UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Facultad de Ingeniería Electrónica y Eléctrica

Álgebra y Geometría Analítica

Semestre $2023 - I$

Tema: Paralelelismo y ortogonalidad de vectores. Proyección ortogonal. Componentes. Aplicaciones.

GUÍA DE PRÁCTICA N° 10

1. Demostrar que si $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{v}//\overrightarrow{w}$ y $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$, entonces $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{v}$

2. Demostrar que si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen la misma dirección y sentido entonces

$$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$$

3. Si $\overrightarrow{u} = (2, 2m - 3)$ y $\overrightarrow{v} = (1 - m, -5)$, determinar los valores de m de modo que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ sean paralelos.

4. Sean los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, tales que $\overrightarrow{u} = (a, 2a)$, $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (2a, p)$, $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{v}$ y la norma de $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ es $\sqrt{112}$. Hallar la norma de $\overrightarrow{v}$.

5. Si $\overrightarrow{u} = (a, b)$ y $\overrightarrow{v} = (1/2, -4/3)$ son dos vectores en $\mathbb{R}^2$, hallar $a + b$ sabiendo que $||\overrightarrow{u}|| = \dfrac{\sqrt{73}}{3}$ y que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen sentidos opuestos.

6. Demostrar que si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| = ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||$$

7. Demostrar que los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ en $\mathbb{R}^2$ son ortogonales, si y solo si

$$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{u}||^2$$

8. Dados los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ demostrar que

   a) $(\overrightarrow{u}^{\perp})^{\perp} = -\overrightarrow{u}$ *b*) $\overrightarrow{u}^{\perp}.\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}^{\perp}$ *c*) $\overrightarrow{u}^{\perp}.\overrightarrow{v}^{\perp} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ *d*) $||\overrightarrow{u}^{\perp}|| = ||\overrightarrow{u}||$

9. Dados los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ en $\mathbb{R}^2$ demostrar que

   a) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}|| \Leftrightarrow \overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen sentidos opuestos

   b) $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}|| \Leftrightarrow \overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen el mismo sentido.

10. Demostrar que el vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{b} - \dfrac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{||\overrightarrow{a}||^2}\overrightarrow{a}$, es perpendicular al vector $\overrightarrow{a}$.

11. Si $\overrightarrow{a} = (2, -3)$, $\overrightarrow{b} = (-2, 1)$ y $\overrightarrow{c} = (3, 2)$, hallar un vector unitario ortogonal al vector $\overrightarrow{v} = 5\overrightarrow{a} - 3(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$

12. Si $\overrightarrow{u} = (4m, m-3)$ y $\overrightarrow{v} = (2, m+3)$, hallar los valores de m tales que $\overrightarrow{u}$ sea perpendicular a $\overrightarrow{v}$.

13. Si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son vectores unitarios y paralelos, hallar la norma de $\overrightarrow{u}^{\perp} + \overrightarrow{v}$

14. Sea OAB el triángulo cuyos vértices son $O = (0,0)$, $A = (-8,0)$ y $B = (0,6)$. Si $\overrightarrow{OM}$ es la altura relativa al vértice O, hallar el vector $\overrightarrow{OM}$.

15. Sea el rectángulo $ABCD$ de área $48u^2$ y cuyos dos vértices consecutivos son $A = (-2,5)$ y $B = (2,1)$. Si la diagonal $\overrightarrow{AC}$ tiene el mismo sentido del vector $\overrightarrow{v} = (5,1)$, hallar los vértices C y D.

16. Si ABC es un triángulo tal que $\overrightarrow{AC} = (4,1)$, $\overrightarrow{AB} = (-4,-3)$, hallar el coseno del ángulo que forma el vector $\overrightarrow{BC}$ con el vector unitario $j = (0,1)$

17. Sean $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ vectores diferentes de $\overrightarrow{0}$, y supuesto que el ángulo entre $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{c}$ es igual al ángulo entre $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$, para qué valores de t el vector $\overrightarrow{c}$ es perpendicular al vector $\overrightarrow{d} = ||\overrightarrow{b}||\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$

18. Dado los vértices $B(-6,9)$ y $C(5,7)$ del rombo $ABCD$, si la diagonal AC es paralela al vector $\overrightarrow{u} = (3,4)$. Determinar vectorialmente los otros dos vértices del rombo.

19. Sea un triángulo rectángulo ABC (*sentido antihorario*) recto en B, donde $A = (2,-1)$, $B = (10,5)$ y su área es $25u^2$. Determinar el vector $\overrightarrow{BH}$ donde H es el pie de la altura correspondiente al vértice B.

20. Sean los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ lados de un paralelogramo. Si $||\overrightarrow{u}|| = 6$, $||\overrightarrow{u}|| = 2||\overrightarrow{v}||$ y $Comp_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \dfrac{10}{3}$, hallar la longitud de la diagonal $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

21. Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (\sqrt{3}, -1)$ y $\overrightarrow{v} = (3, \sqrt{3})$, hallar $2Proy_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} + Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$.

22. Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores tales que $\overrightarrow{u} = (5,-2)$, $Comp_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v} = -58$ y $||\overrightarrow{v}|| = 29$. Hallar $Comp_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}$

23. Los lados de un triángulo son los vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$. Si $||\overrightarrow{a}|| = 6$, $||\overrightarrow{b}|| = 5$ y $||\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|| = 5$; hallar $Comp_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} - Comp_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b}$.

24. Los lados de un triángulo son los vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$. Si $||\overrightarrow{a}|| = 10$, $||\overrightarrow{b}|| = 6$ y $Comp_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = -5$. Hallar la longitud de $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$.

25. Sea $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{65}$, $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| = \sqrt{164}$, $Comp_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \dfrac{102}{||\overrightarrow{u}||}$; hallar $Comp_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$.

26. Si $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, $||\overrightarrow{u}|| = a$, $||\overrightarrow{v}|| = b$, $||\overrightarrow{w}|| = c$, hallar $Comp_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}$

27. Si $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, $||\overrightarrow{a}|| = p$, $||\overrightarrow{b}|| = q$, $||\overrightarrow{c}|| = r$, $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = pq$, $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c} = pr$ y $Comp_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{c} = r$, hallar la norma de $\overrightarrow{d}$.

28. Hallar el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $Proy_{\overrightarrow{v}^{\perp}}\overrightarrow{u}$, si $\overrightarrow{u} = (1,2)$ y $\overrightarrow{v} = (1,3)$.

29. Si $\overrightarrow{u} = (5,-2)$ y $Proy_{\overrightarrow{v}^{\perp}}\overrightarrow{u} = (4,1)$, hallar $Comp_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}$ sabiendo que $Comp_{\overrightarrow{v}^{\perp}}\overrightarrow{u}$ es positivo.

30. Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (3,-6)$, $\overrightarrow{v} = (3,4)$ y $\overrightarrow{w} = (21,0)$, hallar los valores de r y s tales que $\overrightarrow{w} = rProy_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} + sProy_{\overrightarrow{v}^{\perp}}\overrightarrow{u}$.

Ciudad Universitaria, junio del 2023

Los profesores del curso