitales

Yony Raúl Santaria Leuyacc

Álgebra Superior

Versión digital

Ediciones São Paulo

Álgebra Superior
Versión digital

Autor:
©Santaria Leuyacc, Yony Raúl
Licenciado en Matemática Pura, UNMSM-Perú
Maestría en Ciencias, Matemáticas, Universidade de São Paulo-Brasil
Doctor en Ciencias, Matemáticas, Universidade de São Paulo-Brasil
Calificado como Investigador Renacyt. Registro: P0099646
https://sites.google.com/view/yonyraul/

Editado por:
©Ediciones Sao Paulo E.I.R.L.
Mz. D-1, Lote 23, Urb. Pachacamac, Villa el Salvador
Lima-Perú
Ventas y pedidos: edicionessaopaulo@gmail.com

Primera edición - Abril 2023

Publicación electrónica disponible en:
https://sites.google.com/view/yonyraul/librosdigitales

ISBN: 978-612-48750-5-2
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N°: 2023-03599

Índice general

Prólogo

Este libro titulado *Álgebra superior: versión digital* constituye u una versión corta del libro impreso titulado *Matemática Básica* que consta de 626 páginas, por consiguiente se invita al lector interesado a adquirir la versión completa la cual viene acompañada de múltiples ejercicios resueltos así como de las demostración de los enunciados de la presente versión. Los temas incluidos en este texto son: Lógica proposicional, teoría de conjuntos, inducción matemática, números enteros, números reales, números complejos y polinomios en una variable.

Lima, Abril del 2023. EL AUTOR

Capítulo 01

Lógica proposicional

1.1 Proposición lógica

Iniciamos esta sección introduciendo el concepto de proposición lógica, el cual será la base para el presente capítulo.

1.1.1 Enunciado

Un enunciado es una expresión verbal o escrita, la cual puede ser una frase u oración. Los enunciados son clasificados como: declarativos, imperativos, exclamativos, interrogativos, dubitativos y desiderativos.

A continuación describimos y damos algunos ejemplos para cada uno de los tipos de enunciados:

(a) **Enunciado declarativo.** Son los que afirman o niegan algún hecho.

Ejemplos:

- El cielo es azul.
- El planeta no es plano.
- Argentina ganó la copa mundial de fútbol Qatar 2022.

(b) **Enunciado imperativo.** Son los que expresan alguna orden, petición o mandato.

Ejemplos:

- Apaga tu celular.
- Guarda silencio.
- Préstame algún lapicero por favor.

(c) **Enunciado exclamativo.** Son los que expresan algún sentimiento o estado anímico, siempre va acompañada de signos de exclamación.

Ejemplos:

- ¡Felicitaciones por ingresar a la universidad!
- ¡Tengo miedo!
- ¡Es fácil!

(d) **Enunciado interrogativo.** Son los que realizan una pregunta, siempre va acompañada de los signos de interrogación.

Ejemplos:

- ¿Cómo te llamas?
- ¿Cúal es la contraseña del wifi?
- ¿Dónde está la salida?

(e) **Enunciado dubitativo.** Son los que expresan incertidumbre, duda, supuesto o alguna probabilidad de algún hecho.

Ejemplos:

- Ojalá apruebe el curso de matemática.
- Tal vez no viaje a Francia.
- Quizás pueda ayudarte con el trabajo.

(f) **Enunciado desiderativo.** Son los que expresan algún deseo.

Ejemplos:

- Me gustaría aprender un idioma nuevo.
- Quisiera ser astronauta.
- Desearía un vaso de agua.

1.1.2 Proposición lógica

Un enunciado al que se le puede atribuir un único valor entre verdadero o falso, es llamada proposición lógica. Esta definición coincide con el de un enunciado declarativo. Consecuentemente, los enunciados declarativos son proposiciones lógicas.

Ejemplo 1.1

Determine si los siguientes enunciados son proposiciones lógicas:

a) Dos más dos es cuatro.
b) Lima es la capital de Argentina.
c) Las vocales son cinco.
d) Hoy es lunes.
e) ¡Buenos días!

Solución: Analicemos cada enunciado

a) El enunciado si es una proposición lógica, dado que el enunciado es verdadero.
b) El enunciado si es una proposición lógica, dado que el enunciado es falso.

c) El enunciado si es una proposición lógica, dado que el enunciado es verdadero.
d) El enunciado si es una proposición lógica, el cual será verdadero si el enunciado es realizado un día lunes, caso contrario, el enunciado es falso.
e) El enunciado no es proposición lógica, dado que al enunciado no se le puede atribuir el valor de verdadero o falso.

Ejemplo 1.2

Determine si los siguientes enunciados son proposiciones lógicas:
a) Prohibido cantar.
b) ¡Qué entretenida clase!
c) ¿Cómo te llamas?
d) Sería interesante.
e) Deseo aprobar el curso.
f) Este libro tiene 164 páginas.

Solución: Analicemos cada enunciado.
a) El enunciado no es una proposición lógica, es una orden o enunciado imperativo.
b) El enunciado no es una proposición lógica, es una exclamación o enunciado exclamativo.
c) El enunciado no es una proposición lógica, es una pregunta o enunciado interrogativo.
d) El enunciado no es una proposición lógica, es una suposición o enunciado dubitativo.
e) El enunciado no es una proposición lógica, es un deseo o enunciado desiderativo.
f) El enunciado si es una proposición lógica o un enunciado declarativo.

■

Observación 1.1 En general, las ordenes, exclamaciones, preguntas, dudas y deseos no son proposiciones lógicas.

Las proposiciones lógicas son denotadas por las letras p, q, r, etcétera.

$$p: \text{ Lima es la capital del Perú}$$

$$q: \sqrt{2} \text{ es un número entero}$$

El valor de verdad de una proposición lógica es el valor atribuido al enunciado, el cual puede ser verdadero (denotado por V) o falso (denotado por F).

(a) El valor de verdad de “p: Lima es la capital del Perú” es V.
(b) El valor de verdad de “$q: 2+3=7$” es F.

Representación	Proposición	Valor de verdad
p	La UNMSM fue fundada en 1551	V
q	$2+1=5$	F
r	Machupichu está en Cuzco	V

1.1.3 Clases de proposiciones lógicas

Las proposiciones lógicas son clasificadas como:

(a) **Proposición simple o atómica.** Una proposición simple es un enunciado en el cual no es posible dividir o extraer una proposición lógica de ella. Podemos identificar a las proposiciones simples como aquellas que no contienen negaciones (“no”), disyunciones (“o”), conjunciones (“y”), etcétera.

(b) **Proposición compuesta o molecular.** Una proposición es compuesta si está constituido por más de una proposición simple. Podemos identificar a las proposiciones compuestas como aquellas que contienen negaciones (“no”), disyunciones (“o”), conjunciones (“y”), etcétera.

Ejemplo 1.3

Determine si las siguientes proposiciones son simples o compuestas.

a) Hoy es lunes.
b) Lima es la capital del Perú y París es la capital de Alemania.
c) Si estudio entonces aprobaré el curso.
d) Soy estudiante universitario o trabajo.
e) No hay servicio.
f) ¡Buenos días y buenas noches!

Solución: Analicemos cada enunciado.

a) No hay conectivos lógicos. Por lo tanto, es una proposición simple.

b) El enunciado posee el conectivo lógico “y”. Por lo tanto, es una proposición compuesta. En este caso, también es posible subdividir en dos nuevas proposiciones lógicas; una de ellas “Lima es la capital del Perú” y la otra “París es la capital de Alemania”.

c) El enunciado posee el conectivo lógico “si ... entonces”. Por lo tanto, es una proposición compuesta.

d) El enunciado posee el conectivo lógico “o”. Por lo tanto, es una proposición compuesta.

e) El enunciado posee el conectivo lógico “no”. Por lo tanto, es una proposición compuesta. Note que es posible extraer la proposición lógica “hay servicio”.

f) El enunciado no es una proposición lógica. Por lo tanto, no puede clasificarse como proposición simple o compuesta.

■

1.2 Conectivos lógicos

Los conectivos lógicos son aquellas palabras que sirven para formar proposiciones compuestas a partir de las simples.

Definición 1.1
Una tabla de verdad es una lista de todos los posibles valores de verdad que puede asumir una proposición compuesta. En ella también se muestran los valores de verdad de las proposiciones que las integran.

Sea la tabla

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Cuadro 1.1: Tabla de verdad para dos proposiciones

La primera fila del Cuadro 1.1 debajo de p y q indica que la proposición p es verdadera y la proposición q es verdadera. De igual forma, la tercera fila indica que la proposición p es falsa y que la proposición q es verdadera.

1.2.1 Negación ($\sim$)

El conectivo lógico "negación" es denotado por el símbolo " $\sim$ ". Sea p una proposición lógica. Luego, la proposición lógica

$$\sim p \qquad \text{se lee} \qquad \text{“no } p\text{”}$$

Dado un enunciado p, la negación del enunciado puede ser escrita como: "Es falso que p", "No es verdad que p", o insertar la palabra "no", etcétera.

Proposición lógica	Negación de la proposición lógica
$p:$ El Misti está en Arequipa	$\sim p:$ Es falso que el Misti está en Arequipa
$q:$ Mañana será sábado	$\sim q:$ No es verdad que mañana será sábado
$r:$ El sol es una estrella	$\sim r:$ El sol no es una estrella
$s:$ $1+1=2$	$\sim s:$ $1+1\neq 2$

El valor de verdad de $\sim p$ es el valor opuesto al valor de verdad de p

Proposición lógica	Valor de Verdad
$p:$ El mundial Fifa 2022 será en Qatar	V
$\sim p:$ El mundial Fifa 2022 no será en Qatar	F
$q:$ Rio de Janeiro es la capital de Brasil	F
$\sim q:$ Es falso que Rio de Janeiro es la capital de Brasil	V

La tabla de verdad de la negación está dada por:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Cuadro 1.2: Negación

Ejemplo 1.4

p : Hoy es lunes $\qquad$ $\sim p$: Hoy no es lunes

1.2.2 Conjunción ($\wedge$)

El conectivo lógico "conjunción" es denotado por el símbolo "$\wedge$". Sean p y q proposiciones lógicas. Luego, la proposición lógica

$$p \wedge q \qquad \text{se lee} \qquad \text{“}p \text{ y } q\text{”}$$

Ejemplo 1.5

p : Tengo dinero $\qquad$ q : Soy feliz

$p \wedge q$: Tengo dinero y soy feliz

La tabla de verdad de la conjunción está dada por:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Cuadro 1.3: Conjunción

1.2.3 Disyunción ($\vee$)

El conectivo lógico "disyunción" es denotado por el símbolo "$\vee$". Sean p y q las proposiciones lógicas. Luego, la proposición lógica

$$p \vee q \qquad \text{se lee} \qquad \text{“}p \text{ o } q\text{”}$$

Ejemplo 1.6

$$p : \text{Esta lloviendo} \qquad q : \text{Hace frío}$$

$$p \vee q : \text{Esta lloviendo o hace frío}$$

La tabla de verdad de la disyunción está dada por:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Cuadro 1.4: Disyunción

1.2.4 Disyunción exclusiva ($\triangle$)

El conectivo lógico "disyunción exclusiva" es denotado por el símbolo "$\triangle$". Sean p y q proposiciones lógicas. Luego, la proposición lógica

$$p \triangle q \qquad \text{se lee} \qquad \text{"O bien } p \text{ o bien } q\text{"}$$

Ejemplo 1.7

$$p : \text{ El gato esta vivo} \qquad q : \text{ El gato esta muerto}$$

$$p \triangle q : \text{ O bien el gato esta vivo o bien el gato esta muerto}$$

La tabla de verdad de la disyunción exclusiva está dada por:

p	q	$p \triangle p$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Cuadro 1.5: Disyunción exclusiva

1.2.5 Condicional ($\Rightarrow$)

El conectivo lógico "condicional" es denotado por el símbolo " $\Rightarrow$ ". Sean p y q proposiciones lógicas. Luego, la proposición lógica

$$p \Rightarrow q \qquad \text{se lee} \qquad \text{"Si } p \text{ entonces } q\text{"}$$

Ejemplo 1.8

$$p: \text{ Yo estudio mucho} \qquad q: \text{ Tendré éxito.}$$

$$p \Rightarrow q: \text{ Si yo estudio mucho entonces tendré éxito.}$$

La tabla de verdad de la condicional está dada por:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Cuadro 1.6: Condicional

1.2.6 Bicondicional ($\Leftrightarrow$)

El conectivo lógico "bicondicional" es denotado por el símbolo " $\Leftrightarrow$ ". Sean p y q proposiciones lógicas. Luego, la proposición lógica

$$p \Leftrightarrow q \qquad \text{se lee} \qquad \text{"}p \text{ si y solo si } q\text{"}$$

Ejemplo 1.9

$$p: \text{ Hoy es lunes} \qquad q: \text{ Ayer fue domingo}$$

$$p \Leftrightarrow q: \text{Hoy es lunes si y solo si ayer fue domingo}$$

La tabla de verdad de la bicondicional está dada por:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Cuadro 1.7: Bicondicional

1.3 Proposición lógica compuesta

En está sección extenderemos la noción de las proposiciones lógicas compuestas.

1.3.1 Fórmula lógica

Una fórmula lógica o proposición compuesta formada a partir de las proposiciones simples p, q, r, etcétera, será denotada por

$$P(p,q,r,\ldots)$$

Ejemplos:

a) La fórmula

$$P(p,q) = p \vee q$$

representa la disyunción de las proposiciones p y q.

b) La fórmula

$$Q(p,q) = (\sim p \wedge q) \Rightarrow p$$

representa una combinación de negación, conjunción y condicional, con las proposiciones p y q.

c) La fórmula

$$R(p,q,r,s) = \big[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \vee r)\big] \Rightarrow (\sim s \wedge r)$$

representa una combinación de los conectivos lógicos con cuatro proposiciones simples.

Para evitar, el uso de paréntesis en las fórmulas, seguiremos el siguiente orden de prioridad de los conectivos lógicos:

$\sim$	Mayor prioridad
$\wedge$	
$\vee$	$\uparrow$
$\Rightarrow$	
$\Leftrightarrow$	Menor prioridad

Por lo tanto,

$$\sim p \wedge q \vee r \Rightarrow r \vee s \qquad \text{es equivalente a} \qquad \big(\big((\sim p) \wedge q\big) \vee r\big) \Rightarrow (r \vee s)$$

El valor de verdad de una fórmula $P(p,q,r,\ldots)$ depende de los valores de verdad de cada proposición simple.

Para hallar la tabla de verdad de una fórmula se emplean las tablas de verdad de los conectivos lógicos teniendo en cuenta su orden de prioridad.

Ejemplo 1.10

Determine la tabla de verdad de $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim p)$

Solución: Usando las tablas de verdad se obtiene

p	q	$\sim q$	$p\wedge \sim q$	$\sim p$	$(p\wedge \sim q) \Rightarrow (\sim p)$
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V
1°	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**

Para determinar todos los valores de la tabla se realizaron los siguientes pasos:

a) En la primera columna aparece todos los valores de verdad posibles que puede asumir p, a su vez en la segunda columna aparece todos los valores de verdad posibles para q.
b) En la tercera columna aparece la tabla de verdad de $\sim q$.
c) En la cuarta columna aparece la tabla de verdad de $p\wedge \sim q$, para calcularla hemos utilizado la primera y tercera columna.
d) En la quinta columna aparece la tabla de verdad de $\sim p$.
e) Finalmente, usando la cuarta y quinta columna se obtiene la tabla de verdad propuesta. ■

1.3.2 Clasificación de las tablas de verdad

Las proposiciones compuestas o fórmulas pueden ser clasificadas de acuerdo a los resultados obtenidos en sus tablas de verdad.

1) **Tautología.** Una tautología es una proposición lógica que resulta verdadera para todos los posibles valores de verdad de sus proposiciones simples.
2) **Contradicción.** Una contradicción es una proposición lógica que resulta falsa para todos los posibles valores de verdad de sus proposiciones simples.
3) **Contingencia.** Una contingencia es una proposición lógica que resulta verdadera y falsa para ciertos posibles valores de verdad de sus proposiciones simples.

Ejemplo 1.11

Determine y clasifique las tablas de verdad de las siguientes proposiciones compuestas

a) $\sim p$
b) $p \vee \sim p$
c) $q\wedge \sim q$
d) $p \vee \sim p) \Rightarrow (p\wedge \sim p)$

Solución: Considere la tabla

p	q	$\sim p$	$p\vee \sim p$	$\sim q$	$q\wedge \sim q$	$(p \vee \sim p) \Rightarrow (q\wedge \sim q)$
V	V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	F	F
1°	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**	**7°**

a) Los resultados de $\sim p$ son presentados en la tercera columna del cuadro.
b) Usando los resultados de p y $\sim p$ se calcula $p \vee \sim p$, el cual es presentado en la cuarta columna.
c) Usando los resultados de q y $\sim q$ se calcula $q \wedge \sim q$, el cual es presentado en la sexta columna.
d) Usando las tablas $p \vee \sim p$ y $q \wedge \sim q$ se calcula $(p \vee \sim p) \Rightarrow (q \wedge \sim q)$, el cual es presentado en la séptima columna del cuadro.

Además,

a) Como existen valores verdaderos y falsos en la tercera columna, entonces la proposición $\sim p$ es una contingencia.
b) Como todos los valores de la cuarta columna son verdaderos, entonces la proposición $p \vee \sim p$ es una tautología.
c) Como todos los valores de la sexta columna son falsos, entonces la proposición $q \wedge \sim q$ es una contradicción.
d) Como todos los valores de la séptima columna son falsos, entonces la proposición lógica $(p \vee \sim p) \Rightarrow (q \wedge \sim q)$ es una contradicción.

■

1.3.3 Equivalencias lógicas

Decimos que dos proposiciones son equivalentes si sus tablas de verdad son iguales.

Proposición 1.1

Las proposiciones $P(p,q,\ldots)$ y $Q(p,q,\ldots)$ son equivalentes si y solo si la proposición compuesta $P \Leftrightarrow Q$ es una tautología.

La notación

$$P \equiv Q \qquad \text{se lee} \qquad \text{“}P \text{ es equivalente a } Q\text{”}$$

Además, $P \equiv V$ quiere decir que la proposición compuesta P solo toma valores verdaderos, del mismo modo, $P \equiv F$ indica que la proposición compuesta P solo toma valores falsos. Por lo tanto,

$$\begin{array}{lllll} \text{Si} & P \equiv V & \text{entonces} & P & \text{es una tautología} \\ \text{Si} & P \equiv F & \text{entonces} & P & \text{es una contradicción} \end{array}$$

Ejemplo 1.12

Pruebe que $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Solución: Sean las fórmulas

$$P : \sim (p \wedge q) \qquad \text{y} \qquad Q : \sim p \vee \sim q$$

La tabla de verdad de P está dada por

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

y la tabla de Q por

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Dado que las tablas son iguales se deduce que P y Q son equivalentes, esto es, $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Otro Método:

Usando las anteriores tablas se deduce que la tabla de $P \Leftrightarrow Q$ está dada por

p	q	$\sim p \vee \sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Como la tabla de verdad resultante es una tautología, se concluye que $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$. ■

Proposición 1.2

Sean p y q proposiciones lógicas entonces se satisfacen las siguientes equivalencias

a) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

b) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

c) $p \vee q \equiv \sim p \Rightarrow q$

d) $p \wedge q \equiv \sim (p \Rightarrow \sim q)$

e) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

f) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \wedge r)$

g) $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \vee r)$

h) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$

i) $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

j) $p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$

k) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

j) $\sim \big(p \Leftrightarrow q\big) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

Demostración. Probaremos solamente la primera equivalencia, las restantes son probadas de manera análoga.

La tabla de verdad de $p \Rightarrow q$ y $\sim p \vee q$ están dadas por

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Como $p \Rightarrow q$ y $\sim p \vee q$ poseen la misma tabla de verdad entonces dichas proposiciones son equivalentes. ■

1.3.4 Leyes lógicas

A continuación enunciamos un listado de las principales leyes lógicas.

a) Leyes de identidad

- $p \wedge V \equiv p$
- $p \vee F \equiv p$

b) Leyes de dominación

- $p \vee V \equiv V$
- $p \wedge F \equiv F$

c) Leyes de idempotencia

- $p \vee p \equiv p$
- $p \wedge p \equiv p$

d) Ley de doble negación

- $\sim (\sim p) \equiv p$

e) Leyes de conmutación

- $p \vee q \equiv q \vee p$
- $p \wedge q \equiv q \wedge p$

f) Leyes de asociación

- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

g) Leyes de distribución

- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

h) Leyes de De Morgan

- $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
- $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

i) Leyes de absorción

- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
- $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

j) Leyes de negación

- $p \vee \sim p \equiv V$
- $p \wedge \sim p \equiv F$

k) Ley de la implicancia material

- $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

Ejemplo 1.13

Pruebe la siguiente equivalencia lógica $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge \sim q) \Rightarrow q$

Solución: Observe que

$$\begin{array}{rcll} p \Rightarrow (q \vee r) & \equiv & \sim p \vee (q \vee r) & \text{Ley de la implicancia material} \\ & \equiv & (\sim p \vee q) \vee r & \text{Ley asociativa} \\ & \equiv & (\sim p \vee \sim (\sim q)) \vee r & \text{Ley de doble negación} \\ & \equiv & \sim (p \wedge \sim q) \vee r & \text{Ley de De Morgan} \\ & \equiv & (p \wedge \sim q) \Rightarrow q & \text{Ley de la implicancia material} \end{array}$$

Por lo tanto, la equivalencia queda probada. ■

La Ley de negación dada en (j) establece que $p \vee \sim p \equiv V$, esto significa que $p \vee \sim p$ es una tautología.

En general, para una fórmula $P(p, q, \ldots)$ se deduce que

$$\begin{array}{lll} \text{Si } P(p,q,\ldots) \equiv V & \text{entonces} & P(p,q,\ldots) \text{ es una tautología} \\ \text{Si } P(p,q,\ldots) \equiv F & \text{entonces} & P(p,q,\ldots) \text{ es una contradicción} \end{array}$$

Ejemplo 1.14

Determine si $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ es una tautología, contradicción o contigencia.

Solución: Observe que

$$\begin{array}{rcll} (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) & \equiv & \sim (p \wedge q) \vee (p \vee q) & \text{Ley de la implicancia material} \\ & \equiv & (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) & \text{Ley de De Morgan} \\ & \equiv & (\sim p \vee p) \vee (\sim q \vee q) & \text{Leyes de asociatividad y comutatividad} \\ & \equiv & V \vee V & \text{Ley de negación} \\ & \equiv & V & \text{Ley de identidad} \end{array}$$

Por lo tanto, la proposición propuesta es una tautología. ■

1.4 Cuantificadores

Un cuantificador permite establecer "cuantos" elementos de un conjunto dado satisfacen una función proposicional.

1.4.1 Función proposicional

Con el fin de establecer la definición de una función proposicional introducimos el concepto de enunciado abierto.

Enunciado abierto. Un enunciado es llamado abierto, si es un enunciado que presenta una o más variables de tipo lingüistico o matemático.

Ejemplos:

a) La raíz cuadrada de "x" es un número entero.
b) Él estudia ingeniería electrónica.
c) Aquél estudiante aprobó el curso de Matemática básica con "z" de nota.

Los enunciados abiertos anteriores no son proposiciones lógicas, sin embargo, si se considera $x = 10$, en el primer enunciado, este resulta falso y si consideramos $x = 16$, el enunciado resulta verdadero.

Definición 1.2 (Función proposicional)

Una función proposicional es un enunciado abierto de una a más variables, que al ser sustituidas por elementos de un conjunto U, se convierte en una proposición lógica.

Denotaremos por $p(x)$ una función proposicional de una variable, por $p(x,y)$ una función proposicional de dos variables, y así sucesivamente.

Cuando una función proposicional es de dos variables $p(x,y)$, el conjunto donde está definido es de la forma $U = A \times B$, esto quiere decir que $x \in A$ e $y \in B$.

Para el caso, donde A y B son conjuntos iguales, es posible escribir U como un único conjunto.

Ejemplo 1.15

a) Sea la función proposicional de una variable

$$p(x):\ x^2 + x > 10 \qquad \text{donde} \qquad U = \{1,2,3,4\}$$

Luego, se satisface

$$p(1):\ 2 > 10 \quad \text{es falso} \qquad \text{y} \qquad p(3):\ 12 > 10 \quad \text{es verdadero}$$

b) Sea la función proposicional de dos variables

$$q(x,y):\ x^2 < y^2 - 2 \qquad \text{donde} \qquad U = \{-1,1,2,3\}$$

Luego, se satisface

$$q(-1,1):\ 1 < -1 \quad \text{es falso} \qquad \text{y} \qquad q(1,2):\ 1 < 2 \quad \text{es verdadero}$$

c) Sea la función proposicional de tres variables

$$r(x,y,z):\ (x^2 = y+3)\ \wedge\ (3z > 5) \qquad \text{donde} \qquad U = \{1,2,3\}$$

Luego, se satisface

$$r(2,1,1):\ (4=4)\ \wedge\ (3>5) \qquad \text{es falso}$$

y

$$r(2,1,3):\ (4=4)\ \wedge\ (9>5) \qquad \text{es verdadero}$$

1.4.2 Cuantificador universal

El cuantificador universal es utilizado para afirmar que todo elemento de algún conjunto satisface alguna propiedad. El cuantificador universal es denotado por "$\forall$" y se lee "para todo".

La expresión

$$\forall x \in U : p(x)$$

indica que para todo elemento x del conjunto U, se verifica la proposición lógica $p(x)$.

La tabla de verdad de una función proposicional $p(x)$ es dado por todos los valores de verdad de $p(x)$ con $x \in U$.

x	$p(x)$	Valor de verdad
x_1	$p(x_1)$	
x_2	$p(x_2)$	
$\vdots$	$\vdots$	
x_n	$p(x_n)$	

Ejemplo 1.16

Sea $U = \{-1,0,1\}$ y $p(x): x^3 = x$, entonces evaluando la función proposicional para cada elemento del conjunto U obtenemos

x	$p(x)$	Valor de verdad
-1	$(-1)^3 = -1$	V
0	$0^3 = 0$	V
1	$1^3 = 1$	V

Dado que la función proposicional se verifica para cada elemento de U, podemos escribirlo como:

$$\forall x \in \{-1,0,1\}:\ x^3 = x \qquad \Rightarrow \qquad \forall x \in U:\ x^3 = x$$

Por lo tanto,

$$\forall x \in U : \; p(x)$$

1.4.3 Cuantificador existencial

El cuantificador existencial es utilizado para afirmar que existe algún elemento que satisface alguna propiedad. El cuantificador existencial es denotado por "$\exists$" y se lee "existe".

La expresión

$$\exists x \in U : \; p(x)$$

indica que existe algún elemento x del conjunto U, que verifica la proposición lógica $p(x)$.

Ejemplo 1.17

Sean $U = \{0,1,2\}$ y $p(x) : x^2 + x = 2$. Luego, evaluando la función proposicional en cada elemento del conjunto U obtenemos

x	$p(x)$	Valor de verdad
0	$0^2 + 0 = 2$	F
1	$1^2 + 1 = 2$	V
2	$2^2 + 2 = 2$	F

Dado que la función proposicional se verifica en al menos algún elemento de U, en este caso para $x = 1$, podemos escribir esto como:

$$\exists x \in \{0,1,2\} : x^2 + x = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \exists x \in U : x^2 + x = 2$$

Por lo tanto,

$$\exists x \in U : \; p(x)$$

Las expresiones

$$\forall x \in U : \; p(x) \qquad \text{y} \qquad \exists x \in U : \; p(x)$$

son proposiciones lógicas. Además,

- Para que sea verdadero
$$\forall x \in U : p(x)$$
Todos los valores de la tabla verdad de $p(x)$ deben ser verdaderos, caso contrario es falso.
- Para que sea verdadero
$$\exists x \in U : p(x)$$
Debe existir al menos un valor verdadero en la tabla de verdad de $p(x)$, y es falso si la tabla de verdad de $p(x)$ posee solo valores falsos.

Sea $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Luego,

$$\forall x \in U : p(x) \;\Leftrightarrow\; p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge \cdots \wedge p(x_n)$$

y

$$\exists x \in U : p(x) \;\Leftrightarrow\; p(x_1) \vee p(x_2) \vee \cdots \vee p(x_n)$$

1.4.4 Composición de cuantificadores

a) La proposición lógica

$$\text{Para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ se verifica } x + 0 = x$$

presenta un único cuantificador universal. Observe que la proposición es equivalente a

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; p(x) \qquad \text{donde} \quad p(x) : \; x + 0 = x$$

b) La proposición lógica

$$\text{Para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y para todo } y \in \mathbb{R}, \text{ se verifica } x + y = 0$$

presenta dos cuantificadores universales. Observe que la proposición es equivalente a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \forall y \in \mathbb{R} : \; p(x,y) \qquad \text{donde} \quad p(x,y) : \; x + y = 0$$

c) La proposición lógica

$$\text{Para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ y para todo } y \in \mathbb{R} \text{ existe } z \in \mathbb{R} \text{ tal que } x + z = y$$

presenta dos cuantificadores universales y un cuantificador existencial. Observe que la proposición es equivalente a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} : \; p(x,y,z) \qquad \text{donde} \quad p(x,y,z) : \; x + z = y$$

1.4.5 Reglas de uso de los cuantificadores

Cuando una proposición lógica posee varios cuantificadores se debe tener las siguientes consideraciones.

Regla 1. Si la proposición posee un único tipo de cuantificador, el orden de ellos es irrelevante.

Veamos algunos ejemplos

a) Las siguientes proposiciones poseen solamente el cuantificador universal. Por lo tanto, todos ellos son equivalentes.

- Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $m \in \mathbb{N}$, se cumple $n + m \in \mathbb{N}$.
- Para todo $m \in \mathbb{N}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple $n + m \in \mathbb{N}$.
- Para todo $n, \; m \in \mathbb{N}$, se cumple $n + m \in \mathbb{N}$.

b) Las siguientes proposiciones poseen solamente el cuantificador existencial. Por lo tanto, todos ellos son equivalentes.

- Existe $n \in \mathbb{N}$ y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n+m=5$.
- Existe $m \in \mathbb{N}$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n+m=5$.
- Existen $n,\ m \in \mathbb{N}$ tales que $n+m=5$.

En los ejemplos anteriores se observó que al tratarse de un mismo cuantificador es posible usar “comas” para resumir el enunciado. De igual forma, se escribe

$$\forall\, m,\ n,\ p \in \mathbb{N} \text{ se cumple } (m+n)+p = n+(m+p)$$

Regla 2. Si una proposición posee distintos cuantificadores, el cambio del orden de ellos modifican el enunciado.

Veamos algunos ejemplos:

a) Considere la siguiente proposición lógica

$$\text{Para todo } n \in \mathbb{N},\ \text{existe } m \in \mathbb{N} \text{ tal que } n+m \text{ es un número impar} \qquad (p_1)$$

Esta proposición quiere decir que una vez elegido cualquier $n \in \mathbb{N}$, es posible encontrar otro número $m \in \mathbb{N}$ tal que su suma sea impar.

Para el caso, donde ya se ha escogido n, se puede elegir $m = n+1$. Luego, $n+m$ es siempre impar.

Consecuentemente, la proposición lógica p_1 es verdadera.

b) Considere la siguiente proposición lógica

$$\text{Existe } m \in \mathbb{N} \text{ tal que para todo } n \in \mathbb{N} \text{ se cumple } n+m \text{ es un número impar} \qquad (p_2)$$

Esta proposición quiere decir que una vez ya fijado $n \in \mathbb{N}$, para cada número $m \in \mathbb{N}$, la suma $n+m$ es impar.

Sea n el número que satisface la proposición, en particular tomando $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$ se debe cumplir que $n+m_1 = n+1$ y $n+m_2 = n+2$ son impares. Sin embargo, esto no posible.

Consecuentemente, la proposición lógica p_2 es falsa.

Por lo tanto, las proposiciones lógicas p_1 y p_2 son distintas. En general, sea $p(x,y)$ una función proposicional de dos variables donde $x \in A$ e $y \in B$ siendo $A,\ B$ ciertos conjuntos.

$$\forall x \in A, \exists y \in B:\ p(x,y) \qquad \text{es distinto que} \qquad \exists x \in A, \forall y \in B:\ p(x,y)$$

1.4.6 Negación de una función proposicional

Sea $p(x)$ una función proposicional definida en U, la negación de dicha función proposicional, denotada por:

$$\sim p(x)$$

es también una función proposicional definida en U, donde $\sim p(x)$ es la negación del enunciado abierto $p(x)$, para cada elemento x de U.

Ejemplo 1.18

Halle la negación de la función proposicional

$$p(x) : x \text{ es un número par} \qquad \text{donde} \quad U = \mathbb{N}$$

Solución: Como la negación del enunciado abierto "x es un número par" es "x es no es número par". La negación de la función proposicional está dada por

$$\sim p(x) : \; x \text{ no es número par} \qquad \text{donde} \quad U = \mathbb{N}$$

También es posible considerar

$$\sim p(x) : \; x \text{ es número impar} \qquad \text{donde} \quad U = \mathbb{N}$$

■

Ejemplo 1.19

Halle la negación de la función proposicional

$$p(x,y) : \; x^2 + 3 > y \qquad \text{donde} \quad U = \mathbb{R}$$

Solución: Lo contrario del símbolo "$>$" es el símbolo "$\leq$". Luego, la negación del enunciado abierto "$x^2 + 3 > y$" es el enunciado abierto "$x^2 + 3 \leq y$". Por lo tanto,

$$\sim p(x,y) : \; x^2 + 3 \leq y \qquad \text{donde} \quad U = \mathbb{R}$$

■

1.4.7 Negación de funciones proposicionales con cuantificadores

Como fue mencionado los enunciados $\left[\forall x \in U : p(x)\right]$ y $\left[\exists x \in U : p(x)\right]$ son proposiciones lógicas, sus respectivas negaciones están dadas por:

$$\sim \left[\forall x \in U : p(x)\right] \equiv \exists x \in U : \sim p(x)$$
$$\sim \left[\exists x \in U : p(x)\right] \equiv \forall x \in U : \sim p(x)$$

Ejemplo 1.20

Determine la negación de: Para todo número real, se satisface $x^2 + 2x \geq -1$

Solución: Sea

$$p(x,y) : x^2 + 2x \geq -1 \qquad \text{luego} \qquad \sim p(x,y) : x^2 + 2x < -1$$

Por lo tanto,

$$\sim \left[\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x \geq -1\right] \equiv \exists x \in \mathbb{R} : \; x^2 + 2x < -1$$

■

Ejemplo 1.21

Determine la negación de la proposición: Todo polinomio de segundo grado con coeficientes reales, posee raíces reales.

Solución: Sea $\mathcal{P}_2(x) = \{\text{Polinomios de grado dos con coeficientes reales}\}$. Luego,

$$\sim \big[\forall p(x) \in \mathcal{P}_2(x) : p(x) \text{ tiene raíces reales}\big] \equiv \exists p(x) \in \mathcal{P}_2(x) : p(x) \text{ no tiene raíces reales}$$

■

Ejemplo 1.22

Verifique la equivalencia

$$\sim \big[\forall x \in U : p(x)\big] \equiv \exists x \in U : \sim p(x)$$

donde

$$p(x) : \; x \text{ es de color negro} \qquad \text{y} \qquad U = \{\text{Los gatos}\}$$

Solución: La proposición $\forall x \in U : p(x)$ afirma que "todos los gatos son de color negro". Luego, la negación $\sim \big[\exists x \in U : p(x)\big]$ seria la frase

Es falso que todos los gatos son de color negro

Luego, si todos los gatos no son negros, entonces habrá al menos un gato que es de otro color, esto es,

Existe al menos un gato que no es de color negro

Lo cual simbólicamente se escribe como $\exists x \in U : \sim p(x)$. Por lo tanto, se ha verificado

$$\sim \big[\forall x \in U : p(x)\big] \equiv \exists x \in U : \sim p(x)$$

■

Para el caso de una función proposicional $p(x,y)$ definida en el conjunto $A \times B$. Las negaciones de la función proposición $p(x,y)$ con dos cuantificadores están dadas por:

$$\sim \big[\forall x \in A,\ \forall y \in B : p(x,y)\big] \equiv \exists x \in A,\ \exists y \in B : \sim p(x,y)$$

$$\sim \big[\forall x \in A,\ \exists y \in B : p(x,y)\big] \equiv \exists x \in A,\ \forall y \in B : \sim p(x,y)$$

$$\sim \big[\exists x \in A,\ \forall y \in B : p(x,y)\big] \equiv \forall x \in A,\ \exists y \in B : \sim p(x,y)$$

$$\sim \big[\exists x \in A,\ \exists y \in B : p(x,y)\big] \equiv \forall x \in A,\ \forall y \in B : \sim p(x,y)$$

Para la negación de una función proposicional de más variables, se procede de manera análoga.

Capítulo 02

Teoría de conjuntos

2.1 Conjuntos

Un conjunto es una colección de objetos. Los objetos que integran un conjunto son llamados elementos del conjunto.

A continuación algunos ejemplos de conjuntos

Ejemplo 2.1

a) El conjunto de las vocales.
b) El conjunto de los planetas del sistema solar.
c) El conjunto de los continentes.
d) El conjunto de los días de la semana.

A los conjuntos lo denotaremos por letras mayúsculas A, B, etcétera. Los elementos de los conjuntos serán denotados por letras minúsculas a, b, c, etcétera.

El conjunto A de los elementos a, b, c y d es denotado por:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

El cual se lee "El conjunto A cuyos elementos son a, b, c y d".

2.1.1 Pertenencia

Cuando a es un elemento del conjunto A, se denotará por

$$a \in A$$

el cual se lee "a pertenece a A".

Cuando un elemento b no es un elemento del conjunto A, se denotará por

$$b \notin A$$

el cual se lee "b no pertenece a A".

Ejemplo 2.2

Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$ se verifica

a) Como a es un elemento de A, entonces $a \in A$.
b) Como c es un elemento de A, entonces $c \in A$.
c) Como d no es un elemento de A, entonces $d \notin A$.

Un conjunto puede tener entre sus elementos otros conjuntos como se puede observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3

Sea

$$A = \{a,\ b,\ c,\ \{a,\ b\},\ \{\{a\}\}\}$$

Luego,

- $a \in A$
- $\{a\} \notin A$
- $\{a,\ b\} \in A$
- $\{\{a\}\} \in A$
- $\{a,\ b,\ c\} \notin A$
- $\{\{a,\ b\}\} \notin A$

2.1.2 Inclusión

Dados dos conjuntos A y B. Si todo elemento del conjunto A es un elemento del conjunto B entonces diremos que A es un subconjunto de B y será denotado por

$$A \subset B$$

el cual se lee "A es un subconjunto de B".

Es decir,

$$A \subset B \qquad \text{si y solo si} \qquad \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$

Además, denotaremos por $A \not\subset B$, si A no es subconjunto de B. En consecuencia,

$$A \not\subset B \qquad \text{si y solo si} \qquad \exists x\ : x \in A \wedge x \notin B$$

Sean los conjuntos

$$A = \{a, b, c\} \qquad \text{y} \qquad B = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Como el elemento $a \in A$ también está en B, es decir, $a \in B$, y esto es válido también para los elementos b y c. Se concluye que

$$A \subset B$$

Por otro lado, sean los conjuntos

$$A = \{a, c\} \qquad \text{y} \qquad B = \{a, b, d, e, f\}$$

Como existe un elemento, en este caso c tal que $c \in A$ y $c \notin B$. Se concluye que

$$A \not\subset B$$

Ejemplo 2.4

Sea

$$A = \{a,\ b,\ c,\ \{a,\ b\},\ \{\{a\}\}\}$$

Luego,

- $\{a\} \subset A$
- $\{\{a\}\} \not\subset A$
- $\{\{\{a\}\}\} \subset A$
- $\{\{\{\{a\}\}\}\} \not\subset A$
- $\{a,\ b,\ c\} \subset A$
- $\{\{a,\ b\}\} \subset A$

Si B es subconjunto de A es posible escribirlo como

$$A \supset B$$

el cual se lee como "A contiene a B" o "A es un superconjunto de B".

Proposición 2.1

Sean A, B y C conjuntos entonces

(i) $A \subset A$ para todo conjunto A

(ii) Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$

Demostración.

(i) Para que $A \subset A$ debemos verificar que

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in A \tag{1}$$

Luego, si $x \in A$ es verdadero o falso. La implicancia $[x \in A \Rightarrow x \in A]$ es siempre verdadera.

Consecuentemente, (1) es un enunciado verdadero. Por lo tanto, $A \subset A$.

(ii) Sea x cualquier elemento en A. Entonces,

$$\begin{array}{rcll} x \in A & \Rightarrow & x \in B & \quad \text{Dado que } A \subset B \\ & \Rightarrow & x \in C & \quad \text{Dado que } B \subset C \end{array}$$

Por consiguiente,

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in C$$

Por lo tanto, $A \subset C$

■

2.1.3 Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos son iguales si y dolo si poseen los mismos elementos.

Es importante notar que la repetición de elementos en un conjunto es irrelevante. Por ejemplo: los conjuntos

$$A = \{1,1,2,3,3,3,5,5,5\} \qquad \text{y} \qquad B = \{1,2,3,5\}$$

son iguales dado que ambos conjuntos poseen los mismos elementos.

Proposición 2.2
Sean A y B conjuntos

$$A = B \qquad \text{si y solo si} \qquad A \subset B \,\wedge\, A \supset B$$

Ejemplo 2.5

Halle x si se conoce que $A = B$, donde

$$A = \{1-x, 2+x\} \qquad \text{y} \qquad B = \{1-x, 4-x\}$$

Solución: Como $A = B$ entonces sus elementos son iguales. En particular,

$$2+x = 4-x \qquad \Rightarrow \qquad 2x = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1$$

En este caso, $A = \{0,3\} = B$ ■

Observación 2.1 Algunos autores suelen utilizar la siguiente notación

$$A \subseteq B \qquad \text{si y solo si} \qquad A \subset B \,\vee\, A = B$$

Sin embargo, la notación $A \subset B$ no impide que los conjuntos A y B puedan ser iguales. En consecuencia, en este libro los símbolos $\subset$ y $\subseteq$ significarán lo mismo.

2.1.4 Inclusión estricta

Dados dos conjuntos A y B, diremos que

$$A \subsetneq B \qquad \text{si y solo si} \qquad A \subset B \,\wedge\, A \neq B$$

Observe que $A \subsetneq B$ implica en particular que no se cumple la inclusión $B \subset A$, esto es, $B \not\subset A$. Por lo tanto,

$$A \subsetneq B \qquad \text{si y solo si} \qquad \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B \quad \wedge \quad \exists x : x \in B \wedge x \notin A$$

Por otro lado, si se conoce que existe una inclusión entre dos conjuntos entonces o se da la inclusión estricta o la igualdad de conjuntos. En consecuencia,

$$A \subset B \qquad \text{si y solo si} \qquad A \subsetneq B \,\triangle\, A = B$$

Ejemplo 2.6

Sean los conjuntos

$$A = \{1,2,3\} \qquad B = \{1,2,3,4\} \qquad C = \{3,2,1\}$$

Analice las relaciones del conjunto A y los conjuntos B y C.

Solución: Observe que

$$A \subset B \qquad \text{y} \qquad A \subset C$$

Además,

$$B \not\subset A \qquad \text{y} \qquad C \subset A$$

Por lo tanto,

$$A \subsetneq B \qquad \text{y} \qquad A = C$$

■

2.1.5 Diagramas lineales

Para poder ilustrar las relaciones de subconjunto y superconjunto usaremos los diagramas lineales.

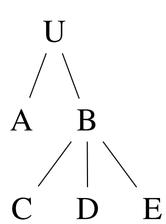
La inclusión $A \subset U$, es denotada por

Esto es, dado dos conjuntos el conjunto ubicado arriba contiene al conjunto de abajo del cual está unido a través de un segmento de linea recta.

Ejemplo 2.7

Represente mediante un diagrama lineal de las inclusiones $A \subset U$, $B \subset U$, $C \subset B$, $D \subset B$ y $E \subset B$

Solución: El diagrama lineal es dado por



■

Ejemplo 2.8

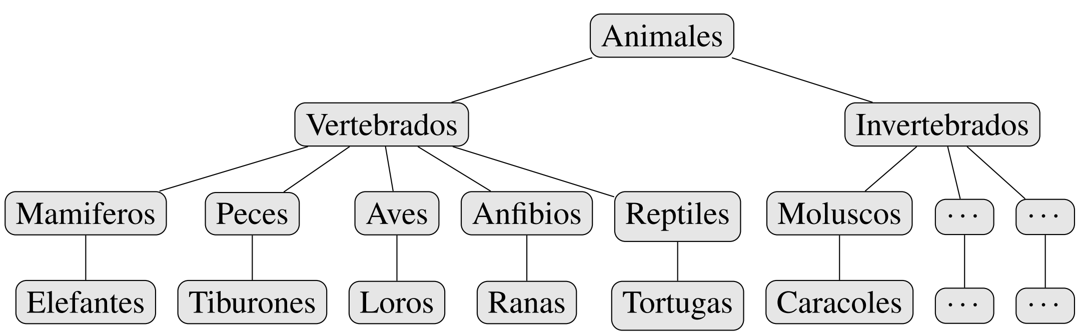
Represente mediante un diagrama lineal los conjuntos. $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 5, 7, 11\}$, $C = \{3, 5\}$ y $U = \{1, 3, 5, 7, 11, 13\}$

Solución: El diagrama de los conjuntos A, B, C y U está dado por

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & U \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

■

Cuando un conjunto es representado mediante descripción verbal, resulta conveniente realizar el diagrama lineal incluyendo recuadros circulares o rectangulares.



El precedente diagrama lineal nos dice en particular que el conjunto de las tortugas es un subconjunto de los reptiles, a su vez los reptiles es un subconjunto de los vertebrados y este último de los animales.

2.2 Conjuntos especiales

Vamos a describir algunos conjuntos que por sus características resultan especiales.

2.2.1 Conjunto unitario

Un conjunto unitario es el conjunto que posee un único elemento.

Ejemplo 2.9

Los siguientes conjuntos son unitarios

a) Sea A el conjunto formado por las estrellas del sistema solar, entonces

$$A = \{\text{El sol}\}$$

Luego, el conjunto A es un conjunto unitario.

b) Sea B el conjunto $B = \{7\}$ como el único elemento del conjunto B es el número 7 se deduce que B es un conjunto unitario.

2.2.2 Conjunto vacío

Un conjunto vacío es el conjunto que no posee elementos. El conjunto vacío es denotado por el símbolo $\emptyset$ o por $\{\,\}$

Ejemplo 2.10

Los siguientes conjuntos son vacíos

a) Sea A el conjunto formado por los tiranosaurios vivos

$$A = \{x : \text{x es un tiranosaurio vivo}\}$$

Dado que no existe algún tiranosaurio vivo, el conjunto A es un conjunto vacío.

b) Sea B el conjunto

$$B = \{x : \; x+1 = x+2\}$$

como no existe un valor numérico tal que $x+1 = x+2$, se deduce que B un conjunto vacío.

Ejemplo 2.11

Pruebe que $\emptyset \subset A$ para todo conjunto A

Solución: Para probar la inclusión $\emptyset \subset A$ debemos verificar que

$$\forall x : x \in \emptyset \Rightarrow x \in A \tag{1}$$

Como el conjunto vacío no posee elementos, entonces

$$\underbrace{x \in \emptyset}_{F} \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \equiv \left[F \Rightarrow p\right] \equiv V$$

Consecuentemente, (1) es un enunciado verdadero. Por lo tanto, $\emptyset \subset A$. ∎

2.2.3 Conjunto universal

El conjunto universal es un conjunto compuesto por todos los elementos a los que se puede referir una situación particular. El conjunto universal es denotado por la letra U.

El conjunto universal no es único, este puede depender del caso tratado.

Ejemplo 2.12

Encuentre un conjuntos universal para el conjunto formado por

$$A = \{x : x \text{ es un persona nacida en Lima}\}$$

Solución: El conjunto universal U está dado por

$$U = \{x : x \text{ es una persona nacida en Perú}\}$$

Observe que, otro conjunto universal podría ser

$$U_0 = \{x : x \text{ es una persona nacida en el planeta tierra}\}$$

■

2.2.4 Conjuntos numéricos

Dada la importancia de los conjuntos numéricos, haremos una breve descripción de dichos conjuntos.

1. Números naturales

Los números naturales es el conjunto

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$$

2. Números enteros

Los números enteros es el conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

3. Números racionales

Los números racionales es el conjunto

$$\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{p}{q} :\ p,\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$$

4. Números reales

Los números reales es el conjunto

$$\mathbb{R} = \{x : x \text{ es un número real}\}$$

En el capítulo 4 se estudiará a detalle el conjunto de los números reales.

5. Números irracionales

Los números irracionales es el conjunto

$$\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}\} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

6. Números complejos

Los números complejos es el conjunto

$$\mathbb{C} = \{a + ib :\ a,\ b \in \mathbb{R}\}$$

donde i es la unidad imaginaria, esto es, $i^2 = -1$. En el capítulo 5 se estudiará a detalle el conjunto de los números complejos.

De las definiciones de los conjuntos numéricos se deduce que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

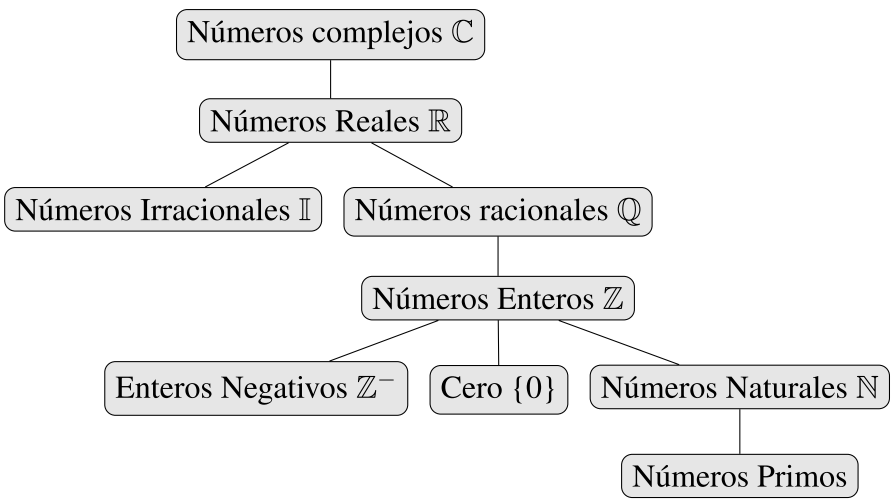


Figura 2.1: Diagrama lineal de los conjuntos numéricos

2.3 Diagramas de Venn

Un conjunto es representado mediante un diagrama de Venn cuando sus elementos se encuentran dentro de una región cerrada.

En un diagrama de Venn, los conjuntos son usualmente representador por círculos, siendo sus elementos ubicados dentro de ellos. Los círculos se encuentran dentro de un rectángulo el cual representa el conjunto universal.

2.3.1 Diagramma de Venn para dos conjuntos

La forma para representar dos conjuntos mediante diagrama de Venn está dado por

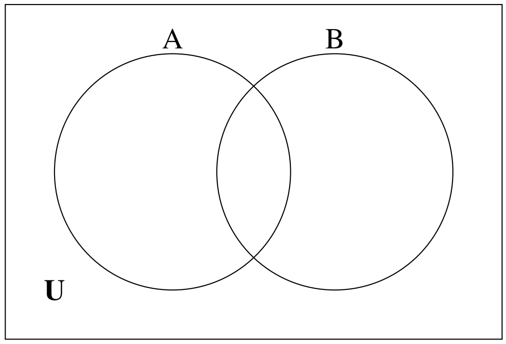


Figura 2.2: Diagrama de Venn para dos conjuntos

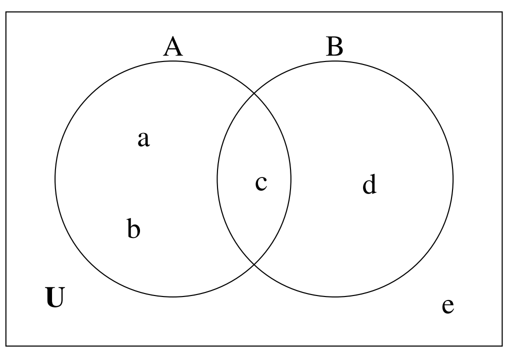
Ejemplo 2.13

Representar mediante diagramas de Venn los siguientes conjuntos

$$A = \{a, b, c\} \qquad \text{y} \qquad B = \{c, d\}$$

donde el conjunto universal está dado por $U = \{a, b, c, d, e\}$

Solución:



En el diagrama se observa que los elementos de los conjuntos A y B se ubican dentro de los círculos que representan dichos conjuntos. Además, como el elemento c están en ambos conjuntos este se encuentra dentro de la parte común de los dos círculos. Finalmente, el elemento e no está en ambos conjuntos, pero sí en el conjunto universal, por ello se ubica fuera de los círculos pero dentro del rectángulo. ■

2.3.2 Diagramma de Venn para tres conjuntos

La forma para representar tres conjuntos mediante diagrama de Venn está dado por

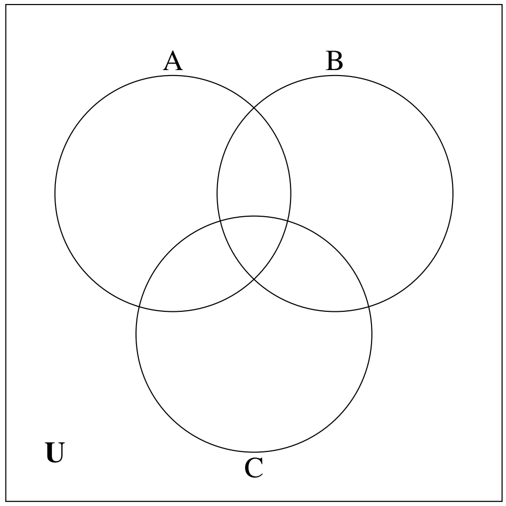


Figura 2.3: Diagrama de Venn para tres conjuntos

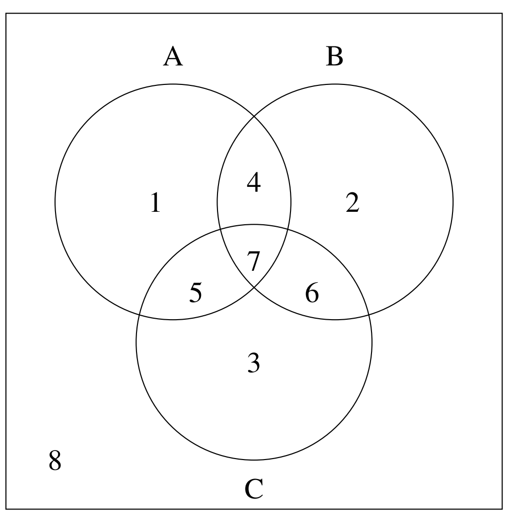
Ejemplo 2.14

Represente mediante diagramas de Venn los siguientes conjuntos

$$A = \{1,4,5,7\} \qquad B = \{2,4,6,7\} \qquad C = \{3,5,6,7\}$$

donde el conjunto universal está dado por $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Solución:



■

2.4 Operaciones de conjuntos

Vamos a definir algunas operaciones para un par de conjuntos A y B.

2.4.1 Unión de conjuntos

La unión de los conjuntos A y B, denotado por $A \cup B$ es definido como

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Esto es, la unión de dos conjuntos es el conjunto cuyos elementos es la reunión de los elementos de los dos conjuntos.

Usando diagramas de Venn la unión de conjuntos es representado por

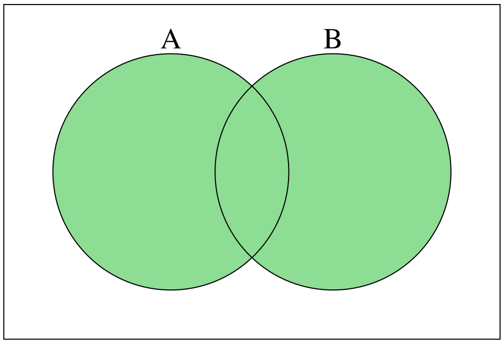


Figura 2.4: Diagrama de Venn de $A \cup B$

donde la parte sombreada indica las regiones que son consideradas.

Ejemplo 2.15

Sean los conjuntos

$$A = \{1,3,5\} \quad \text{y} \quad B = \{3,6,9\}$$

Luego, la unión está dada por

$$A \cup B = \{1,3,5,6,9\}$$

Proposición 2.3

Sean A, B y C conjuntos entonces

(i) $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$
(ii) Si $A \subset C$ y $B \subset C$ entonces $A \cup B \subset C$
(iii) Si $A \subset C$ y $B \subset D$ entonces $A \cup B \subset C \cup D$

Demostración.

(i) Observe que

$$\begin{array}{rcll} x \in A & \Rightarrow & x \in A \vee x \in B & \text{Ley de la adición } p \Rightarrow p \vee q \\ & \Rightarrow & x \in A \cup B & \text{Definición de } \cup \end{array}$$

Por lo tanto, $A \subset A \cup B$

(ii) Observe que

$$\begin{array}{rcll} x \in A \cup B & \Rightarrow & x \in A \vee x \in B & \text{Definición de } \cup \\ & \Rightarrow & x \in C \vee x \in C & \text{De las inclusiones } A \subset C \text{ y } B \subset C \\ & \Rightarrow & x \in C & \text{Ley de la idempotencia } p \vee p \equiv p \end{array}$$

Por lo tanto, $A \cup B \subset C$

(iii) Observe que

$$\begin{array}{rcll} x \in A \cup B & \Rightarrow & x \in A \vee x \in B & \text{Definición de } \cup \\ & \Rightarrow & x \in C \vee x \in D & \text{De las inclusiones } A \subset C \text{ y } B \subset D \\ & \Rightarrow & x \in C \cup D & \text{Definición de } \cup \end{array}$$

Por lo tanto, $A \cup B \subset C \cup D$

■

2.4.2 Intersección de conjuntos

La intersección de los conjuntos A y B, denotado por $A \cap B$ es definido como

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Esto es, la intersección de dos conjuntos es el conjunto constituido por los elementos comunes a los dos conjuntos.

Usando diagramas de Venn la intersección de conjuntos es representado por

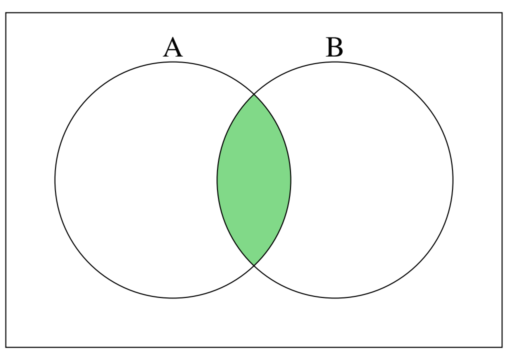


Figura 2.5: Diagrama de Venn de $A \cap B$

Ejemplo 2.16

Sean los conjuntos

$$A = \{1,3,5\} \qquad \text{y} \qquad B = \{3,6,9\}$$

Luego, la intersección está dada por

$$A \cap B = \{3\}$$

Proposición 2.4
Sean A, B C y D conjuntos entonces

(i) $A \cap B \subset A$ y $B \cap B \subset A$
(ii) Si $A \subset C$ y $B \subset C$ entonces $A \cap B \subset C$
(iii) Si $A \subset C$ y $B \subset D$ entonces $A \cap B \subset C \cap D$

Demostración.

(i) Observe que

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Rightarrow x \in A \wedge x \in B && \text{Definición de } \cap \\ &\Rightarrow x \in A && \text{Ley de la simplificación } p \wedge q \Rightarrow p \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A \cap B \subset A$

(ii) Observe que

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Rightarrow x \in A \wedge x \in B && \text{Definición de } \cap \\ &\Rightarrow x \in C \wedge x \in C && \text{De las inclusiones } A \subset C \text{ y } B \subset C \\ &\Rightarrow x \in C && \text{Ley de la idempotencia } p \wedge p \equiv p \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A \cap B \subset C$

(iii) Observe que

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Rightarrow x \in A \wedge x \in B && \text{Definición de } \cap \\ &\Rightarrow x \in C \wedge x \in D && \text{De las inclusiones } A \subset C \text{ y } B \subset D \\ &\Rightarrow x \in C \cap D && \text{Definición de } \cap \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A \cap B \subset C \cap D$

■

Definición 2.1
Dos conjuntos A y B son llamados disjuntos si $A \cap B = \emptyset$

Ejemplo 2.17

Sean los conjuntos
$$A = \{a, c, e\} \qquad \text{y} \qquad B = \{b, d, f\}$$
Luego, la intersección está dada por
$$A \cap B = \emptyset$$
Por lo tanto, A y B son conjuntos disjuntos.

Proposición 2.5

Sean A, B, C conjuntos y U el conjunto universal entonces

(i) Elementos neutros

(a) $A \cup \emptyset = A$ (b) $A \cap U = A$

(ii) Leyes de idempotencia

(a) $A \cup A = A$ (b) $A \cap A = A$

(iii) Leyes conmutativas

(a) $A \cup B = B \cup A$ (b) $A \cap B = B \cap A$

(iv) Leyes asociativas

(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(v) Leyes distributivas

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demostración. Probaremos solamente la parte (a) de algunas afirmaciones

(i) Por (i) de la Proposición 2.1 y el Ejemplo 2.11

$$A \subset A \qquad \text{y} \qquad \emptyset \subset A$$

Usando (i) de la Proposición 2.3

$$A \cup \emptyset \subset A$$

Por (ii) de la Propiedad 2.3

$$A \subset A \cup \emptyset$$

Finalmente,

$$A \cup \emptyset \subset A \quad \text{y} \quad A \subset A \cup \emptyset \quad \Rightarrow \quad A \cup \emptyset = A$$

(iii) Observe que

$$\begin{array}{rcll} x \in A \cup B & \Leftrightarrow & x \in A \ \vee \ x \in B & \text{Definición de } \cup \\ & \Leftrightarrow & x \in B \ \vee \ x \in A & \text{Ley lógica de conmutación } p \vee q \equiv q \vee p \\ & \Leftrightarrow & x \in B \cup A & \text{Definición de } \cup \end{array}$$

Por lo tanto, $A \cup B = B \cup A$

(v) Observe que

$$
\begin{array}{rcll}
x \in A \cap (B \cup C) & \Leftrightarrow & x \in A \ \wedge \ x \in (B \cup C) & \text{Definición de } \cap \\
& \Leftrightarrow & x \in A \ \wedge \ (x \in B \ \vee \ x \in C) & \text{Definición de } \cup \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \vee \ (x \in A \ \wedge \ x \in C) & \text{Ley lógica de distribución} \\
& \Leftrightarrow & x \in (A \cap B) \ \vee \ x \in (A \cap C) & \text{Definición de } \cap \\
& \Leftrightarrow & x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) & \text{Definición de } \cup
\end{array}
$$

Por lo tanto, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

■

2.4.3 Diferencia de conjuntos

La diferencia entre el conjunto A y el conjunto B, denotado por $A - B$ es definido como

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Esto es, la diferencia entre el conjunto A y el conjunto B, es el conjunto cuyos elementos son los elementos de A que no están en el conjunto B.

Ejemplo 2.18

Sean los conjuntos

$$A = \{1,3,5\} \qquad \text{y} \qquad B = \{3,6,9\}$$

Luego, la diferencia $A - B$ está dada por

$$A - B = \{1,5\}$$

Usando diagramas de Venn la diferencia $A - B$ está representado por

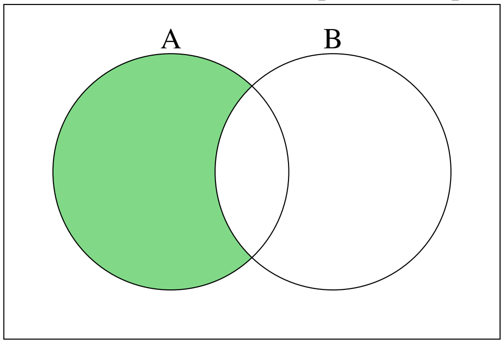


Figura 2.6: Diagrama de Venn de $A - B$

2.4.4 Diferencia simétrica de conjuntos

La diferencia simétrica de los conjuntos A y B, denotado por $A \triangle B$ es definido como

$$A \triangle B = \{x : x \in A \triangle x \in B\}$$

Esto es, la diferencia simétrica de dos conjuntos, es el conjunto constituido por los elementos que pertenecen a un conjunto pero no a otro. Lo cual puede ser reescrito como

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

Usando diagramas de Venn la diferencia simétrica de los conjuntos A y B está representado por

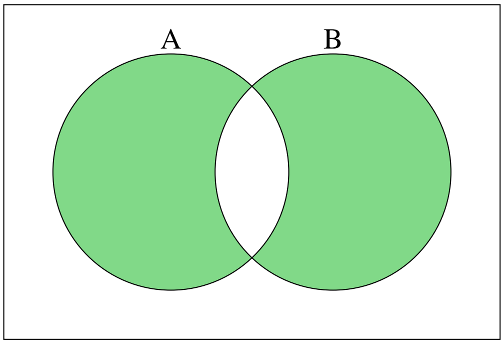


Figura 2.7: Diagrama de Venn de $A \triangle B$

Ejemplo 2.19

Sean los conjuntos

$$A = \{1,3,5\} \qquad \text{y} \qquad B = \{3,6,9\}$$

Luego, la diferencia simétrica está dada por

$$A \triangle B = \{1,5,6,9\}$$

2.4.5 Complemento de conjuntos

Sean A un conjunto y U el conjunto universal. El complemento de A, denotado por A^c es definido como

$$A^c = U - A$$

Observe que

$$\begin{array}{rcll} x \in A^c & \Leftrightarrow & x \in (U - A) & \text{Definición de complemento} \\ & \Leftrightarrow & x \in U \ \wedge \ x \notin A & \text{Definición de diferencia} \\ & \Leftrightarrow & x \notin A & \text{Ley de identidad } V \wedge p \equiv p \end{array}$$

En consecuencia, tenemos siguiente equivalencia de complemento

$$x \in A^c \qquad \text{si y solo si} \qquad x \notin A$$

Esto es, el complemento de un conjunto está constituido por los elementos que no pertenecen al conjunto dado.

Usando diagramas de Venn el complemento del conjunto A está representado por

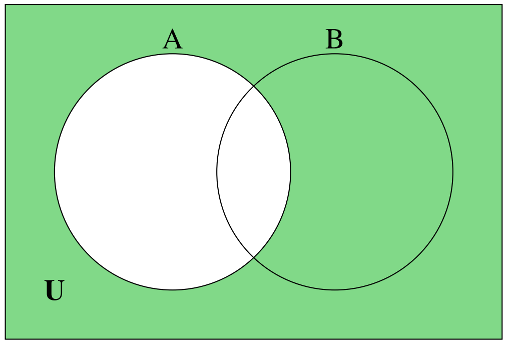


Figura 2.8: Diagrama de Venn de A^c

Ejemplo 2.20

Sean los conjuntos

$$A = \{1,4,5\} \qquad \text{y} \qquad U = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Luego, el complemento de A es el conjunto

$$A^c = \{2,3,6\}$$

Ejemplo 2.21

Sean A y B dos conjuntos. Pruebe que $A - B = A \cap B^c$

Solución: Observe que

$$\begin{array}{rcll} x \in (A-B) & \Leftrightarrow & x \in A \ \wedge \ x \notin B & \text{Definición de diferencia} \\ & \Leftrightarrow & x \in A \ \wedge \ (x \in U \ \wedge \ x \notin B) & \text{Ley de identidad } V \wedge p \equiv p \\ & \Leftrightarrow & x \in A \ \wedge \ x \in (U - B) & \text{Definición de diferencia} \\ & \Leftrightarrow & x \in A \ \wedge \ x \in B^c & \text{Definición de complemento} \\ & \Leftrightarrow & x \in A \cap B^c & \text{Definición de } \cap \end{array}$$

Por lo tanto, $A - B = A \cap B^c$ ■

Proposición 2.6

Sean A y B dos conjuntos, entonces

(a) $\emptyset^c = U$

(b) $U^c = \emptyset$

(c) $(A^c)^c = A$

(d) $A \cup A^c = U$

(e) $A \cap A^c = \emptyset$

(f) $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$

Proposición 2.7 (Leyes de De Morgan)
Sean A y B dos conjuntos

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Demostración.
(a) Observe que

$$\begin{array}{rcll} x \in (A \cup B)^c & \Leftrightarrow & x \notin (A \cup B) & \text{Definición de complemento} \\ & \Leftrightarrow & \sim [x \in A \cup B] & \text{Definición de negación} \\ & \Leftrightarrow & \sim [x \in A \vee x \in B] & \text{Definición de } \cup \\ & \Leftrightarrow & \sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B) & \text{Ley lógica de De Morgan} \\ & \Leftrightarrow & x \notin A \wedge x \notin B & \text{Definición de negación} \\ & \Leftrightarrow & x \in A^c \wedge x \in B^c & \text{Definición de complemento} \\ & \Leftrightarrow & x \in A^c \cap B^c & \text{Definición de } \cap \end{array}$$

Por lo tanto, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

■

2.5 Cardinalidad de un conjunto

Es está sección veremos como los conjuntos pueden ser clasificados de acuerdo a la cantidad de elementos que posee.

2.5.1 Cardinal

Sea A un conjunto finito, entonces A posee n elementos distintos, donde n es un número natural. Al número n se le denomina cardinal del conjunto y es denotado por cualquiera de las siguientes expresiones:

$$\text{Card}\,(A) = n \qquad n(A) = n \qquad |A| = n$$

A continuación unos ejemplos sobre la cardinalidad de ciertos conjuntos.

Ejemplo 2.22

$$\begin{array}{lcl} A = \{x : \ x \text{ es un día de la semana}\} & \Rightarrow & \text{Card}\,(A) = 7 \\ B = \{x : \ x \text{ es una vocal}\} & \Rightarrow & \text{Card}\,(B) = 5 \\ C = \{\ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\} & \Rightarrow & \text{Card}\,(C) = 9 \end{array}$$

Dado que un conjunto vacío no tiene elementos, entonces

$$\text{Card}\,(\emptyset) = 0$$

Ejemplo 2.23

$$A = \{x : \text{x es un tiranosaurio vivo}\} \quad \Rightarrow \quad \text{Card}\,(A) = 0$$
$$B = \{x : \ x+1 = x+2\} \quad \Rightarrow \quad \text{Card}\,(B) = 0$$

2.5.2 Conjunto finito

Un conjunto A es llamado finito si podemos enumerar todos sus elementos distintos. Asimismo, si contamos los elementos de un conjunto y llegamos a un fin este conjunto será un conjunto finito.

Ejemplos:

(1) El conjunto A de los días de la semana es finito dado que podemos enumerar todos sus elementos.

$$A = \{\text{Lunes, Martes, Miercoles, Jueves, Viernes, Sábado, Domingo}\}$$

(2) El conjunto de las personas contagiadas por el coronavirus

$$B = \{x : x \text{ es una persona contagiada por el coronavirus SARS-CoV-2}\}$$

Aunque, un conjunto B posee muchos elementos y no es posible identificar cada uno de sus elementos, este conjunto es finito porque si empezamos a contar las personas contagiadas llegaremos a un fin, dado que la población mundial no es superior a 10 billones.

Proposición 2.8

Sea A y B dos conjuntos disjuntos finitos, entonces

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

Ejemplo 2.24

Sean E el conjunto de los días de enero y F el conjunto de los días de febrero. Determine el número de días de los meses de enero y febrero en un año no bisiesto.

Solución: Sean

$$E = \{x : x \text{ es un día de enero}\} \qquad \text{y} \qquad F = \{x : x \text{ es un día de febrero}\}$$

Entonces, $\text{Card}(E) = 31$ y $\text{Card}(F) = 28$. Como los días de enero y febrero son distintos entonces $E \cap F = \emptyset$. Por lo tanto, el conjunto

$$E \cup F = \{x : x \text{ es un día de enero o febrero}\}$$

posee cardinal igual a

$$\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) = 31 + 28 = 59$$

■

La Proposición 2.8 puede ser generalizada considerando el siguiente resultado.

Proposición 2.9

Sean A_i para $i = 1, \ldots, n$ conjuntos finitos que son disjuntos dos a dos, esto es, $A_i \cap A_j$ si $i \neq j$ entonces

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \cdots + \text{Card}(A_n)$$

Proposición 2.10

Sea A y B dos conjuntos finitos, entonces

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Demostración. La descomposición de los conjuntos A, B y $A \cup B$ mediante conjuntos disjuntos está dada por

$$\begin{aligned} A &= (A - B) \cup (A \cap B) \\ B &= (B - A) \cup (A \cap B) \\ A \cup B &= (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) \end{aligned}$$

Usando la Proposición 2.9

$$\begin{aligned} \text{Card}(A) &= \text{Card}(A - B) + \text{Card}(A \cap B) \\ \text{Card}(B) &= \text{Card}(B - A) + \text{Card}(A \cap B) \\ \text{Card}(A \cup B) &= \text{Card}(A - B) + \text{Card}(B - A) + \text{Card}(A \cap B) \end{aligned}$$

Luego, reemplazando las dos primeras identidades en la última se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup B) &= \text{Card}(A - B) + \text{Card}(B - A) + \text{Card}(A \cap B) \\ &= \big[\text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)\big] + \big[\text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)\big] + \text{Card}(A \cap B) \\ &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.25

En una aula de matemáticas hay 38 estudiantes. En el examen parcial aprobaron 15 estudiantes y en el examen final solo 10. Además, se conoce que solo 7 estudiantes aprobaron los dos exámenes. Determine la cantidad de estudiantes que no aprobaron ningún examen.

Solución: Sean los conjuntos

$$\begin{aligned} U &= \{x : x \text{ es un estudiante de matemáticas}\} & \Rightarrow \quad |U| &= 38 \\ P &= \{x : x \text{ es un estudiante que aprobó el examen parcial}\} & \Rightarrow \quad |P| &= 15 \\ F &= \{x : x \text{ es un estudiante que aprobó el examen final}\} & \Rightarrow \quad |F| &= 10 \\ P \cap F &= \{x : x \text{ es un estudiante que aprobó dos examenes}\} & \Rightarrow \quad |P \cap F| &= 7 \end{aligned}$$

Además,

$$P \cup F = \{x : x \text{ es un estudiante que al menos aprobó un examen}\}$$

Luego,

$$\text{Card}(P \cup F) = \text{Card}(P) + \text{Card}(F) - \text{Card}(P \cap F) = 15 + 10 - 7 = 18$$

Por otro lado,

$$U - (P \cup F) = \{x : \ x \text{es un estudiante que no aprobó algún examen}\}$$

y los conjuntos $U - (P \cup F)$ y $P \cup F$ son disjuntos. Consecuentemente,

$$38 = \text{Card}(U) = \text{Card}\big(U - (P \cup F)\big) + \text{Card}(P \cup F) = \text{Card}\big(U - (P \cup F)\big) + 18$$

Por lo tanto, 20 estudiantes no aprobaron ningún examen. ■

2.5.3 Conjunto infinito

Decimos que un conjunto A es infinito si dicho conjunto no es finito, esto es, A es un conjunto infinito cuando no es posible enumerar y identificar cada uno de sus elementos.

Un ejemplo de un conjunto infinito está dado por el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, en este caso no podemos dar una lista completa de todos sus elementos.

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$$

Otros ejemplos de conjuntos infinitos son $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etcétera.

Ejemplo 2.26

Los siguientes conjuntos son infinitos

a) El conjunto de los números enteros pares

$$P = \{x \,:\, x = 2n,\, n \in \mathbb{Z}\}$$

o

$$P = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

b) El conjunto de los números enteros múltiplos de p

$$A = \{x \,:\, x = pn,\, n \in \mathbb{Z}\}$$

c) El conjunto de los números reales en el intervalo $[0,1]$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$$

Es interesante notar que aunque los conjuntos de los números naturales y reales son infinitos. El conjunto de los números reales es considerado mucho más grande que los números naturales en el sentido que en $\mathbb{N}$ es posible enumerarlos en una lista, cuando un conjunto satisface última condición el conjunto es llamado contable caso contrario es llamado incontable.

Ejemplos de conjuntos contables: Los números naturales, los números enteros, los números racionales, los números primos, los números pares, los números múltiplos de k, etcétera.

Ejemplos de conjuntos incontables: Los números reales, los números complejos, los número irracionales, los números en un intervalo $[a,b]$, etcétera.

2.5.4 Conjunto potencia

Sea X un conjunto, denotaremos por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto potencia de X donde

$$\mathcal{P}(X) = \{A : \ A \text{ es un subconjunto de } X\}$$

El conjunto potencia también es llamado conjunto de partes.

De la definición se deduce que para cualquier conjunto X se verifica

$$\emptyset \in \mathcal{P}(X) \qquad \text{y} \qquad X \in \mathcal{P}(X)$$

Proposición 2.11

Sean X y Y conjuntos se verifica

$$\text{Si } \ X \subset Y \ \text{ entonces } \ \mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y)$$

Demostración. Observe que

$$\begin{array}{llll} A \in \mathcal{P}(X) & \Rightarrow & A \subset X & \text{Definición de conjunto de partes} \\ & \Rightarrow & A \subset X \ \wedge \ X \subset Y & \text{Usando la inclusión de la hipótesis } X \subset Y \\ & \Rightarrow & A \subset Y & \text{Proposición 2.1} \\ & \Rightarrow & A \in \mathcal{P}(Y) & \text{Definición de conjunto de partes} \end{array}$$

Por lo tanto, $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y)$ ■

Ejemplo 2.27

Sean $X = \{a,b\}$ y $Y = \{1,2,3\}$. Halle $\mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{P}(Y)$

Solución: Los subconjuntos de X son $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ y X. Luego,

$$\mathcal{P}(X) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\big\}$$

De igual manera, se obtiene

$$\mathcal{P}(Y) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}$$

■

Proposición 2.12

Sea X un conjunto finito entonces $\text{Card}(\mathcal{P}(X)) = 2^{\text{Car}(X)}$

En el Ejemplo 2.27, el conjunto $Y = \{1,2,3\}$ posee tres elementos. Luego,

$$\text{Card}(\mathcal{P}(Y)) = 2^{\text{car}(Y)} = 2^3 = 8$$

Lo cual se verifica dado que

$$\mathcal{P}(Y) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}$$

Capitulo 03

Inducción matemática

En este capitulo n, m y k denotarán números enteros a menos que se especifique lo contrario.

3.1 Principios de inducción

Antes de enunciar los principios de inducción matemática, presentamos el axioma que será de vital importancia.

Axioma de inducción. Sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ que satisface:

- $1 \in S$
- $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$

entonces $S = \mathbb{N}$.

3.1.1 Primer principio de inducción matemática

Proposición 3.1 (Primer principio de inducción matemática)

Sea $p(n)$ una función proposicional definida en $\mathbb{N}$. Si se satisface

(i) $p(1)$ es verdadero. (Base inductiva)

(ii) Si $p(k)$ es verdadero, entonces $p(k+1)$ es verdadero. (donde $k \in \mathbb{N}$) (Paso inductivo)

Entonces

$$p(n) \text{ es verdadero para todo } n \geq 1$$

Demostración. Sea

$$S = \{n \in \mathbb{N} : p(n) \text{ es verdadero}\}$$

Luego, S es un subconjunto de $\mathbb{N}$.

- Por la condición (i), $1 \in S$.
- Si $k \in S$, es decir $p(k)$ es verdadero, por la condición (ii), $p(k+1)$ es verdadero, es decir, $k+1 \in S$.

Usando el axioma de inducción se deduce que $S = \mathbb{N}$. Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Ejemplo 3.1

Pruebe que para todo número natural n se satisface

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solución: Probaremos la fórmula

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ usando el primer principio de inducción matemática.

Sea

$$p(n):\ 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(i) Probaremos que la fórmula es valida para $n=1$, es decir, mostraremos que $p(1)$ es verdadero

$$p(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Por lo tanto, $p(1)$ es verdadero.

(ii) Probaremos que para cada $k \in \mathbb{N}$: Si $p(k)$ es verdadero, entonces $p(k+1)$ es verdadero. Suponemos, que $p(k)$ es verdadero (Hipótesis Inductiva), esto es

$$1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= (1+2+3+\cdots+k)+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\ &= (k+1)\left[\frac{k}{2}+1\right] \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $p(k+1)$ es verdadero.

Usando el primer principio de inducción, $p(n)$ es verdadero es válido para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es,

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

■

Ejemplo 3.2

Pruebe que para todo número natural n se satisface:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Solución: Probaremos la fórmula usando el primer principio de inducción matemática.

Sea

$$p(n):\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(i) Probaremos que la fórmula es válida para $n=1$, es decir, mostraremos que $p(1)$ es verdadero

$$\frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

Por lo tanto, $p(1)$ es verdadero.

(ii) Probaremos que dado $k \in \mathbb{N}$: Si $p(k)$ es verdadero, entonces $p(k+1)$ es verdadero. Suponemos, que $p(k)$ es verdadero (Hipótesis Inductiva), esto es

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} &= \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} \\
&= \frac{1}{k+1}\left[k+\frac{1}{k+2}\right] \\
&= \frac{1}{k+1}\left[\frac{k^2+2k+1}{k+2}\right] \\
&= \frac{1}{k+1}\cdot\frac{(k+1)^2}{k+2} \\
&= \frac{k+1}{(k+1)+1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $p(k+1)$ es verdadero.

Usando el principio de inducción, para todo $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ es verdadero. ■

Ejemplo 3.3

Pruebe que:

$$10^{n+1}+10^{n}+1 \qquad \text{es divisible por } 3, \quad \forall n \geq 1.$$

Solución: Probaremos la propiedad usando el primer principio de inducción matemática.

Sea

$$p(n): \; 10^{n+1}+10^{n}+1 \quad \text{es divisible por } 3$$

(i) Probaremos que la propiedad es válida para $n=1$, es decir, mostraremos que $p(1)$ es verdadero

$$10^{1+1}+10^{1}+1=111=3\cdot 37$$

Por lo tanto, $p(1)$ es verdadero.

(ii) Probaremos que dado $k\in\mathbb{N}$: Si $p(k)$ es verdadero, entonces $p(k+1)$ es verdadero. Suponemos, que $p(k)$ es verdadero (Hipótesis Inductiva), esto es

$$10^{k+1}+10^{k}+1=3m \qquad \text{donde } m\in\mathbb{Z}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
10^{(k+1)+1}+10^{k+1}+1 &= 10\cdot 10^{k+1}+10\cdot 10^{k}+10-9\\
&= 10\cdot\left(10^{k+1}+10^{k}+1\right)-9\\
&= 10(3m)-9\\
&= 3\cdot(10m-3)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $p(k+1)$ es verdadero.

Usando el primer principio de inducción, para todo $n\in\mathbb{N}$, $p(n)$ es verdadero. ■

3.1.2 Primer principio de inducción matemática generalizado

Proposición 3.2 (Primer principio de inducción matemática generalizado)

Sea $p(n)$ una función proposicional definida en $\mathbb{N}$. Si se satisface:

(i) $p(n_0)$ es verdadero.

(ii) Si $p(k)$ es verdadero, entonces $p(k+1)$ es verdadero. (donde $k\in\mathbb{N}$ con $k\geq n_0$)

Entonces

$$p(n) \quad \text{es verdadero para todo} \quad n\geq n_0$$

El valor n_0 considerado en la proposición anterior, se elige como el menor número natural que satisface la función proposicional $p(x)$.

Ejemplo 3.4

Pruebe que:

$$n! > 2^n \qquad \forall n \geq 4$$

Solución: Probaremos la fórmula usando el primer principio de inducción matemática generalizado.

Sea

$$p(n): \; n! > 2^n$$

(i) Probaremos que la fórmula es valida para $n_0 = 4$, es decir, mostraremos que $p(4)$ es verdadero

$$4! = 24 > 16 = 2^4$$

Por lo tanto, $p(4)$ es verdadero.

(ii) Probaremos que dado $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 4$: Si $p(k)$ es verdadero, entonces $p(k+1)$ es verdadero. Suponemos, que $p(k)$ es verdadero (Hipótesis Inductiva), esto es

$$k! > 2^k$$

Luego,

$$(k+1)! = k! \cdot (k+1) > 2^k(k+1) > 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}$$

Por lo tanto, $p(k+1)$ es verdadero.

Usando el primer principio de inducción generalizado, $p(n)$ es verdadero para todo $n \geq 4$. ■

3.1.3 Segundo principio de inducción matemática

Proposición 3.3 (Segundo principio de inducción matemática)

Sea $p(n)$ una función proposicional definida en $\mathbb{N}$. Si se satisface:

(i) $p(1)$ es verdadero.

(ii) Si $p(1)$, $p(2)$, ..., $p(k)$ son verdaderos, entonces $p(k+1)$ es verdadero.

Entonces

$$p(n) \quad \text{es verdadero para todo} \quad n \geq 1$$

Definición 3.1 (Números de Fibonacci)

Los números de Fibonacci están definidos mediante la relación

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_n &= F_{n-2} + F_{n-1} \qquad \text{si} \quad n \geq 3 \end{aligned}$$

Los primeros números de Fibonacci son los siguientes:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21, 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \ldots$$

Los números de Fibonacci a partir del tercer número resultan ser la suma de sus dos predecesores.

Ejemplo 3.5

Pruebe que los números de Fibonacci satisfacen

$$F_n < 2^n \qquad n \geq 1$$

Solución: Probaremos que la fórmula es valida para todo $n \geq 1$, usando el segundo principio de inducción matemática.

Sea

$$p(n):\ F_n < 2^n$$

(i) De la definición de los números de Fibonacci se tiene

$$F_1 = 1 < 2^1 \qquad \text{y} \qquad F_2 = 1 < 2^2$$

Esto es, $p(1)$ y $p(2)$ son verdaderos

(ii) Dado $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 3$: Asumiremos por hipótesis inductiva que

$$p(m) \quad \text{es verdadero para} \quad 1 \leq m \leq k$$

esto es

$$F_m < 2^m \quad \text{es verdadero para} \quad 1 \leq m \leq k$$

En particular, es válido

$$F_{k-1} < 2^{k-1} \qquad \text{y} \qquad F_k < 2^k$$

Luego,

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_{k-1} + F_k \\ &< 2^{k-1} + 2^k \\ &= 2^{k-1} + 2 \cdot 2^{k-1} \\ &= 3 \cdot 2^{k-1} \\ &< 2^2 \cdot 2^{k-1} \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $p(k+1)$ es verdadero.

Usando el segundo principio de inducción, $p(n)$ es verdadero, para todo $n \geq 1$. ■

3.2 Sumatorias

Definición 3.2 (Sucesión)

Una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números o simplemente una sucesión es una colección de la forma

$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \ldots$$

donde a_k es un número real para cada $k \in \mathbb{N}$.

Por simplicidad es común escribir una sucesión como (a_k). Cada número a_k es llamado término k-ésimo, esto es, el término que ocupa la posición k de la sucesión.

Ejemplo 3.6

Escriba los cuatro primeros elementos de la sucesión $\left(\frac{1}{k^2}\right)$

Solución: El término k-ésimo de la sucesión está dada por:

$$a_k = \frac{1}{k^2}$$

Luego,

- $a_1 = 1$
- $a_2 = \frac{1}{4}$
- $a_3 = \frac{1}{9}$
- $a_4 = \frac{1}{16}$

■

Definición 3.3 (Sumatoria)

La sumatoria desde $k = 1$ hasta $k = n$ de los elementos a_k, es denotada por

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

y es definida inductivamente por

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$$

De la definición de sumatoria se deduce que

- $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$
- $\sum_{k=1}^{2} a_k = \sum_{k=1}^{1} a_k + a_2 = a_1 + a_2$
- $\sum_{k=1}^{3} a_k = \sum_{k=1}^{2} a_k + a_3 = (a_1 + a_2) + a_3$

- $\sum_{k=1}^{4} a_k = \sum_{k=1}^{3} a_k + a_4 = (a_1+a_2+a_3)+a_4$

En general,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

3.2.1 Propiedades de las sumatorias

Usando la definición de sumatoria, se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ veces}} = n$$

Por el Ejemplo 3.1, tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Proposición 3.4 (Propiedades de las sumatorias)

Sean (a_k) y (b_k) dos sucesiones de números reales y c un número real. Entonces,

(i) $\sum_{k=1}^{n}(ca_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ (ii) $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

Ejemplo 3.7

Calcule la sumatoria

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+3)$$

Solución: Usando las propiedades de la sumatorias, se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k+3) &= \sum_{k=1}^{n}(2k)+\sum_{k=1}^{n} 3 && \text{Proposición 3.4, propiedad (ii)}\\
&= 2\sum_{k=1}^{n} k+3\sum_{k=1}^{n} 1 && \text{Proposición 3.4, propiedad (i)}\\
&= 2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+3n && \text{Fórmulas de sumatorías}\\
&= n^2+4n
\end{aligned}$$

■

Definición 3.4
La sumatoria desde $k=m$ hasta $k=n$ (donde $m<n$) de los elementos a_k es definida como

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k$$

De la definición anterior se tiene

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Por ejemplo

$$\sum_{k=4}^{7} a_k = a_4 + a_5 + a_6 + a_7$$

Ejemplo 3.8
Sea $r \neq 1$. Pruebe que

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-r}{r-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Solución: Probaremos la fórmula usando el primer principio de inducción matemática

Sea

$$p(n): \sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-r}{r-1}$$

(i) Probaremos que la fórmula es valida para $n=1$, es decir, mostraremos que $p(1)$ es verdadero

$$\sum_{k=1}^{1} r^k = r^1 = \frac{r^2-r}{r-1}$$

Por lo tanto, $p(1)$ es verdadero.

(ii) Probaremos que dado $m \in \mathbb{N}$: Si $p(m)$ es verdadero, entonces $p(m+1)$ es verdadero. Suponemos, que $p(m)$ es verdadero (Hipótesis Inductiva), esto es

$$\sum_{k=1}^{m} r^k = \frac{r^{m+1}-r}{r-1}$$

De donde,

$$\sum_{k=1}^{m+1} r^k = \sum_{k=1}^{m} r^k + r^{m+1} = \frac{r^{m+1}-r}{r-1} + r^{m+1} = \frac{r^{m+1}-r+r^{m+2}-r^{m+1}}{r-1} = \frac{r^{(m+1)+1}-r}{r-1}$$

Por lo tanto, $p(m+1)$ es verdadero.

Usando el primer principio de inducción, $p(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

Ejemplo 3.9

Pruebe que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Solución: Probaremos la fórmula usando el primer principio de inducción matemática.

Sea

$$p(n): \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(i) Probaremos que la fórmula es valida para $n = 1$, es decir, mostraremos que $p(1)$ es verdadero

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

Por lo tanto, $p(1)$ es verdadero.

(ii) Probaremos que dado $m \in \mathbb{N}$: Si $p(m)$ es verdadero, entonces $p(m+1)$ es verdadero. Suponemos, que $p(m)$ es verdadero (Hipótesis Inductiva), esto es

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 \\
&= (m+1)\left[\frac{m(2m+1)}{6} + (m+1)\right] = (m+1)\left[\frac{2m^2+7m+6}{6}\right] \\
&= \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} = \frac{(m+1)[(m+1)+1][2(m+1)+1]}{6}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $p(m+1)$ es verdadero.

Usando el primer principio de inducción, $p(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

3.2.2 Cambio de índice

Considere la sumatoria

$$\sum_{k=5}^{7} a_k = a_5 + a_6 + a_7$$

Sumando a los índices m y n dos unidades, y restando dos unidades a k, se obtiene

$$\sum_{k=5+2}^{7+2} a_{k-2} = \sum_{k=7}^{9} a_{k-2} = a_{7-2} + a_{8-2} + a_{9-2} = a_5 + a_6 + a_7$$

De igual forma, si se resta a los índices m y n tres unidades, y sumando tres unidades a k se obtiene

$$\sum_{k=5-3}^{7-3} a_{k+3} = \sum_{k=2}^{4} a_{k+3} = a_{2+3} + a_{3+3} + a_{4+3} = a_5 + a_6 + a_7$$

La siguiente proposición generaliza los ejemplos anteriores.

Proposición 3.5 (Cambio de índice)

Sean $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ una sucesión y m, n, i, j números enteros, entonces

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m-i}^{n-i} a_{k+i} = \sum_{k=m+j}^{n+j} a_{k-j}$$

3.2.3 Propiedad telescópica

Proposición 3.6 (Propiedad telescópica)

Sea (a_k) una sucesión de números reales, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \left[a_{k+1} - a_k\right] = a_{n+1} - a_1 \qquad \text{para todo} \quad n \geq 1$$

Demostración. Probaremos la validez de la proposición usando el primer principio de inducción matemática

Sea

$$p(n): \ \sum_{k=1}^{n} \left[a_{k+1} - a_k\right] = a_{n+1} - a_1$$

(i) Observe que

$$\sum_{k=1}^{1} \left[a_{k+1} - a_k\right] = a_2 - a_1$$

Por lo tanto, $p(1)$ es verdadero.

(ii) Suponemos, que $p(m)$ es verdadero (Hipótesis Inductiva), esto es

$$\sum_{k=1}^{m} \left[a_{k+1} - a_k\right] = a_{m+1} - a_1$$

Luego, usando la definición de sumatoria y la hipótesis inductiva

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} \left[a_{k+1} - a_k\right] &= \sum_{k=1}^{m} \left[a_{k+1} - a_k\right] + a_{(m+1)+1} - a_{m+1} \\
&= a_{m+1} - a_1 + a_{(m+1)+1} - a_{m+1} \\
&= a_{(m+1)+1} - a_1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $p(m+1)$ es verdadero.

Usando el primer principio de inducción, $p(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Corolario 3.1 Sea (a_k) una sucesión de números reales, entonces

$$\sum_{k=m}^{n} \left[a_{k+1} - a_k\right] = a_{n+1} - a_m$$

Demostración. Usando la definición 3.4 y la proposición telescópica se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} \left[a_{k+1} - a_k\right] &= \sum_{k=1}^{n} \left[a_{k+1} - a_k\right] - \sum_{k=1}^{m-1} \left[a_{k+1} - a_k\right] \\
&= \left[a_{n+1} - a_1\right] - \left[a_{(m-1)+1} - a_1\right] \\
&= a_{n+1} - a_m
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 3.10

Calcule la siguiente sumatoria

$$\sum_{k=5}^{39} \left[\frac{1}{\sqrt{3k+4}} - \frac{1}{\sqrt{3k+1}}\right]$$

Solución: Sea

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \qquad \Rightarrow \qquad a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}} = \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

Usando la propiedad telescópica

$$\begin{aligned}
\sum_{k=5}^{39} \left[\frac{1}{\sqrt{3k+4}} - \frac{1}{\sqrt{3k+1}}\right] &= \sum_{k=5}^{39} \left[a_{k+1} - a_k\right] = a_{40} - a_5 \\
&= \frac{1}{\sqrt{3(40)+1}} - \frac{1}{\sqrt{3(5)+1}} = \frac{1}{\sqrt{121}} - \frac{1}{\sqrt{16}} \\
&= \frac{1}{11} - \frac{1}{4} = -\frac{7}{11}
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 3.11

Halle una expresión para

$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$

Solución: Observe que

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

Usando sumatorias se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\right] = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

Usando la propiedad telescópica tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right] = (n+1)^4 - 1$$

Además,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

Luego,

$$(n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$$

Al simplificar, se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

■

3.3 Productoria

La productoria desde $k=1$ hasta $k=n$ de los elementos a_k, es denotada por

$$\prod_{k=1}^{n} a_k$$

el cual es definida inductivamente por

$$\prod_{k=1}^{1} a_k = a_1 \qquad \text{y} \qquad \prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1}$$

Ejemplo 3.12

Determine las productorias

(i) $\prod_{k=1}^{4} \frac{k}{k+1}$ (ii) $\prod_{k=1}^{3}(2k+1)$

Solución: Utilizando la definición se obtiene

(i)

$$\prod_{k=1}^{4} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{2}{2+1} \cdot \frac{3}{3+1} \cdot \frac{4}{4+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

(ii)

$$\prod_{k=1}^{3}(2k+1) = (2 \cdot 1+1) \cdot (2 \cdot 2+1) \cdot (2 \cdot 3+1) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

■

3.3.1 Factoriales

Dado $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, el factorial de n, denotada por $n!$, es definida como

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \prod_{i=1}^{n} i & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Usando la definición se obtiene

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

Además,

(i) $n! = (n-1)!n$ (ii) $n! = (n-2)!(n-1)n$

Ejemplo 3.13

Determine los siguientes valores

(i) $5!$ (ii) $\frac{n!m!}{(n+1)!(m-1)!}$

Solución: Utilizando la definición se obtiene

(i)

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

(ii)

$$\frac{n!m!}{(n+1)!(m-1)!} = \frac{n!(m-1)!m}{n!(n+1)(m-1)!} = \frac{m}{n+1}$$

■

3.3.2 Números combinatorios

Sean n y p elementos en $\mathbb{N}_0$, tales que $0 \leq p \leq n$, se define el número combinatorio de n y p como

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Ejemplo 3.14

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1 \qquad \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = n$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = n \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

Proposición 3.7

Sean $n, p \in \mathbb{N}_0$ entonces

(a) Para todo $0 \leq p \leq n$, se verifica

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

(b) Para todo $1 \leq p \leq n$, se verifica

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

(c) Para todo $0 \leq p \leq n$, se verifica

$$\binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}$$

3.4 Binomio de Newton

Teorema 3.1 (Binomio de Newton)

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Ejemplo 3.15

Determine las siguientes expresiones usando el binomio de Newton

(i) $(a+b)^2$ (ii) $(a+b)^3$ (iii) $(a+b)^4$

Solución: Sean a y b números reales, entonces

(i)

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}a^{2-k}b^k = \binom{2}{0}a^{2-0}b^0+\binom{2}{1}a^{2-1}b^1+\binom{2}{2}a^{2-2}b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}a^{3-k}b^k = \binom{3}{0}a^3b^0+\binom{3}{1}a^2b^1+\binom{3}{2}ab^2+\binom{3}{3}a^0b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}a^{4-k}b^k = \binom{4}{0}a^4b^0+\binom{4}{1}a^3b^1+\binom{4}{2}a^2b^2+\binom{4}{3}a^1b^3+\binom{4}{4}a^0b^4\\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

■

3.4.1 Triángulo de Pascal

Los desarrollos de las primeras potencias de binomio están dadas por

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

$$(a+b)^7 = a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$$

$$(a+b)^8 = a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8$$

A continuación veremos un modo más cómodo de escribir los coeficientes de los primeras potencias de binomio.

Definición 3.5
El triangulo de Pascal es un arreglo numérico, en la cual exceptuando los de valor 1 cada número es igual a la suma de los dos valores ubicados en su parte superior

Triangulo de Pascal

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
n=1 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
n=2 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
n=3 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
n=4 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
n=5 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Efectuando los binomiales se obtiene

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
n=1 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
n=2 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
n=3 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
n=4 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
n=5 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
n=6 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
n=7 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

- Las entradas de la n-ésima fila del triangulo de Pascal representan los coeficientes de los términos del desarrollo de la potencia $(a+b)^n$
- La parte (b) de la Proposición 3.7 establece que

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$$

  Luego, cada entrada distinta de 1 del triangulo de Pascal el la suma de los dos entradas que se ubican en la parte superior:

$$\begin{array}{ccc}
\binom{n}{p-1} & & \binom{n}{p} \\
& \binom{n+1}{p} &
\end{array}$$

Ejemplo 3.16

Determine el desarrollo de $(a+b)^7$ usando el triangulo de Pascal

Solución: Los valores para $n=7$ del triangulo de pascal son

$$1 \qquad 7 \qquad 21 \qquad 35 \qquad 35 \qquad 21 \qquad 7 \qquad 1$$

Luego,

$$(a+b)^7 = \mathbf{1}a^7 + \mathbf{7}a^6b + \mathbf{21}a^5b^2 + \mathbf{35}a^4b^3 + \mathbf{35}a^3b^4 + \mathbf{21}a^2b^5 + \mathbf{7}ab^6 + \mathbf{1}b^7$$

■

Ejemplo 3.17

Determine el desarrollo de

(i) $(3x+y^2)^5$

(ii) $\left(5xy - \dfrac{1}{2y}\right)^4$

Solución:

(i) Los valores para $n=5$ del triangulo de pascal son

$$1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1$$

Luego,

$$(3x+y^2)^6 = (3x)^5 + 5(3x)^4(y^2) + 10(3x)^3(y^2)^2 + 10(3x)^2(y^2)^3 + 5(3x)(y^2)^4 + (y^2)^5$$

Efectuando el desarrollo se obtiene

$$(3x+y^2)^6 = 3^5x^5 + 5\cdot 3^4x^4y^2 + 10\cdot 3^3x^3y^4 + 10\cdot 3^2x^2y^6 + 5\cdot 3xy^8 + y^{10}$$

(ii) Los valores para $n=4$ del triangulo de pascal son

$$1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1$$

Luego,

$$\left(5xy - \frac{1}{2y}\right)^4 = (5xy)^4 + 4(5xy)^3\left(-\frac{1}{2y}\right) + 6(5xy)^2\left(-\frac{1}{2y}\right)^2 + 4(5xy)\left(-\frac{1}{2y}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2y}\right)^4$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left(5xy - \frac{1}{2y}\right)^4 &= 5^4x^4y^4 + 4\cdot 5^3x^3y^3(-1)\frac{1}{2y} + 6\cdot 5^2x^2y^2(-1)^2\frac{1}{2^2y^2} + 4\cdot 5xy(-1)^3\frac{1}{2^3y^3} + (-1)^4\frac{1}{2^4y^4} \\ &= 525x^4y^4 - 250x^3y^2 + \frac{75}{2}x^2 - \frac{5}{2}\frac{x}{y^2} + \frac{1}{16y^4}\end{aligned}$$

■

3.4.2 Termino k-ésimo

El desarrollo de un binomial es dado por:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Observamos que el termino k-ésimo esta dado por

$$T_k = \binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$$

El término central del desarrollo de un binomial es definido como

$$\text{Término central } = \begin{cases} T_{\frac{k}{2}} & \text{término} \quad \dfrac{k}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ T_{\frac{k\pm 1}{2}} & \text{términos} \quad \dfrac{k\pm 1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Ejemplo 3.18

Determine el sexto término de $(4x^2y+3xy^2)^9$

Solución: El término k-ésimo de $(a+b)^n$ es

$$T_k = \binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$$

Luego, considerando $n=9$, $k=6$, $a=4x^2y$, $b=3xy^2$ entonces

$$T_6 = \binom{9}{5}(4x^2y)^4(3xy^2)^5 = \frac{9!}{5!4!}\cdot 4^4x^8y^4\cdot 3^5x^5y^{10}$$

Por lo tanto,

$$T_6 = 2^9 3^7 7 x^{13}y^{14}$$

■

Ejemplo 3.19

Determine el término central de $\left(\dfrac{y}{4x}+\dfrac{3x}{y}\right)^{14}$

Solución: El término k-ésimo de $(a+b)^n$ es

$$T_k = \binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$$

Luego, considerando $n=14$, $a=\dfrac{y}{4x}$, $b=\dfrac{3x}{y}$ el término central es el término T_7

$$T_7 = \binom{14}{6}\left(\frac{y}{4x}\right)^8\left(\frac{3x}{y}\right)^6 = \frac{14!}{8!6!}\cdot\frac{y^8}{4^8x^8}\cdot\frac{3^6x^6}{y^6} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Término central} = T_7 = \frac{14!}{8!6!}\cdot\frac{3^6y^2}{2^{16}x^2}$$

■

Capítulo 04

Números enteros

4.1 Divisores

Un número $d \in \mathbb{Z}$ entero es llamado divisor de un número entero $a \neq 0$ si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = d \cdot k$$

4.1.1 Divisor propio e impropio

La expresión

$$d \mid a \qquad \text{se lee} \qquad \text{"}d \text{ divide a } a\text{"} \quad \text{o} \quad \text{"}d \text{ es divisor de } a\text{"}$$

En este caso, también decimos que a es divisible por d.

A continuación detallamos algunas observaciones importantes.

(a) Denotamos por $d \nmid a$ cuando d no divide a a.

(b) Sean a, b y c números enteros tales que

$$c = a \cdot b$$

Entonces decimos que a y b son los divisores de c.

(c) El número 1 es divisor de todo número entero.

(d) Todo número es divisible por si mismo y por la unidad.

Además podemos considerar dos tipos de divisores:

Divisor propio

Un divisor o un factor propio de un número entero $n \in \mathbb{Z}$, es un divisor de n distinto de n.

Divisor impropio

Dado un número entero $n \in \mathbb{Z}$, los divisores impropios de n son 1 y n.

Ejemplo 4.1

Halle los divisores propios e impropios de 12

Solución: Los divisores propios de 12 son los números: $1,\ 2,\ 3,\ 4\ \text{y}\ 6$.

Los divisores impropios de 12 son los números: $1\ \text{y}\ 12$ ■

4.1.2 Divisibilidad y multiplicidad

Utilizando el concepto de divisor podemos definir la divisibilidad y multiplicidad de números enteros.

Divisibilidad

Un número entero a es divisible por el número entero b si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = b \cdot k$$

El cual se lee como: " a es divisible por b ", "b es un divisor de a"

Multiplicidad

Un número entero a es múltiplo- por el número entero b si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = k \cdot b$$

El cual se lee como: " a es un múltiplo de b ", "b es un factor de a"

El número cero es múltiplo de todo número entero

Proposición 4.1

Dados los números enteros $a,\ b\ \text{y}\ c$

(i)
$$1 \mid a, \qquad -1 \mid a, \qquad b \mid 0$$

(ii) (Reflexividad)
$$a \mid a$$

(iii) (Transitividad)
$$\text{Si} \quad a \mid b \quad \text{y} \quad b \mid c \qquad \text{entonces} \qquad a \mid c$$

(iv) (Casi- Antisimétria)
$$\text{Si} \quad a \mid b \quad \text{y} \quad b \mid a \qquad \text{entonces} \qquad a = b \quad \text{o} \quad a = -b$$

(v) (Linealidad) Dados $m,\ n \in \mathbb{Z}$
$$\text{Si} \quad d \mid a \quad \text{y} \quad d \mid b \qquad \text{entonces} \qquad d \mid (ma + nb)$$

Demostración.

(i) La afirmación es consecuencia de

$$a = a \cdot 1 \qquad a = (-a)\cdot(-1) \qquad 0 = 0 \cdot b$$

(ii) La afirmación es consecuencia de

$$a = 1 \cdot a$$

(iii) Como $a \mid b$ y $b \mid c$ entonces existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$b = k_1 a \qquad \text{y} \qquad c = k_2 b$$

Luego,

$$c = k_2 b = k_2(k_1 a) = (k_1 k_2)a = ka \qquad \Rightarrow \qquad a \mid c \qquad \text{donde} \quad k = k_1 k_2$$

(iv) Como $a \mid b$ y $b \mid a$ entonces existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$b = k_1 a \qquad \text{y} \qquad a = k_2 b$$

Luego,

$$b = (k_1 k_2)b \qquad \Rightarrow \qquad k_1 k_2 = 1$$

Como k_1 y k_2 son números enteros entonces $k_1 = k_2 = 1$ o $k_1 = k_2 = -1$. Por consiguiente, $a = b$ o $a = -b$

(v) Como $d \mid a$ y $d \mid b$ entonces existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$a = k_1 d \qquad \text{y} \qquad b = k_2 d$$

Luego,

$$ma + nb = mk_1 d + nk_2 d = d(mk_1 + nk_2) \qquad \Rightarrow \qquad d \mid (ma + nb)$$

■

Ejemplo 4.2

¿Existirán enteros x e y tales que $3x + 12y = 145$?

Solución: Si existen números enteros x e y satisfaciendo la igualdad. Como $3 \mid 3$ y $3 \mid 12$ por la parte (v) de la Proposición 4.1 se tiene que $3 \mid (3x + 12y)$, es decir, $3 \mid 145$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existen enteros satisfaciendo dicha ecuación. ■

Proposición 4.2

(i) Sean a y b números enteros positivos. Si $a \mid b$ entonces $a \leq b$.

(ii) Dado $m \neq 0$. Luego,

$$a \mid b \qquad \Leftrightarrow \qquad ma \mid mb$$

Demostración.

(i) Como $a \mid b$ entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ entonces $b = ak$. Luego, se deduce que k es positivo y dado que es un número entero entonces $k \geq 1$. Por lo tanto.

$$a \leq ak = b \qquad \Rightarrow \qquad a \leq b$$

(ii) $(\Rightarrow)$ Como $a \mid b$ entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bk$. Luego,

$$am = (bm)k \qquad \Rightarrow \qquad am \mid bm$$

$(\Leftarrow)$ Como $am \mid bm$ entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $am = (bm)q$. Luego,

$$am = (bm)q \quad \text{y} \quad m \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = bq \qquad \Rightarrow \qquad a \mid b$$

■

4.2 Números primos

4.2.1 Definición de número primo

Un número entero mayor que uno es llamado primo si sus únicos divisores son el mismo número y la unidad.

Ejemplos:
Los siguientes números son primos:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 47,\ 53,\ \ldots$$

Definición 4.1 (Número compuesto)
Un número entero mayor que uno es llamado compuesto si posee un divisor distinto que el mismo número y la unidad.

De la definición se deduce que si n es un número compuesto entonces es posible escribir

$$n = ab \qquad \text{con} \quad a > 1 \quad \text{y} \quad b > 1$$

Ejemplos:
Los siguientes números son compuestos:

(i) $12 = 3 \cdot 4$
(ii) $85 = 5 \cdot 17$
(iii) $91 = 7 \cdot 13$

4.2.2 Teorema fundamental de la aritmética

Teorema 4.1 (Teorema fundamental de la aritmética)
Cada número entero positivo mayor a 1 puede ser expresado como un producto de números primos. Esta representación es única salvo por el orden como los factores son escritos.

Demostración. Probaremos usando el segundo principio de inducción matemática generalizado. Sea

$$p(n): \ n \text{ es producto de primos}$$

(i) Si $n = 2$, $p(2)$ es válido dado que 2 es un número primo.

(ii) Por hipótesis inductiva. $p(k)$ es válido para $2 \leq k \leq m$, esto es,

$$k \quad \text{es producto de primos para todo} \quad 2 \leq k \leq m$$

Analizando para el número $m+1$ por casos

- **Caso 1.** $m+1$ es primo.

  Siendo $m+1$ primo, este ya es producto de primos (un único primo).

- **Caso 2.** $m+1$ es no primo.

  En este caso $m+1$ es un número compuesto, entonces $m+1 = k_1 \cdot k_2$ donde $k_1 \geq 2$, $k_2 \geq 2$. Luego, por la hipótesis inductiva $k_1,\ k_2$ son productos de número primos, por ende, $m+1$ es producto de números primos.

En cualquier caso, se verifica la validez de $p(m+1)$

Usando el segundo principio de inducción matemática generalizado. $p(n)$ es válido para $n \geq 2$. ■

Ejemplos:

- La descomposición de primos del número 24 es

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

- La descomposición de primos del número 630 es

$$630 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

Proposición 4.3

El conjunto de números primos es infinito

Demostración. Procediendo por contradicción. Suponga que el conjunto de los números primos P es finito, esto es

$$P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\}$$

Sea

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ \cdots \ \cdot p_n + 1$$

Se observa que p es mayor que todos los números en P, entonces $p \notin P$, es decir, p no es número primo. Del Teorema 4.1 existe un número primo p_i con $1 \leq i \leq n$ tal que $p_i \mid p$. Por la parte (v) de la Proposición 4.1

$$p_i \mid p \quad \text{y} \quad p_i \mid p_1 \cdot p_2 \cdot \ \cdots \ \cdot p_n \quad \Rightarrow \quad p_i \mid (p - p_1 \cdot p_2 \cdot \ \cdots \ \cdot p_n) \quad \Rightarrow \quad p_i \mid 1$$

Lo cual es una contradicción dado que ningún número mayor que uno divide a la unidad. Por lo tanto, el conjunto de números primos es infinito. ■

Ejemplo 4.3

Pruebe que existen infinitos primos de la forma $p = 4k+3$ con $k \in \mathbb{Z}$

Solución: Procediendo por contradicción. Suponga que el conjunto de los números primos de la forma $4k+3$ es finito, esto es

$$S = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\}$$

Sea N cuatro veces el producto de todos los primos en S menos uno, esto es

$$N = 4p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n - 1 \tag{1)}$$

Del Teorema fundamental de la aritmética 4.1

$$N = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \cdots \pi_m \qquad \text{donde} \quad \pi_j \text{ es primo} \quad 1 \leq j \leq m \tag{2}$$

Como N no es múltiplo de 2 y los números de la forma $4k$ y $4k+2$ a excepción de 2 no son números primos. Por consiguiente, los primos π_j son de la forma $4k+1$ o $4k+3$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

Analizando por casos:

- Si todos los primos π_j son de la forma $4k+1$, es decir $\pi_j = 4k_j + 1$ para $1 \leq j \leq m$ entonces

  $$N = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \cdots \pi_m = (4k_1+1)(4k_2+1)\cdots(4k_m+1) = 4k_0+1 \qquad \text{donde} \quad k_0 \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

  De la ecuación (1) se deduce que $4 \mid (N+1)$ y de (3) se deduce que $4 \mid (N-1)$ entonces

  $$4 \mid [(N+1)-(N-1)] \qquad \Rightarrow \qquad 4 \mid 2$$

  Lo cual es una contradicción.
- Si todos los primos π_j no son de la forma $4k+1$, existirá un primo de la forma $\pi = 4k+3$ entonces $\pi \in S$. En consecuencia, de (1) se deduce que $\pi \mid (N+1)$. Además, de (2) se deduce que π es un factor de N, entonces $\pi \mid N$. Por consiguiente,

  $$\pi \mid [(N+1)-N] \qquad \Rightarrow \qquad \pi \mid 1$$

  Lo cual es una contradicción.

En cualquier caso, se obtiene una contradicción. Por lo tanto, el conjunto de números primos de la forma $4k+3$ es infinito. ■

4.2.3 Criterio de Eratóstenes

El criterio de Eratóstenes sirve para determinar encontrar los números primos que son menores a un número dado. El criterio dice lo siguiente:

Sea n un número entero positivo

- **Paso 1.** Escribimos una lista con todos números enteros desde 2 hasta n
- **Paso 2.** Elegimos el menor elemento no descartado de la lista. (en este caso será el número 2)

- **Paso 3.** Descartamos de las lista todos los números enteros múltiplos del número elegido que sean distinto al elegido. (en este caso eliminaremos los múltiplos de 2 mayores a 2)
- **Paso 4.** Nuevamente elegimos el menor elemento no descartado de la lista que sea mayor que el número elegido anteriormente.
- **Paso 5.** Descartamos de las lista todos los números enteros múltiplos mayores del número elegido en el paso anterior.
- **Paso 6.** Se repite los pasos 4 y 5 mientras el número elegido sea menor o igual a $\sqrt{n}$
- **Paso 7.** Los números no descartados de la tabla son los números primos menores a n.

Ejemplo 4.4

Utilice el criterio de Eratóstenes para encontrar los números primos menores a 49

Solución:

- Escribiendo los números de 2 al 49

	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

- Elegimos el menor número no descartado de la lista, en este caso es el número 2. A continuación descartaremos todos los múltiplos de 2 mayores a 2 lo cual es mostrado en la siguiente tabla.

	2	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7
$\cancel{8}$	9	$\cancel{10}$	11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$
15	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$	21
$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	25	$\cancel{26}$	27	$\cancel{28}$
29	$\cancel{30}$	31	$\cancel{32}$	33	$\cancel{34}$	35
$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$	39	$\cancel{40}$	41	$\cancel{42}$
43	$\cancel{44}$	45	$\cancel{46}$	47	$\cancel{48}$	49

- Elegimos el menor número no descartado de la lista que sea mayor a 2 (número elegido en el paso anterior), es decir, elegimos el número 3. A continuación descartaremos todos los múltiplos de 3 mayores a 3 lo cual es mostrado en la siguiente tabla.

	2	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7
$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$	11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$
$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$	$\cancel{21}$
$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	25	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$
29	$\cancel{30}$	31	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	35
$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$	$\cancel{40}$	41	$\cancel{42}$
43	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	47	$\cancel{48}$	49

- Elegimos el menor número no descartado de la lista que sea mayor a 3 (número elegido en el paso anterior), es decir, elegimos el número 5. A continuación descartaremos todos los múltiplos de 5 mayores a 5 lo cual es mostrado en la siguiente tabla.

	2	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7
$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$	11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$
$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$	$\cancel{21}$
$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	$\cancel{25}$	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$
29	$\cancel{30}$	31	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	$\cancel{35}$
$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$	$\cancel{40}$	41	$\cancel{42}$
43	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	47	$\cancel{48}$	49

- Elegimos el menor número no descartado de la lista que sea mayor a 5 (número elegido en el paso anterior), es decir, elegimos el número 7. A continuación descartaremos todos los múltiplos de 7 mayores a 7 lo cual es mostrado en la siguiente tabla.

	2	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7
$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$	11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$
$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$	$\cancel{21}$
$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	$\cancel{25}$	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$
29	$\cancel{30}$	31	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	$\cancel{35}$
$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$	$\cancel{40}$	41	$\cancel{42}$
43	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	47	$\cancel{48}$	$\cancel{49}$

- Como el número mayor a 7 no descartado es 11, sin embargo, $11 > 7 = \sqrt{49}$ entonces el proceso acaba. Por lo tanto, los números primos menores a 49 son los números no descartados, es decir, $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 47.$

$\blacksquare$

4.2.4 Algoritmo de la división

Teorema 4.2 (Algoritmo de la división euclidiana)
Sean a y b números enteros positivos con $b \neq 0$, entonces existen únicos enteros q y r tales que
$$a = b \cdot q + r \qquad \text{donde} \quad 0 \leq r < b$$

Demostración.

- **(Existencia)** Considere el caso en que $b \leq a$. Considerando el conjunto

  $$M = \{n \in \mathbb{N} : \ bn \leq a\}$$

  Observe que $1 \in M$. Luego, $M \neq \emptyset$. Además, todo elemento de M es menor que a. En consecuencia existe el mayor elemento en M, sea este máximo elemento igual a q.

  Tomando $r = a - bq$. De la definición de q se verifica que $bq \leq a$. Luego, $0 \leq r$.

  Por otro lado, como q es el mayor elemento en M se deduce que $q+1$ no está en M. Por consiguiente,

  $$b(q+1) > a \qquad \Rightarrow \qquad b > a - bq \qquad \Rightarrow \qquad r < b$$

  Para el caso donde $b > a$, basta considerar $q = 0$ y $r = a$.

  De los casos anteriores se garantiza la existencia de q y r satisfaciendo las condiciones del teorema.

- **(Unicidad)** Suponga que existan otros valores q' y r' verificando las mismas condiciones del teorema.

  Suponga que $r \neq r'$. Sin perdida de generalidad, podemos asumir que $r < r'$. Dado que

  $$bq + r = a = bq' + r' \qquad \Rightarrow \qquad b(q - q') = r - r' \qquad \Rightarrow \qquad b \mid (r - r')$$

  De la Proposición 4.2 se tiene $b \leq r - r'$. Sin embargo, esto último es falso dado que $r - r' < r < b$. Por lo tanto, necesariamente $r = r'$.

  Reemplazando $r = r'$ en $bq + r = a = bq' + r'$ se tiene $bq = bq'$ como $b > 0$ entonces $q = q'$.

  Por lo tanto, los valores q y r del teorema son únicos.

■

El algoritmo de la división euclidiana se puede extender para enteros no necesariamente positivos.

Teorema 4.3
Sean a y b números enteros con $b \neq 0$, entonces existen únicos enteros q y r tales que

$$a = b \cdot q + r \qquad \text{donde} \quad 0 \leq r < |b|$$

Los elementos resultantes del algoritmo de la división euclidiana son denominados:

a	es llamado dividendo
b	es llamado divisor
q	es llamado cociente
r	es llamado residuo

Ejemplo 4.5

Utilice el algoritmo de la división euclidiana para expresar de la forma $a = bq + r$ para los siguientes valores.

(i) $a = 17$ y $b = 3$
(ii) $a = -27$ y $b = 4$
(iii) $a = 31$ y $b = -5$
(iv) $a = -45$ y $b = -6$

Solución: Se busca números enteros q y r tales que

$$a = b \cdot q + r \qquad \text{donde} \quad 0 \leq r < |b|$$

Luego, la expresión para cada par de valores es dado por

$$\begin{array}{rcll} 17 & = & 3 \cdot 5 + 2 & \text{donde} \quad 0 \leq 2 < |3| \\ -27 & = & 4 \cdot (-7) + 1 & \text{donde} \quad 0 \leq 1 < |4| \\ 31 & = & (-5) \cdot (-6) + 1 & \text{donde} \quad 0 \leq 1 < |-5| \\ -45 & = & (-6) \cdot 8 + 3 & \text{donde} \quad 0 \leq 3 < |-6| \end{array}$$

■

4.3 Máximo común divisor

Sean a, b y k números enteros positivos. Decimos que k es un común divisor de a y b si

$$k \mid a \qquad \text{y} \qquad k \mid b$$

En general, si $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$ son números enteros no todos nulos, $k \in \mathbb{Z}$ es un divisor común a $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_m$ si y solo si $k \mid a_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Definición 4.2 (Máximo común divisor)

Sea d un divisor común de a y b tal que es el mayor entre todos los divisores comunes de a y b, entonces d es llamado máximo común divisor de a y b. El cual es denotado por:

$$\text{M.C.D}(a, b) = d$$

A veces por simplicidad el máximo común divisor de a y b es denotado por (a, b)

De manera análoga, si $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$ son números enteros no todos nulos, $d \in \mathbb{Z}^+$ es el máximo común divisor de $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$ si y solo si d es el mayor de todos los divisores comunes a $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$. En este caso, el máximo común divisor es denotado por

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = d$$

Ejemplo 4.6

Halle el máximo común divisor de

(a) 12 y 8 (b) 10, 14 y 30

Solución:

(a) Observe que

$$\begin{array}{lcl} \text{Divisores de } 8 & = & \{1,2,4,8\} \\ \text{Divisores de } 12 & = & \{1,2,3,4,6,12\} \\ \text{Divisores comunes a } 8 \text{ y } 12 & = & \{1,2,4\} \end{array}$$

Como el mayor de todos los divisores comunes es 4. Se concluye que $\text{M.C.D}(8,12) = 4$

(b) Observe que

$$\begin{array}{lcl} \text{Divisores de } 10 & = & \{1,2,5,10\} \\ \text{Divisores de } 14 & = & \{1,2,7,14\} \\ \text{Divisores de } 30 & = & \{1,2,3,5,6,10,15,30\} \\ \text{Divisores comunes a } 10,\ 14 \text{ y } 30 & = & \{1,2\} \end{array}$$

Como el mayor de todos los divisores comunes es 2. Se concluye que $\text{M.C.D}(10,14,30) = 2$

■

Proposición 4.4

Sean a y números enteros tales que

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ \cdots \ \cdot p_k^{\alpha_k} \qquad \text{y} \qquad b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ \cdots \ \cdot p_k^{\beta_k}$$

Donde p_i son números primos, $\alpha_i \geq 0,\ \beta_i \geq 0$ para $0 \leq i \leq k$.

Sea $\text{mín}\{r,s\}$ el menor de los valores entre r y s, entonces

$$\text{M.C.D}(a,b) = p_1^{\text{mín}\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot p_2^{\text{mín}\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot \ \cdots \ \cdot \ p_k^{\text{mín}\{\alpha_k,\beta_k\}}$$

La Proposición 4.4 afirma que el máximo común divisor de dos números es igual al producto de sus factores primos comunes elevados al menor exponente

Ejemplo 4.7

Halle el máximo común divisor de 300 y 1260

Solución: Observe que

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^0 \qquad \text{y} \qquad 1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Luego,

$$\text{M.C.D}(300, 1260) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^0 = 60$$

■

Ejemplos:

- M.C.D$(3, 12) = 3$
- M.C.D$(3, 5) = 1$
- M.C.D$(6, 1) = 6$
- M.C.D$(4, 6, 12) = 2$
- M.C.D$(12, 18, 42) = 6$

Definición 4.3
Dos números enteros a y b son llamados relativamente primos si y solo si $(a, b) = 1$. De igual forma, $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$ son relativamente primos si y solo si $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$

4.3.1 Identidad de Bézout

Proposición 4.5 (Identidad de Bézout)
Sea $d = (a, b)$ entonces existen números enteros m y n tales que

$$d = ma + nb$$

Proposición 4.6
$d = (a, b)$ es el máximo común divisor de a y b si y solo si

(i) $d \mid a$ y $d \mid b$
(ii) Si $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ es tal que $\alpha \mid a$ y $\alpha \mid b$ entonces $\alpha \mid d$

Ejemplo 4.8

Sea a un entero positivo. Pruebe que

$$(a, 0) = (0, a) = a$$

Solución: Los divisores comunes a los valores a y 0 son los mismos que los divisores de a. Por lo tanto, el mayor de todos es a. Por consiguiente, $(a, 0) = (0, a) = a$. ■

Proposición 4.7

Dados a y b números enteros entonces

$$(a,b) = (a, b+ka)$$

En particular, para $b > 0$ y $a = bq + r$ con $0 \leq r < a$ entonces

$$(a,b) = (b,r)$$

Ejemplo 4.9

Halle $(44,12)$

Solución: Usando la Proposición 4.7

$$(44,12) = (3\cdot 12+8,12) = (8,12) = (12,8) = (1\cdot 8+4,8) = (4,8) = (8,4) = (2\cdot 4+0,4) = (0,4) = 4$$

■

Ejemplo 4.10

Halle $(2548,478)$

Solución: Usando la Proposición 4.7

$$(2548,478) = (5\cdot 478+79,478) = (79,478) = (478,79) = (6\cdot 79+4,79) = (4,79)$$

Luego,

$$(2548,478) = (79,4) = (4\cdot 19+3,4) = (3,4) = 1$$

■

4.3.2 Mínimo común múltiplo

Sean a, b y k números enteros positivos. Decimos que k es un múltiplo común de a y b si

$$a \mid k \qquad \text{y} \qquad a \mid k$$

En general, si $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$ son números enteros no todos nulos, $k \in \mathbb{Z}$ es un múltiplo común a $a_1,\ a_2,\ \ldots\ , a_m$ si y solo si $a_i \mid k$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Definición 4.4 (Mínimo común múltiplo)

Sea m un múltiplo común de a y b tal que es el menor de todos los múltiplos comunes de a y b, entonces m es llamado mínimo común múltiplo de a y b. El cual es denotado por:

$$\text{m.c.m}(a,b) = d$$

Por simplicidad el mínimo común múltiplo de a y b es denotado por $[a,b]$

De manera análoga, si $a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n$ son números enteros no todos nulos, $m \in \mathbb{Z}^+$ es el mínimo común múltiplo de $a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n$ si y solo si d es el menor de todos los múltiplos comunes a $a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n$. En este caso, el mínimo común múltiplo es denotado por

$$\text{m.c.m}(a_1,a_2,\ldots,a_n) = [a_1,a_2,\ldots,a_n] = d$$

Ejemplo 4.11

Halle el mínimo común múltiplo de cada uno de los siguientes conjunto de valores

(a) 8 y 12 (b) 10, 14 y 30

Solución:

(a) Observe que

$$\begin{array}{lcl} \text{Múltiplos de } 8 & = & \{8,16,24,32,40,48,\ldots\} \\ \text{Múltiplos de } 12 & = & \{12,24,36,48,60,\ldots\} \\ \text{Múltiplos comunes a } 8 \text{ y } 12 & = & \{24,48,72,\ldots\} \end{array}$$

Como el menor de todos los múltiplos comunes es 24. Se concluye que $\text{m.c.m}(8,12) = 24$

(b) Observe que

$$\begin{array}{lcl} \text{Múltiplos de } 10 & = & \{10,20,30,40,\ldots,200,210,220,\ldots\} \\ \text{Múltiplos de } 14 & = & \{14,28,42,66,70,\ldots,196,210,224,\ldots\} \\ \text{Múltiplos de } 30 & = & \{30,60,90,120,150,180,210,240,\ldots\} \\ \text{Múltiplos comunes a } 10,\ 14 \text{ y } 30 & = & \{210,420,630,\ldots\} \end{array}$$

Como el menor de todos los múltiplos comunes es 210. Se concluye que

$$\text{m.c.m}(10,14,30) = 210$$

■

Proposición 4.8

Sean a y b números enteros tales que

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{\alpha_k} \qquad \text{y} \qquad b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{\beta_k}$$

Donde p_i son números primos, $\alpha_i \geq 0,\ \beta_i \geq 0$ para $0 \leq i \leq k$.

Sea $\text{máx}\{r,s\}$ el mayor de los valores entre r y s, entonces

$$\text{m.c.m}(a,b) = p_1^{\text{máx}\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot p_2^{\text{máx}\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot \cdots \cdot p_k^{\text{máx}\{\alpha_k,\beta_k\}}$$

La Proposición 4.8 afirma que el mínimo común múltiplo de dos números es igual al producto de sus factores primos comunes elevados al mayor exponente.

Ejemplo 4.12

Halle el mínimo común múltiplo de 300 y 1260

Solución: Observe que

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^0 \qquad \text{y} \qquad 1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Luego,

$$\text{m.c.m}(300, 1260) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 6300$$

■

Proposición 4.9

$m = [a,b]$ es el mínimo común múltiplo de a y b si y solo si

(i) $a \mid m$ y $b \mid m$

(ii) Si $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ es tal que $a \mid \alpha$ y $b \mid \alpha$ entonces $m \mid \alpha$

4.3.3 Aritmética modular

Definición 4.5 (Modulo)

Sean a un número entero y n es un entero positivo. Definimos a mod n como el residuo de dividir a por n.

Ejemplos:

- $17 \mod 5 = 2$ dado que $12 = 5 \cdot 3 + 2$
- $23 \mod 4 = 3$ dado que $23 = 4 \cdot 5 + 3$
- $18 \mod 3 = 0$ dado que $18 = 3 \cdot 6 + 0$

Definición 4.6 (Congruencia)

Sea n un entero positivo. Los enteros a y b son llamados congruentes módulo n si ambos poseen el mismo residuo al dividirlo por n. Lo cual es denotado por

$$a \equiv b \mod n$$

Observe que

$$a \equiv b \mod n \qquad \text{si y solo si} \qquad a \mod n = b \mod n$$

Sea $a \mod n = r = b$ mod n entonces existen q_1 y q_2 tales que

$$\begin{aligned} a = nq_1 + r \quad \text{y} \quad b = nq_2 + r \qquad &\Leftrightarrow \qquad a - nq_1 = b - nq_2 \\ &\Leftrightarrow \qquad a - b = n(q_1 - q_2) \\ &\Leftrightarrow \qquad n \mid (a - b) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a \equiv b \mod n \qquad \text{si y solo si} \qquad n \mid (a - b)$$

Proposición 4.10

Sea n un entero positivo. Si los números enteros $a,\ b,\ c$ y d satisfacen

$$a \equiv b \mod n \qquad \text{y} \qquad c \equiv d \mod n$$

Entonces,

(i) $$a + c \equiv b + d \mod n$$

(ii) $$a - c \equiv b - d \mod n$$

(iii) $$a \cdot c \equiv b \cdot d \mod n$$

Ejemplo 4.13

Suponga que $a \equiv b \mod n$ y $p(x) = x^2 - 5x + 2$ entonces $p(a) \equiv p(b) \mod n$

Solución: Aplicando la parte (iii) de la Proposición 4.10 tenemos

$$a \equiv b \mod n \quad \text{y} \quad a \equiv b \mod n \qquad \Rightarrow \qquad a^2 \equiv b^2 \mod n$$

Usando la parte (iii) de la Proposición 4.10 tenemos

$$a \equiv b \mod n \quad \text{y} \quad 5 \equiv 5 \mod n \qquad \Rightarrow \qquad 5a \equiv 5b \mod n$$

Con los resultados anteriores y la parte (ii) de la Proposición 4.10 tenemos

$$a^2 \equiv b^2 \mod n \quad \text{y} \quad 5a \equiv 5b \mod n \qquad \Rightarrow \qquad (a^2 - 5a) \equiv (b^2 - 5b) \mod n$$

Finalmente, por la parte la parte (i) de la Proposición 4.10 tenemos

$$(a^2 - 5a) \equiv (b^2 - 5b) \mod n \quad \text{y} \quad 2 \equiv 2 \mod n \qquad \Rightarrow \qquad (a^2 - 5a + 2) \equiv (b^2 - 5b + 2) \mod n$$

Por lo tanto, $p(a) \equiv p(b) \mod n$. ■

Ejemplo 4.14

Sea n un entero impar. Pruebe que $n^2 = 1 \mod 8$

Solución: Como n es un entero impar entonces $n = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$$

Como k y $k+1$ son enteros consecutivos entonces su producto es par, es decir, existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $k(k+1) = 2r$. Por lo tanto,

$$n^2 - 1 = 4k(k+1) = 4(2r) = 8r \qquad \Rightarrow \qquad 8 \mid (n^2 - 1) \qquad \Rightarrow \qquad n^2 \equiv 1 \mod 8$$

■

Capitulo 05

Números reales

El estudio de las matemáticas tiene como base fundamental el conjunto de números reales, en este capitulo se define el conjunto de los números reales a partir de ciertos axiomas. El estudio de la existencia de un conjunto satisfaciendo dichos axiomas no será tratado dado que no es el objetivo del presente libro.

Mostraremos las principales propiedades de los números reales y sus aplicaciones para la resolución de ecuaciones e inecuaciones.

5.1 Construcción de los números reales

5.1.1 Suma y multiplicación de los números reales

En el conjunto de los números reales, asumimos la existencia de dos operaciones, llamadas suma y multiplicación

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a+b \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a\cdot b \end{array}$$

Estas operaciones son llamadas operaciones binarias cerradas dado que están definidas en un par de elementos de un mismo conjunto y su resultado también está en dicho conjunto. Esto es,

Si a y b son números reales entonces $a+b$ y $a\cdot b$ también son números reales

Para la suma

a y b son llamados sumandos, y su resultado $a+b$ es llamado suma

Para el caso del producto

a y b son llamados factores, y su resultado $a+b$ es llamado producto

Los números reales satisfacen los axiomas presentados a continuación.

5.1.2 Axiomas de la suma y producto

Axiomas de la suma

A_1. (Axioma de la asociatividad)

$$(x+y)+z = x+(y+z) \qquad \text{para todo} \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

A_2. (Axioma de la conmutatividad)

$$x+y = y+x \qquad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

A_3. (Axioma del elemento neutro) Existe un elemento en $\mathbb{R}$, denotado por "θ" tal que

$$x+\theta = x \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

A_4. (Axioma del elemento inverso) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$x+y = \theta$$

Axiomas de la suma

A_5. (Axioma de la asociatividad)

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad \text{para todo} \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

A_6. (Axioma de la conmutatividad)

$$x \cdot y = y \cdot x \qquad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

A_7. (Axioma del elemento neutro) Existe un elemento $e \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \cdot e = x \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

A_8. (Axioma del elemento inverso) Para cada $x \neq \theta$ existe un elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \cdot y = e$$

Axiomas del distribución

A_9. (Axioma de distribución a izquierda)

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \qquad \text{para todo} \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

A_{10}. (Axioma de distribución a derecha)

$$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \qquad \text{para todo} \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

5.1.3 Resultados sobre unicidad

Teorema 5.1

En el conjunto de los números reales se presentan los siguientes resultados sobre unicidad.

(i) El elemento neutro aditivo es único.
(ii) El elemento neutro multiplicativo es único.

Demostración. Probaremos solo (i), la prueba de (ii) puede ser efectuada de manera similar.

Sea θ_1 un elemento neutro aditivo. Luego, por el axioma A_3, se cumple:

$$x+\theta_1 = x \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R} \tag{A_{θ_1}}$$

Sea θ_2 otro elemento neutro, no sabemos si este es el mismo anteriormente encontrado. Siendo θ_2 elemento neutro aditivo se satisface:

$$x+\theta_2 = x \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R} \tag{A_{θ_2}}$$

Para probar que el elemento neutro es único, es suficiente probar que $\theta_1 = \theta_2$. Dado que esto implica que cada vez que encontremos algún elemento neutro este será siempre el mismo.

Reemplazado θ_1 en (A_{θ_2}) y θ_2 en (A_{θ_1}), obtenemos

$$\theta_1+\theta_2 = \theta_1 \tag{Ec_1}$$

$$\theta_2+\theta_1 = \theta_2 \tag{Ec_2}$$

Luego,

$$\begin{array}{rcll} \theta_1 & = & \theta_1+\theta_2 & \text{Por la ecuación } (\mathrm{Ec})_1 \\ & = & \theta_2+\theta_1 & \text{Por Axioma } A_2 \\ & = & \theta_2 & \text{Por la ecuación } (\mathrm{Ec})_2 \end{array}$$

Por lo tanto, $\theta_1 = \theta_2$, es decir, hemos probado que existe un único elemento neutro para la suma. ■

Dado que el neutro aditivo y el neutro multiplicativo son únicos, denotaremos por “0” el neutro para la suma y por “1” el neutro para el producto.

Teorema 5.2

En el conjunto de los números reales se presentan los siguientes resultados de unicidad

(i) El elemento inverso aditivo es único.
(ii) El elemento inverso multiplicativo es único.

Demostración. Dado $x \in \mathbb{R}$ consideramos y_1 e y_2 dos inversos aditivos para x. Luego,

$$x+y_1 = 0 \tag{Inv_1}$$

y

$$x+y_2 = 0 \tag{Inv_2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_1+0 && \text{Por el Axioma } A_3\\
&= y_1+(x+y_2) && \text{Por (Inv)}_2\\
&= (y_1+x)+y_2 && \text{Por Axioma } A_1\\
&= (x+y_1)+y_2 && \text{Por Axioma } A_2\\
&= 0+y_2 && \text{Por (Inv)}_1\\
&= y_2+0 && \text{Por Axioma } A_2\\
&= y_2 && \text{Por el Axioma } A_3
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $y_1 = y_2$, es decir, hemos probado que existe un único elemento inverso aditivo.

Usando un razonamiento análogo, se demuestra que el elemento inverso multiplicativo es único. ■

Dado que los neutros son únicos, denotaremos por $-x$ el elemento inverso aditivo de x; y por x^{-1} el inverso multiplicativo de x cuando $x \neq 0$.

5.1.4 Sustracción y división de números reales

Utilizando la suma y multiplicación se definen la sustracción y división de los números reales.

Sustracción de números reales

Dados dos números reales a y b se define la sustracción de a y b como

$$a-b = a+(-b)$$

Además,

$$a-b \qquad \text{se lee} \qquad \text{“}a \text{ menos } b\text{”}$$

División de números reales

Dados dos números reales a y $b \neq 0$ se define la división de a y b como

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$$

Además,

$$\frac{a}{b} \qquad \text{se lee} \qquad \text{“}a \text{ entre } b\text{”}$$

Por lo tanto, de las definiciones de sustracción y división se deducen:

a menos *b* es igual a la suma de *a* con el inverso aditivo de *b*

a entre *b* es igual al producto de *a* con el inverso multiplicativo de *b*

5.1.5 Propiedades de los números reales

Proposición 5.1

Para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple

$$a \cdot 0 = 0$$

Proposición 5.2

Para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple

(i) $-(-a) = a$ (ii) $(a^{-1})^{-1} = a \qquad a \neq 0$

Demostración. Probaremos solamente la identidad (i), la segunda identidad se procede del mismo modo.

Recordemos que $-x$ representa el opuesto aditivo de x. Luego, la igualdad $-(-a) = a$ expresa que el opuesto aditivo de $(-a)$ es a. Por lo tanto, tenemos que probar $(-a) + a = 0$.

Observe que

$$\begin{array}{rcll} (-a)+a & = & a+(-a) & \text{Por Axioma } A_2 \\ & = & 0 & \text{Definición de inverso de } a \end{array}$$

Lo cual demuestra que $-(-a) = a$. ■

Proposición 5.3

Para todo $a,\ b \in \mathbb{R}$ se cumple

(i) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -ab$ (ii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Proposición 5.4

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple

(i) $-(a+b) = (-a) + (-b) = -a - b$ (iii) $a - (b+c) = a - b - c$

(ii) $-(a-b) = b - a$ (iv) $a - (b-c) = a - b + c$

Proposición 5.5 (Ley de Cancelación)

Sean x, y, z números reales

(i) Si $x + y = x + z$ entonces $y = z$.
(ii) Si $xy = xz,\ x \neq 0$ entonces $y = z$

Demostración. Probemos la ley de cancelación para la adición.

Sumando a la igualdad establecida el inverso aditivo de x. Luego,

$$x + y = x + z \qquad \Rightarrow \qquad (-x) + (x+y) = (-x) + (x+z)$$

Usando la propiedades asociativa y la del elemento inverso

$$(-x+x) + y = (-x+x) + z \qquad \Rightarrow \qquad 0 + y = 0 + z$$

Finalmente, por la propiedad del elemento neutro, se concluye que

$$y = z$$

Usando un razonamiento análogo, se demuestra la ley de cancelación para la multiplicación. ■

Proposición 5.6

Dados a y b números reales. Se verifica

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$$

La siguiente proposición representa una generalización del resultado anterior.

Proposición 5.7

Dados los números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Se verifica

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = 0 \Leftrightarrow (a_1 = 0) \vee (a_2 = 0) \vee \cdots \vee (a_n = 0)$$

5.1.6 Desigualdades

Definición 5.1

En el conjunto de los números reales se define la relación "$<$". Sean $a,\ b \in \mathbb{R}$

$$a < b \qquad \text{se lee} \qquad \text{“}a \text{ es menor que } b\text{”}$$

Definición 5.2

En el conjunto de los números reales se define la relación "$>$". Sean $a,\ b \in \mathbb{R}$

$$a > b \qquad \text{se lee} \qquad \text{“}a \text{ es mayor que } b\text{”}$$

Dados dos números reales x e y, la relación

$$y > x \qquad \text{es equivalente a} \qquad x < y$$

5.1.7 Axiomas de orden

Sean x, y, z números reales.

O_1. (Ley de la tricotomía) Se satisface solamente una de las siguientes alternativas:

$$x < y \qquad \text{o} \qquad y < x \qquad \text{o} \qquad x = y$$

O_2. (Transitividad)

$$\text{Si} \qquad x < y \qquad \text{y} \qquad y < z \qquad \text{entonces} \qquad x < z$$

O_3. (Monotonía de la suma)

$$\text{Si} \quad x < y \quad \text{entonces} \quad x + z < y + z \quad \text{para todo} \quad z \in \mathbb{R}$$

O_4. (Monotonía del producto)

$$\text{Si} \quad x < y \quad \text{entonces} \quad xz < yz \quad \text{para todo} \quad z > 0$$

Observación 5.1 Los axiomas de orden pueden ser reescritos usando la relación "$>$". Por ejemplo, el axioma O_2 es equivalente a

$$\text{Si} \quad z > y \quad \text{y} \quad y > x \quad \text{entonces} \quad z > x$$

Definición 5.3
Sean x e y números reales, escribiremos

$$x \leq y \quad \text{si y solo si} \quad x < y \quad \text{o} \quad x = y$$

$$x \geq y \quad \text{si y solo si} \quad x > y \quad \text{o} \quad x = y$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$, usando la ley de la tricotomía con $y = 0$, se satisface solo una de las siguientes alternativas:

$$x < 0 \quad \text{o} \quad 0 < x \quad \text{o} \quad x = 0$$

Definición 5.4
Un número real x es definido positivo si $x > 0$; es negativo si $x < 0$.

Propiedades de las desigualdades

Proposición 5.8
Sean x e y números reales, entonces

(i) $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$ (ii) $y - x > 0 \Leftrightarrow x < y$

Demostración. Observe que
(i)

$$\begin{array}{rcll} x < 0 & \Leftrightarrow & x + (-x) < 0 + (-x) & \text{Por monotonía de la suma} \\ & \Leftrightarrow & 0 < -x & \text{Definición de inverso aditivo y Axioma } A_3 \\ & \Leftrightarrow & -x > 0 & \text{Definición de "} > \text{"} \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rcll} y - x > 0 & \Leftrightarrow & 0 < y - x & \text{Definición de "} > \text{"} \\ & \Leftrightarrow & 0 + x < (y - x) + x & \text{Por monotonía de la suma} \\ & \Leftrightarrow & 0 + x < y + (-x + x) & \text{Asociatividad de la suma} \\ & \Leftrightarrow & x + 0 < y + [x + (-x)] & \text{Conmutatividad de la suma} \\ & \Leftrightarrow & x < y & \text{Inverso aditivo y elemento neutro} \end{array}$$

■

Proposición 5.9
Sean x, y, z números reales entonces

$$\text{Si} \quad x < y \quad \text{y} \quad z < 0 \qquad \text{entonces} \qquad xz > yz$$

Proposición 5.10 (Ley de signos)
Sean x e y números reales

(a) Si $x > 0$, $y > 0$ entonces $xy > 0$
(b) Si $x < 0$, $y < 0$ entonces $xy > 0$
(c) Si $x < 0$, $y > 0$ entonces $xy < 0$

Observación 5.2 La ley de signos afirma que si dos números tienen el mismo signo su producto es positivo y si tienen signos opuestos su producto es negativo.

Corolario 5.1

(i) Si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$ (ii) $1 > 0$

Proposición 5.11
Sean x un números real

(i) Si $x > 0$ entonces $x^{-1} > 0$ (ii) Si $x < 0$ entonces $x^{-1} < 0$

La proposición anterior nos dice que: x^{-1} tiene el mismo signo de x.

Proposición 5.12
Sean x e y números reales positivos

$$\text{Si} \qquad x < y \qquad \text{entonces} \qquad \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$$

Demostración. Como x, y son números positivos. Por la Proposición 5.11 sus inversos son números positivos y por la ley de signos su producto también es positivo. Usando la monotonía del producto

$$x < y \qquad \wedge \qquad x^{-1}y^{-1} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad x\cdot(x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1})$$

Por los axiomas del producto, se obtiene

$$y^{-1} = 1\cdot y^{-1} = (x\cdot x^{-1})y^{-1} = x\cdot(x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1}(yy^{-1}) = x^{-1}\cdot 1 = x^{-1}$$

Lo cual significa que $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$. ■

Proposición 5.13
Sean x, y números reales

$$\text{Si} \quad xy > 0 \quad \text{entonces} \quad x > 0,\ y > 0 \quad \text{o} \quad x < 0,\ y < 0$$

Usando la ley de signos y la anterior proposición obtenemos

$$xy > 0 \quad \Leftrightarrow \quad [x > 0 \wedge y > 0] \vee [x < 0 \wedge y < 0]$$

5.2 Ecuaciones polinomiales

En esta sección estudiaremos las ecuaciones polinomiales y sus soluciones, para ello iniciamos introduciendo algunos conceptos generales sobre una ecuación.

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones matemáticas. Cuando en una ecuación existe una variable, esta es denominada ecuación en una variable. Los siguientes expresiones representan ecuaciones en una variable

$$2x+3=7 \qquad x^2 = x+7 \qquad x+7 = |x-1|$$

Además, las anteriores expresiones son ecuaciones en la variable x.

Conjunto de valores admisibles (C.V.A)

El C.V.A es el conjunto de números reales donde está definido una expresión matemática, esta puede ser una ecuación o inecuación, o también un sistema de ecuaciones o de inecuaciones.

Solución de una ecuación o inecuación

Una solución es un valor que satisface una ecuación, inecuación, un sistema de ecuaciones o un sistema de inecuaciones. Una solución de una ecuación es llamada también raíz.

Conjunto solución (C.S)

El conjunto solución "C.S" es el conjunto de todas las soluciones de una ecuación, inecuación, un sistema de ecuaciones o de inecuaciones.

Resolver una ecuación o inecuación, consiste en hallar el conjunto solución correspondiente.

5.2.1 Ecuaciones lineales

Proposición 5.14
Dados los números reales a, b donde $a \neq 0$, entonces la solución de la ecuación lineal $ax+b=0$ está dado por $x = -\dfrac{b}{a}$

Demostración. Observe que

$$
\begin{aligned}
ax+b=0 &\Leftrightarrow (ax+b)+(-b)=0+(-b) && \text{Sumando } (-b)\\
&\Leftrightarrow ax+(b+(-b))=(-b)+0 && \text{Asociatividad y comutatividad}\\
&\Leftrightarrow ax+0=(-b)+0 && \text{Def. elemento inverso aditivo}\\
&\Leftrightarrow ax=(-b) && \text{Def. elemento neutro aditivo}\\
&\Leftrightarrow a^{-1}\cdot(ax)=a^{-1}\cdot(-b) && \text{Multiplicando } a^{-1}\\
&\Leftrightarrow (aa^{-1})\cdot x=(-b)\cdot a^{-1} && \text{Asociatividad y comutatividad}\\
&\Leftrightarrow 1\cdot x=-(ba^{-1}) && \text{Def. elemento inverso multiplicativo}\\
&\Leftrightarrow x=-\frac{b}{a} && \text{Def. elemento neutro multiplicativo}
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 5.1

Halle las solución de la ecuación $3x+12=0$

Solución: Usando la Proposición 5.14 la solución de $3x+12=0$ es $x=-4$ ■

Ejemplo 5.2

Halle las solución de la ecuación $6x-3=2x+21$

Solución: Usando propiedades de números reales se deduce que

$$6x-3=2x+21 \qquad \text{es equivalente a} \qquad 4x-24=0$$

Luego, la solución de la ecuación pedida es $x=6$ ■

5.2.2 Ecuaciones cuadráticas

Iniciamos el estudio de las ecuaciones resolviendo el caso más sencillo de una ecuación cuadrática a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.3

Sea a un número real

$$\text{Si} \quad x^2=a^2 \quad \text{entonces} \quad x=\pm a$$

Solución: La ecuación puede ser escrita como

$$x^2-a^2=0 \qquad \Rightarrow \qquad (x-a)(x+a)=0$$

Por la Proposición 5.6 se deduce que

$$x-a=0 \qquad \text{o} \qquad x+a=0$$

Por lo tanto

$$x = a \qquad \text{o} \qquad x = -a$$

Lo que usualmente se escribe como $x = \pm a$. ■

Proposición 5.15 (Fórmula general para una cuadrática)
Dado los números reales a, b y c (donde $a \neq 0$), entonces el conjunto solución de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

está dado por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

siempre que $b^2 - 4ac \geq 0$.

Demostración. Al factorizar el valor de a en la ecuación cuadrática se obtiene

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Sumando $\dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{c}{a}$ a ambos términos de la ecuación

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Luego,

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$

Siendo el término del lado izquierdo un binomio cuadrado perfecto, entonces

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2$$

Usando el Ejemplo 5.3 se obtiene

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

■

Corolario 5.2 Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ y sea $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$. La ecuación cuadrática posee dos soluciones reales distintas, las cuales están determinadas por

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$. La ecuación cuadrática posee una única solución real, las cual está determinada por
$$x = \frac{-b}{2a}$$
- Si $\Delta < 0$. La ecuación cuadrática no posee soluciones reales.

5.2.3 Método de factorización para una ecuación cuadrática

Dada una ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ con discriminante $\Delta = b^2-4ac$, entonces

- Si $\Delta > 0$, entonces es posible escribir la ecuación como
$$(mx+n)(px+q) = ax^2+bx+c = 0$$
Usando la Proposición 5.6, se deduce que $mx+n=0$ o $px+q=0$. Por lo tanto, las soluciones son
$$x_1 = -\frac{n}{m} \qquad \text{y} \qquad x_2 = -\frac{q}{p}$$
- Si $\Delta = 0$, es posible escribir la ecuación como
$$(mx+n)^2 = ax^2+bx+c = 0$$
de donde la única solución es dada por $x_1 = -\dfrac{n}{m}$
- Si $\Delta < 0$, no es posible la factorización de ecuación con factores de primer grado. Por lo tanto, no existe soluciones.

Ejemplo 5.4

Halle las soluciones de la ecuación $2x^2+9x-5=0$

Solución: Observe que $\Delta = 81$. Luego, factorizando la ecuación se obtiene

$$2x^2+9x-5 = (2x-1)(x+5) = 0$$

Luego,

$$2x+1=0 \qquad \text{y} \qquad x+5=0$$

entonces las soluciones están dadas por $x_1 = \dfrac{1}{2}$ y $x_2 = -5$.

Usando la fórmula general se tiene

$$x = \frac{-9\pm\sqrt{(9)^2-4\cdot(2)\cdot(-5)}}{2\cdot 2} = \frac{-9\pm\sqrt{121}}{4} = \frac{-9\pm 11}{4}$$

de donde

$$x_1 = \frac{-9+11}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-9-11}{4} = -5$$

■

5.2.4 Ecuaciones polinomiales

Un polinomio de grado n en la variable x es una expresión algebraica de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0$$

donde $n \in \mathbb{N}_0$ y a_i son números reales para todo $i = 1, \ldots, n$.

El término a_n es llamado coeficiente principal y a_0 el término independiente. Los polinomios son denotados por $p(x)$, $q(x)$, etcétera.

Ejemplos:

(a) $p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$
(b) $q(x) = x^2 - 1$
(c) $r(x) = 5x^3 - x - 4$
(d) $s(x) = ax^2 + bx + c$

Polinomio reducible

Decimos que un polinomio $p(x)$ de grado n es reducible, si es posible expresarlo como producto de dos polinomios con coeficientes reales con grados mayores o iguales 1 y menores que n.

Polinomio irreducible

Un polinomio es irreducible si no es reducible.

Ejemplos:

- El polinomio $x^3 - 1$ es reducible dado que $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$
- El polinomio $x^4 + 1$ es reducible dado que $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$
- El polinomio $x^2 + 1$ es irreducible. Si fuese reducible entonces

  $$x^2 + 1 = (ax + b)(cx + d) \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

  Lo cual no es posible.
- El polinomio $ax + b$ es irreducible.

5.2.5 Raíces de polinomios factorizados

Proposición 5.16
Los únicos polinomios con coeficientes reales irreducibles son de la forma

$$p(x) = mx + n \qquad \text{y} \qquad q(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{donde} \quad b^2 - 4ac < 0$$

Proposición 5.17
El conjunto solución de un polinomio de grado n es la unión de las raíces de cada factor irreducible de primer grado.

Ejemplo 5.5

Halle el conjunto solución de $(x^2+x+1)(x-3)(x+1)(x^2+5x+6)=0$

Solución: El discriminante de (x^2+x+1) es $\Delta_1 = 1^2-4\cdot 1\cdot 1 = -3$ entonces (x^2+x+1) es un factor irreducible, es decir, no se puede factorizar con términos de grado 1.

El discriminante de (x^2+5x+6) es $\Delta_2 = 5^2-4\cdot 1\cdot 6 = 1$ entonces (x^2+5x+6) es reducible, en particular, se puede factorizar con términos de grado 1. En efecto, $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$.

Por consiguiente, la ecuación original la escribimos como

$$(x^2+x+1)(x-3)(x+1)(x+2)(x+3)=0$$

Encontrando las raíces de cada factor irreducible de primer grado, resolvemos

$$x-3=0 \qquad x+1=0 \qquad x+2=0 \qquad x+3=0$$

De donde se obtiene las raíces

$$x_1=3 \qquad x_2=-1 \qquad x_3=-2 \qquad x_4=-3$$

Por lo tanto, el conjunto solución resulta

$$\text{Conjunto Solución: } \text{C.S} = \{-3,-2,-1,3\}$$

■

Observación 5.3 En el ejemplo anterior, podríamos haber utilizado la Proposición 5.7, es decir, encontrar las raíces de cada factor aunque estos no sean términos irreducibles. Consecuentemente, se resuelve

$$x^2+x+1=0 \qquad x-3=0 \qquad x+1=0 \qquad x^2+5x+6=0$$

De donde, se deduce que $x^2+x+1=0$ no tiene raíces al tener discriminante negativo, las raíces de $x^2+5x+6=0$ son -2 y -3, las raíces de $x-3=0$ y $x+1=0$ son $x=3$ y $x=-1$ respectivamente, concluyendo de igual manera que el conjunto solución resulta ser $\text{C.S} = \{-3,-2,-1,3\}$

5.2.6 Raíces de polinomios no factorizados

Proposición 5.18

Sean $p(x)$ un polinomio de grado $n \geq 1$ y a un número real. Si $p(a)=0$, entonces

$$p(x) = (x-a)q(x)$$

donde $q(x)$ es un polinomio de grado $n-1$.

Observe que $q(x) = \dfrac{p(x)}{x-a}$, el cual puede ser calculado usando diversos métodos.

Ejemplo 5.6

Halle el conjunto solución de $x^6 - 2x^5 - 3x^4 - x^2 + 2x + 3 = 0$

Solución: Sea $p(x) = x^6 - 2x^5 - 3x^4 - x^2 + 2x + 3$. Como $p(1) = 0$ entonces $(x-1)$ es un factor de $p(x)$. Dado que

$$x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 5x - 3 = \frac{p(x)}{x-1}$$

Entonces,

$$p(x) = (x-1)(x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 5x - 3)$$

Sea $p_1(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 5x - 3$. Como $p_1(-1) = 0$ entonces $(x+1)$ es un factor de $p_1(x)$. Dado que

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3 = \frac{p_1(x)}{x+1}$$

Entonces,

$$p(x) = (x+1)p_1(x) = (x-1)(x+1)(x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3)$$

Sea $p_2(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3$. Como $p_2(-1) = 0$ entonces $(x+1)$ es un factor de $p_2(x)$. Además,

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = \frac{p_2(x)}{x+1}$$

Entonces,

$$p(x) = (x-1)(x+1)p_2(x) = (x-1)(x+1)^2(x^3 - 3x^2 + x - 3)$$

Sea $p_3(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$. Como $p_3(3) = 0$ entonces $(x-3)$ es un factor de $p_3(x)$. Dado que

$$x^2 + 1 = \frac{p_3(x)}{x-3}$$

Entonces,

$$p(x) = (x-1)(x+1)^2 p_3(x) = (x-1)(x+1)^2(x-3)(x^2+1)$$

Por lo tanto, el objetivo se reduce a calcular el conjunto solución de

$$(x-1)(x+1)^2(x-3)(x^2+1) = 0$$

Por lo tanto, el conjunto solución está dado por C.S $= \{-1, 1, 3\}$ ■

5.3 Inecuaciones polinomiales

5.3.1 Inecuaciones de primer grado

Proposición 5.19

Dados los números reales a, b donde $a \neq 0$, entonces

- La inecuación lineal

$$ax + b > 0$$

tiene por conjunto solución:

$$\text{C.S} = \begin{cases} \left(-\dfrac{b}{a}, +\infty\right) & \text{si} \quad a > 0 \\ \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right) & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

- La inecuación lineal

$$ax + b \geq 0$$

tiene por conjunto solución:

$$\text{C.S} = \begin{cases} \left[-\dfrac{b}{a}, +\infty\right) & \text{si} \quad a > 0 \\ \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right] & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

Observación 5.4 Toda inecuación con términos de primer grado puede reducirse a una de la forma

$$ax + b > 0 \qquad \text{o} \qquad ax + b \geq 0$$

Ejemplo 5.7

Halle el conjunto solución de la inecuación $2x - 5 \leq 7x - 15$

Solución: Usando las propiedades de los números reales podemos reescribir la inecuación de la forma

$$0 \leq 5x - 10 \qquad \text{de donde} \qquad 5x - 10 \geq 0$$

Por lo tanto,

$$\text{C.S} = [2, +\infty)$$

■

5.4 Método de los puntos críticos

El conjunto solución de las inecuaciones de la forma $p(x) > 0,\ p(x) < 0,\ p(x) \geq 0,\ p(x) \geq 0$ está relacionado con las raíces de la ecuación $p(x) = 0$

5.4.1 Pasos para resolver una inecuación polinomial: método A

Pasos para resolver una inecuación polinomial
Método A

1. Exprese la inecuación con $p(x)$ en factores irreducibles.
2. Halle las raíces de $p(x) = 0$ (puntos críticos)
3. Determine los intervalos abiertos con extremos en los puntos críticos.
4. Determine los signos de los factores en cada intervalo abierto encontrado. Además, determine el signo de $p(x)$ en cada intervalo, el cual está dado por el producto de los signos en cada intervalo.
5. Si la inecuación es de la forma $p(x) > 0$ o $p(x) < 0$. El conjunto solución es la unión de intervalos abiertos donde el signo de $p(x)$ coincida con el signo de la inecuación. Si la inecuación es de la forma $p(x) \geq 0$ o $p(x) \leq 0$ se le adiciona los puntos críticos al conjunto solución.

Ejemplo 5.8

Halle el conjunto solución de $x^2 - 7x + 10 > 0$.

Solución: Realizando los pasos del método tenemos

1. $p(x) = (x-2)(x-5) > 0$.
2. Resolviendo $(x-2)(x-5) = 0$, se obtiene los puntos críticos $x_1 = 2$ y $x_2 = 5$.
3. Los intervalos son $I_1 = (-\infty, 2)$, $I_2 = (2, 5)$ y $I_3 = (5, +\infty)$.
4. Los signos de los factores en cada intervalo y de $p(x)$ están determinado en la siguiente tabla

Intervalo	$(-\infty,2)$	$(2,5)$	$(5,+\infty)$
Signo de $(x-2)$	$-$	$+$	$+$
Signo de $(x-5)$	$-$	$-$	$+$
Signo de $p(x)$	$+$	$-$	$+$

5. Como la ecuación es de la forma $p(x) > 0$, entonces elegimos los intervalos abiertos con signo positivo. Por lo tanto,

$$\text{C.S} = (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$$

Ejemplo 5.9

Halle el conjunto solución de $(x^2 - 3x + 2)(x - 3) < 0$.

Solución: Realizando los pasos del método tenemos

1. $p(x) = (x^2 - 3x + 2)(x-3) = (x-1)(x-2)(x-3) < 0$.
2. Resolviendo $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$, se obtiene los puntos críticos $x_1 = 1, x_2 = 2$ y $x_3 = 3$.
3. Los intervalos son $I_1 = (-\infty, 1), I_2 = (1,2), I_3 = (2,3)$ y $I_4 = (3, +\infty)$.
4. Los signos de los factores en cada intervalo y de $p(x)$ están determinado en la siguiente tabla

Intervalo	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(3,+\infty)$
Signo de $(x-1)$	$-$	$+$	$+$	$+$
Signo de $(x-2)$	$-$	$-$	$+$	$+$
Signo de $(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$+$
Signo de $p(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

5. Como la ecuación es de la forma $p(x) < 0$, entonces elegimos los intervalos abiertos con signo resultante negativo. Por lo tanto,

$$\text{C.S} = (-\infty, 1) \cup (2,3)$$

■

Ejemplo 5.10

Halle el conjunto solución de $(x^2 + x + 1)(x^2 - 11x + 18) \leq 0$.

Solución: Realizando los pasos del método tenemos

1. $x^2 + x + 1$ es irreducible y $x^2 - 11x + 18$ es reducible con $x^2 - 11x + 18 = (x-2)(x-9)$. Luego,

$$p(x) = (x^2 + x + 1)(x-2)(x-9) \leq 0$$

2. Resolviendo $(x^2 + x + 1)(x-2)(x-9) = 0$, se obtiene los puntos críticos $x_1 = 2$, $x_2 = 9$.
3. Los intervalos son los siguientes

$$I_1 = (-\infty, 2) \qquad I_2 = (2,9) \qquad I_3 = (9, +\infty)$$

4. Los signos de los factores en cada intervalo y de $p(x)$ están determinado en la siguiente tabla

Intervalo	$(-\infty,2)$	$(2,9)$	$(9,+\infty)$
Signo de $(x-2)$	$-$	$+$	$+$
Signo de $(x-9)$	$-$	$-$	$+$
Signo de (x^2+x+1)	$+$	$+$	$+$
Signo de $p(x)$	$+$	$-$	$+$

5. Como la ecuación es de la forma $p(x) \leq 0$, entonces elegimos los intervalos abiertos con signo negativo y le adicionamos las raíces de $p(x) = 0$. Por lo tanto,

$$\text{C.S} = (2,9) \cup \{2,9\} = [2,9]$$

■

5.4.2 Pasos para resolver una inecuación polinomial: método B

Pasos para resolver una inecuación polinomial
Método B

1. Exprese la inecuación con $p(x)$ en factores irreducibles.
2. Halle las raíces de $p(x) = 0$ (puntos críticos)
3. Determine los intervalos abiertos con extremos en los puntos críticos.
4. Seleccione un punto en cada intervalo abierto (punto de paso).
   Evalúe la validez de la inecuación en cada punto paso.
5. Si la ecuación es del tipo $p(x) > 0$ o $p(x) < 0$, el conjunto solución es la unión de intervalos abiertos donde se tiene la validez de la inecuación en su punto de paso. Si la inecuación es de la forma $p(x) \geq 0$ o $p(x) \leq 0$, se le adicionan a la unión de intervalos abiertos las raíces de $p(x) = 0$.

Ejemplo 5.11

Halle el conjunto solución de $(x^2+2x-8)(x-11) \geq 0$.

Solución: Realizando los pasos del método B tenemos

1. $p(x) = (x+4)(x-2)(x-11) \geq 0$.
2. De $(x+4)(x-2)(x-11) = 0$, entonces los puntos críticos son

$$x_1 = -4 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 11$$

3. Los intervalos son

$$I_1 = (-\infty, -4) \qquad I_2 = (-4, 2) \qquad I_3 = (2, 11) \qquad I_4 = (11, +\infty)$$

4. Sean los puntos de paso

$$-10 \in I_1 \qquad 0 \in I_2 \qquad 10 \in I_3 \qquad 20 \in I_4$$

Luego,

Intervalo	$(-\infty, -4)$	$(-4, 2)$	$(2, 11)$	$(11, +\infty)$
Punto paso $= y$	-10	0	10	20
$p(y) \geq 0$	$(72)(-21) \geq 0$	$(-8)(-1) \geq 0$	$(112)(-1) \geq 0$	$(432)(9) \geq 0$
Validez de $p(y) \geq 0$	✗	✓	✗	✓

5 Como la ecuación es de la forma $p(x) \geq 0$, entonces el C.S es la unión de los intervalos abiertos con el símbolo "✓" con las raíces de $p(x) = 0$. Por lo tanto,

$$C.S = (-4,2) \cup (11,+\infty) \cup \{-4,2,11\} = [-4,2] \cup [11,+\infty)$$

■

Para simplificar podemos escribir el cuadro del ejemplo anterior de lo forma:

Intervalo	$(-\infty,-4)$	$(-4,2)$	$(2,11)$	$(11,+\infty)$
Punto paso $= y$	-10	0	10	20
Validez de $p(y) \geq 0$	✗	✓	✗	✓

Ejemplo 5.12

Halle el conjunto solución de $(x^2+x+1)^2(x+2)^2(x-3)^3(x-7) > 0$.

Solución: Realizando los pasos del método B tenemos

1 $p(x) = (x^2+x+1)^2(x+2)^2(x-3)^3(x-7) > 0$.

2 De $(x^2+x+1)^2(x+2)^2(x-3)^3(x-7) = 0$, entonces los puntos críticos son

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = 7$$

3 Los intervalos son

$$I_1 = (-\infty,-2) \qquad I_2 = (-2,3) \qquad I_3 = (3,7) \qquad I_4 = (7,+\infty)$$

4 Sean los puntos de paso

$$y_1 = -10 \in I_1 \qquad y_2 = 0 \in I_2 \qquad y_3 = 5 \in I_3 \qquad y_4 = 10 \in I_4$$

Como,

- $p(-10) > 0$, se verifica dado que $p(-10) = (91)^2(-8)^2(-13)^3(-17)$.
- $p(0) > 0$, se verifica dado que $p(0) = (1)^2(2)^2(-3)^3(-7)$.
- $p(5) > 0$, no se verifica dado que $p(5) = (31)^2(7)^2(2)^3(-2)$.
- $p(10) > 0$, se verifica dado que $p(10) = (121)^2(12)^2(7)^3(3)$.

Entonces,

Intervalo	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3,7)$	$(7,+\infty)$
Punto paso $= y$	-10	0	5	10
Validez $p(y) > 0$	✓	✓	✗	✓

5 Como la ecuación es de la forma $p(x) > 0$, entonces elegimos los intervalos abiertos con el símbolo "✓". Por lo tanto,

$$C.S = (-\infty,-2) \cup (-2,3) \cup (7,+\infty)$$

■

5.5 Ecuaciones e inecuaciones no polinomiales

5.5.1 Ecuaciones e inecuaciones con funciones racionales

Proposición 5.20

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios sin factores en común. Se considera las ecuaciones

$$\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0 \tag{I}$$

$$p(x) \cdot q(x) \geq 0 \tag{II}$$

Denotando por:
- C.S $_{\mathrm{I}}$ el conjunto solución de la inecuación (I).
- C.S $_{\mathrm{II}}$ el conjunto solución de la inecuación (II).
- C.V.A $_{\mathrm{I}} = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ el conjunto de valores admisibles de la inecuación (I).

Entonces,

$$\text{C.S}_{\mathrm{I}} = \left(\text{C.S}_{\mathrm{II}}\right) \cap \left(\text{C.V.A}_{\mathrm{I}}\right)$$

Demostración. En el conjunto de valores admisibles de (I), se tiene que $q(x) \neq 0$, de donde $q^2(x) > 0$. Por lo tanto,

$$\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p(x)}{q(x)} \cdot q^2(x) \geq 0 \cdot q^2(x) \quad \Leftrightarrow \quad p(x) \cdot q(x) \geq 0$$

■

Observación 5.5 Sobre la Proposición 5.20 se verifica

- El resultado es valido si consideramos "$<$", "$>$" o "$\leq$" en lugar de "$\geq$".
- En conjunto solución puede escribirse de la forma

$$\text{C.S}_{\mathrm{I}} = \text{C.S}_{\mathrm{II}} - \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$$

  Es decir, el conjunto solución de la inecuación (I) es el mismo que conjunto solución de (II) exceptuando las raíces de $q(x)$.
- Si la inecuación es estricta (de la forma "$>$" o "$<$") los conjuntos de soluciones coinciden dado que las raíces de $q(x)$ no son soluciones de la inecuación $p(x)q(x) > 0$ o $p(x)q(x) < 0$.

Ejemplo 5.13

Halle el conjunto solución de

$$\frac{(x^2+x+1)^2(x+8)}{(x-2)^3(x-4)} > 0$$

Solución: El conjunto solución solicitado es el mismo que el de la inecuación

$$(x^2+x+1)^2(x+8)(x-2)^3(x-4) > 0$$

Realizando los pasos del método B de los puntos críticos se tiene

1. $p(x) = (x^2+x+1)^2(x+8)(x-2)^3(x-4) > 0.$
2. Las raíces de $p(x) = 0$ son los puntos

$$x_1 = -8 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 4$$

3. Los intervalos a considerar son

$$I_1 = (-\infty, -8) \qquad I_2 = (-8, 2) \qquad I_3 = (2, 4) \qquad I_4 = (4, +\infty)$$

4. Consideramos los siguientes puntos de paso

$$y_1 = -10 \in I_1 \qquad y_2 = 0 \in I_2 \qquad y_3 = 3 \in I_3 \qquad y_4 = 10 \in I_4$$

Como,
- $p(-10) > 0$, no se verifica.
- $p(0) > 0$, se verifica.
- $p(3) > 0$, no se verifica.
- $p(10) > 0$, se verifica.

Entonces,

Intervalo	$(-\infty, -8)$	$(-8, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
Punto paso $= y$	-10	0	3	10
Validez $p(y) > 0$	✗	✓	✗	✓

5. Como la ecuación es de la forma $p(x) > 0$, entonces elegimos los intervalos donde es positivo. Por lo tanto,

$$\text{C.S} = (-2, 3) \cup (7, +\infty)$$

El cual resulta el conjunto solución de la inecuación racional propuesta. ■

Ejemplo 5.14

Halle el conjunto solución de

$$\frac{(x^2+3x+2)(x-8)^3}{(x-2)^2(x-6)} \geq 0$$

Solución: El conjunto de valores admisibles de la inecuación es el conjunto

$$\text{C.V.A} = \{x \in \mathbb{R} : (x-2)^2(x-6) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2, x \neq 6\}$$

Por consiguiente, el conjunto solución pedido es el mismo que el de la inecuación

$$(x^2+3x+2)(x-8)^3(x-2)^2(x-6) \geq 0$$

exceptuando los valores $x = 2$ y $x = 6$.

Realizando los pasos del método B de los puntos críticos se tiene

1. $p(x)=(x+2)(x+1)(x-8)^3(x-2)^2(x-6)\geq 0.$
2. Las raíces de $p(x)=0$ son los puntos

$$x_1=-2 \qquad x_2=-1 \qquad x_3=2 \qquad x_4=6 \qquad x_5=8$$

3. Los intervalos a considerar son

$$I_1=(-\infty,-2),\quad I_2=(-2,-1),\quad I_3=(-1,2),\quad I_4=(2,6),\quad I_5=(6,8),\quad I_6=(8,+\infty)$$

4. Consideramos los siguientes puntos de paso con $y_i \in I_i$ para $i=1,\dots,6$

$$y_1=-10 \qquad y_2=-3/2 \qquad y_3=0 \qquad y_4=5 \qquad y_5=7 \qquad y_6=10$$

Luego,

Intervalo	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,2)$	$(2,6)$	$(6,8)$	$(8,+\infty)$
Punto paso $=y$	-10	$-3/2$	0	5	7	10
Validez $p(y)\geq 0$	✓	✗	✓	✓	✗	✓

5. Como la ecuación es de la forma $p(x)\geq 0$, el conjunto solución es la unión de los intervalos abiertos con el símbolo "✓" con las raíces de $p(x)=0$. El cual es dado por:

$$(-\infty,-2]\cup[-1,6]\cup[8,+\infty)$$

Por lo tanto, el conjunto solución pedido es

$$\text{C.S}=(-\infty,-2]\cup[-1,6]\cup[8,+\infty)-\{2,6\}=(-\infty,-2]\cup[-1,2)\cup(2,6)\cup[8,+\infty)$$

■

Capítulo 06

Números Complejos

De la propiedad de los números reales se conoce que el cuadrado de cualquier número real es siempre mayor o igual a cero. Por consiguiente, la ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

no posee soluciones en el conjunto de los números reales, en general cualquier ecuación cuadrática de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{con } \ a \neq 0$$

no posee soluciones reales si

$$b^2 - 4ac < 0$$

Esto motiva definir un conjunto donde estas ecuaciones si posean soluciones.

6.1 El plano complejo

6.1.1 Definición de números complejos

Definición 6.1
Un número complejo z es un par ordenado $z = (a, b)$ donde a y b son números reales.

El conjunto de los números complejos es denotado por $\mathbb{C}$. Por lo tanto,

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : \ a, \ b \in \mathbb{R}\}$$

Definición 6.2

Dado un número complejo $z = (a,b)$. El primer componente a es llamada parte real de z y el segundo componente b es llamado parte imaginaria z. Los cuales son denotados por:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z &= a & \text{Parte real de } z \\ \operatorname{Im} z &= b & \text{Parte imaginaria de } z \end{cases}$$

Ejemplos:

$$\operatorname{Re}(3+4i) = 3 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Im}(3+4i) = 4$$

Un número complejo $z = (a,b)$ puede ser clasificado como:

(a) Complejo puro. Si $b \neq 0$. Por ejemplo:

$$z_1 = (1,1) \qquad z_2 = (0,3) \qquad z_3 = (300,1)$$

(b) Complejo real. Si $b = 0$. Por ejemplo:

$$z_1 = (1,0) \qquad z_2 = (2,0) \qquad z_3 = (300,0)$$

(b) Complejo imaginario puro. Si $a = 0$. Por ejemplo:

$$z_1 = (0,1) \qquad z_2 = (0,5) \qquad z_3 = (0,10)$$

Definición 6.3 (Plano de Argand)

El plano de Argand se representa mediante dos ejes perpendiculares entre sí, uno horizontal y otro vertical llamados eje real y eje imaginario, respectivamente.

Un número complejo es representando en el plano de Argand considerando sus partes real e imaginario, como se observa en la Figura 6.1.

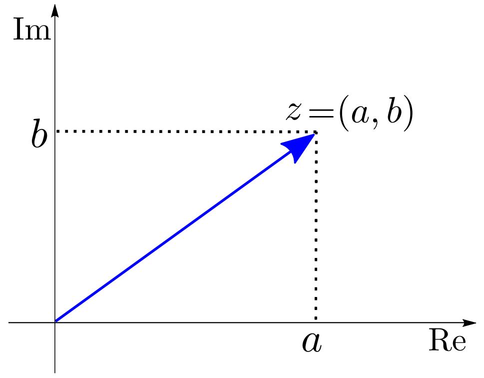


Figura 6.1: Representación geométrica de $z = (a,b)$

Decimos que dos números complejos son iguales si y solo si tienen parte real e imaginaria iguales, esto es,

$$(a,b) = (c,d) \qquad \text{si y solo si} \qquad a = c \qquad \text{y} \qquad b = d$$

6.1.2 Operaciones en los números complejos

En el conjunto de los números complejos consideramos dos operaciones; llamadas suma y multiplicación

$$\oplus : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \qquad\qquad \odot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

Las cuales son definidos mediante las siguientes reglas

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b) \odot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Donde los símbolos "+", "−" y " · " denotan las operaciones definidas en los números reales.
Ejemplos:

$$(2,3) \oplus (1,5) = (3,8) \qquad \text{y} \qquad (2,1) \odot (3,5) = (1,13)$$

En adelante usaremos los símbolos "+" en lugar de "⊕" y " · " en lugar de "⊙", para denotar la suma y producto de números complejos.
Observe que

$$2(a,b) = (a,b) + (a,b) = (2a, 2b)$$

En general,

$$n(a,b) = \underbrace{(a,b) + (a,b) + \cdots + (a,b)}_{n \text{ veces}} = (na, nb)$$

Lo cual nos motiva a definir la multiplicación entre un número real y un número complejo.

Dado $r \in \mathbb{R}$ y $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ se define

$$rz = r(a,b) = (ra, rb)$$

Usando la definición de suma y producto de los números complejos es posible probar las siguientes propiedades de la suma y producto, así como las propiedades asociativas.

Proposición 6.1 (Propiedades de la suma)

A_1. (Propiedad asociativa)

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \qquad \text{para todo} \quad z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$$

A_2. (Propiedad conmutativa)

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad \text{para todo} \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$$

A_3. (Propiedad del elemento neutro) Existe un elemento $\theta \in \mathbb{C}$ tal que

$$z + \theta = z \qquad \text{para todo} \quad z \in \mathbb{C}$$

A_4. (Propiedad del elemento inverso) Para cada $z \in \mathbb{C}$ existe un elemento $w \in \mathbb{C}$ tal que

$$z + w = \theta$$

Demostración. Probaremos solamente la propiedad conmutativa

Sean

$$z_1 = (a,b) \qquad \text{y} \qquad z_2 = (c,d)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a,b) + (c,d) && \text{Definición de } z_1,\ z_2 \\
&= (a+c, b+d) && \text{Definición de la suma compleja} \\
&= (c+a, d+b) && \text{Conmutativad de los números reales} \\
&= (c,d) + (a,b) && \text{Definición de la suma compleja} \\
&= z_2 + z_1 && \text{Definición de } z_1,\ z_2
\end{aligned}$$

de donde se concluye la conmutatividad en los números complejos. ■

Proposición 6.2 (Propiedades del producto)

A_5. (Propiedad asociativa)

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \qquad \text{para todo} \quad z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$$

A_6. (Propiedad conmutativa)

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \qquad \text{para todo} \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$$

A_7. (Propiedad del elemento neutro) Existe un elemento $e \in \mathbb{C}$ tal que

$$z \cdot e = z \qquad \text{para todo} \quad z \in \mathbb{C}$$

A_8. (Propiedad del elemento inverso) Para cada $z \neq \theta$ en $\mathbb{C}$ existe un elemento $w \in \mathbb{C}$ tal que

$$z \cdot w = e$$

Demostración. Probaremos la propiedad del elemento neutro.

Sea $e = (1,0)$ entonces $e \in \mathbb{C}$. Además, para cada $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ se verifica

$$z \cdot e = (a,b) \cdot (1,0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a,b) = z$$

de donde se concluye que $e = (1,0)$ es un elemento neutro multiplicativo para los números complejos. ■

Proposición 6.3 (Propiedades distributivas)

A_9. (Propiedad distributiva a izquierda)

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \qquad \text{para todo} \quad z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}.$$

A_{10}. (Propiedad distributiva a derecha)

$$(z_1+z_2)\cdot z_3 = z_1\cdot z_3 + z_2\cdot z_3 \qquad \text{para todo} \quad z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}.$$

Las propiedades $(A_1)-(A_{10})$ implican que los elementos neutros e inversos son únicos. Además,

- El elemento $(0,0)$ es el elemento neutro aditivo en los número complejos.
- El elemento $(1,0)$ es el elemento neutro multiplicativo en los número complejos.
- Sea $z=(a,b)$ un número complejo entonces su inverso aditivo, denotado por $-z$ es el número complejo dado por
$$-z=(-a,-b)$$
- Sea $z=(a,b)\neq(0,0)$ entonces su inverso multiplicativo, denotado por z^{-1} o $\dfrac{1}{z}$ es el número complejo dado por
$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

Interpretación geométrica

Sean los números complejos $z=(a,b)$ y $w=(c,d)$. Para obtener $z+w$ se considera el paralelogramo con un vértice en el origen, y teniendo los otros dos vértices a z y w, el cuarto vértice resulta ser la suma $z+w$. La suma compleja puede verse en la Figura6.2

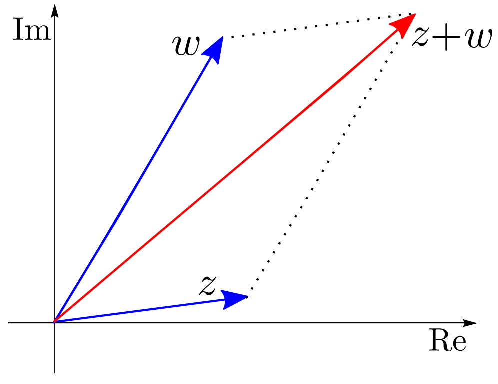


Figura 6.2: Representación geométrica de la suma de números complejos

Sea $z=(a,b)$ un número complejo. Luego,

$$z\cdot(0,1)=(a,b)\cdot(0,1)=(-b,a)$$

Lo cual puede interpretarse geométricamente como la rotación de un ángulo $\dfrac{\pi}{2}$ del vector (a,b) en sentido antihorario, tal como puede verse en la Figura6.3

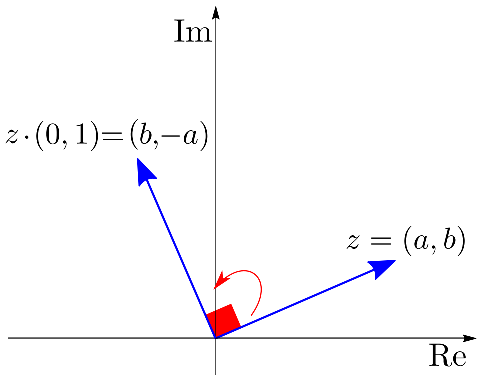


Figura 6.3: Representación geométrica de la multiplicación de z con $(0,1)$

Ejemplo 6.1

Halle los inverso aditivo y multiplicativo de $z = (3,4)$

Solución: Los inversos están dados por

$$-z = (-3,-4) \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{z} = \left(\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}\right)$$

■

6.1.3 Conjugado de un número complejo

Dado un número complejo $z = (a,b)$, el conjugado de z, denotado por $\bar{z}$ es el número complejo definido como

$$\bar{z} = (a,-b)$$

Ejemplo 6.2

Halle los conjugados de los números complejos $z = (3,4)$ y $w = (-2,-5)$

Solución: Los conjugados están dados por

$$\bar{z} = (3,-4) \qquad \text{y} \qquad \overline{w} = (-2,5)$$

■

La Figura 6.4 muestra la representación geométrica del conjugado de un número complejo z.

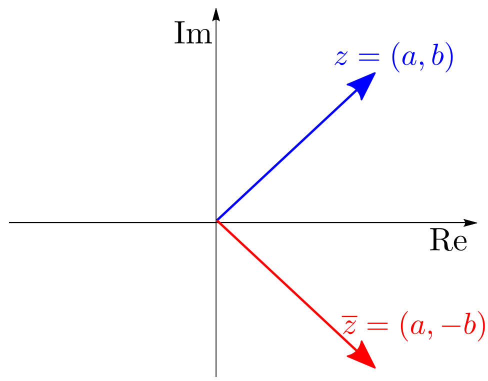


Figura 6.4: Interpretación geométrica del conjugado de un número complejo

Proposición 6.4 (Propiedades del conjugado)

Sean z, w números complejos, entonces

a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

c) $\overline{\overline{z}} = z$

d) $\overline{z} = z \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Demostración. Sean $z = (a,b)$ y $w = (c,d)$. Luego,

(a)

$$\overline{z+w} = \overline{(a,b)+(c,d)} = \overline{(a+b,c+d)} = (a+b,-c-d) = (a,-b)+(b,-d) = \overline{(a,b)}+\overline{(c,d)} = \overline{z}+\overline{w}$$

(c)

$$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{(a,b)}} = \overline{(a,-b)} = \big(a,-(-b)\big) = (a,b) = z$$

(d)

$$\overline{z} = z \Leftrightarrow (a,-b) = (a,b) \Leftrightarrow -b = b \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$$

■

6.1.4 Módulo de un número complejo

Dado un número complejo $z = (a,b)$, el módulo de z denotado por $\|z\|$, es definido como

$$\|z\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

El módulo representa geométricamente la distancia desde el origen $(0,0)$ hasta el número complejo (a,b), tal como puede observarse en la Figura6.5

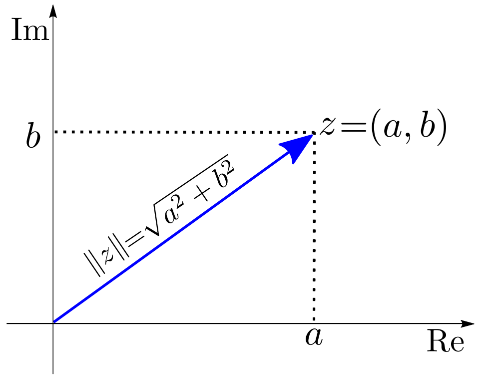


Figura 6.5: Interpretación geométrica del módulo de un número complejo

Ejemplo 6.3

Halle los módulos de los números complejos $z=(3,4)$ y $w=(-5,12)$

Solución: Los módulos están dados por

$$\|z\|=\|(3,4)\|=\sqrt{3^2+4^2}=5 \qquad \text{y} \qquad \|w\|=\|(-5,12)\|=\sqrt{(-5)^2+(12)^2}=13$$

■

Proposición 6.5 (Propiedades del módulo)

Sean $z,\ w$ números complejos, entonces

(a) $\|z\|=0$ si y solo si $z=(0,0)$

(b) $\|\bar{z}\|=\|-z\|=\|z\|$

(c) $\|z\cdot w\|=\|z\|\cdot\|w\|$

(d) $\left\|\dfrac{z}{w}\right\|=\dfrac{\|z\|}{\|w\|}$ donde $w\neq 0$

Demostración.

(a) Sea $z=(a,b)$ entonces $\|z\|=\sqrt{a^2+b^2}$. Por consiguiente,

$$\|z\|=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{a^2+b^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad a^2+b^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=0=b \quad\Leftrightarrow\quad z=(0,0)$$

(b) Sea $z=(a,b)$ entonces

$$-z=(-a,-b) \qquad \text{y} \qquad \bar{z}=(a,-b)$$

Luego,

$$\|-z\|=\sqrt{(-a)^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=\|z\| \qquad \text{y} \qquad \|\bar{z}\|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=\|z\|$$

(c) Sean

$$z = (a,b) \quad \text{y} \quad w = (c,d) \qquad \Rightarrow \qquad z \cdot w = (ac - bd, ad + bc)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|z \cdot w\| &= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \sqrt{a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2adbc + b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} \\
&= \|z\| \cdot \|w\|
\end{aligned}$$

(d) Sean z, $w \in \mathbb{C}$ con $w \neq 0$. Usando la parte anterior

$$\vartheta = \frac{z}{w} \qquad \Rightarrow \qquad \vartheta \cdot w = z \qquad \Rightarrow \quad \|\vartheta\| \cdot \|w\| = \|z\| \qquad \Rightarrow \qquad \|\vartheta\| = \frac{\|z\|}{\|w\|}$$

Por lo tanto, reemplazando ϑ se obtiene

$$\left\| \frac{z}{w} \right\| = \frac{\|z\|}{\|w\|}$$

■

Ejemplo 6.4

Hallar el módulo del siguiente número complejo

$$z = \frac{(2,4) \cdot (-3,4)}{(-12,5)}$$

Solución: Usando la propiedades de módulo se tiene

$$\begin{aligned}
\|z\| &= \left\| \frac{(2,4) \cdot (-3,4)}{(-12,5)} \right\| = \frac{\|(2,4) \cdot (-3,4)\|}{\|(-12,5)\|} = \frac{\|(2,4)\| \cdot \|(-3,4)\|}{\|(-12,5)\|} \\
&= \frac{\sqrt{2^2+4^2} \cdot \sqrt{(-3)^2+4^2}}{\sqrt{(-12)^2+5^2}} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 5}{13} = \frac{10\sqrt{5}}{13}
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 6.5

Determine la región del plano complejo determinado por $\|z-4\| < \|z-2\|$

Solución: Sea $z = x + iy$, entonces

$$\begin{aligned}
\|z-4\| < \|z-2\| \quad &\Leftrightarrow \quad \|x - 4 + iy\| < \|x - 2 + iy\| \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-4)^2 + y^2} < \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \\
&\Leftrightarrow \quad (x-4)^2 + y^2 < (x-2)^2 + y^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 + y^2 < x^2 - 4x + 4 + y^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 3 < x
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los números complejos que satisfacen $\|z-4\| < \|z-2\|$ son los que tiene parte real mayor que 3, podemos escribir esto como

$$\{z \in \mathbb{C} : \|z-4\| < \|z-2\|\} = \{x+iy \in \mathbb{C} : x > 3\}$$

■

Desigualdad triangular

Proposición 6.6 (Desigualdad triangular)
Sean $z,\ w$ números complejos, entonces

$$\|z+w\| \leq \|z\| + \|w\|$$

La Figura 6.6 da una interpretación geométrica de la desigualdad triangular, en donde la longitud de un lado es menor o igual que la suma de la longitud de los otros lados.

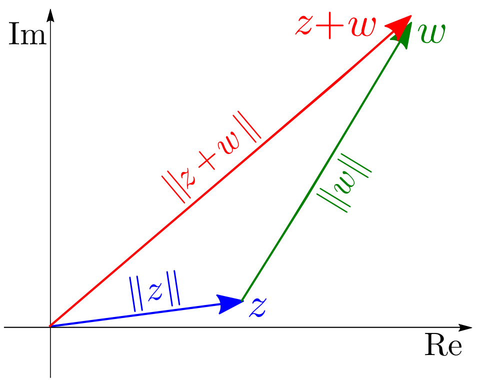


Figura 6.6: Interpretación geométrica de la desigualdad triangular

Corolario 6.1 Sean $z,\ w$ números complejos, entonces

$$\big|\|z\| - \|w\|\big| \leq \|z-w\|$$

Demostración. Usando la desigualdad triangular

$$\|z\| = \|(z-w)+w\| \leq \|z-w\| + \|w\|$$

Entonces,

$$\|z\| - \|w\| \leq \|z-w\| \tag{1}$$

Por otro lado,

$$\|w\| = \|(w-z)+z\| \leq \|w-z\| + \|z\| \qquad \Rightarrow \qquad \|w\| - \|z\| \leq \|w-z\|$$

Dado que $\|z-w\| = \|w-z\|$ entonces

$$-\|z-w\| \leq \|z\| - \|w\| \tag{2}$$

De (1) y (2) obtenemos

$$-\|z-w\| \leq \|z\| - \|w\| \leq \|z-w\|$$

Por lo tanto,

$$\Big| \|z\| - \|w\| \Big| \leq \|z-w\|$$

■

6.2 Notación de los números complejos

A menudo es útil poder expresar un número complejo de una manera más cómoda lo que servirá para efectuar otras operaciones con más facilidad.

6.2.1 Los reales como subconjunto de los números complejos

Sea la función

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & \psi(x) = (x,0) \end{array}$$

La función ψ es una biyección entre $\mathbb{R}$ y su imagen $\text{Im}(\mathbb{R}) = \phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$, identificando 1 con $\mathbf{1} = \psi(1)$, esto es

$$1 \equiv \mathbf{1} = \phi(1) = (1,0)$$

Entonces, para cada r real,

$$r \cdot 1 \equiv r \cdot \mathbf{1} = r(1,0) = (r,0)$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{R} = \{r : r \in \mathbb{R}\} \equiv \{(r,0) : r \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$$

En consecuencia, usando la identificación $1 \equiv \mathbf{1}$ podemos visualizar $\mathbb{R}$ como un subconjunto de $\mathbb{C}$. En lo que resta del capítulo usaremos $1 = \mathbf{1}$, es decir, consideremos la igualdad $1 = (1,0)$.

Definición 6.4 (Unidad imaginaria)

Se define la unidad imaginaria como

$$i = (0,1)$$

Usando la definición de producto en los números complejos

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1(1,0) = -1 \cdot \mathbf{1} = -1$$

Por consiguiente, i satisface $i^2 + 1 = 0$, esto es, i es solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$

Proposición 6.7

Sean los números reales a, b y c (donde $a \neq 0$), entonces la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

posee

(i) Dos soluciones reales distintas si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, las cuales están dadas por

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(ii) Una solución real de multiplicidad dos si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la cual está dada por

$$x = \frac{-b}{2a}$$

(iii) Dos soluciones complejas conjugadas si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, las cuales están dadas por

$$x_1 = \frac{-b+i\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b-i\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Geométricamente la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ representa una parábola. Luego, $ax^2 + bx + c = 0$ son los puntos de intersección de la parábola con el eje X.

Por consiguiente, si $\Delta > 0$, la parábola tiene su vértice por debajo del eje X. Si $\Delta = 0$ la parábola es tangencial al eje X y cuando $\Delta < 0$ la parábola se encuentra arriba del eje X.

6.2.2 Notación Binomial

Usando la identificación

$$1 = (1,0) \qquad \text{y} \qquad i = (0,1)$$

Podemos escribir cada número complejo $z = (a,b)$ como

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1) = a \cdot 1 + b \cdot i$$

La notación binomial de $z = (a,b)$ está definido como

$$z = a + ib \qquad \text{Notación binomial de z}$$

En esta notación, el conjugado de $z = a + ib$ está definido por

$$\bar{z} = \overline{a+ib} = a - ib$$

Por otro lado,

$$z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = \|z\|^2$$

y cuando $z \neq 0$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

En particular, la dirección del inverso multiplicativo es la misma que la de su conjugado, tal como lo muestra la Figura6.7

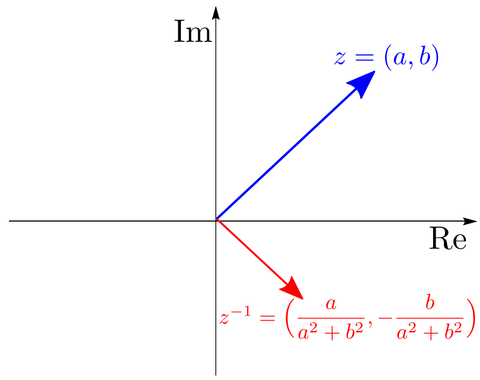


Figura 6.7: Representación geométrica de z^{-1} ($\|z\| > 1$)

Además, observe que

$$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2 \cdot \operatorname{Re} z$$

$$z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2i \cdot \operatorname{Im} z$$

6.2.3 Notación trigonométrica o polar

Definición 6.5 (Argumento)

El argumento de z es definido como el ángulo que forma el vector con origen en el punto $0 = (0,0)$ y como final el valor z, con el eje real positivo, como puede observarse en la Figura 6.8.

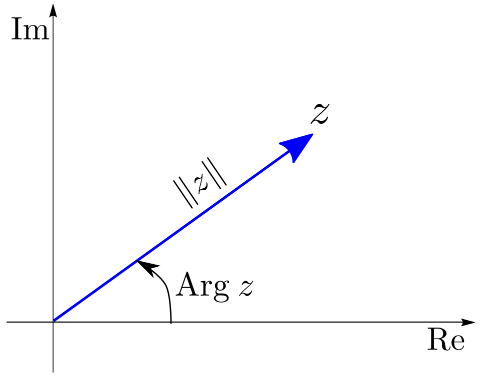


Figura 6.8: Representación geométrica del argumento de z

Si el argumento de un complejo z es θ entonces $\theta + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$ también es un argumento para z. Denotaremos por $\arg z$ al argumento de z y por $\operatorname{Arg} z$ al argumento principal de z, esto es, cuando el argumento pertenece al intervalo $[0, 2\pi)$. Por lo tanto,

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 6.6

Halle el argumento principal y el argumento para $z = (1,1)$ y para $w = -i$.

Solución: Para los números complejos z y w se cumple que

$$\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Arg}(w) = \frac{3\pi}{2}$$

Por lo tanto,

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \text{y} \qquad \arg(w) = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

■

Proposición 6.8

Dado $z = (a,b) \neq 0$ entonces el argumento principal de z esta definido por:

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a > 0, \quad b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi & a > 0, \quad b < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & a < 0, \quad b \in \mathbb{R} \\ \frac{\pi}{2} & a = 0, \quad b > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & a = 0, \quad b < 0 \end{cases}$$

Observación 6.1 El argumento no está definido para $z = (0,0)$.

Dado $z = (a,b)$ y denotando por

$$r = \|z\| \qquad \text{y} \qquad \theta = \operatorname{Arg}(z)$$

Usando identidades trigonométricas (Ver Figura6.9) obtenemos

$$a = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad b = r\operatorname{sen}\theta$$

Luego,

$$z = a + ib = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

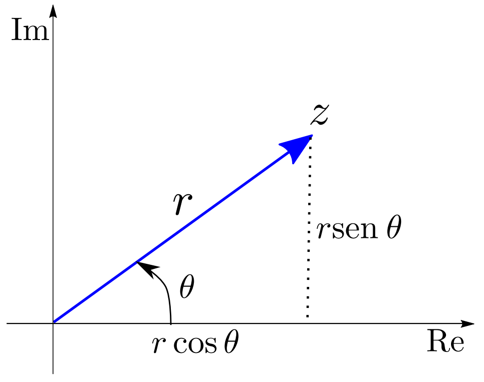


Figura 6.9: Representación polar de un número complejo z

Definición 6.6 (Notación trigonométrica o polar)

Sea $z = (a,b)$ un número complejo, entonces su notación trigonométrica o polar está dado por

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

donde

$$r = \|z\| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{y} \qquad \theta = \mathrm{Arg}\,z$$

6.2.4 Notación exponencial

Dado $x \in \mathbb{R}$, la fórmula de Euler establece que

$$e^{ix} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x$$

Luego, para cada número complejo $z = (a,b)$ se escribe como

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = re^{i\theta}$$

Definición 6.7 (Notación exponencial)

Sea $z = (a,b)$ un número complejo, entonces su notación exponencial está dado por

$$z = re^{i\theta}$$

donde

$$r = \|z\| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{y} \qquad \theta = \mathrm{Arg}\,z$$

Ejemplo 6.7

Halle la notación trigonométrica y exponencial de $z = (1,1)$ y $w = -i$

Solución: Sean

$$r_1 = \|z\| = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \|w\| = 1$$

Ademas,

$$\theta_1 = \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4} \qquad \text{y} \qquad \theta_2 = \operatorname{Arg} w = \frac{3\pi}{2}$$

Por lo tanto, la notación trigonométrica y exponencial de $z = (1,1)$ están dados por

$$z = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1) = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$$

y la notación trigonométrica y exponencial de $w = -i$ están dados por

$$w = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{\frac{3\pi i}{2}}$$

■

Ejemplo 6.8

Exprese cada uno de los números complejos $z = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$ y $w = 8\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$ en su notación binomial.

Solución: La forma binomial esta dado por

$$z = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$w = 8\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = 8\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right] = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 8 - 8i$$

■

Las propiedades de la exponencial real establecen que

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \qquad \text{y} \qquad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

Estas propiedades aún son validas cuando se consideran exponentes imaginarios como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 6.9

Sean $\theta,\ \vartheta \in \mathbb{R}$, entonces

$$e^{i\theta}e^{i\vartheta} = e^{i(\theta+\vartheta)} \qquad \text{y} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\vartheta}} = e^{i(\theta-\vartheta)}$$

Demostración. Usando la definición se obtiene

$$\begin{aligned}
e^{i\theta}e^{i\vartheta} &= (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)\\
&= (\cos\theta\cos\vartheta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\vartheta) + i(\cos\theta\operatorname{sen}\vartheta + \operatorname{sen}\theta\cos\vartheta)\\
&= \cos(\theta+\vartheta) + i\operatorname{sen}(\theta+\vartheta)\\
&= e^{i(\theta+\vartheta)}
\end{aligned}$$

■

Proposición 6.10

Sean $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, entonces

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad \text{y} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Ejemplo 6.9

Halle el producto y cociente de los siguientes números complejos

$$z = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad \text{y} \qquad w = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Solución: Usando la proposición anterior se obtiene

$$z \cdot w = 8e^{i\frac{7\pi}{12}} \qquad \text{y} \qquad \frac{z}{w} = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$$

■

6.3 Funciones complejas

Sea $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja, denotando por $w = f(z)$, la función puede ser interpretada como un mapeo que lleva números complejos de un plano z a un plano w.

Si para cada z en el dominio de f le corresponde un único número w. La función es llamada monovaluada, si por el contrario le corresponde muchos valores en z, la función es denominada multivaluada.

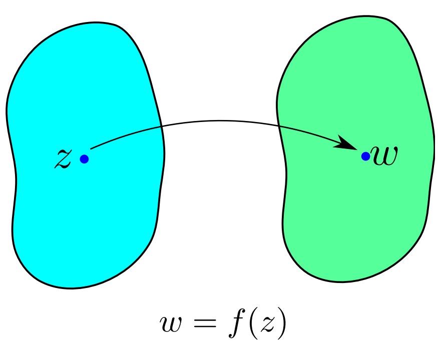


Figura 6.10: Función compleja monovaluada

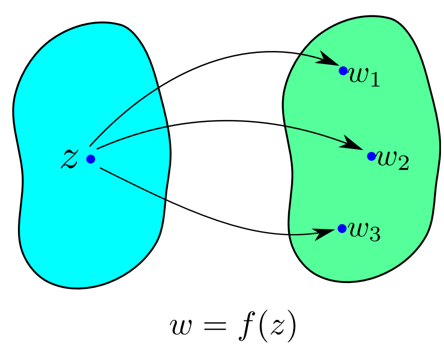


Figura 6.11: Función compleja multivaluada

- Como ejemplos de funciones monovaluadas tenemos a las funciones polinomiales, racionales.
- Como ejemplos de funciones multivaluadas tenemos a las funciones $\arg z$, $\log z$, $z^{1/n}$,

Dado un número complejo z, la expresión $\arg z$ denota un conjunto de valores. Más específicamente,

$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$$

donde $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)$.

Si $z = re^{i\theta}$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$, entonces es posible escribir

$$\arg z = \{\theta + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$$

Usando la igualdad anterior y la Proposición 6.10 se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 6.11

Sean z_1 y z_2 números complejos entonces

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

Observe que

$$\arg z + \arg z \neq 2\arg z \qquad \text{y} \qquad \arg z - \arg z \neq 0$$

En efecto, de la Proposición 6.11 para $z_1 = z_2$ se obtienen

$$\arg(z^2) = \arg z + \arg z \qquad \text{y} \qquad \arg 1 = \arg z - \arg z$$

siendo $\arg 1 = \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.

6.3.1 Exponencial compleja

La exponencial de un número real x puede definirse mediante la siguiente serie infinita

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Motivados por la anterior igualdad se define la exponencial de un número complejo z como

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

El exponencial también es denotado por

$$e^z = \exp z$$

Es posible probar usando teoría de series que

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \qquad \text{para todo} \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$$

En particular, para $z = x + iy$ se tiene

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Proposición 6.12
Sean z un número complejo y k un número entero entonces

(a) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

(b) $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$

(c) $(e^z)^k = e^{kz}$

(d) $e^{2\pi ik} = 1$

(e) $e^{z+2\pi ik} = e^z$

(f) $\|e^z\| = e^{\operatorname{Re} z}$

Demostración.

(a) Sea $z = x + iy$ entonces $\overline{z} = x - iy$. Por consiguiente,

$$\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)} = e^x(\cos y - i\operatorname{sen} y) = e^{x-iy} = e^{\overline{z}}$$

(b) Sea $z = x + iy$. Luego,

$$\frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)} = \frac{e^{-x}}{\cos y + i\operatorname{sen} y} \cdot \frac{\cos y - i\operatorname{sen} y}{\cos y - i\operatorname{sen} y} = \frac{e^{-x}(\cos y - i\operatorname{sen} y)}{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y} = e^{-x}e^{-iy} = e^{-z}$$

(c) La validez para $k \in \mathbb{N}$ se deduce del primer principio de inducción matemática y la igualdad

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

Para la validez en los enteros negativos es suficiente usar el item (b).

(d) Observe que

$$e^{2\pi ik} = \cos(2\pi k) + i\operatorname{sen}(2\pi k) = 1 + 0i = 1 \qquad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{Z}$$

(e) Usando el resultado anterior

$$e^{z+2\pi ik} = e^z \cdot e^{2\pi ik} = e^z \cdot 1 = e^z$$

(f) Sea $z = x + iy$. Luego,

$$\|e^z\| = \|e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)\| = e^x\sqrt{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y} = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$$

■

6.3.2 Fórmula de Moivre

Proposición 6.13 (Fórmula de Moivre)
Sea $\theta \in \mathbb{R}$, entonces

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta) \qquad \text{para todo} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 6.10

Usando la fórmula de Moivre halle los valores de $\cos(3\theta)$ y $\operatorname{sen}(3\theta)$.

Solución: Usando la fórmula de Moivre con $n = 3$ se obtiene

$$\big(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\big)^3 = \cos(3\theta) + i\operatorname{sen}(3\theta)$$

Por otro lado, usando la identidad $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ se tiene

$$\begin{aligned}\big(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\big)^3 &= (\cos\theta)^3 + 3(\cos\theta)^2(i\operatorname{sen}\theta) + 3(\cos\theta)(i\operatorname{sen}\theta)^2 + (i\operatorname{sen}\theta)^3\\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta - i\operatorname{sen}^3\theta\\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta) + i(3\cos^2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta)\end{aligned}$$

Igualando la parte real e imaginaria obtenemos

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(3\theta) = \cos^2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta$$

■

Ejemplo 6.11

Simplifique la expresión

$$\frac{\cos(4\theta) + i\operatorname{sen}(4\theta)}{\cos(7\theta) + i\operatorname{sen}(7\theta)}$$

Usando la fórmula de Moivre

$$\begin{aligned}\frac{\cos(4\theta) + i\operatorname{sen}(4\theta)}{\cos(7\theta) + i\operatorname{sen}(7\theta)} &= \frac{(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^4}{(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^7}\\ &= (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^{-3}\\ &= \cos(-3\theta) + i\operatorname{sen}(-3\theta)\\ &= \cos(3\theta) - i\operatorname{sen}(3\theta)\end{aligned}$$

■

Proposición 6.14 (Potencia de un número complejo)

Dado $z = r(\cos\theta + i\cos\theta) = re^{i\theta}$, entonces

$$z^n = r^n\big[\cos(n\theta) + i\cos(n\theta)\big] = r^n e^{in\theta}$$

Demostración. Usando la fórmula de Moivre se tiene

$$z^n = \Big[r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\Big]^n = r^n(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = r^n[\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)] = r^n e^{in\theta}$$

■

6.3.3 Raíz cuadrada compleja

Dado $z \in \mathbb{C}$, una raíz cuadrada de z es un número complejo w, donde w satisface $w^2 = z$.

Ejemplo 6.12

Encuentre una expresión para la raíz cuadrada de $z = a + ib$

Solución: Sea $x + iy$ una raíz cuadrada de $a + ib$. Luego, $(x + iy)^2 = a + ib$ entonces

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + ib$$

Entonces,

$$x^2 - y^2 = a \tag{1}$$

y

$$2xy = b \tag{2}$$

Observe que

$$(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = a^2 + b^2$$

Entonces,

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \|z\| \tag{3}$$

Sumando las ecuaciones (1) y (3) se obtiene

$$2x^2 = a + \|z\|$$

Por consiguiente,

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \|z\|}{2}} \tag{4}$$

Análogamente, restando la ecuación (1) a (3) se obtiene

$$2y^2 = \|z\| - a$$

Por consiguiente,

$$y = \pm\sqrt{\frac{\|z\| - a}{2}} \tag{5}$$

De la ecuación (2) se deduce que el producto de x e y coincide con el signo de b. Por lo tanto,

$$\text{La raíz cuadrada de } z = a + ib \text{ es igual a } \begin{cases} \pm\left[\sqrt{\dfrac{a + \|z\|}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\|z\| - a}{2}}\right] & \text{si} \quad b > 0 \\[2ex] \pm\left[\sqrt{\dfrac{a + \|z\|}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\|z\| - a}{2}}\right] & \text{si} \quad b < 0 \end{cases}$$

■

Ejemplo 6.13

Halle las raíces cuadradas de $z = 3+4i$

Solución: Sea $w = x+iy$ una raíz cuadrada de z. Usando el Ejemplo 6.12 se obtiene

$$x+iy = \pm\left[\sqrt{\frac{3+5}{2}} + i\sqrt{\frac{5-3}{2}}\right] = \pm(2+i)$$

■

6.3.4 Raíz n-ésima compleja

Dado $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, una raíz n-ésima de z es un número complejo w, donde $w^n = z$. Denotaremos por $z^{1/n}$ a la raíz n-ésima de z.

Proposición 6.15 (Raíz n-ésima de un número complejo)

Dado $z = r(\cos\theta + i\cos\theta) = re^{i\theta}$, entonces

$$z^{1/n} = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right) + i\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right] = r^{1/n}e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}} \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

Demostración. Sea $w = s(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$ una raíz n-ésima de z. Luego,

$$w^n = s^n[\cos(n\varphi) + i\operatorname{sen}(n\varphi)]$$

Como $w^n = z$ entonces

$$s^n[\cos(n\varphi) + i\operatorname{sen}(n\varphi)] = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

Por consiguiente,

$$s^n\cos(n\varphi) + is^n\operatorname{sen}(n\varphi) = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta \tag{$\star$}$$

Tomando módulo en la identidad $(\star)$ se obtiene

$$s^n = \sqrt{s^{2n}} = \sqrt{s^{2n}\cos^2(n\varphi) + s^{2n}\operatorname{sen}^2(n\varphi)} = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{r^2} = r$$

Reemplazando $s^n = r$ en $(\star)$ se tiene

$$\cos(n\varphi) + i\operatorname{sen}(n\varphi) = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

Igualando parte real e imaginaria se obtiene

$$\cos(n\varphi) = \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(n\varphi) = \operatorname{sen}\theta$$

En consecuencia,

$$n\varphi = \theta + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Entonces

$$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, las raíces n-ésimas z_k de z están dadas por

$$z_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right] = r^{1/n}e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

De los valores obtenidos solo se considera para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ dado que para otros valores se obtiene raíces repetidas. ■

Ejemplo 6.14

Calcule las raíces cúbicas de $w = -8i$

Solución: Observe que

$$-8i = w = 8\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Luego, las raíces cúbicas están dadas por

$$z_k = 8^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right)\right] \qquad k = 0, 1, 2$$

Por consiguiente,

$$\begin{array}{lllllll} z_0 & = & 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] & = & 2(0+i) & = & 2i \\ z_1 & = & 2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right] & = & 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right] & = & -\sqrt{3} - i \\ z_2 & = & 2\left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right] & = & 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right] & = & \sqrt{3} - i \end{array}$$

■

6.3.5 Raíces n-ésimas de la unidad

El siguiente ejemplo nos indicará como hallar las raíces n-ésimas de la unidad y su interpretación geométrica.

Ejemplo 6.15

Determine las raíces de $z^n = 1$ y dé una interpretación geométrica.

Solución: Como $\|1\| = 1$ y $\mathrm{Arg}(1) = 0$, entonces las raíces n-ésimas están dadas por

$$z_k = \|1\|^{1/n}\left[\cos\left(\frac{0 + 2\pi k}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{0 + 2\pi k}{n}\right)\right] \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Denotando estas raíces por ζ_k, entonces

$$\zeta_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = e^{i\frac{2\pi k}{n}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Geométricamente, las raíces ζ_k se encuentran sobre el circulo unitario de radio 1 y son obtenidos empezando desde $\zeta_0 = 1$ girando en sentido anti-horario con un incremento en cada raíz de un ángulo igual a $\frac{2\pi}{n}$. Véase la Figura 6.12.

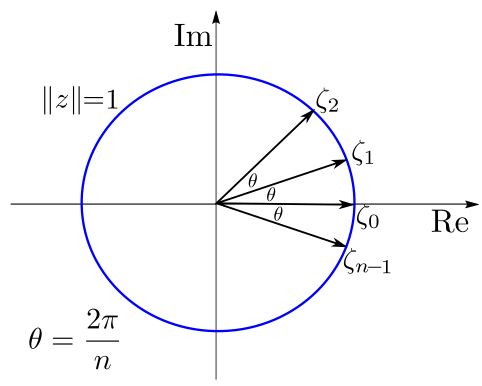


Figura 6.12: Raíces de la unidad

■

Ejemplo 6.16

Halle el conjunto solución de $z^3 = 1$

Solución: Como $\|1\| = 1$ y $\text{Arg}(1) = 0$, entonces el número 1 tiene notación polar dado por

$$1 = 1(\cos 0 + i \,\text{sen}\, 0)$$

Dado que las soluciones de $z^3 = 1$ son las raíces cúbicas de 1, entonces

$$z_k = \|1\|^{1/3}\left[\cos\left(\frac{0+2\pi k}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{0+2\pi k}{3}\right)\right] \qquad k = 0, 1, 2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos 0 + i\,\text{sen}\, 0 &&= 1 + i \cdot 0 \\
z_1 &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) &&= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
z_2 &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) &&= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Otro Método:

Escribiendo la ecuación como

$$z^3 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (z-1)(z^2 + z + 1) = 0$$

Luego, las raíces son $z = 1$ y

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto, las soluciones de $z^3 = 1$ son

$$z_0 = 1 \qquad z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

■

6.3.6 Logaritmo complejo

Dado $z \in \mathbb{C}$, el logaritmo complejo de z, denotado por $\log z$ es un número complejo w si y solo si la exponencial compleja de w es z, esto es

$$\log z = w \qquad \Leftrightarrow \qquad e^w = z$$

En este capítulo usaremos la notación ln para denotar el logaritmo sobre los números reales, y log para denotar el logaritmo complejo en base e (no usaremos otra base).

Proposición 6.16 (Logaritmo de un número complejo)
Sea z un número complejo no nulo, entonces

$$\log z = \ln \|z\| + i \arg(z)$$

Demostración. Sea $w = u + iv$ el logaritmo de z entonces

$$u + iv = \log z \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{u+iv} = z$$

Escribiendo z en su forma exponencial $z = re^{i\theta}$ donde $r = \|z\|$ y $\theta = \operatorname{Arg} z$. Luego,

$$e^u e^{iv} = e^{u+iv} = re^{i\theta} \tag{1}$$

Tomando modulo

$$\|e^u e^{iv}\| = \|re^{i\theta}\| \qquad \Rightarrow \qquad \|e^u\| \cdot \|e^{iv}\| = \|r\|\|e^{i\theta}\| \qquad \Rightarrow \qquad e^u = r$$

Entonces,

$$e^u = r \qquad \Rightarrow \qquad u = \ln r$$

Por otro lado, reemplazando $e^u = r$ en (1) se obtiene

$$e^{iv} = e^{i\theta} \qquad \Rightarrow \qquad v = \theta + 2\pi k$$

Por consiguiente, como $w = u + iv$ entonces

$$\log z = \ln \|z\| + i \arg z$$

■

Ejemplo 6.17

Halle $\log(1+i)$ y $\log i$

Solución: Observe que

$$\|1+i\| = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Entonces,

$$\log(1+i) = \ln\|1+i\| + i\arg(1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{i\pi}{4} + 2i\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Por otro lado,

$$\|i\| = 1 \qquad \text{y} \qquad \arg i = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto,

$$\log i = \ln\|i\| + i\arg i = \ln 1 + \frac{i\pi}{2} + 2i\pi k = \frac{i\pi}{2} + 2i\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

■

Proposición 6.17

Sean z y w números complejos entonces

(a) $e^{\log z} = z$

(b) $\log(e^z) = z + 2i\pi k$

6.3.7 Potencia compleja

Sean z y w números complejos, definimos z a la potencia w como

$$z^w = e^{w\log z} = \exp\big(w\log z\big)$$

Definimos la rama principal de z^w como

$$\text{Rama principal de } z^w = e^{w\,\mathrm{Log}\,z}$$

Ejemplo 6.18

Determine i^i y $(1+i)^{1+i}$

Solución: Usando la definición

$$i^i = e^{i\log i} = e^{i(\frac{i\pi}{2}+2i\pi k)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

De igual manera

$$(1+i)^{1+i} = e^{(1+i)\log(1+i)} = e^{(1+i)(\sqrt{2}+\frac{i\pi}{4}+2i\pi k)}$$

Por lo tanto,

$$(1+i)^{1+i} = \exp\Big[\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + i(\sqrt{2}+2\pi k)\Big] \qquad k \in \mathbb{Z}$$

■

Capítulo 07

Polinomios en una variable

7.1 Polinomios

7.1.1 Polinomios con coeficientes reales y complejos

Un polinomio con coeficientes reales es una función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde a_k son números reales para $0 \leq k \leq n$

Ejemplo 7.1

Los siguientes son ejemplos de polinomios con coeficientes reales

- $p(x) = -3x^2 + 2x - 3$
- $q(x) = \sqrt{2}x^3 - \pi x^2 + ex - 2$
- $r(x) = 3$

Un polinomio con coeficientes complejos es una función $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forma

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

donde a_k son números complejos para $0 \leq k \leq n$.

Ejemplo 7.2

Los siguientes son ejemplos de polinomios con coeficientes complejos

- $p(z) = (2+i)z^2 - iz + 1$
- $q(z) = 3z^3 - iz + 2 - 5i$
- $r(z) = (\sqrt{2}+i)z - i$

Dado un polinomio con coeficientes reales o complejos:

- Los números a_k son denominados coeficientes del polinomio.
- El coeficiente a_k es denominado coeficiente del término grado k.
- El valor a_0 es llamado término independiente.
- Un polinomio es llamado mónico si el coeficiente a_n es igual a 1.

Observación 7.1

(a) Sea $p(x)$ un polinomio, consideraremos siempre que $a_n \neq 0$, dado que el polinomio $p(x) = 0x^3 + x^2 + x + 1$ resulta lo mismo que el polinomio $q(x) = x^2 + x + 1$. Por lo tanto, es suficiente considerar polinomios donde $a_n \neq 0$.

(b) Es usual no escribir los términos de un polinomio cuando sus coeficientes son nulos. Por consiguiente,

$$3x^5 + 0 \cdot x^4 + 3x^2 + 0 \cdot x + 1 = 3x^5 + 3x^2 + 1$$

Definición 7.1

El grado de un polinomio $p(x)$ denotado por $\operatorname{grad}(p)$ es el mayor entero n con $n \geq 0$ tal que el coeficiente asociado al término x^n es no nulo, esto es, si

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \text{con} \quad a_n \neq 0$$

entonces

$$\operatorname{grad}(p) = n$$

Ejemplo 7.3

Determine los grados de los siguientes polinomios

(a) $p(x) = 5x^4 + 3x - 7$

(b) $q(z) = (2-i)z^5 + 2z^3 - iz + 3$

(c) $r(x) = 7$

(d) $s(x) = 0x^7 + 4x^6 + 3x^3 - 2x + 5$

Solución:

(a) El grado de $p(x)$ es 4 dado que el coeficiente de x^4 es 5.

(b) El grado de $q(z)$ es 5 dado que el coeficiente de z^5 es $2-i$.

(c) El grado de $r(x)$ es 0 dado que el coeficiente de x^0 es 7.

(d) El grado de $s(x)$ es 6 dado que el coeficiente de mayor potencia x^6 es 4.

■

7.1.2 Igualad de polinomios

Dos polinomios

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \text{y} \qquad q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

son iguales si y solo si

$$n = m \qquad \text{y} \qquad a_k = b_k \qquad \text{para todo} \quad 0 \leq k \leq n$$

es decir, dos polinomios son iguales si y solo si tienen el mismo grado y todos sus coeficientes son iguales.

Ejemplo 7.4

Halle los valores de a, b, c y d si los siguientes polinomios son iguales

$$p(x) = (2-a)x^3 + bx^2 + (c+4)x + d \qquad \text{y} \qquad q(x) = 3x^2 - 4x$$

Solución: Escribiendo la igualdad de los polinomios de la forma

$$(2-a)x^3 + bx^2 + (c+4)x + d = 0 \cdot x^3 + 3x^2 + (-4)x + 0$$

Usando la igualdad de polinomios, deducimos que los coeficientes deben ser iguales. Luego,

$$2-a = 0 \qquad b = 3 \qquad c+4 = -4 \qquad d = 0$$

Por lo tanto, $a = 2$, $b = 3$, $c = -8$ y $d = 0$. ■

7.1.3 Valor numérico de un polinomio

Dado un polinomio $p(x)$, el valor numérico del polinomio en $x = \gamma$, es el valor que toma la expresión $p(x)$ al reemplazar el valor de x por γ.

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio entonces su valor numérico en $x = \gamma$ está dado por

$$p(\gamma) = a_n \gamma^n + a_{n-1}\gamma^{n-1} + \cdots + a_1 \gamma + a_0$$

Ejemplo 7.5

Sea el polinomio $p(x) = x^{100} + x^{10} + 1$. Halle los valores numéricos de $p(0)$, $p(1)$ y $p(i)$

Solución: Los valores numéricos están dados por

$$p(0) = 0^{100} + 0^{10} + 1 = 1 \qquad\qquad p(1) = 1^{100} + 1^{10} + 1 = 3$$

y

$$p(i) = i^{100} + i^{10} + 1 = (i^4)^{25} + (i^4)^2 \cdot i^2 + 1 = 1^{25} + 1^2 \cdot (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$$

■

Ejemplo 7.6

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio. Halle los valores numéricos de $p(0)$ y $p(1)$.

Solución: Los valores numéricos están dados por

$$p(0) = a_n \cdot 0^n + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 0 + a_0 = 0 + 0 + \cdots + 0 + a_0 = a_0$$

y

$$p(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$$

■

7.2 Operaciones con polinomios

7.2.1 Suma de polinomios

Dados dos polinomios

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad \text{y} \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$$

su suma está definida como

$$p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^{r} (a_k + b_k) x^k \qquad \text{donde} \quad r = \text{máx}\{n, m\}$$

Ejemplo 7.7

Halle la suma de los polinomios $p(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ y $q(x) = 3x^4 + x^3 + 5x + 7$

Solución: Escribiendo los polinomios de la forma

$$p(x) = 5 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 3x^2 + 0 \cdot x + 1 \qquad \text{y} \qquad q(x) = 3x^4 + x^3 + 0 \cdot x^2 + 5x + 7$$

Por lo tanto,

$$p(x)+q(x) = (5+3)x^4+(0+1)x^3+(3+0)x^2+(0+5)x+(1+7) = 8x^4+x^3+3x^2+5x+8$$

■

Sean los siguientes conjuntos

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}} = \{p(x) : p(x) \text{ es un polinomio con coeficientes en } \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{P}_{\mathbb{C}} = \{p(x) : p(x) \text{ es un polinomio con coeficientes en } \mathbb{C}\}$$

Es usual considerar $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ como el conjunto de polinomios en coeficientes en $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo, en este capitulo consideremos $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Proposición 7.1

Sea $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ con $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, entonces

(A_1) Para todo $p(x),\ q(x),\ r(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$

$$[p(x)+q(x)]+r(x) = p(x)+[q(x)+r(x)]$$

(A_2) Para todo $p(x),\ q(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$

$$p(x)+q(x) = q(x)+p(x)$$

(A_3) Para todo $p(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$, existe $\theta \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ tal que

$$p(x)+\theta = p(x)$$

(A_4) Para todo $p(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$, existe $\widetilde{p}(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ tal que

$$p(x)+\widetilde{p}(x) = \theta$$

Observación 7.2

(a) El elemento θ es el neutro aditivo de $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ donde

$$\theta = \sum_{k=0}^{n} 0 \cdot x^k$$

(b) Dado $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, entonces su inverso aditivo en $\mathcal{P}_K$, está dado por

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n} (-a_k)x^k$$

el cual es denotado por $-p(x)$.

Proposición 7.2

Sean $p(x)$ un polinomio de grado n y $q(x)$ de grado m, entonces la suma $p(x)+q(x)$ es un polinomio de grado r donde $0 \leq r \leq \max\{n,m\}$.

En el Ejemplo 7.7 se observa que se cumple la proposición anterior

$$\operatorname{grad}(p)=4 \quad \text{y} \quad \operatorname{grad}(q)=4 \qquad \text{entonces} \qquad \operatorname{grad}(p+q)=4 \leq \max\{4,4\}$$

En el siguiente ejemplo vamos a ver que es posible que el grado de la suma de dos polinomios puede ser menor estricto que la suma de los grados de los sumandos.

Ejemplo 7.8

Sean $p(x)=x^5+1$, $q(x)=-x^5+1$. Entonces, $p(x)$ y $q(x)$ tienen grado 5 pero la suma $p(x)+q(x)$ tiene grado 0.

7.2.2 Producto de polinomios

Dado dos polinomios

$$p(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \qquad \text{y} \qquad q(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$$

su producto está definido como

$$p(x)\cdot q(x)=\sum_{k=0}^{m+n}\Big(\sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p}\Big)x^k$$

Ejemplo 7.9

Halle el producto de los polinomios

$$p(x)=x^2+x+2 \qquad \text{y} \qquad q(x)=2x+3$$

Solución: Escribiendo de la forma

$$p(x)=x^2+x+2=a_2x^2+a_1x+a_0 \qquad \text{y} \qquad q(x)=2x+3=b_1x+b_0$$

donde

$$a_0=2, \qquad a_1=1, \qquad a_2=1, \qquad a_n=0, \quad n\geq 3$$

$$b_0=3, \qquad b_1=2, \qquad b_n=0, \quad n\geq 2$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
p(x)\cdot q(x) &= \sum_{k=0}^{3}\Big(\sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p}\Big)x^k \\
&= \sum_{p=0}^{0}(a_p b_{0-p})x^0 + \sum_{p=0}^{1}(a_p b_{1-p})x^1 + \sum_{p=0}^{2}(a_p b_{2-p})x^2 + \sum_{p=0}^{3}(a_p b_{3-p})x^3 \\
&=(a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_0b_2)x^2+(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)x^3 \\
&=(2\cdot 3)+(2\cdot 2+1\cdot 3)x+(2\cdot 0+1\cdot 2+2+\cdot 0)x^2+(2\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 2+0\cdot 3)x^3 \\
&=6+7x+2x^2+2x^3
\end{aligned}
$$

■

Proposición 7.3

Sean $p(x)$ y $q(x)$ polinomios entonces

$$\operatorname{grad}(p\cdot q)=\operatorname{grad}(p)+\operatorname{grad}(q)$$

En el Ejemplo 7.9 se verifica

$$\operatorname{grad}(p)=2 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{grad}(q)=1$$

de donde

$$\operatorname{grad}(p\cdot q)=3=\operatorname{grad}(p)+\operatorname{grad}(q)$$

Proposición 7.4 (Propiedades del producto de polinomios)

Sea $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ con $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, entonces

(A_5) Para todo $p(x),\ q(x),\ r(x)\in\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$

$$[p(x)\cdot q(x)]\cdot r(x)=p(x)\cdot[q(x)\cdot r(x)]$$

(A_6) Para todo $p(x),\ q(x)\in\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$

$$p(x)\cdot q(x)=q(x)\cdot p(x)$$

(A_7) Existe $\widetilde{1}\in\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$, tal que para todo $p(x)\in\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ se satisface

$$p(x)\cdot\widetilde{1}=p(x)$$

Observación 7.3

(a) El polinomio $\widetilde{1}$ es el neutro multiplicativo, donde $\widetilde{1}=1+0x+\cdots+0x^n$.

(b) Dado un polinomio $p(x)$ con grado mayor que 1, no existe otro polinomio $q(x)$ tal que $p(x)\cdot q(x)=1$.

Proposición 7.5 (Propiedades distributivas del producto)
Sea $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ con $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, entonces

(A_9) Para todo $p(x),\ q(x),\ r(x)\in\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$

$$[p(x)+q(x)]\cdot r(x)=p(x)\cdot r(x)+q(x)\cdot r(x)$$

(A_{10}) Para todo $p(x),\ q(x)\in\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$

$$p(x)\cdot[q(x)+r(x)]=p(x)\cdot q(x)+p(x)\cdot r(x)$$

La forma más práctica de efectuar el producto de dos polinomios es utilizando las propiedades del producto como la conmutativa y distributiva.

Calculando el producto del Ejemplo 7.9 se tiene

$$\begin{aligned}
p(x)\cdot q(x) &= (x^2+x+2)\cdot(2x+3)\\
&= x^2\cdot(2x+3)+x\cdot(2x+3)+2\cdot(2x+3)\\
&= x^2\cdot 2x+x^2\cdot 3+x\cdot 2x+x\cdot 3+2\cdot 2x+2\cdot 3\\
&= 2x^3+2x^2+3x^2+2x^2+3x+6x+6\\
&= 6+7x+2x^2+2x^3
\end{aligned}$$

7.2.3 División de polinomios

Sean los polinomios

$$p(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i \qquad \text{y} \qquad q(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$$

La expresión

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

No necesariamente es un polinomio.

Si $p(x)=ax^m$ y $q(x)=bx^n$ con $m\geq n$ entonces

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{ax^m}{bx^n}=\frac{a}{b}x^{m-n}$$

siendo la expresión de la derecha siempre un polinomio.

En general para polinomios de grado mayor a uno, el cociente de dos polinomios no siempre resulta un polinomio.

Sean $p(x)=x^2-1$ y $q(x)=x-1$ entonces

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

Sin embargo, si $p(x) = x^2$ y $x-1$ entonces

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$$

donde el resultante no es un polinomio.

7.3 División euclidiana de polinomios

El siguiente teorema extiende la división euclidiana de los números enteros.

7.3.1 Teorema de la división euclidiana de polinomios

Teorema 7.1 (División euclidiana de polinomios)

Sean $p(x)$ y $d(x)$ dos polinomios con $\text{grad}(d) \leq \text{grad}(p)$, entonces existen polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$p(x) = d(x)q(x) + r(x)$$

donde $\text{grad}(r) < \text{grad}(\text{d})$

Ejemplo 7.10

Sea $p(x)$ un polinomio tal que al dividirse por (x^2-25) deja como residuo $(x-5)$. Calcule el residuo del cubo de $p(x)$ al dividirlo por $(x-5)$.

Solución: La división euclidiana garantiza la existencia de un polinomio $q(x)$ tal que

$$p(x) = (x-5)(x+5)q(x) + (x-5)$$

Note que $p(x) = (x-5)[(x+5)q(x)+1]$. Luego, elevando al cubo se obtiene

$$p^3(x) = (x-5)[(x-5)^2\left((x+5)q(x)+1\right)^3] + 0$$

Por lo tanto, el residuo del cubo de $p(x)$ al dividirlo por $(x-5)$ es cero. ■

7.3.2 Teorema del residuo

Teorema 7.2 (Teorema del residuo)

Sea c una constante en $\mathbb{K}$, el residuo de un polinomio $p(x)$ al dividirlo por $(x-c)$ está dado por $p(c)$

Demostración. Usando división euclidiana se tiene

$$p(x) = (x-c)q(x) + r(x)$$

donde el grado de $r(x)$ es menor que uno, entonces el grado de $r(x)$ es cero. Lo cual implica que $r(x)=k$ siendo k una constante. Por consiguiente,

$$p(x)=(x-c)q(x)+k$$

Evaluando el polinomio en $x=c$, se obtiene

$$p(c)=(c-c)q(c)+k \qquad \Rightarrow \qquad p(c)=k$$

Por lo tanto, el residuo está dado por $r(x)=k=p(c)$. ∎

Observación 7.4 Sea $p(x)$ un polinomio de grado n con $n\geq 1$, entonces usando la división euclidiana con $d(x)=x-a$ se deduce que $r(x)=p(a)$ es el residuo y el cociente $q(x)$ es un polinomio de grado $(n-1)$.

Ejemplo 7.11

Halle el residuo de dividir el polinomio $p(x)=x^3-4x^2+5x+3$ por $(x-2)$

Solución: Usando el Teorema del residuo se tiene que el residuo de $p(x)$ por $(x-2)$ está dado por $p(2)$. Por lo tanto,

$$\text{residuo } = p(2)=2^3-4\cdot 2^2+5\cdot 2+3=5$$

∎

Ejemplo 7.12

Cuando $p(x)$ se divide por $(x-5)$ se obtiene un residuo de 7 y cuando se le divide por $(x-3)$ se obtiene un residuo 3. Calcule el residuo de $p(x)$ al dividirlo por $(x-5)(x-3)$.

Solución: El algoritmo de la división euclidiana establece que existe $q(x)$ tal que

$$p(x)=(x-5)(x-3)q(x)+ax+b$$

Por el Teorema del residuo tenemos $p(5)=7$ y $p(3)=3$, entonces

$$7=5a+b \qquad \text{y} \qquad 3=3a+b$$

Por consiguiente, $a=2$ y $b=-3$. Por lo tanto, el resto de dividir $p(x)$ por $(x-5)(x-3)$ está dado por $r(x)=2x-3$ ∎

Definición 7.2

Decimos que un polinomio $d(x)$ divide al polinomio $p(x)$, si existe un polinomio $q(x)$ tal que

$$p(x)=d(x)q(x)$$

Es decir, si cuando se divide el polinomio $p(x)$ por $d(x)$ se obtiene un residuo igual a cero.

Ejemplo 7.13

Pruebe que x^2+1 divide al polinomio x^6+1

Solución: Observe que

$$x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$$

Por lo tanto, se deduce que x^2+1 divide a x^4-x^2+1 ■

Proposición 7.6 (Teorema del factor)

$(x-c)$ divide al polinomio $p(x)$ y solo si $p(c)=0$

Demostración. $(x-c)$ divide al polinomio $p(x)$ si y solo si el residuo es cero. El Teorema del residuo afirma que el residuo está dado por $p(c)$. Por lo tanto, $(x-c)$ divide al polinomio $p(x)$ si y solo si $p(c)=0$. ■

Observación 7.5 El Teorema del residuo establece que: Si $r(x)$ es el residuo de $p(x)$ al ser dividido por $(x-c)$, entonces

$$r(x)=p(c)=p(x:x-c=0)$$

donde la expresión $p(x:x-c=0)$ significa: el polinomio $p(x)$ evaluado en x, el cual satisface $x-c=0$.

Proposición 7.7

Sea $r(x)$ el residuo de dividir un polinomio $p(x)$ por (x^2+bx+c), entonces

$$r(x)=p(x:x^2+bx+c=0)$$

donde la expresión $p(x:x^2+bx+c=0)$ significa: el polinomio $p(x)$ evaluado en x, el cual satisface $x^2+bx+c=0$.

En la proposición anterior usaremos la relación $x^2+bx+c=0$ para reemplazar $x^2=-bx-c$ en $p(x)$ hasta obtener una expresión de grado menor o igual a 1, lo cual representará el residuo.

Ejemplo 7.14

Halle el residuo al dividir $p(x)=x^6+3x^3-3$ por x^2-1

Solución: La división euclidiana de polinomios establece que el residuo $r(x)$ es de grado menor o igual a 1. De la Proposición 7.7

$$r(x)=p(x:x^2-1=0)$$

donde

$$p(x:x^2-1=0)\ \text{ es el polinomo } p(x) \text{ evaluado en } x, \text{ el cual satisface } x^2-1=0$$

Por consiguiente, podemos sustituir $x^2 = 1$ en el polinomio $p(x)$. Escribiendo $p(x)$ como

$$p(x) = \left[x^2\right]^3 + 3x \cdot x^2 - 3$$

Al reemplazar $x^2 = 1$ se obtiene

$$p(x : x^2 - 1 = 0) = 1^3 + 3x \cdot 1 - 3 = 3x - 2$$

Por lo tanto, $r(x) = 3x - 2$ ■

Ejemplo 7.15

Halle el residuo al dividir $p(x) = (x+3)^{200} + (x+3)^{20} + 1$ por $x^2 + 5x + 6$

Solución: La división euclidiana de polinomios establece que el residuo $r(x)$ es de grado menor o igual a 1. De la Proposición 7.7

$$r(x) = p(x : x^2 + 5x + 6 = 0)$$

donde

$$p(x : x^2 + 5x + 6 = 0) \text{ es el polinomo } p(x) \text{ evaluado en } x, \text{ el cual satisface } x^2 + 5x + 6 = 0$$

Sea x tal que satisface $x^2 + 5x + 6 = 0$ entonces

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 = (x^2 + 5x + 6) + (x+3) = x + 3$$

Por otro lado, si w es un número tal que $w^2 = w$, entonces usando inducción se puede probar que $w^n = w$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, si x satisface $x^2 + 5x + 6 = 0$ entonces

$$(x+3)^n = x + 3 \qquad \text{para todo} \quad n \geq 1$$

Por consiguiente, sustituyendo en $p(x)$ se obtiene

$$p(x : x^2 + 5x + 6 = 0) = (x+3)^{200} + (x+3)^{20} + 1 = (x+3) + (x+3) + 1 = 2x + 7$$

Por lo tanto, $r(x) = 2x + 7$.

Otro Método:

Note que $x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2)$. Luego, el algoritmo de la división euclidiana establece que

$$(x+3)^{200} + (x+3)^{20} + 1 = p(x) = (x+3)(x+2)q(x) + ax + b \qquad \text{donde} \quad r(x) = ax + b$$

Evaluando en $x = -3$ y $x = -2$ se obtiene

$$1 = p(-3) = -3a + b \qquad \text{y} \qquad 3 = p(-2) = -2a + b$$

Por consiguiente,

$$-3a + b = 1 \quad \text{y} \quad -2a + b = 3 \qquad \Rightarrow \qquad a = 2 \quad \text{y} \quad b = 7$$

Por lo tanto, $r(x) = 2x + 7$. ■

7.3.3 Teorema fundamental del álgebra

Una raíz de un polinomio $p(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ es un valor $a \in \mathbb{K}$ tal que

$$p(a) = 0$$

Definición 7.3 (Multiplicidad de una raíz)

Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{K}$, decimos que $a \in \mathbb{K}$ es una raíz de multiplicidad $k \in \mathbb{N}$ si existe un polinomio $q(x)$ tal que

$$p(x) = (x-a)^k q(x) \qquad \text{donde} \quad q(a) \neq 0$$

La raíz de multiplicidad uno también es llamada raíz simple.

Ejemplo 7.16

Halle las multiplicidades de las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 5$

Solución: Observe que

$$p(x) = (x-1)^2(x-5)$$

Luego, las raíces son $r_1 = 1$ de multiplicidad dos y $r_2 = 5$ de multiplicidad uno. ■

Proposición 7.8 (Teorema fundamental del álgebra)

Todo polinomio de grado n con $n \geq 1$ con coeficientes complejos, posee n raíces en el conjunto de los números complejos (contando con su multiplicidad).

Ejemplos:

(a) El polinomio $p(x) = x^3 - x$ tiene grado tres y sus raíces son $r_1 = -1$, $r_2 = 0$ y $r_3 = 1$.

(b) El polinomio $q(x) = x^2 + 1$ de grado dos posee dos raíces $r_1 = -i$ y $r_2 = 1$.

(c) El polinomio $r(x) = x^2(x-3)^5$ de grado siete posee la raíces $r_1 = 0$ de multiplicidad dos y $r_2 = 3$ de multiplicidad cinco.

Proposición 7.9

Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Si $w \in \mathbb{C}$ una raíz de $p(x)$ entonces $\overline{w}$ es también una raíz de $p(x)$

Demostración. Sea el polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \text{donde} \quad a_k \in \mathbb{R} \quad \text{para} \quad 0 \leq k \leq n$$

Dado que w es una raíz de $p(x)$, entonces

$$0 = p(w) = a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \cdots + a_1 w + a_0$$

Tomando conjugado y usando las siguientes propiedades de los números complejos

$$\overline{\lambda \cdot z} = \lambda \overline{z} \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad\qquad \overline{z^n} = \overline{z}^n \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

y

$$\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \cdots + \overline{z}_n \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

Se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \cdots + a_2 w^2 a_1 w + a_0} \\ &= \overline{a_n w^n} + \overline{a_{n-1} w^{n-1}} + \cdots + \overline{a_2 w^2} + \overline{a_1 w} + \overline{a_0} \\ &= a_n \overline{w^n} + a_{n-1} \overline{w^{n-1}} + \cdots + a_2 \overline{w^2} + a_1 \overline{w} + a_0 \\ &= a_n \overline{w}^n + a_{n-1} \overline{w}^{n-1} + \cdots + a_2 \overline{w}^2 + a_1 \overline{w} + a_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $p(\overline{w}) = 0$, es decir, $\overline{w}$ es una raíz de $p(x)$. ■

Ejemplo 7.17

Halle las raíces de $p(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 22x + 12$, si se sabe que $1 + i$ es una raíz.

Solución: Los coeficientes de $p(x)$ son números reales. Además, $r_1 = 1 + i$ es una raíz de $p(x)$. Por la Proposición 7.9 se deduce que $r_2 = 1 - i$ es también una raíz de $p(x)$. Por el teorema del factor podemos escribir al polinomio $p(x)$ como

$$p(x) = (x - 1 - i)(x - 1 + i)q(x)$$

donde $q(x)$ es un polinomio de segundo grado. Luego

$$x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 22x + 12 = [(x-1)^2 - i^2]q(x) = (x^2 - 2x + 2)(ax^2 + bx + c)$$

Desarrollando el producto de polinomios del lado derecho

$$x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 22x + 12 = ax^4 + (b - 2a)x^3 + (2a - 2b + c)x^2 + (2b - 2c) + 2c$$

De la igualdad de polinomios se deduce que $a = 1$, $b = -5$ y $c = 6$. Consecuentemente,

$$p(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 5x + 6)$$

Por consiguiente, las otras dos raíces se hallan calculando

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Por lo tanto, las otras dos raíces son $r_3 = 2$ y $r_4 = 3$. ■

Proposición 7.10

Sean $a, b \in \mathbb{Q}$ y $p(x)$ un polinomio con coeficientes racionales. Si $a + \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$ es una raíz de $p(x)$, entonces $a - \sqrt{b}$ también es una raíz de $p(x)$

Ejemplo 7.18

Halle las raíces de $p(x) = x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 37x - 10$, si se sabe que $2 + \sqrt{3}$ es una raíz.

Solución: Los coeficientes de $p(x)$ son números racionales. Además, $r_1 = 2 + \sqrt{3}$ es una raíz de $p(x)$. Por la Proposición 7.10 de deduce que $r_2 = 2 - \sqrt{3}$ es también una raíz de $p(x)$. Usando el teorema del factor se tiene que

$$p(x) = (x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3})q(x)$$

donde $q(x)$ es un polinomio de segundo grado. Luego,

$$x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 37x - 10 = \left[(x-2)^2 - \sqrt{3}^2\right]q(x) = (x^2 - 4x + 1)(ax^2 + bx + c)$$

Al resolver la igualad de polinomios se obtienen los valores $a = 1,\ b = -3$ y $c = -10$. Consecuentemente,

$$p(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 3x - 10)$$

Por lo tanto, las otras dos raíces de $p(x)$ son $r_3 = -2$ y $r_4 = 5$ ■

Proposición 7.11

Sean $a, b, c \in \mathbb{Q}$ tales que ni b ni c sean cuadrados perfectos, $b \neq c$ y $p(x)$ un polinomio con coeficientes racionales. Si $a + \sqrt{b} + \sqrt{c} \notin \mathbb{Q}$ es una raíz de $p(x)$ entonces los valores

$$a - \sqrt{b} + \sqrt{c} \qquad a + \sqrt{b} - \sqrt{c} \qquad a - \sqrt{b} - \sqrt{c}$$

son también raíces de $p(x)$

Ejemplo 7.19

Halle las raíces de $p(x) = x^5 - 10x^4 + 30x^3 - 20x^2 - 39x + 46$, si se sabe que $2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ es una raíz de $p(x)$.

Solución: Los coeficientes de $p(x)$ son números racionales. Además, $r_1 = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ es una raíz de $p(x)$. Por la Proposición 7.11 se deduce que $r_2 = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{3},\ \ r_3 = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ y $r_4 = 2 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ son también raíces de $p(x)$. Usando el teorema del factor se tiene que

$$p(x) = (x - 2 - \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{2} + \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3})q(x)$$

donde $q(x)$ es un polinomio de primer grado. Luego,

$$p(x) = (x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 23)(ax + b)$$

Al resolver la igualad de polinomios se obtienen los valores $a = 1$ y $b = -2$. Consecuentemente,

$$p(x) = (x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 23)(x - 2)$$

Por lo tanto, las raíz restante es $r_5 = 2$. ■

Proposición 7.12

El polinomio mónico de menor grado con coeficientes reales que tiene al número complejo $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0)$ como raíz está dado por

$$p(x)=x^2-2ax+a^2+b^2$$

Demostración. Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales y sea $a+ib$ una raíz. Por la Proposición 7.9 el número complejo $a-ib$ también es una raíz de $p(x)$. Luego,

$$p(x)=(x-a-ib)(x-a+ib)=(x-a)^2-(ib)^2=(x-a)^2+b^2=x^2-2ax+a^2+b^2$$

es el polinomio mónico de menor grado con coeficientes reales que tiene al número complejo $a+ib$ como una de sus raíces. ■

Observación 7.6 Otra forma de encontrar el polinomio dado en la Proposición 7.12 es usando el hecho que $x=a+ib$ es una raíz. Luego,

$$x-a=ib \qquad \Rightarrow \qquad (x-a)^2=(ib)^2 \qquad \Rightarrow \qquad (x-a)^2+b^2=0$$

De donde tomamos $p(x)=(x-a)^2+b^2$, es decir, $p(x)=x^2-2ax+a^2+b^2$.

7.3.4 Relaciones de Cardano-Vieta

Proposición 7.13

Sean a, b, c y d coeficientes reales o complejos con $a\neq 0$

(i) Si r_1 y r_2 son las raíces de $ax^2+bx+c=0$ entonces

$$r_1+r_2=-\frac{b}{a} \qquad \text{y} \qquad r_1r_2=\frac{c}{a}$$

(ii) Si r_1,r_2 y r_3 son las raíces de $ax^3+bx^2+cx+d=0$ entonces

$$r_1+r_2+r_3=-\frac{b}{a} \qquad r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=\frac{c}{a} \qquad r_1r_2r_3=-\frac{d}{a}$$

Demostración. Probaremos solo la afirmación (i), la otra afirmación se procede de manera análoga. Sean r_1 y r_2 raíces de $ax^2+bx+c=0$ usando el Teorema del factor se deduce que

$$ax^2+bx+c=a(x-r_1)(x-r_2)$$

Luego,

$$ax^2+bx+c=ax^2-a(r_1+r_2)x+ar_1r_2$$

Igualando coeficientes se obtienen $b=-a(r_1+r_2)$ y $c=ar_1r_2$. Por lo tanto,

$$r_1+r_2=-\frac{b}{a} \qquad \text{y} \qquad r_1r_2=\frac{c}{a}$$

■

Ejemplo 7.20

Sean r y s las raíces de $7x^2-4x+2=0$. Determine el valor de $r^{-1}+s^{-1}$

Solución: Note que

$$r^{-1}+s^{-1}=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{r+s}{rs}$$

Usando las relaciones de Cardano-Vieta

$$r+s=-\frac{-4}{7}=\frac{4}{7} \qquad \text{y} \qquad rs=\frac{2}{7}$$

Por lo tanto,

$$r^{-1}+s^{-1}=\frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{7}}=2$$

■

Ejemplo 7.21

Sean r y s raíces de $x^2-7x+1=0$. Además, suponga que r^2 y s^2 son raíces de $x^2+mx+n=0$. Determine los valores de m y n

Solución: Dado que r y s son raíces de $x^2-7x+1=0$. Usando las relaciones de Cardano-Vieta, se tiene

$$r+s=7 \qquad \text{y} \qquad rs=1$$

Ademas, como r^2 y s^2 son raíces de x^2+mx+n, entonces

$$r^2+s^2=-m \qquad \text{y} \qquad r^2s^2=n$$

Por lo tanto,

$$n=(rs)^2=1^2=1 \qquad \text{y} \qquad m=-(r^2+s^2)=-[(r+s)^2-2rs]=-[7^2-2]=-47$$

■

7.3.5 Máximo común divisor

Definición 7.4 (Divisor)

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios, decimos que $q(x)$ es un divisor de $p(x)$ si existe un polinomio $d(x)$ tal que

$$p(x)=d(x)\cdot q(x)$$

Esto es, el residuo de la división de $p(x)$ por $q(x)$ es cero.

Ejemplo:

$(x-3)$ es un divisor de $x^2-8x+15$ dado que

$$x^2-8x+15=(x-3)\cdot(x-5)$$

Observe que $(x-5)$ es también un divisor de $x^2-8x+15$.

Por otro lado, $\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right)$ es también un divisor de $x^2-8x+15$. Dado que

$$x^2-8x+15=\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right)\cdot(2x-10)$$

En general, dado $\lambda\neq 0$ el polinomio $\lambda x-3\lambda$ es también un divisor de $x^2-8x+15$. Dado que

$$x^2-8x+15=(\lambda x-3\lambda)\cdot\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{5}{\lambda}\right)$$

Proposición 7.14

Sean $p(x)$ y $q(x)$ polinomios en $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ y λ un escalar no nulo en $\mathbb{K}$ entonces

$$q(x) \text{ es un divisor de } p(x) \quad \text{si y solo si} \quad \lambda q(x) \text{ es un divisor de } p(x)$$

Definición 7.5 (Máximo común divisor)

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Un máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$ es un polinomio $\delta(x)$ tal que

(a) $\delta(x)$ divide a $p(x)$ y $q(x)$.

(b) Si $p(x)$ y $q(x)$ tiene otro divisor común este es divide a $\delta(x)$.

El máximo común divisor de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ es denotado por

$$\text{M.C.D}\big(p(x),q(x)\big)$$

El cual se lee "máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$"

Proposición 7.15

Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios expresados como un producto de factores irreducibles, entonces el máximo común divisor es el producto de los factores (incluyendo su multiplicidad) en común.

Ejemplo 7.22

Determine el máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$ donde

$$p(x)=x(x-1)^3(2x+3)^3(x-\sqrt{2}) \qquad \text{y} \qquad q(x)=x^2(x-1)^2(3x+2)(x-\sqrt{2})$$

Solución: Vemos que los divisores (factores) comunes de $p(x)$ y $q(x)$ están dados por

$$x, \qquad (x-1)^2, \qquad x-\sqrt{2}$$

Por lo tanto,

$$\text{M.C.D}(p,q) = x(x-1)^2(x-\sqrt{2})$$

■

Ejemplo 7.23

Determine el máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$ donde

$$p(x) = x^4+5x^3+7x^2+15x+12 \qquad \text{y} \qquad q(x) = x^3+x^2-x-1$$

Solución: Expresando los polinomios en factores irreducibles se obtiene

$$p(x) = x^4+x^3+4x^3+4x^2+3x^2+3x+12x+12 = x^3(x+1)+4x^2(x+1)+3x(x+1)+12(x+1)$$

Luego,

$$p(x) = (x+1)(x^3+4x^2+3x+12) = (x+1)[x^2(x+4)+3(x+4)] = (x+1)(x^2+3)(x+4)$$

Por consiguiente,

$$p(x) = (x+1)(x+3)(x+i\sqrt{3})(x-i\sqrt{3})$$

Por otro lado,

$$q(x) = x^3+x^2-x-1 = x^2(x+1)-(x+1) = (x+1)(x^2-1) = (x+1)^2(x-1)$$

Por lo tanto,

$$\text{M.C.D}(p,q) = x+1$$

■

Cálculo del M.C.D mediante divisiones sucesivas

Sean $p(x)$ el dividendo y $q(x)$ el divisor. Para calcular el M.C.D (p,q) se siguen los siguientes pasos

- **Paso 1.** Usamos el algoritmo de la división euclidiana para obtener

  $$p(x) = q(x)c(x)+r(x)$$

  donde $c(x) =$ Cociente y $r(x) =$ Residuo.

- **Paso 2.** Analizamos el residuo
  - **Caso 1.** Si $r(x) = 0$ entonces

    $$\text{M.C.D}(p,q) = q(x)$$

- **Caso 2.** Si $r(x) \neq 0$ entonces

$$\text{M.C.D}(p,q) = \text{M.C.D}(q,r)$$

Esto es, debemos repetir el Paso 1 donde

$$\text{Nuevo dividendo} = \text{Anterior divisor} \qquad \text{y} \qquad \text{Nuevo divisor} = \text{Anterior residuo}$$

hasta obtener como residuo 0. Este proceso es finito dado que al considerar divisiones sucesivas el grado del residuo es menor que el divisor.

Ejemplo 7.24

Calcule el máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$ donde

$$p(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 11 \qquad \text{y} \qquad q(x) = x^2 + 4x + 3$$

Solución: Usaremos la siguiente notación para indicar el dividendo, divisor, cociente y residuo.

$$\begin{array}{c|l} \text{Dividendo} & \text{Divisor} \\ \cline{2-2} & \text{Cociente} \\ \cline{1-1} \text{Residuo} & \end{array}$$

Luego,

$$\begin{array}{c|l} x^3 + 6x^2 + 12x + 9 & x^2 + 4x + 3 \\ \cline{2-2} & x + 2 \\ \cline{1-1} x + 3 & \end{array}$$

Como el residuo es no nulo, se tiene

$$\text{M.C.D}(x^3 + 6x^2 + 12x + 9, x^2 + 4x + 3) = \text{M.C.D}(x^2 + 4x + 3, x + 3)$$

Repitiendo el proceso, se obtiene

$$\begin{array}{c|l} x^2 + 4x + 3 & x + 3 \\ \cline{2-2} & x + 1 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Como el residuo es cero, entonces

$$\text{M.C.D}(x^2 + 4x + 3, x + 3) = x + 3$$

Finalmente, se concluye que

$$\text{M.C.D}(p,q) = x + 3$$

■

Ejemplo 7.25

Calcule el máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$ donde

$$p(x) = x^5 - 15x^3 + 33x^2 - 32x + 17 \qquad \text{y} \qquad q(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 8x - 4$$

Solución:
Efectuando la división

$$\begin{array}{c|l} x^5 - 15x^3 + 33x^2 - 32x + 17 & x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 8x - 4 \\ \cline{2-2} & x - 3 \\ \hline x^3 + 4x^2 - 4x + 5 & \end{array}$$

Como el residuo es no nulo, se tiene

$$\text{M.C.D}\big(p(x), q(x)\big) = \text{M.C.D}(x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 8x - 4, x^3 + 4x^2 - 4x + 5)$$

Repitiendo el proceso, se obtiene

$$\begin{array}{c|l} x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 8x - 4 & x^3 + 4x^2 - 4x + 5 \\ \cline{2-2} & x - 1 \\ \hline x^2 - x + 1 & \end{array}$$

Como el residuo es no nulo, se tiene

$$\text{M.C.D}(x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 8x - 4, x^3 + 4x^2 - 4x + 5) = \text{M.C.D}(x^3 + 4x^2 - 4x + 5, x^2 - x + 1)$$

Repitiendo el proceso, se obtiene

$$\begin{array}{c|l} x^3 + 4x^2 - 4x + 5 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2} & x + 5 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Como el residuo es cero, entonces

$$\text{M.C.D}(x^3 + 4x^2 - 4x + 5, x^2 - x + 1) = x^2 - x + 1$$

Finalmente, se concluye que

$$\text{M.C.D}\big(p(x), q(x)\big) = x^2 - x + 1$$

∎

Otras publicaciones del autor

Titulo: Matemática Básica
Año: 2021
ISBN: 978-612-48750-0-7
Editorial: Ediciones São Paulo
Páginas: 626
Versión: Impresa, tapa blanda
Ventas y pedidos: +511 987742496 **Link de whatsapp** edicionessaopaulo@gmail.com

Link del índice

Otras publicaciones del autor

Titulo: Cálculo Integral: Técnicas de integración
Año: 2022
ISBN: 978-612-48750-1-4
Editorial: Ediciones São Paulo
Páginas: 360
Versión: Impresa, tapa blanda
Ventas y pedidos: +511 987742496 **Link de whatsapp** edicionessaopaulo@gmail.com

Link del índice

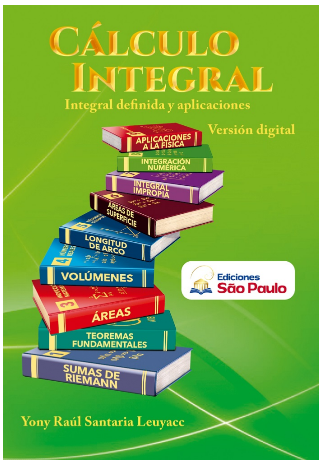
libro impreso

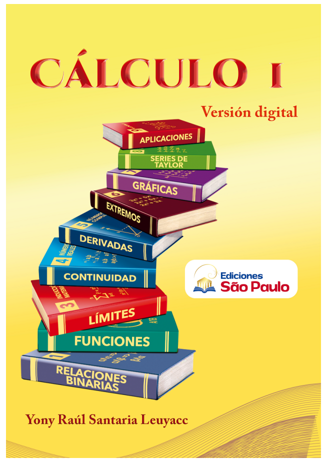
Titulo: Cálculo Diferencial
Año: 2023
ISBN: 978-612-48750-3-8
Editorial: Ediciones São Paulo
Páginas: 686
Versión: Impresa, tapa blanda
Ventas y pedidos: +511 987742496 **Link de whatsapp** edicionessaopaulo@gmail.com

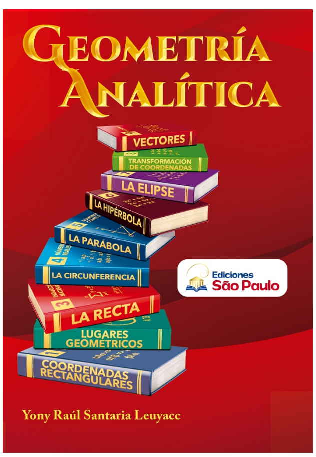
Link del índice

Libros digitales

Descarga en: https://sites.google.com/view/yonyraul/librosdigitales







Sobre el autor

Yony Santaria Leuyacc es un matemático y docente universitario nacido en Lima-Perú. En el 2002 obtuvo el primer puesto en el examen de admisión para realizar sus estudios de Matemática Pura en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM), egresando también como primer puesto en el orden de mérito de acuerdo al promedio ponderado. En el 2012 ganó una beca del gobierno brasileño para estudiar en la Universidad de São Paulo-Brasil, donde obtuvo los grados de maestro y doctor en Ciencias del programa de Matemáticas en los años 2014 y 2017 respectivamente. Docente asociado de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UNMSM desde diciembre de 2020. Tiene experiencia docente desde el 2010, impartiendo diversas materias de pregrado y posgrado. Es autor de artículos científicos en revistas indexadas y ha sido ponente de conferencias a nivel internacional. Responsable de proyectos de investigación con financiamiento de la UNMSM y de ProCiencia-Concytec. Desde el 2019 es considerado investigador Renacyt y el 2021 ha sido reconocido como Docente investigador por el Vicerrectorado de Investigación y Posgrado de la UNMSM.

Ediciones
São Paulo

Ventas y pedidos: 987742496
edicionessaopaulo@gmail.com