《高等数学（工）A（II）》模拟考试卷（一）18-19

一、客观题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分）

1、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)}\dfrac{\sin(xy)}{xy}=$ 1 。

2、设 $f(x,y)=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=$ $\dfrac{1}{4}$ 。

3、设 $z=x^y$，则 $dz|_{(2,1)}=$ $dx+2\ln 2\,dy$

4、曲面 $z=2x^2-3y^2$ 在点 $P(1,1,-1)$ 处的切平面方程为 $4x-6y-z+1=0$

5、微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$ 的通解为 $y^2=x^2+C$ 。

6、幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-4)^n$ 的收敛域为 $(3,5]$ 。

7、交换积分次序：$\int_0^1 dy\int_y^{2y}f(x,y)dx=$ $\int_0^1 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{x}f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{1}f(x,y)\,dy$

8、微分方程 $y''+5y'+6y=6$ 的通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+1$

二、计算题(本题共 4 小题，每小题 8 分，满分 32 分)

1、求微分方程 $xy'+y=e^x$ 满足 $y|_{x=1}=0$ 的特解。

解：$(xy)'=e^x$

$\therefore xy=e^x+C$

又 $\because y|_{x=1}=0$

$\therefore C=-e$

$\therefore$ 特解为 $xy=e^x-e$ / $y=\dfrac{e^x-e}{x}$

2、判断级数的敛散性：（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}+\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$；（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{n!}$ 。

(1)解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ （$q=\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1$ 收敛）

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ （p级数，$p=\frac{1}{2}<1$ 发散）

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}+\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$ 发散

(2)解：令 $u_n=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{3^n}{n!}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n+1}=0$

$\therefore \sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 收敛 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{n!}$ 收敛

3、设 $z = f(x, y)$ 是由方程 $e^z + x + 2y + z = 3$ 确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解 令 $F(x,y,z) = e^z + x + 2y + z - 3$

$F_x = 1 \quad F_y = 2 \quad F_z = e^z + 1$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{1}{e^z+1} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2}{e^z+1}$

4、求函数 $y = \frac{1}{x+3}$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数，并且写出收敛域。

解：$y = \frac{1}{x-1+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x-1}{4})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{(x-1)^n}{4^{n+1}}$

$\left|\frac{x-1}{4}\right| < 1 \quad \therefore$ 收敛域 $(-3, 5)$

三、计算题(本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分)

1、设 $z = f(2x-3y, xy^2)$，其中 f 有二阶连续的偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot 2 + f_2' \cdot y^2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\left(f_{11}'' \cdot (-3) + f_{12}'' \cdot 2xy\right) + 2y f_2' + y^2\left(f_{21}''(-3) + f_{22}'' \cdot 2xy\right)$

$= -6f_{11}'' + 2xy^3 f_{22}'' + 2y f_2' + (4xy - 3y^2) f_{12}''$

2、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$ 的和函数 $s(x)$，并指出收敛域。

解：$S(x) = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^6 + \cdots + \frac{x^{2n+2}}{2n+1} + \cdots$

$\frac{S(x)}{x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$\left(\frac{S(x)}{x}\right)' = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} = \frac{1 - x^{2n} \cdot x^2}{1-x} = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-1, 1) \quad (n \to \infty)$

$\frac{S(x)}{x} = \int_0^x \frac{1}{1-x}dx$

$S(x) = -x\ln(1-x) \quad , \quad x \in (-1, 1)$

3、求函数 $f(x,y,z)=x-y+z$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=3$ 下的最大值与最小值。

解：设 $F(x,y,z,\lambda)=x-y+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-3)$

$$\left.\begin{aligned} F_x&=1+2\lambda x\\ F_y&=-1+2\lambda y\\ F_z&=1+2\lambda z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=z\\ x=-y \end{cases}$$

$F_\lambda=x^2+y^2+z^2-3=0$

得驻点 $A(1,-1,1)$

$B(-1,1,-1)$

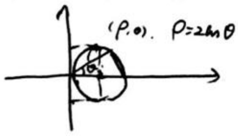
$\therefore f(1,-1,1)=1-(-1)+1=3$

$f(-1,1,-1)=-1-1-1=-3$

∴最大值为3，最小值为-3

四、计算题(本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分)

1、计算二重积分 $I=\iint\limits_D (x+y)^2\,dxdy$，其中 D 是由曲线 $x^2+y^2=2x$ 所围成的平面闭区域。



解：$I=\iint\limits_D x^2+y^2+2xy\,dxdy$

$=\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy+\underbrace{\iint\limits_D 2xy\,dxdy}_{=0}$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\cdot\rho\,d\rho=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta$

$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta$

$=8\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times I_0=\frac{3}{2}\pi$

2、设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_{xy}(0,0)$。

解：$f'_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)\cos\frac{1}{x^2+y^2}$

$=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$

$\therefore f''_{xy}(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(0,0+\Delta y)-f'_x(0,0)}{\Delta y}=0.$

$\therefore f_{xy}(0,0)=0$

附加题（5 分）：求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$ 的和。

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}$

$S''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

$\therefore S''(x)-S'(x)=0$

$\Rightarrow S(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$

$S(0)=0\quad S'(0)=1\quad\Rightarrow S(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}=S(1)=\frac{e-\frac{1}{e}}{2}$

18-19 填空

1. $\underline{\quad 1 \quad}$ 析：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\sin(xy)}{xy} \xlongequal{\text{等价无穷小}} \lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \frac{xy}{xy} = 1$

2. $\underline{\quad \frac{1}{4} \quad}$ 析：$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\therefore \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3. $\underline{dx + 2\ln 2\, dy}$ 析：$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$ $\quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$

代入(2,1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ $\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2\ln 2$

$\therefore dz = dx + 2\ln 2\, dy$

5. $\underline{y^2 = x^2 + C}$ 析：$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = x\,dx$

$\int y\,dy = \int x\,dx$

时间顺序换

$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow$ 通解：$y^2 = x^2 + C$

4. $\underline{4x - 6y - z + 1 = 0}$ 析：法向量 $\vec{n} = \{4x, -6y, -1\} \xlongequal{\text{代入}(1,1,-1)} (4, -6, -1)$

$\therefore$ 切平面：$4(x-1) - 6(y-1) - (z+1) = 0$

$\Rightarrow 4x - 6y - z + 1 = 0$.

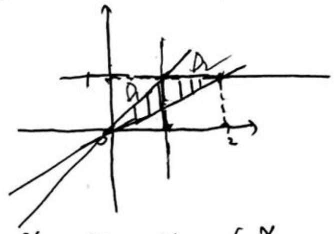
6. $\underline{(3, 5]}$ 析：思路1：收敛半径 $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = 1$ 区间中点 $\underline{x=4}$

$\therefore$ 收敛区间 $(3, 5)$ + 判断端点 $\Rightarrow$ 收敛域 $(3, 5]$

思路2：令 $y = x - 4$ ...

$\Rightarrow$ y 收敛域 $(-1, 1] \Rightarrow -1 < x - 4 \le 1 \Rightarrow x$ 收敛域 $(3, 5]$

7. (*)式　析：画出积分区域



$$I=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}=\int_0^1 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{x} f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{1} f(x,y)\,dy \quad (*)$$

8. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+1$　析：二阶常系数非齐次微分方程

$\lambda=0 \quad P_m(x)=6 \quad m=0$

$\therefore$ 设 $y^*=C$.

$y^{*\prime}=0 \quad y^{*\prime\prime}=0 \quad \therefore C=1$

特征方程 $r^2+5r+6=0$. $r_1=-2 \quad r_2=-3$

$\therefore$ 通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+1$