微分方程数值解
2022 夏
张卓涵 3190101161

Theoretical Analysis for 2D Method

1 Question

考虑二维 Dirichlet 边值条件的 BVP：

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & in\ \Omega := (0,1)^2 \\ u = 0, & on\ \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

2 Relaxation

定理 2.1. *二维 BVP 求解中的线性方程组系数矩阵 $A_{2D} = I \otimes A + A \otimes I$，其中 A 是一维 Dirichlet 边值条件 BVP 线性系统的系数矩阵. 并且 A_{2D} 的特征值和特征向量是*

$$\lambda_{ij} = \lambda_i + \lambda_j, \quad \mathbf{W}_{ij} = \mathbf{w}_j \otimes \mathbf{w}_i$$

其中 λ_i 和 λ_j 是 A 的特征值，$\mathbf{w}_i$ 和 $\mathbf{w}_j$ 是对应的特征向量.

证明. 这直接由讲义中的 Theorem 7.48 和 Theorem 7.51 得到. □

定理 2.2. *(1)对应的线性系统的加权 Jacobi 迭代矩阵是*

$$T_\omega = (1-\omega)I + \omega D^{-1}(L+U) = I - \frac{\omega h^2}{4} A_{2D}$$

其特征向量就是 A_{2D} 的特征向量，对应的特征值是

$$\lambda_{ij} = 1 - \omega \sin^2(\frac{i\pi}{2n}) - \omega \sin^2(\frac{j\pi}{2n})$$

证明. 这由讲义 Lemma 9.16 直接得到. □

3 Restriction and prolongation

引理 3.1. 二维网格的 *full weighting* 算子和 *linear* 算子满足

$$I_{h(2D)}^{2h} = I_h^{2h} \otimes I_h^{2h}, \quad I_{2h(2D)}^{h} = I_{2h}^{h} \otimes I_{2h}^{h}$$

其中 I_h^{2h} 和 I_{2h}^h 分别时一维的 *full weighting* 算子和 *linear* 算子.

例 3.1. 考虑在 $n=3$ 的情况，我们有二维 *full weighting* 算子为

$$\begin{aligned} I_{h(2D)}^{2h} &= \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 & 4 & -2 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= I_h^{2h} \otimes I_h^{2h} \end{aligned}$$

4 Two-grid correction

引理 4.1. 二维的 *Two-grid correction* 作用在误差向量上的迭代矩阵是

$$TG = T_\omega^{\nu_2}[I_{2D} - I_{2h(2D)}^{h}(A_{2D}^{2h})^{-1} I_{h(2D)}^{2h} A_{2D}^{h}] T_\omega^{\nu_1}$$

证明. 这由讲义 Lemma 9.31 推广得到. □

5 The spectral picture

引理 5.1. *full weighting restriction* 算子作用在 A_{2D}^h 的特征向量 $\mathbf{W}_{ij}^h$ 上得到

$$I_{h(2D)}^{2h}\mathbf{W}_{ij}^{h} := c_i c_j \mathbf{W}_{ij}^{2h} = \cos^2\frac{i\pi}{2n}\cos^2\frac{j\pi}{2n}\mathbf{W}_{ij}^{2h}$$

证明.

$$\begin{aligned} I_{h(2D)}^{2h}\mathbf{W}_{ij}^{h} &= (I_h^{2h} \otimes I_h^{2h}) \cdot (\mathbf{w}_j^h \otimes \mathbf{w}_i^h) \\ &= (I_h^{2h}\mathbf{w}_j^h) \otimes (I_h^{2h}\mathbf{w}_i^h) \\ &= (c_i\mathbf{w}_j^{2h}) \otimes (c_j\mathbf{w}_i^{2h}) \\ &= c_i c_j \mathbf{W}_{ij}^{2h} \end{aligned}$$

这里第三步是由讲义 Lemma 9.38 得到. □

引理 5.2. *linear interpolation* 算子作用在 A_{2D}^h 的特征向量 $\mathbf{W}_{ij}^h$ 上得到

$$I_{2h(2D)}^{h}\mathbf{W}_{ij}^{2h} = c_i c_j \mathbf{W}_{ij}^{h} - c_i s_j \mathbf{W}_{ij'}^{h} - c_j s_i \mathbf{W}_{i'j}^{h} + s_i s_j \mathbf{W}_{i'j'}^{h}$$

其中，$c_i = \cos^2 \frac{i\pi}{2n}$，$s_i = \sin^2 \frac{i\pi}{2n}$，$i' = n - i$，$j' = n - j$.

证明.

$$\begin{aligned}
I^h_{2h(2D)} \mathbf{W}^{2h}_{ij} &= (I^h_{2h} \otimes I^h_{2h}) \cdot (\mathbf{w}^{2h}_j \otimes \mathbf{w}^{2h}_i) \\
&= (I^h_{2h} \mathbf{w}^{2h}_j) \otimes (I^h_{2h} \mathbf{w}^{2h}_i) \\
&= (c_j \mathbf{w}^{2h}_j - s_j \mathbf{w}^h_{j'}) \otimes (c_i \mathbf{w}^{2h}_i - s_i \mathbf{w}^h_{i'}) \\
&= c_i c_j \mathbf{W}^h_{ij} - c_i s_j \mathbf{W}^h_{ij'} - c_j s_i \mathbf{W}^h_{i'j} + s_i s_j \mathbf{W}^h_{i'j'}
\end{aligned}$$

这里第三个等号由讲义 Lemma 9.39 得到. □

定理 5.1. *Two-grid correction* 作用在子空间 $span\{\mathbf{W}^h_{ij}, \mathbf{W}^h_{i'j}, \mathbf{W}^h_{ij'}, \mathbf{W}^h_{i'j'}\}$ 上是不变的，且

$$\begin{aligned}
TG\mathbf{W}^h_{ij} = \lambda^{\nu_1+\nu_2}_{ij} \left(1 - \frac{\chi_i c_j + \chi_j c_i}{\chi_i + \chi_j} c_i c_j\right) \mathbf{W}_{ij} + \lambda^{\nu_1}_{ij} \lambda^{\nu_2}_{ij'} \frac{\chi_i c_j + \chi_j c_i}{\chi_i + \chi_j} c_i s_j \mathbf{W}^h_{ij'} \\
+ \lambda^{\nu_1}_{ij} \lambda^{\nu_2}_{i'j} \frac{\chi_i c_j + \chi_j c_i}{\chi_i + \chi_j} c_j s_i \mathbf{W}^h_{i'j} - \lambda^{\nu_1}_{ij} \lambda^{\nu_2}_{i'j'} \frac{\chi_i c_j + \chi_j c_i}{\chi_i + \chi_j} s_i s_j \mathbf{W}^h_{i'j'}
\end{aligned}$$

其中，$\lambda_{ij} = 1 - \omega \sin^2(\frac{i\pi}{2n}) - \omega \sin^2(\frac{j\pi}{2n})$ 是 T_ω 的特征值，$\chi_i = \sin^2 \frac{i\pi}{n}$，$\chi_j = \sin^2 \frac{j\pi}{n}$.

证明. 首先不考虑 relaxation 过程，即假设 $\nu_1 = \nu_2 = 0$，

$$\begin{aligned}
& A^h_{2D} \mathbf{W}^h_{ij} = \frac{4}{h^2}(s_i + s_j) \mathbf{W}^h_{ij} \\
\Longrightarrow\ & I^{2h}_{h(2D)} A^h_{2D} \mathbf{W}^h_{ij} = \frac{4}{h^2}(s_i + s_j) c_i c_j \mathbf{W}^{2h}_{ij} \\
\Longrightarrow\ & (A^{2h}_{2D})^{-1} I^{2h}_{h(2D)} A^h_{2D} \mathbf{W}^h_{ij} = \frac{h^2}{\chi_i + \chi_j} \frac{4}{h^2}(s_i + s_j) c_i c_j \mathbf{W}^{2h}_{ij} = \frac{\chi_i c_j + \chi_j c_i}{\chi_i + \chi_j} \mathbf{W}^{2h}_{ij} \\
\Longrightarrow\ & I^h_{2h(2D)} (A^{2h}_{2D})^{-1} I^{2h}_{h(2D)} A^h_{2D} \mathbf{W}^h_{ij} = \frac{\chi_i c_j + \chi_j c_i}{\chi_i + \chi_j} [c_i c_j \mathbf{W}^h_{ij} - c_i s_j \mathbf{W}^h_{ij'} - c_j s_i \mathbf{W}^h_{i'j} + s_i s_j \mathbf{W}^h_{i'j'}] \\
\Longrightarrow\ & [I - I^h_{2h(2D)} (A^{2h}_{2D})^{-1} I^{2h}_{h(2D)} A^h_{2D}] \mathbf{W}^h_{ij} = \left(1 - \frac{\chi_i c_j + \chi_j c_i}{\chi_i + \chi_j} c_i c_j\right) \mathbf{W}^h_{ij} \\
& + \frac{\chi_i c_j + \chi_j c_i}{\chi_i + \chi_j} c_i s_j \mathbf{W}^h_{ij'} + \frac{\chi_i c_j + \chi_j c_i}{\chi_i + \chi_j} c_j s_i \mathbf{W}^h_{i'j} - \frac{\chi_i c_j + \chi_j c_i}{\chi_i + \chi_j} s_i s_j \mathbf{W}^h_{i'j'}
\end{aligned}$$

其中第二步和第四步来自上述两个引理，考虑上 smoothing 的过程得到：

$$\begin{aligned}
TG\mathbf{W}^h_{ij} = \lambda^{\nu_1+\nu_2}_{ij} \left(1 - \frac{\chi_i c_j + \chi_j c_i}{\chi_i + \chi_j} c_i c_j\right) \mathbf{W}^h_{ij} + \lambda^{\nu_1}_{ij} \lambda^{\nu_2}_{ij'} \frac{\chi_i c_j + \chi_j c_i}{\chi_i + \chi_j} c_i s_j \mathbf{W}^h_{ij'} \\
+ \lambda^{\nu_1}_{ij} \lambda^{\nu_2}_{i'j} \frac{\chi_i c_j + \chi_j c_i}{\chi_i + \chi_j} c_j s_i \mathbf{W}^h_{i'j} - \lambda^{\nu_1}_{ij} \lambda^{\nu_2}_{i'j'} \frac{\chi_i c_j + \chi_j c_i}{\chi_i + \chi_j} s_i s_j \mathbf{W}^h_{i'j'}
\end{aligned}$$

□

注. 对 $TG\mathbf{W}^h_{ij}$ 中 $\mathbf{W}^h_{ij}$，$\mathbf{W}^h_{ij'}$，$\mathbf{W}^h_{i'j}$，$\mathbf{W}^h_{i'j'}$ 四项的系数讨论知，四个系数均充分小于 1.

推论 5.1. 类似上述讨论，TG 作用在 $\mathbf{W}_{ij'}^h$，$\mathbf{W}_{i'j}^h$，$\mathbf{W}_{i'j'}^h$ 上也有四项系数充分小于 1，即：

$$TG\begin{bmatrix}\mathbf{W}_{ij}^h\\ \mathbf{W}_{ij'}^h\\ \mathbf{W}_{i'j}^h\\ \mathbf{W}_{i'j'}^h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34}\\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{W}_{ij}^h\\ \mathbf{W}_{ij'}^h\\ \mathbf{W}_{i'j}^h\\ \mathbf{W}_{i'j'}^h\end{bmatrix}$$

其中，k_{ij} 都是充分小于 1 的数.

综上，便说明了二维多重网格方法的收敛性.