



微分方程数值解

2022 春

张卓涵 3190101161

Project 1

1 Boundary Conditions in the Json files

一共有三个 json 文件，分别测试了 Dirichlet, Neumann 和 Mixed 边值条件下的计算结果与误差。

2 Errors and Convergence Rates

2.1 The first function

测试的第一个函数是

$$u(x, y) = e^{y+\sin(x)}$$

测试中不规则定义域中的圆选取为 $(x - \frac{2}{3})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{16}$.

对第一种边值条件，

	regular domin			irregular domin		
n	1-norm	2-norm	∞ -norm	1-norm	2-norm	∞ -norm
8	0.00203806	0.000979757	0.000713907	0.000515528	0.000321185	0.000484398
16	0.000986439	0.000314313	0.000156243	0.000231921	8.57369e-05	7.30423e-05
32	0.000481015	0.000105927	3.675e-05	0.000114244	2.94551e-05	1.32204e-05
64	0.000237115	3.65733e-05	8.89928e-06	5.78276e-05	1.0584e-05	3.39176e-06

可以看到，对于 Dirichlet 条件来说，因为采用了 2 阶准确的推导方式， ∞ -norm 基本是呈 2 阶速度收敛的。

对第二种边值条件，

	regular domin			irregular domin		
n	1-norm	2-norm	∞ -norm	1-norm	2-norm	∞ -norm
8	0.0287087	0.0127368	0.00954259	0.00984642	0.00507879	0.00471488
16	0.0112275	0.00361008	0.00207687	0.00372914	0.00141041	0.00107647
32	0.00499464	0.00114854	0.000486224	0.00164286	0.000442976	0.000256925
64	0.00235809	0.000385649	0.000117726	0.000765231	0.000146782	6.24026e-05

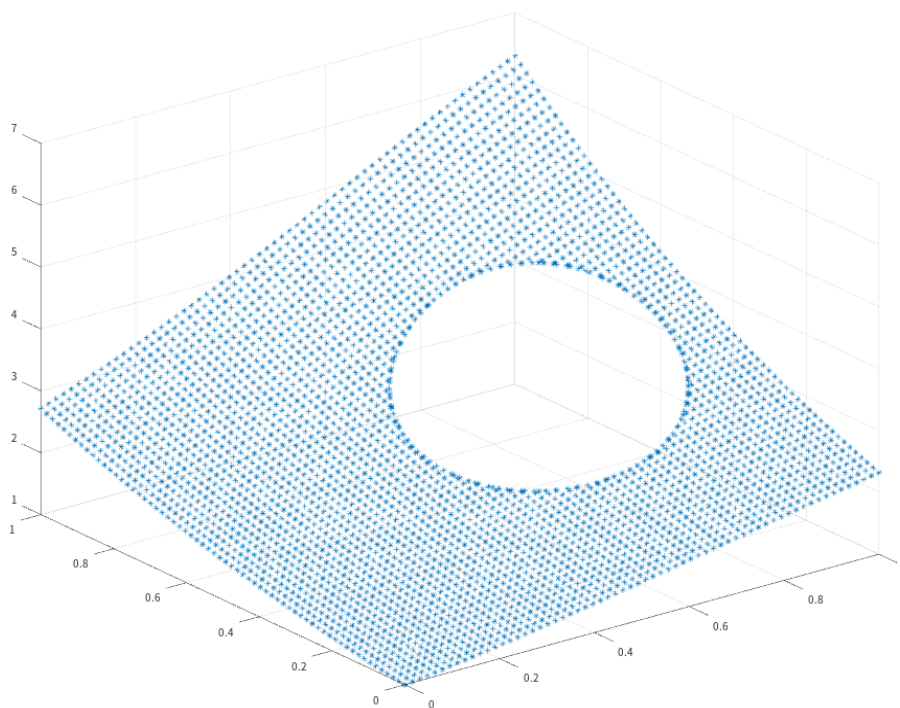
可以看到，对于 Neumann 条件来说 (此时圆上仍然是 Dirchlet 条件)，同样因为采用了 2 阶准确的推导方式， ∞ -norm 的收敛速度几乎也是 2 阶的.

对第三种边值条件，

	regular domin			irregular domin		
n	1-norm	2-norm	∞ -norm	1-norm	2-norm	∞ -norm
8	0.0534236	0.0235603	0.0170158	0.899454	0.35012	0.217818
16	0.0214377	0.00679174	0.00370531	0.516738	0.153652	0.0721617
32	0.00965257	0.00217846	0.000867512	0.368703	0.0810323	0.0318423
64	0.00458538	0.000734409	0.000210047	0.334953	0.0537717	0.0147153

这里，因为对圆上的法向导数的拟合采用的是 1 阶准确表达式，所以 ∞ -norm 的收敛速度变为了近似 1 阶.

绘制出在第二个边值条件及不规则定义域下， $n = 64$ 时拟合出的函数图像如下：



2.2 The second function

测试的第二个函数是

$$u(x, y) = \sin(x) + \sin(y)$$

测试中不规则定义域中的圆选取为 $(x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = (\frac{3}{4})^2$.

对第一个边值条件，

	regular domin			irregular domin		
n	1-norm	2-norm	∞ -norm	1-norm	2-norm	∞ -norm
8	0.000366633	0.000172369	0.000119539	7.03303e-05	7.02674e-05	9.89743e-05
16	0.000179819	5.56823e-05	2.61814e-05	2.28184e-05	1.31254e-05	1.22428e-05
32	8.79452e-05	1.87928e-05	6.17646e-06	6.9716e-06	2.63643e-06	1.61219e-06
64	4.33824e-05	6.49075e-06	1.49821e-06	2.37587e-06	6.14344e-07	2.3733e-07

对第二个边值条件,

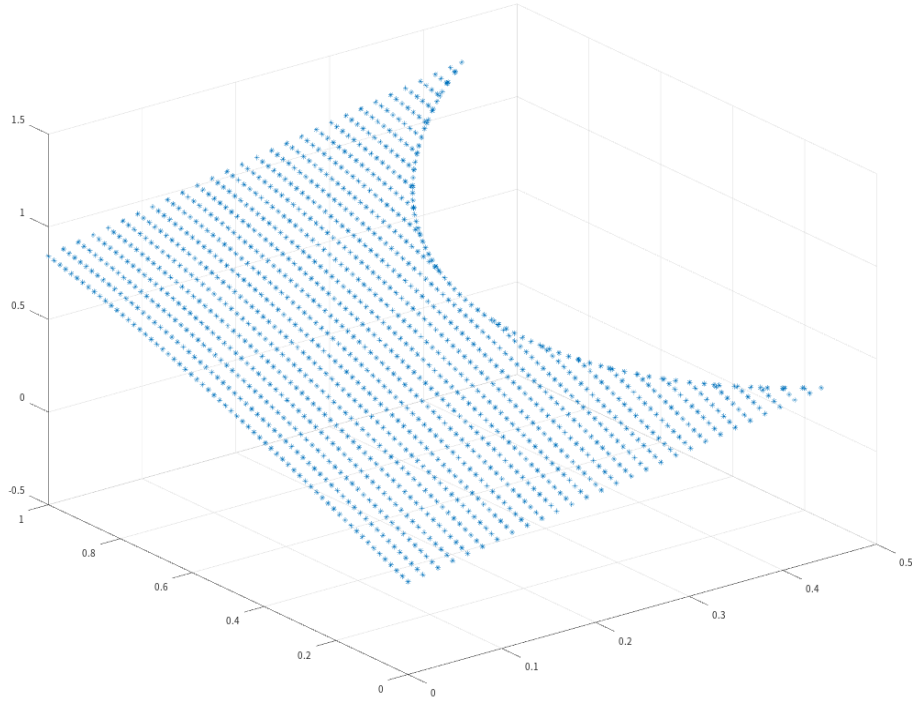
	regular domin			irregular domin		
n	1-norm	2-norm	∞ -norm	1-norm	2-norm	∞ -norm
8	0.00572595	0.00248577	0.00186976	0.000261611	0.000249722	0.000358033
16	0.00229841	0.000719216	0.000407668	0.000101533	6.76248e-05	9.38843e-05
32	0.00103217	0.000230862	9.54724e-05	4.20421e-05	2.05855e-05	2.32333e-05
64	0.000489496	7.78433e-05	2.31178e-05	1.90082e-05	6.71804e-06	5.74242e-06

对第三个边值条件,

	regular domin			irregular domin		
n	1-norm	2-norm	∞ -norm	1-norm	2-norm	∞ -norm
8	0.00585159	0.00253797	0.00190105	0.0227054	0.0128118	0.00977785
16	0.00235335	0.000735311	0.000414269	0.0131987	0.0062158	0.00588506
32	0.00105914	0.000236334	9.70077e-05	0.0109632	0.00394731	0.0030329
64	0.000502869	7.97495e-05	2.3489e-05	0.00956432	0.00253507	0.00155869

对前两个边值条件, ∞ -norm 基本呈 2 阶收敛. 对第三个边值条件, 不规则定义域上的误差的 ∞ -norm 呈 1 阶收敛速度.

绘制出在第二个边值条件及不规则定义域下, $n = 64$ 拟合出的函数图像如下:



2.3 The third function

测试的第三个函数是

$$u(x, y) = x^2 y$$

测试中不规则定义域中的圆选取为 $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = (\frac{2}{7})^2$.

对第一个边值条件,

	regular domin			irregular domin		
n	1-norm	2-norm	∞ -norm	1-norm	2-norm	∞ -norm
8	1.03468e-15	6.84845e-16	9.99201e-16	3.4703e-15	3.10723e-15	5.88418e-15
16	1.69762e-15	1.05133e-15	2.44249e-15	1.17399e-13	7.21967e-14	1.14742e-13
32	6.07156e-15	2.25898e-15	4.88498e-15	9.30995e-13	8.65391e-13	3.20033e-12
64	2.98187e-14	1.67381e-14	5.88418e-14	2.78576e-12	1.38599e-12	4.63907e-12

对第二个边值条件,

	regular domin			irregular domin		
n	1-norm	2-norm	∞ -norm	1-norm	2-norm	∞ -norm
8	5.15866e-16	2.37955e-16	3.33067e-16	1.40043e-13	1.25456e-13	2.60291e-13
16	1.21707e-14	3.63509e-15	2.33147e-15	6.78763e-12	6.74596e-12	2.22358e-11
32	9.18311e-15	2.65691e-15	2.10942e-15	4.57356e-11	5.94086e-11	2.90419e-10
64	7.32387e-14	1.13791e-14	3.55271e-15	1.90752e-09	2.02197e-09	1.37753e-08

对第三个边值条件,

	regular domin			irregular domin		
n	1-norm	2-norm	∞ -norm	1-norm	2-norm	∞ -norm
8	2.51201e-15	9.70023e-16	3.33067e-16	0.191359	0.0744244	0.0482799
16	1.60553e-14	4.60769e-15	2.33147e-15	0.103656	0.0307469	0.0149424
32	7.29843e-14	1.49317e-14	5.44009e-15	0.122812	0.0286453	0.0130624
64	3.35439e-14	6.74645e-15	4.21885e-15	0.106139	0.0181115	0.00602779

因为 $u(x, y) = x^2y$ 关于 x 是 2 次的, 关于 y 是 1 次的, 因此前两个边值条件以及第三个边值条件的规则定义域情况的计算都是准确的, 只有机器误差。而第三个边值条件的不规则定义域情况的误差呈 1 阶收敛。

绘制出在第二个边值条件及不规则定义域下, $n = 64$ 时拟合出的函数图像如下:

