UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Facultad de Ingeniería Electrónica y Eléctrica

CURSO: Álgebra y Geometría Analítica SEMESTRE: 2023-I

TEMA: Potencia, raíces, forma exponencial y logaritmo de un número complejo.

GUÍA DE PRÁCTICA N° 6

1. Determine los valores z de las siguientes ecuaciones

   $a)$ $z^3 = 8 - 8i$ $\quad b)$ $z^5 = 1 + i\sqrt{3}$ $\quad c)$ $z^4 = 1 + i$

   $d)$ $(z + 2i)^4 = -8i + 81i\sqrt{3}$

2. Determine las siguientes raíces

   $a)$ $(-i)^{1/7}$ $\quad b)$ $(\sqrt{3} + i)^{1/4}$
   $c)$ $(3 - 3i)^{1/5}$ $\quad d)$ $(-1 - i\sqrt{3})^{1/6}$

3. Calcular $z^{-3}; z^{-14}; z^{-83}$ si z es:

   $a)$ $z = 2 - 2i$ $\quad b)$ $z = -9 + 9i$ $\quad c)$ $z = -1 - i$

4. Calcular $z = \sqrt[6]{1 - \sqrt{3i}}$

5. (a) Demuestre que la suma de las raíces n-ésimas de la unidad es cero.
   (b) Demuestre que el producto de las raíces n-enésimas de la unidad es 1 ó -1.

6. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que:

   $$a)\ sen(3\alpha) = 3sen(\alpha) - 4sen^3(\alpha) \qquad b)\ cos(4\alpha) = 8cos^4(\alpha) - 8cos^2(\alpha) + 1$$

   $c)$ $sen(5\alpha) = 5sen(\alpha) - 20sen^3(\alpha) + 16sen^5(\alpha)$

7. Sean $n \in \mathbf{N}$ y $w = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ dado un número entero m y multiplo de n. Calcular la suma $1 + w^m + w^{2m} + \cdots + w^{(n-1)m}$.

8. Si $z = \dfrac{(1-i)^{10}(-i+\sqrt{3})^{12}}{(i\sqrt{3}+1)^8}$, calcular $a)$ $z^3 + \dfrac{1}{z^3}$ $\quad b)$ $Arg(z)$ $\quad c)$ $\|z\|$

9. En cada ejercicio, calcular las potencias indicadas:

   $a)$ $(1-i)^5$ $\quad b)$ $(\sqrt{3} - i)^6$ $\quad c)$ $(2+2i)^{-4}$ $\quad d)$ $\dfrac{i^7 - i^{-7}}{2i}$

   $e)$ $(-1 + \sqrt{3}i)^7$ $\quad f)$ $(1+i)^{-8}$

10. Simplifique

    $a)\ \left(\dfrac{1+itag(\alpha)}{1-itag(\alpha)}\right)^n \qquad b)\ \left(\dfrac{1+sen(\theta)+icos(\theta)}{1+sen(\theta)-icos(\theta)}\right)^n$

11. Si n es un entero positivo, demostrar que: $(1+i)^n+(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}+1}cos(\dfrac{n\pi}{4})$

12. Si $z+\dfrac{1}{z}=2cos(\alpha)$ demostrar $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2cos(n\alpha)$

13. Resolver las siguientes ecuaciones:

    $a)\ x^3-8=0 \quad b)\ x^4+i=0 \qquad c)\ x^6-1=0 \qquad d)\ x^3-2i+2=0$

    $e)\ x^5-27i=0$

14. Expresar cada uno de los siguientes números complejos en la forma exponencial:

    $a)\ -i \quad b)\ 1-i \qquad c)\ 3i \qquad d)\ \sqrt{3}-3i \qquad e)\ 2-2i \quad f)\ -4-4\sqrt{3}i$

15. Expresar cada uno de los siguientes números complejos en la forma binomial:

    $a)\ e^{\left(\frac{\pi}{3}\right)i} \quad b)\ 3e^{\left(\frac{\pi}{2}\right)i} \qquad c)\ -2e^{-\pi i} \qquad d)\ i-e^{2\pi i} \qquad e)\ e^{\left(\frac{\pi}{4}\right)i}+e^{-\left(\frac{\pi}{4}\right)i}$

    $f)\ \dfrac{1+e^{\left(\frac{\pi}{2}i\right)}}{1-e^{\left(\frac{\pi}{2}i\right)}}$

16. Calcular:
    $a)\ Log(-i) \quad b)\ Log(1+i) \qquad c)\ Log(1+\sqrt{3}i) \qquad d)\ i^{-i} \quad e)\ (-i)^i$
    $f)\ 1^{-i} \qquad g)\ e^{e^i}$

17. Halle los números $z\in\mathbb{C}$ tal que $\ln z=1+\dfrac{\pi}{3}i$.

18. Si w es una raíz cúbica compleja de la unidad, probar que $(1+w^2)^4=w$.

19. Hallar todas la raíces de la ecuación $z^8+z^4+1=0$.

20. Demostrar que:

    (a) $\cos\theta=\dfrac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$

    (b) $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$