微分方程数值解
2022 夏
张卓涵 3190101161

Project 2

1 Declaration

本次作业选择的边值类型是 Dirichlet 与 Neumann 混合，V-cycle 会执行二三十次才能达到预计的精度，如果是纯 Dirichlet 条件一般只需执行 6、7 次即可。考虑到为了不使作业文件显得过于冗杂，这里不再针对纯 Dirichlet 条件进行一套相似的实验和分析。

2 Assignment.A

笔者选择了三个不同的一元函数，分别对三个函数的 (b,c,d) 的所有不同组合做了测试。考虑篇幅限制，报告文档里只展示 restriction 算子为 full weighting，prolongation 算子为 linear 时的部分数值结果，完整数值结果见于 output 目录下的 OneDimGrid.txt 文件.

选取的边值条件为半 Neumann 半 Dirichlet.

2.1 1st function

第一个函数是

$$f(x) = \exp\{\sin(\pi x)\}$$

当 $n = 32$ 时，

	残差	与解析解误差	与离散解误差
FMG	0.68723	0.167923	0.165495
22 次 V-cycle	8.32581e-08		
23 次 V-cycle	3.57647e-08		
24 次 V-cycle	1.53634e-08		
25 次 V-cycle	6.59929e-09	0.00423999	1.60286e-09

当 $n = 64$ 时，

	残差	与解析解误差	与离散解误差
FMG	0.325315	0.0699889	0.0696978
23 次 V-cycle	8.54498e-08		
24 次 V-cycle	3.70082e-08		
25 次 V-cycle	1.6028e-08		
26 次 V-cycle	6.94126e-09	0.000894427	1.19759e-09

当 $n = 128$ 时，

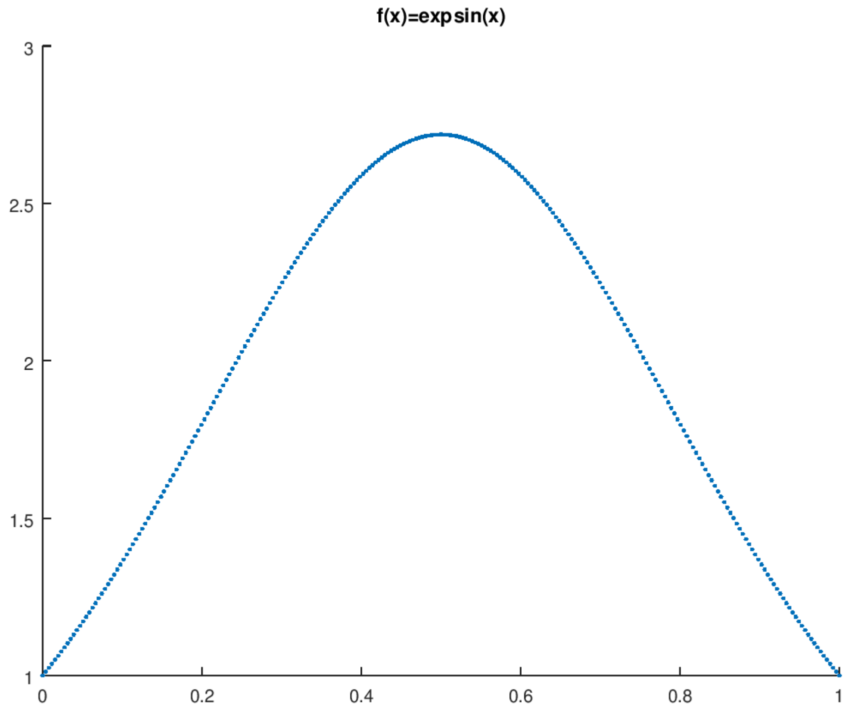
	残差	与解析解误差	与离散解误差
FMG	0.173425	0.0278183	0.0277827
24 次 V-cycle	8.29168e-08		
25 次 V-cycle	3.61615e-08		
26 次 V-cycle	1.5767e-08		
27 次 V-cycle	6.8685e-09	0.000204596	8.39315e-10

当 $n = 256$ 时，

	残差	与解析解误差	与离散解误差
FMG	0.0950385	0.010416	0.0104116
25 次 V-cycle	7.73434e-08		
26 次 V-cycle	3.39351e-08		
27 次 V-cycle	1.49012e-08		
28 次 V-cycle	6.54836e-09	4.88739e-05	5.62325e-10

可以看到，每进行一次 V-cycle，残差约减小为原先的 $\frac{1}{2}$.

绘制在 $n = 256$ 时求解出的函数图像为：



2.2 2nd function

第二个函数是:

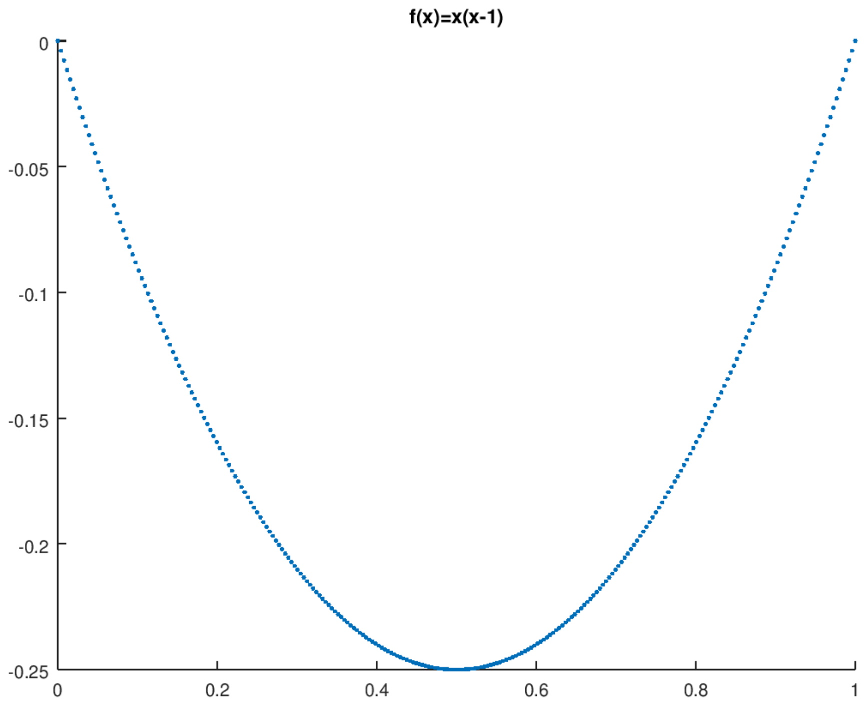
$$f(x) = x^2 - x$$

简便起见，仅展示 $n = 256$ 时的数值结果如下:

	残差	与解析解误差	与离散解误差
FMG	0.0493678	0.0011591	0.0011591
24 次 V-cycle	5.60557e-08		
25 次 V-cycle	2.45878e-08		
26 次 V-cycle	1.0785e-08		
27 次 V-cycle	4.73068e-09	4.07266e-10	4.07266e-10

可以看到，每进行一次 V-cycle，残差约减小为原先的 $\frac{1}{2}$.

绘制在 $n = 256$ 时求解出的函数图像为:



2.3 3rd function

第三个函数是:

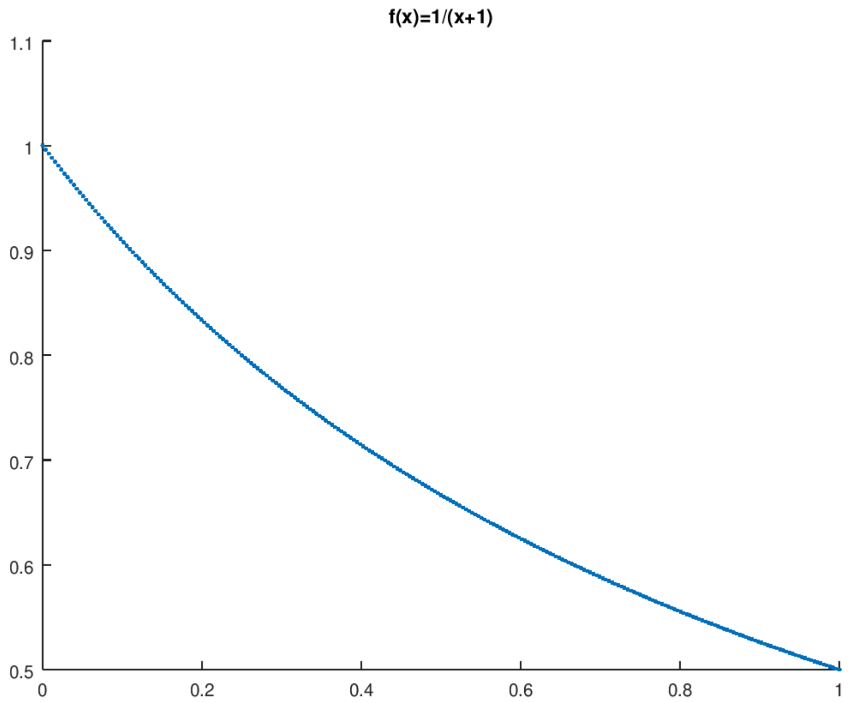
$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

简便起见，仅展示 $n=256$ 时的数值结果如下:

	残差	与解析解误差	与离散解误差
FMG	0.0439872	0.00116783	0.0012034
24 次 V-cycle	7.62302e-08		
25 次 V-cycle	3.3433e-08		
26 次 V-cycle	1.46611e-08		
27 次 V-cycle	6.43922e-09	3.55659e-05	5.53656e-10

可以看到，每进行一次 V-cycle，残差约减小为原先的 $\frac{1}{2}$.

绘制在 $n=256$ 时求解出的函数图像为:



2.4 convergence rate of error vector

通过./output/OneDimGrid.txt 中的函数 error_convergence() 的输出结果看到误差向量的收敛率与残差相近，即每进行一次 V-cycle，约减小一半.

2.5 Section 9.5.1 III

	$\epsilon = 10^{-8}$	$\epsilon = 10^{-9}$	$\epsilon = 10^{-10}$	$\epsilon = 10^{-11}$	$\epsilon = 10^{-12}$	$\epsilon = 10^{-13}$
V-cycle 次数	26	29	32	35	∞	∞

当 ϵ 下降至 10^{-12} 量级时，程序不再能达到预设的精度，这可能的原因是机器误差导致的.

3 Assignment.B

笔者选择了三个不同的二元函数，分别对三个函数的 (b,c,d) 的所有不同组合做了测试。考虑篇幅限制, 报告文档里只展示 restriction 算子为 full weighting, prolongation 算子为 linear 时的部分数值结果，完整数值结果见于 output 目录下的 TwoDimGrid.txt 文件.

选取的边值条件为左边界是 Neumann 半，其他三个边界是 Dirichlet.

考虑到对二维网格计算离散准确解误差从时间和空间上来说都极其耗费资源，于是实验中只对第一个函数计算了算子为 full weighting 和 linear 时，$n = 32, 64, 128$ 时的离散误差.

3.1 1st function

第一个函数是:

$$f(x,y)=e^{y+\sin(x)}$$

当 $n=32$ 时,

	残差	与解析解误差	与离散解误差
FMG	0.5156	0.00432243	0.00435407
22 次 V-cycle	1.11125e-07		
23 次 V-cycle	4.52073e-08		
24 次 V-cycle	1.83927e-08		
25 次 V-cycle	7.4815e-09	4.36528e-05	2.08002e-10

当 $n=64$ 时,

	残差	与解析解误差	与离散解误差
FMG	0.521522	0.00263346	0.00264354
26 次 V-cycle	8.80354e-08		
27 次 V-cycle	3.98431e-08		
28 次 V-cycle	1.80335e-08		
29 次 V-cycle	8.15999e-09	1.16245e-05	1.60224e-10

当 $n=128$ 时,

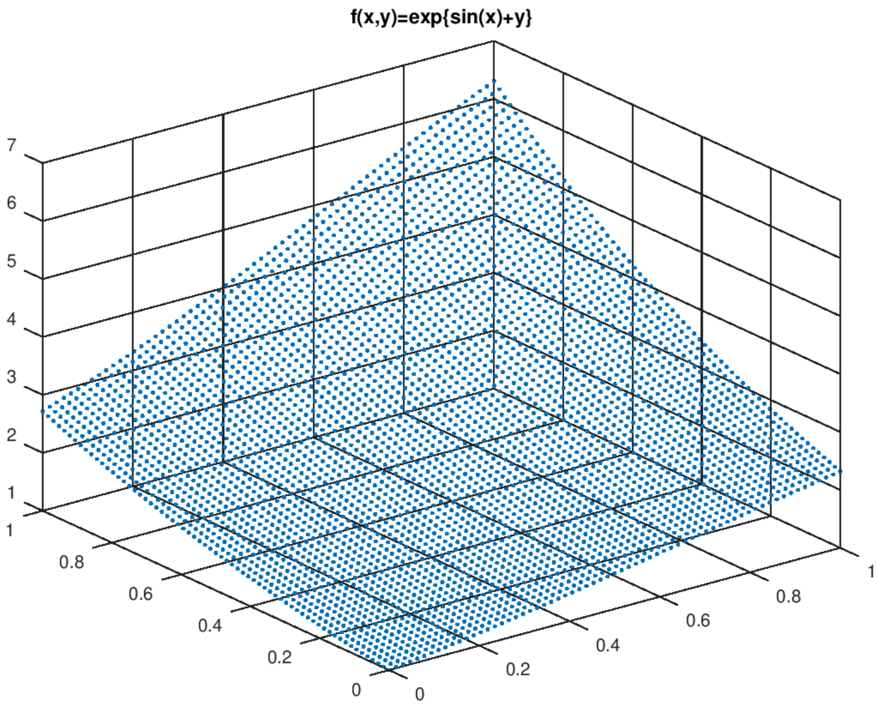
	残差	与解析解误差	与离散解误差
FMG	0.523524	0.00163054	0.00163332
30 次 V-cycle	6.17438e-08		
31 次 V-cycle	3.00788e-08		
32 次 V-cycle	1.46829e-08		
33 次 V-cycle	7.15954e-09	3.00383e-06	1.19028e-09

当 $n=256$ 时,

	残差	与解析解误差
FMG	0.524378	0.00102629
34 次 V-cycle	3.9814e-08	
35 次 V-cycle	2.05473e-08	
36 次 V-cycle	1.05356e-08	
37 次 V-cycle	5.47152e-09	7.63851e-07

可以看到，每进行一次 V-cycle，残差减小到原先的 $\frac{1}{2}$.

绘制出在 $n=64$ 时求解的函数图像为:



3.2 2nd function

第二个函数是:

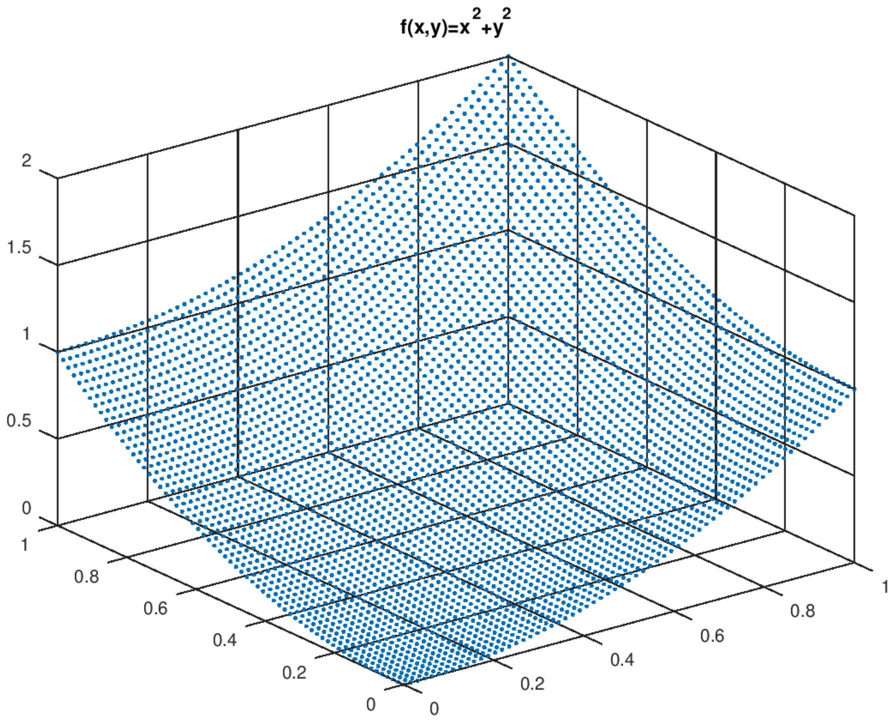
$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

简便起见，仅展示 $n = 256$ 时的数值结果：

	残差	与解析解误差
FMG	0.38627	0.0011954
26 次 V-cycle	6.07797e-08	
27 次 V-cycle	3.06209e-08	
28 次 V-cycle	1.54287e-08	
29 次 V-cycle	7.778e-09	3.80175e-11

可以看到，每进行一次 V-cycle，残差减小到原先的 $\frac{1}{2}$.

绘制出在 $n = 64$ 时求解的函数图像为：



3.3 3rd function

第三个函数是:

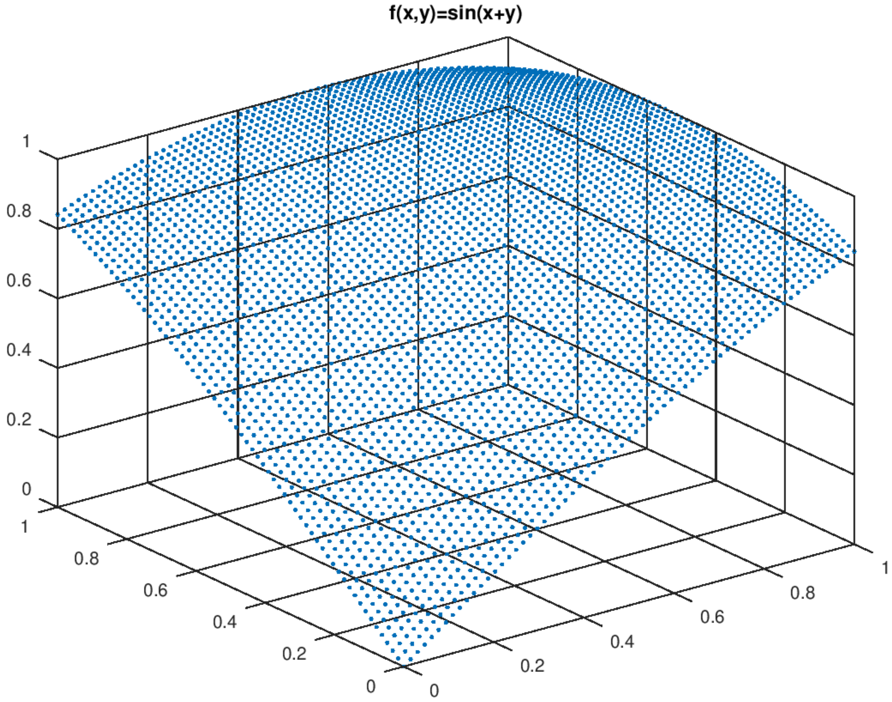
$$f(x,y) = sin(x+y)$$

简便起见，仅展示 $n = 256$ 时的数值结果:

	残差	与解析解误差
FMG	0.162152	0.000228387
33 次 V-cycle	3.881e-08	
34 次 V-cycle	1.99943e-08	
35 次 V-cycle	1.03028e-08	
36 次 V-cycle	5.28235e-09	1.82184e-06

可以看到，每进行一次 V-cycle，残差减小到原先的 $\frac{1}{2}$.

绘制出在 $n = 64$ 时求解的函数图像为:



3.4 convergence rate of error vector

通过./output/TwoDimGrid.txt 中的函数 error_convergence() 的输出结果看到误差向量的收敛率与残差近似，即每进行一次 V-cycle，约减小一半.

3.5 Section 9.5.1 III

	$\epsilon = 10^{-8}$	$\epsilon = 10^{-9}$	$\epsilon = 10^{-10}$	$\epsilon = 10^{-11}$	$\epsilon = 10^{-12}$	$\epsilon = 10^{-13}$
V-cycle 次数	29	32	35	∞	∞	∞

当 ϵ 下降至 10^{-11} 量级时，程序不再能达到预设的精度，这可能的原因是机器误差导致的.

3.6 CPU time

discrete_error() 函数用于计算与离散解的误差，相当于做了一次 LU 分解的直接求解，可以用来当作直接求解的用时。程序里将 $n = 128$ 时，对函数 $e^{y+\sin(x)}$ 的多重网格法求解和直接求解用时进行了对比。其中设定 $\epsilon = 10^{-8}$，使用 C++ 的 <ctime> 中的 clock() 函数计时.

	V-cycle	直接求解
用时	0.9456	274.898

可以看到，二者运行时间的差距非常显著.