17 工答案

一、客观题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分）

1、$\dfrac{3}{2}$；2、$\dfrac{1}{4}$；3、$dx+2\ln 2dy$；4、$4x-6y-z+1=0$；5、$y^2=x^2+C$；

6、$(3,5]$；7、$\int_0^1 dx\int_{\frac{x}{2}}^{x} f\cdot dy+\int_1^2 dy\int_{\frac{x}{2}}^{1} f\cdot dy$；8、$C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$。

二、计算题(本题共 4 小题，每小题 8 分，满分 32 分)

1、$xy'+y=e^x$ 变形为 $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{e^x}{x}$，则 $p(x)=\dfrac{1}{x},q(x)=\dfrac{e^x}{x}$

通解为 $y=e^{-\int\frac{dx}{x}}\left(\int\dfrac{e^x}{x}e^{\int\frac{dx}{x}}dx+C\right)=\dfrac{1}{x}\left(e^x+C\right)$

将 $y\big|_{x=1}=0$ 带入得 $C=-e$，故特解为 $y=\dfrac{e^x-e}{x}$。

2、(1) 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛（$q=\dfrac{1}{2}<1$），$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛（$p=2>1$），所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{2}{n^2}\right)$ 收敛；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{n!}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n+1}=0<1$，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{n!}$ 绝对收敛。

3、令 $F=e^z+x+2y+z-3$，$F_x=1$，$F_y=2$，$F_z=e^z+1$，

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=-\dfrac{1}{e^z+1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=-\dfrac{2}{e^z+1}$。

4、

$$y=\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4+(x-1)}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\left(x-1\right)^n,x\in\left(-3,5\right)$$

三、计算题(本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分)

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f_1'+y^2f_2'$；　　（4+4）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2(-3f_{11}''+2xyf_{12}'')+2yf_2'+y^2(-3f_{21}''+2xyf_{22}'')=2yf_2'-6f_{11}''+(4xy-3y^2)f_{12}''+2xy^3f_{22}''$$

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{2n+4}(2n+1)}{x^{2n+2}(2n+3)}\right|=x^2<1\therefore -1<x<1$

$x=\pm 1$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$发散，所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{2n+1}$收敛域$(-1,1)$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=xS_1(x)$$

$S_1'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\dfrac{1}{1-x^2}$，所以$S_1(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1-x^2}dx+S_1(0)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$。

所以$S(x)=\dfrac{x}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$，$x\in(-1,1)$

3、$F=x-y+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-3)$，

$$\begin{cases}F_x=1+2\lambda x=0\\ F_y=-1+2\lambda y=0\\ F_\lambda=1+2\lambda z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1,y=-1,z=1\\ x=-1,y=1,z=-1\end{cases},$$

$z(1,-1,1)=3,z(-1,1,-1)=-3$，所以$z_{\max}=3$，$z_{\min}=-3$。

四、计算题(本题共2小题，每小题6分，满分12分)

1、
$$\begin{aligned}&\iint_D(x+y)^2dxdy=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint_D\rho^3d\rho d\varphi\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^3d\rho=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

2、因为$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，所以$f_x(0,0)=0$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$ 所以 $f_y(0,0)=0$。