18B　答案

一、无穷、$\sec^2(2x)$、$\frac{1}{3}e^{3x}+C$、$\frac{3\pi}{8}$、$\begin{cases} y^2-y-z=0 \\ x=0 \end{cases}$、$x=1$、$(-\infty,1]$、$(0,+\infty)$、$y=2$

二、1、解：$1+e^{xy}(y+xy')=y'$，$\Rightarrow y'=\frac{1+ye^{xy}}{1-xe^{xy}}$

2、解：$A=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx=-(\cos x+\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}-1$

3、解：$\vec{n}=\vec{i}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}=(0\quad -1\quad 9)$，$\therefore \pi:-9y+z+2=0$

三、1、解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin(2x)^2}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2 2}{-\frac{1}{2}x^2}=-16$

2、解：$\frac{dy}{dx}=\frac{1+2t}{e^{2t}+2te^{2t}}=e^{-2t}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2e^{-2t}}{e^{2t}+2te^{2t}}=\frac{-2}{(1+2t)e^{4t}}$

3、解：原式=$\int\arctan x d\left(\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{1}{2}\left(x^2\arctan x-\int x^2\frac{1}{1+x^2}dx\right)$

$$=\frac{1}{2}(x^2\arctan x-x+\arctan x)+C$$

4、解：令$x=2\sin t$，则原式=$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{4\sin^2 t}{2\cos t}2\cos t dt=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 t dt$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2t)dt=2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

四、1、解：$V=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{1}{2}}\pi y^2 dx=\frac{\pi}{2}-2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}x dx=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

2、令 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$，

则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

那么 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi}{4}$

19B 答案

2001B

一、填空题(本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分)

1、$\int\sec x\mathrm{d}x=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$.

2、$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx=\dfrac{3\pi}{16}$.

3、设 $f(x)=x\cos x$，则 $f^{(2020)}(0)=0$.

4、函数 $f(x)=2x^3+6x^2-18x+5$ 在 $[0,2]$ 上的最小值是　　−5　　。

5、曲线 $y=12x^2-x^4$ 在区间 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 内是凹的.

6、$\int_{-1}^{1}(x^2-x\sqrt{4-x^2})dx=\dfrac{2}{3}$

7、$\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}=1$

8、曲线 $\begin{cases}z^2=5+y^2\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所成的旋转面方程是 $z^2=5+x^2+y^2$.

9、函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ 的铅直渐近线为 $x=1$.

二、计算题(本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分)

1、已知 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\arcsin x$，求 dy

解：

$$dy=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$$

2、计算不定积分 $\int x\sin(3x+2)dx$

$$解：原不定积分=-\frac{1}{3}\int xd\cos(3x+2)=-\frac{1}{3}[x\cos(3x+2)-\int\cos(3x+2)dx]$$

$$=\frac{1}{9}\sin(3x+2)-\frac{1}{3}x\cos(3x+2)+C$$

3、计算定积分 $\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

解：$令\sqrt{x}=t,原不定积分=2\int_0^2\frac{t}{1+t}dt=2\int_0^2 1-\frac{1}{1+t}dt=4-2\ln 3$

三、计算题(本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分)

1、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\sin t^2dt}{x^3}$

$$解：由洛必达法则知，原极限=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\right)}{3x^2}=\frac{1}{3}（5'+3'）$$

2、计算定积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx$

解：$原定积分=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d(1-\sin x)}{\sqrt{1-\sin x}}=-2\sqrt{1-\sin x}\Big|_{\frac{\pi}{2}^+}^{\pi}=-2$

3、求过坐标原点 $O(0,0,0)$ 与点 $P(3,4,-6)$，并且与平面 $2x+5y-3z=7$ 垂直的平面方程。

解：$\vec{n} \perp \overrightarrow{OP}$ 且 $\vec{n} \perp \vec{n_1}$, $\therefore \vec{n} = \overrightarrow{OP} \times \vec{n_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -6 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (18,-3,7)$

因此平面方程为：$18x - 3y + 7z = 0$

四、计算题(本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分)

1、求由曲线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 与直线 $3x - 2y - 4 = 0$ 所围成的平面图形的面积。

解：$A = \int_2^4 (\frac{3}{2}x - 2 - \frac{1}{4}x^2)\ dx = \frac{1}{3}$

2、求由 $y = \ln x$ 、$y = -1$ 和 $x = e$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所成立体的体积。

解：

$$V = 2\pi \int_{\frac{1}{e}}^{e} x\ (1 + \ln x)\ dx = \pi\ (x^2 \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} x dx + e^2 - \frac{1}{e^2}) = \pi(\frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{2e^2})$$