清华大学深圳国际研究生院

数 值 实 验

宋伦继 编

SIGS

2021年

目　录

前　言

结合课程教学，配备适当的上机实验以便加深课堂教学的实践性，同时通过实验可以加强对数学模型的总体分析，算法选取，程序结构，上机调试和结果分析等环节的训练。实验内容共包含 9 个实验，要求学生在 36 个实验课时内完成。为使实验更为有成效，需要写出符合格式要求的实验报告，以此可作为《数值分析》课程成绩评定的参考。

实验报告内容要求

一、实验题目名称

二、专业、班级、姓名

三、目的和意义

方法的理论意义和实用价值，如 Neville 插值算法利用逐次线性插值产生一个从低到高次的 Langrange 插值多项式序列，避免了当增加新节点时从头开始计算的问题。又如改进牛顿法，它适用于任意连续函数在大范围中求解，并且避免计算导数值，使其更具有实用性。

四、计算公式（算法）

五、结构程序设计

六、结果讨论和分析

如初值对结果的影响；不同方法的比较；该方法的特点和改进；整个实验过程中（包括程序编写，上机调试等）出现的问题及其处理等广泛的问题，以此扩大知识面和对实验环节的认识。

实验一 **Hamming** 级数求和

一、问题提出

Hamming 于 1962 年提出了一个级数求和问题：

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+x)}$$

取 3001 个 x 值，即 x = 0.0，0.1，0.2，…，300.00，计算所有关于 x 的级数，并要求误差控制在 1.0e-10 精度范围。

二、要求

1、给出合适的级数求和误差控制算法，考虑如何减少计算步骤和时间；

2、输出形式为：

0.10 1.644934066848

...

1.00 1.000000000000

...

2.00 0.750000000000

...

300.00 0.0187195572

3、考虑直接计算为什么会导致计算机计算速度很慢？

三、目的和意义

1、了解误差产生的原因；

2、明确合理算法构造的优点；

3、大致熟悉 C 语言程序编写过程。

实验二 函数插值方法

一、问题提出

对于给定的一元函数 $y=f(x)$ 的 n+1 个节点值 $y_j=f(x_j)$ $j=(0,1,\cdots,n)$。

试用 Lagrange 公式求其插值多项式或分段二次 Lagrange 插值多项式。

数据如下：

（1）

x_j	0.4	0.55	0.65	0.80	0.95	1.05
y_j	0.41075	0.57815	0.69675	0.90	1.00	1.25382

求五次 Lagrange 多项式 $L_5(x)$，和分段三次插值多项式，计算 $f(0.596), f(0.99)$ 的值。

（2）

x_j	1	2	3	4	5	6	7
y_j	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001

试构造 Lagrange 多项式 $L_6(x)$，计算 $f(1.8)$的值。

结果 $f(1.8)\approx 0.165299$ $f(6.15)\approx 0.00213348$

*也可以考虑书上 P82 习题 6， 用 Neville 算法构造插值多项式。

二、要求

4、 利用 Lagrange 插值公式

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)y_k$$

编写出插值多项式程序；

5、 给出插值多项式或分段三次插值多项式的表达式；

6、 根据节点选取原则，对问题（2）用三点插值或二点插值，其结果如何；

7、 对此插值问题用 Neville 插值多项式其结果如何。

三、目的和意义

4、 学会常用的插值方法，求函数的近似表达式，以解决其它实际问题；

5、 明确插值多项式和分段插值多项式各自的优缺点；

6、 熟悉插值方法的程序编制；

7、 如果绘出插值函数的曲线，观察其光滑性。

实验三 函数逼近与曲线拟合

一、问题提出

从随机的数据中找出其规律性，给出其近似表达式的问题，在生产实践和科学实验中大量存在，通常利用数据的最小二乘法求得拟合曲线。

在某冶炼过程中，根据统计数据的含碳量与时间关系，试求含碳量 y 与时间 t 的拟合曲线。

t(分）	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
$y\left(\times 10^{-4}\right)$	0	1.27	2.16	2.86	3.44	3.87	4.15	4.37	4.51	4.58	4.02	4.64

二、**要求**

1、用最小二乘法进行曲线拟合；

2、近似解析表达式为 $\varphi(t)=a_1t+a_2t^2+a_3t^3$；

3、打印出拟合函数 $\varphi(t)$，并打印出 $\varphi(t_j)$ 与 $y(t_j)$ 的误差， $j=1,2,\cdots,12$；

4、另外选取一个近似表达式，尝试拟合效果的比较；

5、* 绘制出曲线拟合图。

三、目的和意义

1、掌握曲线拟合的最小二乘法；

2、最小二乘法亦可用于解超定线代数方程组；

3、探索拟合函数的选择与拟合精度间的关系

实验四 数值积分与数值微分

一、问题提出

选用复合梯形公式，复合 Simpson 公式，Romberg 算法，计算

（1） I = $\int_0^{1/4}\sqrt{4-\sin^2 x}\,dx \quad (I\approx 1.5343916)$

（2） I = $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \quad (f(0)=1,\ \ I\approx 0.9460831)$

（3） I = $\int_0^1 \frac{e^x}{4+x^2}dx$

（4） I = $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

二、要求

1、 编制数值积分算法的程序；
2、 分别用两种算法计算同一个积分，并比较其结果；
3、 分别取不同步长 $h=(b-a)/\,n$，试比较计算结果（如 n = 10, 20 等）；
4、 给定精度要求 ε，试用变步长算法，确定最佳步长。

三、目的和意义

1、 深刻认识数值积分法的意义；
2、 明确数值积分精度与步长的关系；
3、 根据定积分的计算方法，可以考虑二重积分的计算问题。

实验五 线性方程组的直接解法

一、问题提出

给出下列几个不同类型的线性方程组，请用适当算法计算其解。

1、设线性方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & -5 & -3 & 6 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & -1 & 3 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -1 & 3 & -1 & 1 & 9 & 4 \\ -4 & 2 & 6 & -1 & 6 & 7 & -3 & 3 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -8 & 5 & 7 & 17 & 2 & 6 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & -4 & 2 & 5 & 3 & 0 & 1 \\ 16 & 10 & -11 & -9 & 17 & 34 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & -7 & 13 & 9 & 2 & 0 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & -3 & -24 & -8 & 6 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 46 \\ 13 \\ 38 \\ 19 \\ -21 \end{bmatrix}$$

$x^* = (1, -1, 0, 1, 2, 0, 3, 1, -1, 2)^T$

2、设对称正定阵系数阵线方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 14 & 1 & -8 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 6 & -1 & -4 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -8 & -1 & 22 & 4 & -10 & -3 \\ 4 & 3 & -3 & -4 & 4 & 11 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & -3 & -10 & 1 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -3 & -4 & 2 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 20 \\ 23 \\ 9 \\ -22 \\ -15 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$x^* = (1, -1, 0, 2, 1, -1, 0, 2)^T$

3、三对角形线性方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -13 \\ 2 \\ 6 \\ -12 \\ 14 \\ -4 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$x^* = (2,\ 1,\ -3,\ 0,\ 1,\ -2,\ 3,\ 0,\ 1,\ -1)^T$

二、要求

1、 对上述三个方程组分别利用 Gauss 顺序消去法与 Gauss 列主元消去法；平方根法与改进平方根法；追赶法求解（选择其一）；
2、 应用结构程序设计编出通用程序；
3、 比较计算结果，分析数值解误差的原因；
4、 尽可能利用相应模块输出系数矩阵的三角分解式。

三、目的和意义

1、通过该课题的实验，体会模块化结构程序设计方法的优点；
2、运用所学的计算方法，解决各类线性方程组的直接算法；
3、提高分析和解决问题的能力，做到学以致用；
4、通过三对角形线性方程组的解法，体会稀疏线性方程组解法的特点。

实验六 解线性方程组的迭代法

一、问题提出

对实验五所列目的和意义的线性方程组，试分别选用 Jacobi 迭代法，Gauss-Seidol迭代法和 SOR 方法计算其解。

二、要求

1、体会迭代法求解线性方程组，并能与消去法做以比较；

2、分别对不同精度要求，如$\varepsilon = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$由迭代次数体会该迭代法的收敛快慢；

3、对方程组 2，3 使用 SOR 方法时，选取松弛因子ω=0.8，0.9，1，1.1，1.2 等，试看对算法收敛性的影响，并能找出你所选用的松弛因子的最佳者；

4、给出各种算法的设计程序和计算结果。

三、目的和意义

1、通过上机计算体会迭代法求解线性方程组的特点，并能和消去法比较；

2、运用所学的迭代法算法，解决各类线性方程组，编出算法程序；

3、体会上机计算时，终止步骤$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_\infty < \varepsilon$ 或 k >（予给的迭代次数），对迭代法敛散性的意义；

4、体会初始解 $x^{(0)}$，松弛因子的选取，对计算结果的影响。

实验七 非线性方程求根

一、问题提出

设方程 $f(x)=x^3-3x-1=0$ 有三个实根 $x_1^*=1.8793$, $x_2^*=-0.34727$,$x_3^*=-1.53209$

现采用下面六种不同计算格式，求 $f(x)=0$ 的根 x_1^* 或 x_2^*

1、 $x=\dfrac{3x+1}{x^2}$

2、 $x=\dfrac{x^3-1}{3}$

3、 $x=\sqrt[3]{3x+1}$

4、 $x=\dfrac{1}{x^2-3}$

5、 $x=\sqrt{3+\dfrac{1}{x}}$

6、 $x=x-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x^3-3x-1}{x^2-1}\right)$

二、要求

1、编制一个程序进行运算，最后打印出每种迭代格式的敛散情况；

2、用事后误差估计 $\left|x_{k+1}-x_k\right|\langle\,\varepsilon$ 来控制迭代次数，并且打印出迭代的次数；

3、初始值的选取对迭代收敛有何影响；

4、分析迭代收敛和发散的原因。

三、目的和意义

1、通过实验进一步了解方程求根的算法；

2、认识选择计算格式的重要性；

3、掌握迭代算法和精度控制；

4、明确迭代收敛性与初值选取的关系。

实验八 矩阵特征值问题计算

一、问题提出

利用幂法或反幂法，求方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的按模最大或按模最小特征值及其对应的特征向量。

设矩阵 A 的特征分布为：

$|\lambda_1|\rangle\lambda_2 \ge |\lambda_3| \ge \cdots |\lambda_{n-1}| \ge |\lambda_n|$ 且 $Ax_j = \lambda_j x_j$

试求下列矩阵之一

（1） A= $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ 求 λ_1，及 x_1

取 $\upsilon^{(0)} = (1, 1, 1)^T$， $\varepsilon = 10^{-5}$

结果 $\lambda_1 \approx$ -6.42106, $x_1 \approx$ $(-0.046152, -0.374908, 1)^T$

（2） A= $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 & 3 & -1 & 8 \\ -2 & 5 & 1 & 1 & 4 & 7 \\ 7 & 1 & 7 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 5 & 3 & 2 \\ 8 & 7 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ 求 λ_1, λ_6 及 x_1

取 $\upsilon^{(0)} \approx (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1)^T$ $\varepsilon = 10^{-5}$

结果：

$\lambda_1 \approx 21.30525$ $\lambda_6 \approx 1.62139$ $x_1 \approx \left(0.8724,\ 0.5401,\ 0.9973,\ 0.5644,\ 0.4972,\ 1.0\right)^T$

（3） A= $\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 求 λ_1 及 x1

取 $\upsilon^{(0)} = (1, 1, 1, 1, 1)^T$ $\varepsilon = 10^{-4}$

结果 $\lambda \approx$ 3.7321

（4） A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & -2 \\ 4 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

取 $\upsilon^{(0)}$ =(1, 1, 1, 1)^T $\varepsilon = 10^{-2}$

这是一个收敛很慢的例子，迭代 1200 次才达到 10^{-5}

结果 $\lambda_1 \approx$ -8.02857835 $x_1 \approx (1,\ 2.501460,\ -0.757730,\ -2.564212)^T$

（5） A=$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

有一个近似特征值 –6.42，试用反幂法求对应的特征向量，并改进特征值（原点平移法）。

取 $\upsilon^{(0)}$ = (1, 1, 1)^T $\varepsilon = 10^{-4}$

结果 $\lambda \approx$ -6.42107 $x \approx (-0.0461465,\ -0.37918,\ 1)^T$

二、要求

1、掌握幂法或反幂法求矩阵部分特征值的算法与程序设计；

2、会用原点平移法改进算法，加速收敛；对矩阵 B=A-PI 取不同的 P 值，试求其效果；

3、试取不同的初始向量 $\upsilon^{(0)}$，观察对结果的影响；

4、对矩阵特征值的其它分布，如 $\lambda_1 = \lambda_2$ 且 $|\lambda_1| = |\lambda_2| \ge |\lambda_3|$ 如何计算。

三、目的和意义

1、求矩阵的部分特征值问题具有重要实际意义，如求矩阵谱半径 $\rho(A)$=max$|\lambda_1|$，稳定性问题往往归于求矩阵按模最小特征值；

2、进一步掌握幂法、反幂法及原点平移加速法的程序设计技巧；

3、问题中的题（5），反应了利用原点平移的反幂法可求矩阵的任何特征值及其特征向量。