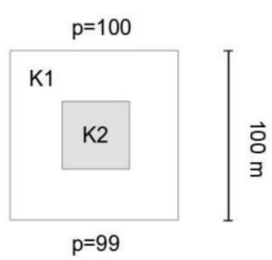
Modélisation et Simulation des écoulements de fluides dans la géosphère

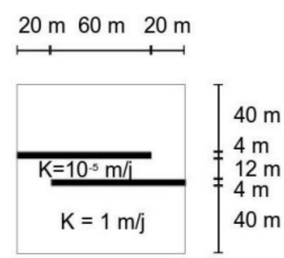
Projet : Écoulement dans un milieu hétérogène

ZHANG Minghe, FARID Diyae-Eddine

1 Introduction :

On se dispose de deux milieux poreux hétérogènes , le but de ce projet c'est de simuler l'écoulement d'un fluide dans ces milieux. Tout d'abord on va voir un petit exemple d'un milieu homogène et puis on va étudier deux cas de milieux hétérogènes dont leurs fomres comme indique le schéma :





Dans les deux dessins il s'agit d'un carré $L = 100m$ de coté, et de flux nul sur les bords latéraux et la perméabilité du carré est $K = 1m/d$.

Notre problème s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} -div(K\nabla p) = f(x,y) & dans \;\; \Omega =]0,L[\times]0,L[\\ p = \overline{p} & sur \;\; \Gamma_d \\ K\frac{\partial p}{\partial n} = \overline{g} & sur \;\; \Gamma_n \end{cases} \tag{1}$$

Avec Γ_d et Γ_n sont des cotés du carré.

Pour valider le programme de calcul, on utilise la solution

$$p(x,y) = (\frac{x}{L})^3 + (\frac{y}{L})^3$$

et avec K = diag(2,1).

2 Validation du code

Dans cette partie, on va tester notre code pour l'équation (1) avec la solution donnée. Pour valider le programme de calcul, on doit étudier le schéma.

2.1 Schéma

Dans ce projet, on utilise la méthode des volumes finis, on va discrétiser l'abscisse et l'ordonnée, on note:
$hx_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ et $hy_j = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}$ pas de maillage, et également

$$hx_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i, hy_{j+\frac{1}{2}} = y_{j+1} - y_j$$

avec x_i, $\;i \in [\![1,N]\!]$ les noeuds de l'abscisse, y_j, $j \in [\![1,N]\!]$, les noeuds de l'ordonnée, car le domaine qu'on étudier est un carré, donc on prend la même discrétisation.
Les autres notions de maillage on les a déjà vu en cours, donc on le précise pas trop ici.

D'après l'équation (1), on peut l'écrire avec la version discrete:

$$-\Big[\frac{1}{hx_i}\Big(K_{i+\frac{1}{2},j}\frac{P_{i+1,j}-P_{i,j}}{hx_{i+\frac{1}{2}}} - K_{i-\frac{1}{2},j}\frac{P_{i,j}-P_{i-1,j}}{hx_{i-\frac{1}{2}}}\Big) + \frac{1}{hy_j}\Big(K_{i,j+\frac{1}{2}}\frac{P_{i,j+1}-P_{i,j}}{hy_{j+\frac{1}{2}}} - K_{i,j-\frac{1}{2}}\frac{P_{i,j}-P_{i,j-1}}{hy_{j-\frac{1}{2}}}\Big)\Big] = f_{ij}$$

avec $K_{i+\frac{1}{2},j}$ la moyenne harmonique de $K_{i,j}$ et $K_{i+1,j}$, où

$$\frac{2}{K_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{1}{K_{i,j}} + \frac{1}{K_{i+1,j}}$$

De la même manière:

$$\frac{2}{K_{i,j+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{K_{i,j}} + \frac{1}{K_{i,j+1}}$$

Dans notre cas, le maillage est régulier, donc ici

$$x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i,\; y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}} = y_{j+1} - y_j$$

On note:

$$hx_i = hx_{i+\frac{1}{2}} = hx, \quad hy_i = hy_{i+\frac{1}{2}} = hx$$

Après la simplification, on aura les coefficients de chaque terme:
le coefficient de $P_{i,j-1}$:

$$-K_{i,j-\frac{1}{2}}\frac{hx}{hy}$$

le coefficient de $P_{i-1,j}$:

$$-K_{i-\frac{1}{2},j}\frac{hy}{hx}$$

le coefficient de $P_{i,j}$:

$$(\frac{hx}{hy}+\frac{hy}{hx})(K_{i,j-\frac{1}{2}}+K_{i-\frac{1}{2},j}+K_{i+\frac{1}{2},j}+K_{i,j+\frac{1}{2}})$$

le coefficient de $P_{i+1,j}$

$$-K_{i+\frac{1}{2},j}\frac{hy}{hx}$$

le coefficient de $P_{i,j+1}$

$$-K_{i,j+\frac{1}{2}}\frac{hx}{hy}$$

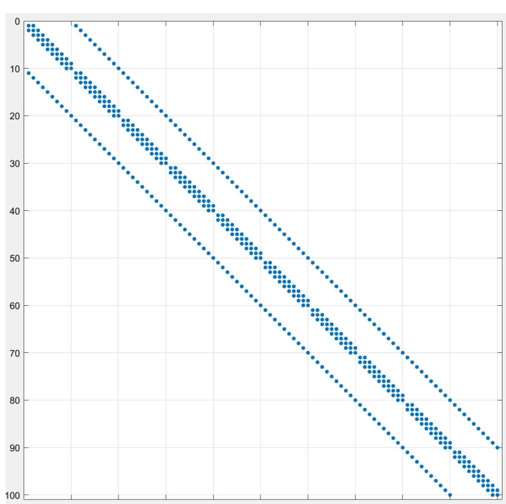
le second membre devient:

$$b(x_i,y_j)=hx*hy*f(x_i,y_j)$$

Avec ce schéma, on aura un système linéaire $AP=b$ à résoudre, on peut le réaliser par la programmation.

2.2 Condition aux bords

D'après la partie précédente, si on choisit la taille $N=10$, on a la matrice A est de la forme 100×100 comme suivante:



Pour coder les conditions aux bords, il faut d'abord trouver les noeuds sur les bords. On commence par le second membre f. on sait que $f \in M_{N\times N,1}$, donc on peut facilement savoir que de 1-ère élément à N-ème élément correspond aux valeurs sur le bord en bas, de $N \times (N-1)$-ème élément à N^2-ème élément correspond aux valeurs sur le bord en haut, les $(i-1)N+1$-ème éléments corresponds aux valeurs sur le bord à gauche, $i \in [\![1, N]\!]$, et les $iN-1$-ème éléments corresponds aux valeurs sue le bord à droite, $i \in [\![1, N]\!]$.

Donc de la même manière, on prend un exemple de $A \in M_{100,100}$, dans la matrice A, on ne voit que les 10 blocs sur la diagonale, le premier bloc correspond au bord en bas, le dernier bloc correspond au bord en haut, les premiers éléments du bloc corresponds aux noeuds du bord à gauche, et les derniers élément du bloc corresponds aux noeuds du bord à droite.

On peut conclure toutes les conditions aux bords :

Dirichlet en bas :

$$A(i,i) = A(i,i) + K_{i,\frac{1}{2}}\frac{hx}{hy}\ , \quad b(i) = b(i) + K_{i,\frac{1}{2}}\frac{hx}{hy}\bar{p}\ , \quad i \in [\![1, N]\!]$$

Neumann en bas :

$$b(i) = b(i) + hy * \bar{g}\ , \quad i \in [\![1, N]\!]$$

Dirichlet en haut :

$$A(i,i) = A(i,i) + K_{i,N+\frac{1}{2}}\frac{hx}{hy}\ , \quad b(i) = b(i) + K_{i,N+\frac{1}{2}}\frac{hx}{hy}\bar{p}\ , \quad i \in [\![N \times (N-1), N^2]\!]$$

Neumann en haut :

$$b(i) = b(i) + hy * \bar{g}\ , \quad i \in [\![N \times (N-1), N^2]\!]$$

Dirichlet à gauche :

$$A(N*i+1, N*i+1) = A(N*i+1, N*i+1) + K_{\frac{1}{2},j}\frac{hy}{hx}\ , \quad b(N*i+1) = b(N*i+1) + K_{\frac{1}{2},j}\frac{hy}{hx}\bar{p}\ , \quad i \in [\![0, N-1]\!]$$

Neumann à gauche :

$$b(N*i+1) = b(N*i+1) + hx * \bar{g}\ , \quad i \in [\![0, N-1]\!]$$

Dirichlet à droite :

$$A(N*i, N*i) = A(N*i, N*i) + K_{N+\frac{1}{2},j}\frac{hy}{hx}\ , \quad b(N*i) = b(N*i) + K_{N+\frac{1}{2},j}\frac{hy}{hx}\bar{p}\ , \quad i \in [\![1, N]\!]$$

Neumann à droite :

$$b(N*i) = b(N*i) + hx * \bar{g}\ , \quad i \in [\![1, N]\!]$$

2.3 validation

En utilisant la solution précédente :

$$p(x,y) = (\frac{x}{L})^3 + (\frac{y}{L})^3$$

donc avec les données, on peut facilement trouver

$$f = -(\frac{12}{L^3}x + \frac{6}{L^3}y)$$

Lors la condition Dirichlet :

$$\bar{p} = \begin{cases} (\frac{x}{L})^3 & \text{sur} \quad \Gamma_{bas} \\ (\frac{x}{L})^3 + 1 & \text{sur} \quad \Gamma_{haut} \\ (\frac{y}{L})^3 & \text{sur} \quad \Gamma_{gauche} \\ (\frac{x}{L})^3 + 1 & \text{sur} \quad \Gamma_{droite} \end{cases}$$

Lors la condition Neumann :

$$\bar{g} = \begin{cases} -\frac{3y^2}{L^3} & \text{sur} \quad \Gamma_{bas} \\ \frac{3y^2}{L^3} & \text{sur} \quad \Gamma_{haut} \\ -\frac{6x^2}{L^3} & \text{sur} \quad \Gamma_{gauche} \\ \frac{6x^2}{L^3} & \text{sur} \quad \Gamma_{droite} \end{cases}$$

En utilisant la fonction `TPFA` déjà donnée, et en ajoutant la condition limite, on choisit $N = 100$ et les conditions limites sont toutes Dirichlet, on obtient :

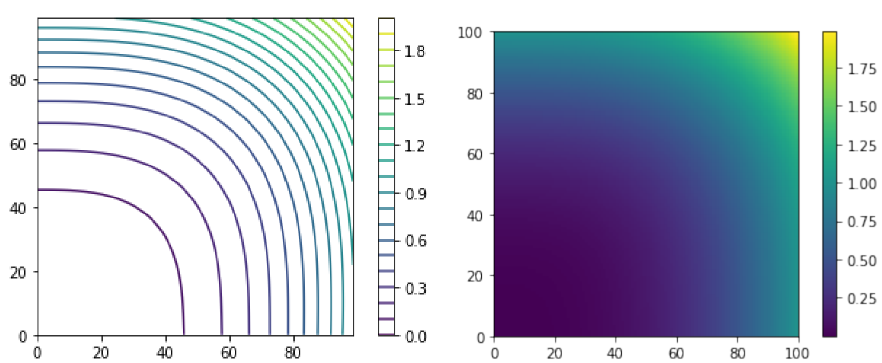


Figure 1: Solution approchée

En comparant avec la solution exacte :

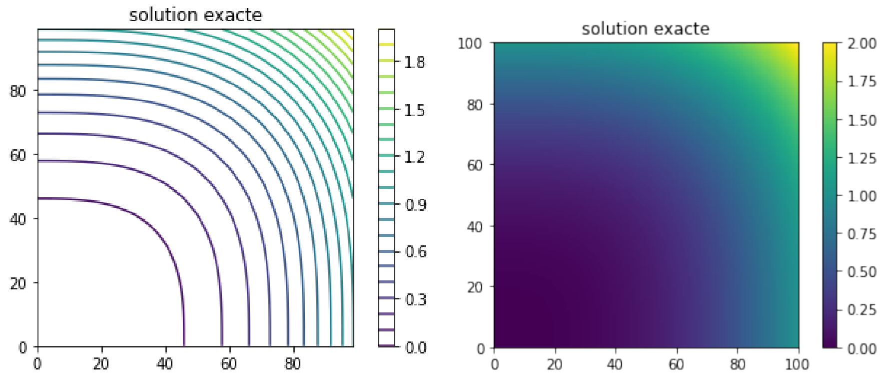
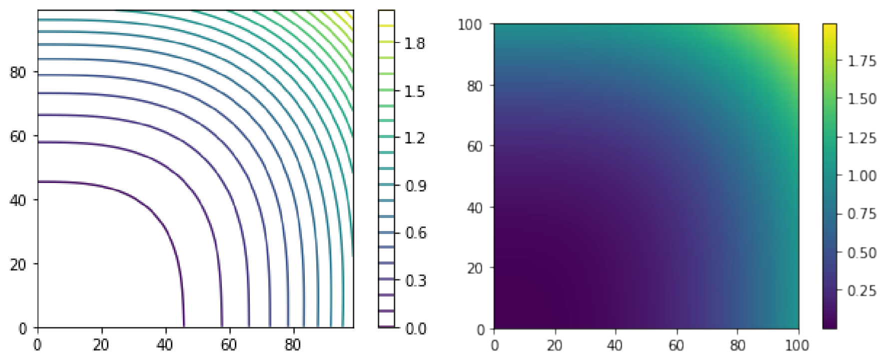
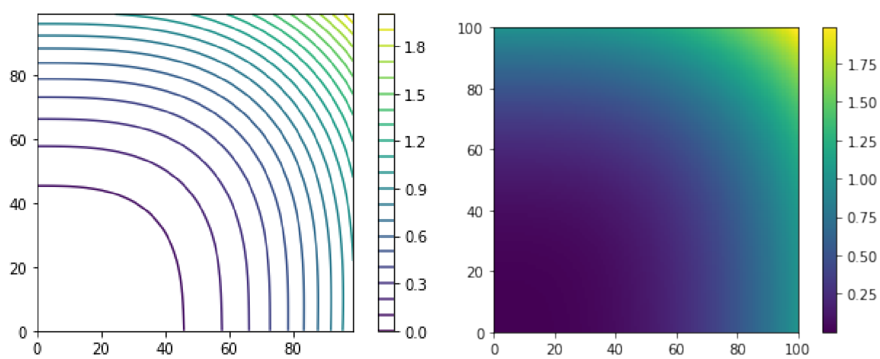


Figure 2: Solution exacte

Dans le cas Dirichlet en haut et en bas, Neumann à gauche et à droite, on obtient :



Dans le cas Dirichlet à gauche et à droite, Neumann en haut et en bas, on obtient :

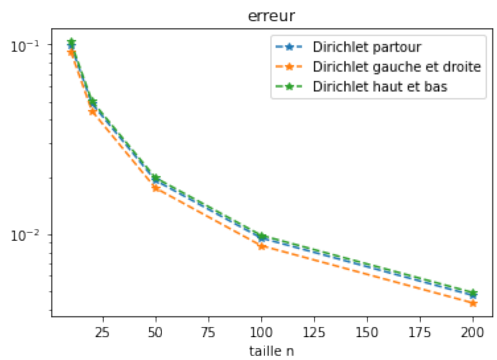


On peut voir qu'il y a pas beaucoup de différence entre les solutions approchées et la solution exacte.

maintenant on veut tracer l'erreur, avec la formule :

$$err = \frac{\|p - p_{ex}\|_2}{\|p_{ex}\|_2}$$

On obtient erreur $= 0.0098312$ dans le cas dirichlet partout, on peut voir que l'erreur tend vers 0. Si on prend les différentes tailles de maillage, par exemple $N = 10, 20, 50, 100, 200$, on obtient l'erreur comme ci-dessous :

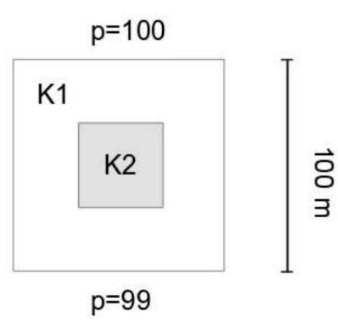


Il montre que l'erreur tend vers 0 quand on raffine le maillage.

Dans la suite, pour faciliter la programmation, on prend désormais $N = 100$.

3 Premier exemple

Le premier exemple est constitué d'un carré au centre de notre carré , ce petit carré est de 40m de coté (voir le figure en bas).



3.1 Homogène :

Dans un premier temps temps étudions le cas homogène, tel que la perméabilité du "petit carré" est égale à celle du domaine. On pose 3 type de condition aux limites :

1. Dirichlet en haut et en bas , avec une différence de pression 1 et Neumann à droite et à gauche

On suppose que les conditions aux limites seront charge imposée sur les deux bords horizontaux (p = 100 en y = 100m et p = 99m en y = 0m), et de flux nul sur les deux bords latéraux. Dans ce cas, on choisit notre solution exacte est :

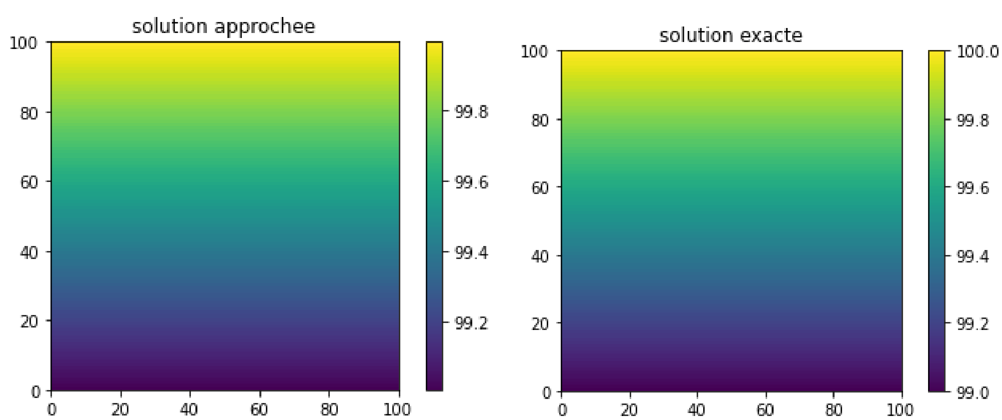
$$p(x, y) = \frac{1}{100}y + 99$$

les conditions aux limites sont :

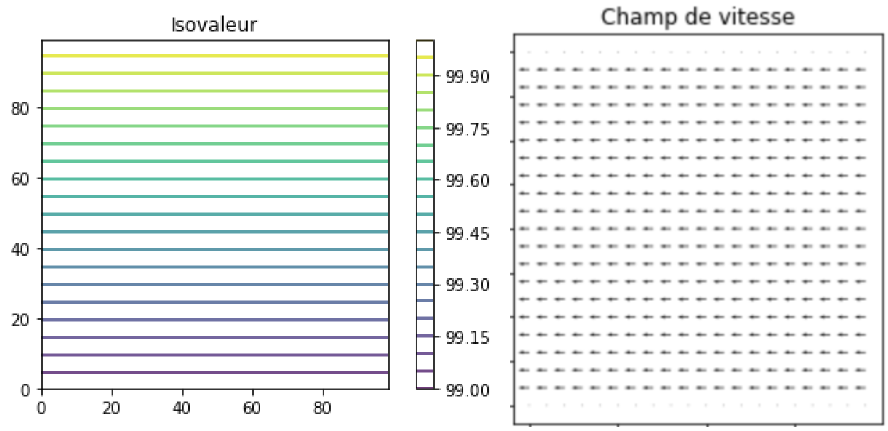
$$\bar{p} = \begin{cases} 100 & \text{sur} \quad \Gamma_{haut} \\ 99 & \text{sur} \quad \Gamma_{bas} \end{cases}$$

$$\bar{g} = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{gauche} \\ 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{droite} \end{cases}$$

seconde membre est $f(x, y) = 0$
On obtient la solution calculé par le programme et comparer avec solution exacte: Les



isovaleurs de la charge et le champ de vitesse sont :



2. Dirichlet à droite et à gauche , avec une différence de pression 1 et Neumann en haut et en bas :

Cette fois on choisit la solution exacte :

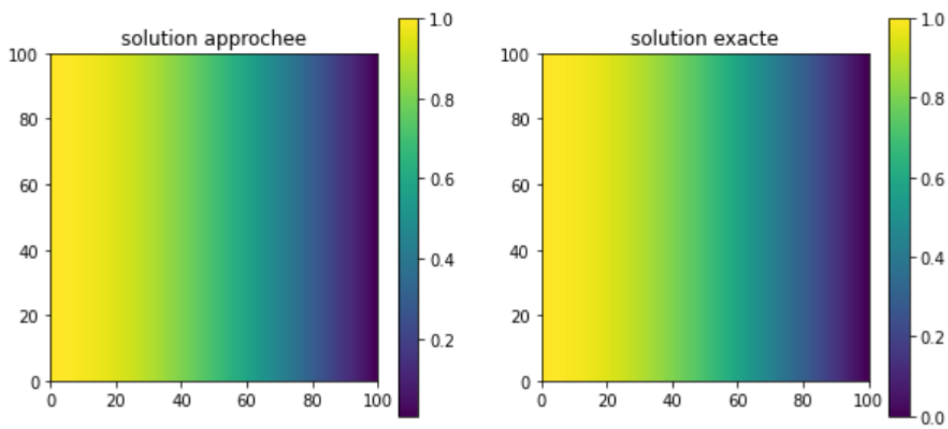
$$p(x,y) = \cos(0.005\pi x)$$

Comme ça on peut avoir

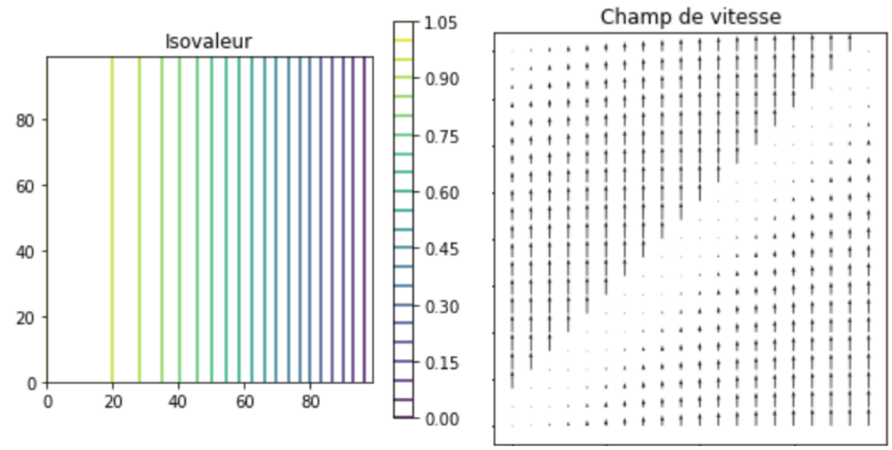
$$\bar{p} = \begin{cases} 1 & \text{sur} \quad \Gamma_{Gauche} \\ 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{Droite} \end{cases}$$

$$\bar{g} = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{Haut} \\ 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{Bas} \end{cases}$$

second membre $f(x,y) = 0.005^2\pi^2\cos(0.005\pi x)$
On obtient la solution calculé par le programme et comparer avec solution exacte :

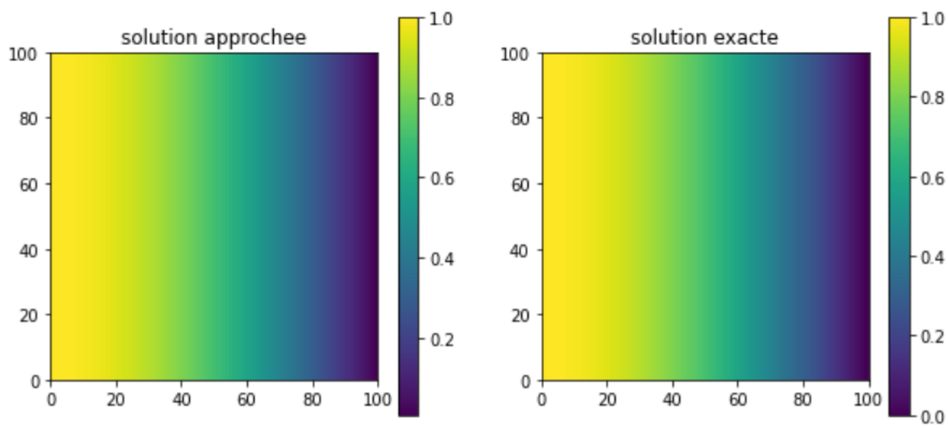


Les isovaleurs de la charge et le champ de vitesse sont :

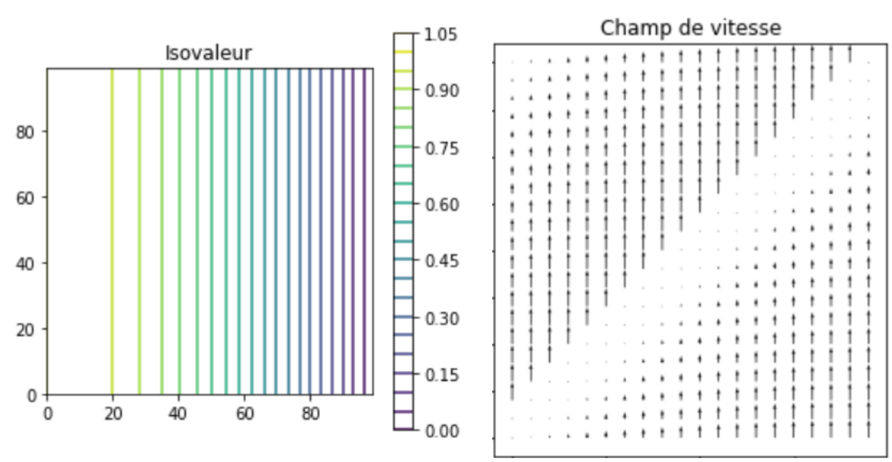


3. Dirichlet autour des coins en bas à gauche et en haut à droite et Neumann ailleurs :

On prend les données précédentes, on obtient la solution :



Les isovaleurs de la charge et le champ de vitesse sont :



On voit que les résultats sont pareils que cas précédent.

3.2 Hétérogène :

La perméabilité du petit carré cette fois vaut $K = 10^5 m/d$, puis $K = 10^{-5} m/d$, on va voir dans les deux cas avec les différents conditions aux bords :

Dans cette partie hétérogène, on considère la solution

$$p(x, y) = \exp(\frac{x}{L} + \frac{y}{L})$$

Donc on peut avoir

$$\bar{p} = \begin{cases} \exp(\frac{x}{L}) & \text{sur} \quad \Gamma_{bas} \\ \exp(\frac{x}{L} + 1) & \text{sur} \quad \Gamma_{haut} \\ \exp(\frac{y}{L}) & \text{sur} \quad \Gamma_{gauche} \\ \exp(\frac{y}{L} + 1) & \text{sur} \quad \Gamma_{droite} \end{cases}$$

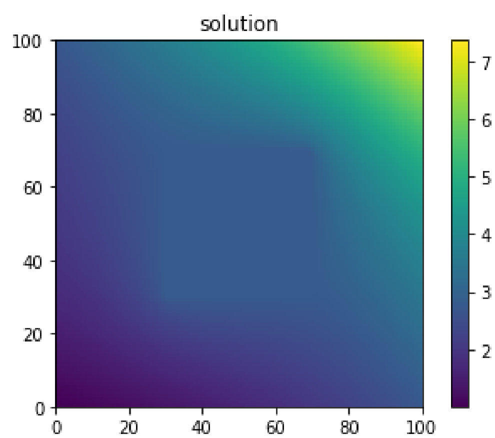
$$\bar{g} = \begin{cases} -\frac{1}{L}\exp(\frac{y}{L}) & \text{sur} \quad \Gamma_{bas} \\ \frac{1}{L}\exp(1 + \frac{y}{L}) & \text{sur} \quad \Gamma_{bas} \\ -\frac{1}{L}\exp(\frac{x}{L}) & \text{sur} \quad \Gamma_{bas} \\ \frac{1}{L}\exp(\frac{x}{L} + 1) & \text{sur} \quad \Gamma_{bas} \end{cases}$$

et le second membre $f = -\frac{2}{L^2}\exp(\frac{x}{L} + 1)$

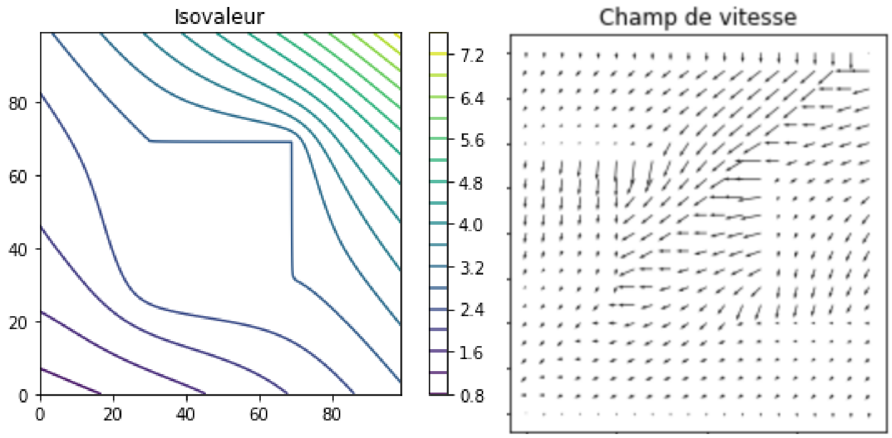
3.2.1 Cas : $K = 10^{-5}\, m/d$

Dirichlet en haut et en bas et Neumann à droite et à gauche :

avec ces données, on peut avoir la solution :

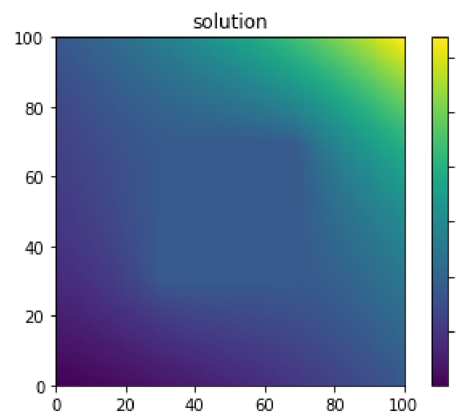


Les isovaleurs de la charge et le champ de vitesse sont :

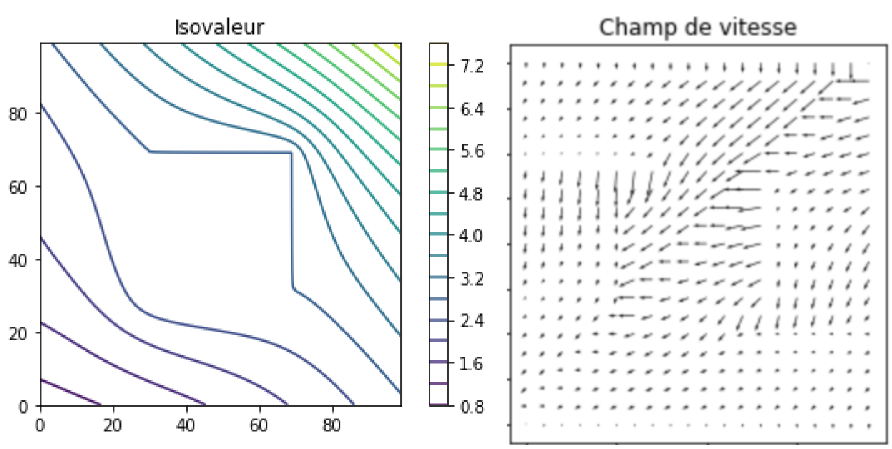


Dirichlet à droite et à gauche et Neumann en haut et en bas :

Avec les mêmes données, on obtient :

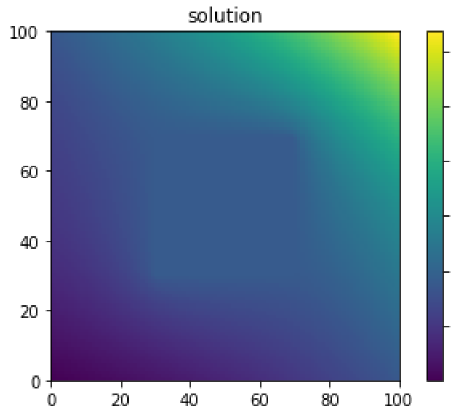


Les isovaleurs de la charge et le champ de vitesse sont :

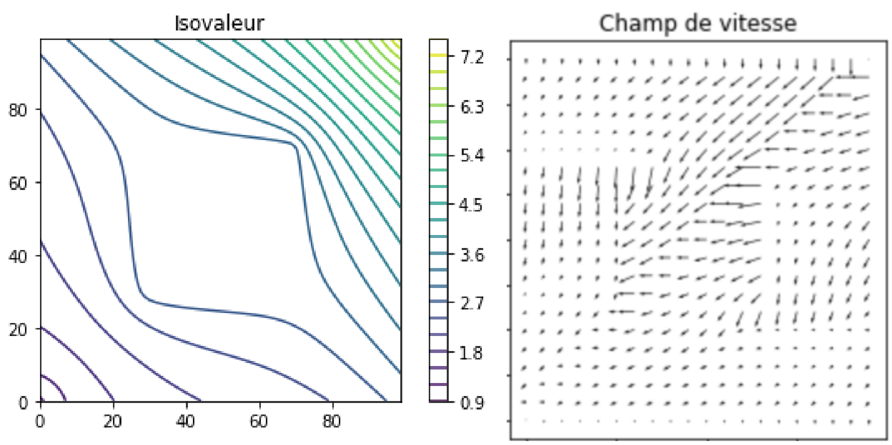


Dirichlet autour des coins en bas à gauche et en haut à droite et Neumann ailleurs :

Toujours les mêmes données :



Les isovaleurs de la charge et le champ de vitesse :



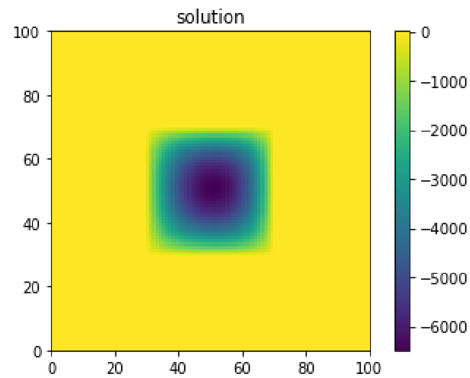
Conclusion :

Quand la perméabilité du petit carré est $K = 10^{-5}\, m/d$, ce petit carré est presque imperméable à l'eau (comme un roche), donc les fluides ne peuvent pas traverser le petit carré.

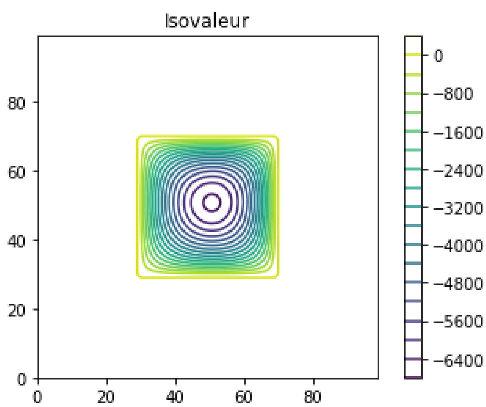
3.2.2 Cas : $K = 10^5\, m/d$

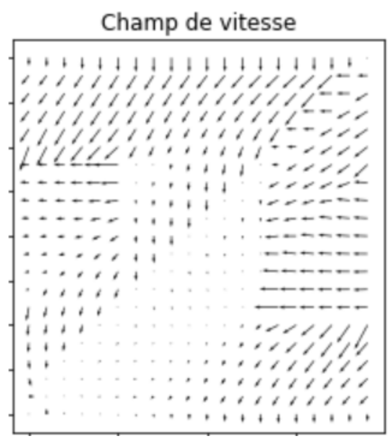
Dans cette partie, on prend la même fonction que la partie précédente.

Dirichlet en haut et en bas et Neumann à droite et à gauche :

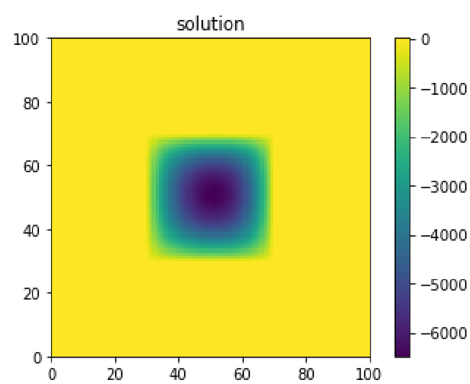


Les isovaleurs de la charge et le champ de vitesse :

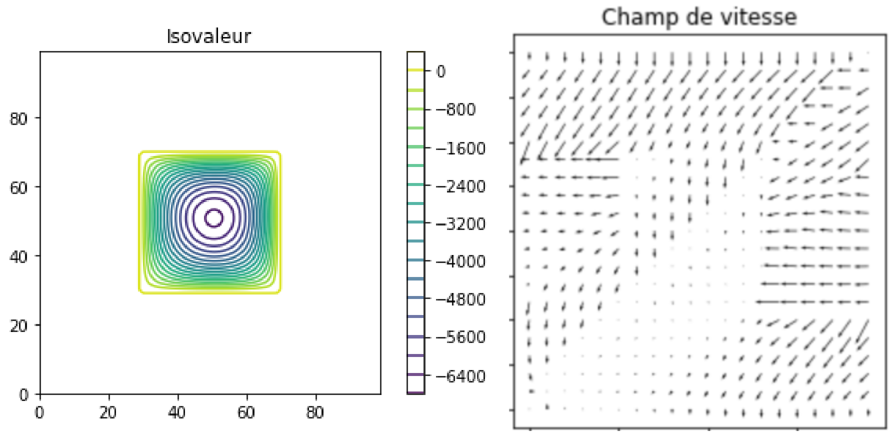




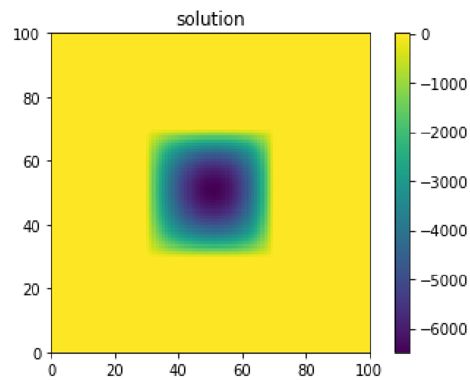
Dirichlet à droite et à gauche et Neumann en haut et en bas :



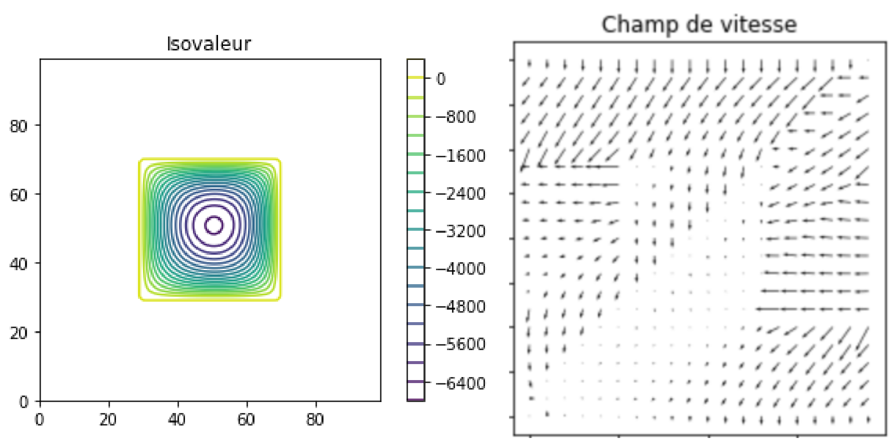
Les isovaleurs de la charge et le champ de vitesse :



Dirichlet autour des coins en bas à gauche et en haut à droite et Neumann ailleurs :



Les isovaleurs de la charge et le champ de vitesse :

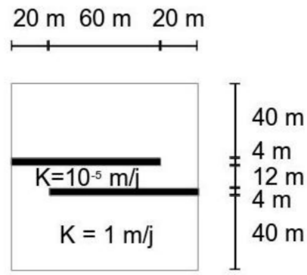


Conclusion :

Quand la perméabilité du petit carré est $K = 10^{-5}$ m/d, les fluides coulent super vite dans le petit carré, donc la valeur dedans est très grande.

4 Deuxième exemple

Dans ce cas là on va garder juste notre grand carré et on mets deux barrières imperméables de perméabilité $K = 10^{-5}\, m/d$ et on étudie ce problème dans les différentes conditions aux limites.



Dans cette partie, on le teste avec la même solution que la partie précédente, c'est à dire

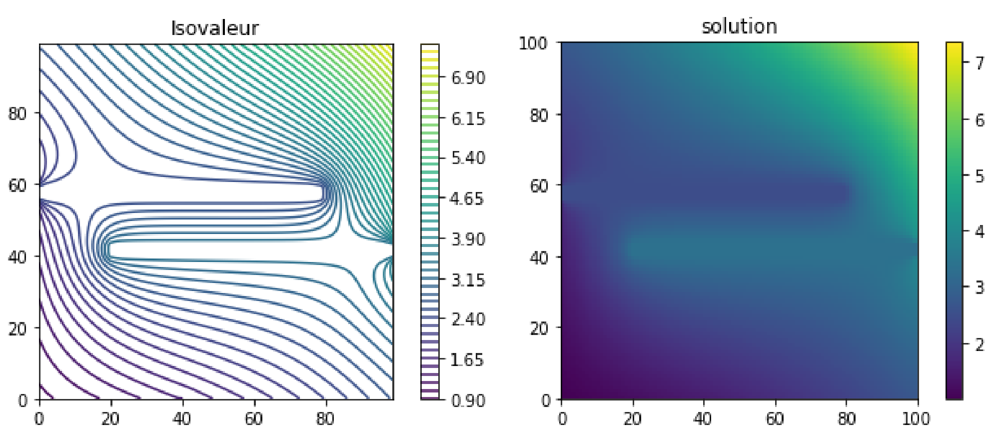
$$p(x, y) = \exp(\frac{x}{L} + \frac{y}{L})$$

et

$$\bar{p} = \begin{cases} \exp(\frac{x}{L}) & \text{sur} \quad \Gamma_{bas} \\ \exp(\frac{x}{L} + 1) & \text{sur} \quad \Gamma_{haut} \\ \exp(\frac{y}{L}) & \text{sur} \quad \Gamma_{gauche} \\ \exp(\frac{y}{L} + 1) & \text{sur} \quad \Gamma_{droite} \end{cases}$$

$$\bar{g} = \begin{cases} -\frac{1}{L}\exp(\frac{y}{L}) & \text{sur} \quad \Gamma_{bas} \\ \frac{1}{L}\exp(1 + \frac{y}{L}) & \text{sur} \quad \Gamma_{bas} \\ -\frac{1}{L}\exp(\frac{x}{L}) & \text{sur} \quad \Gamma_{bas} \\ \frac{1}{L}\exp(\frac{x}{L} + 1) & \text{sur} \quad \Gamma_{bas} \end{cases}$$

On obtient :



Maintenant on prend

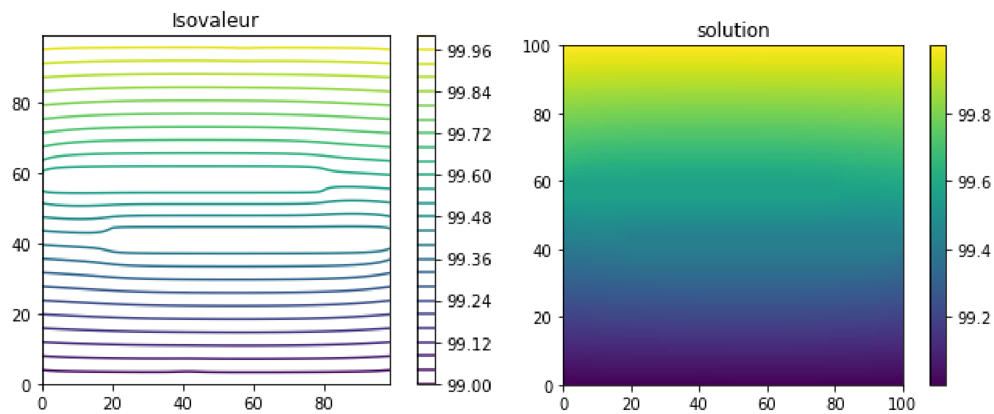
$$p(x,y) = \frac{1}{100}y + 99$$

les conditions aux limites sont :

$$\bar{p} = \begin{cases} 100 & \text{sur} \quad \Gamma_{haut} \\ 99 & \text{sur} \quad \Gamma_{bas} \end{cases}$$

$$\bar{g} = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{gauche} \\ 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{droite} \end{cases}$$

seconde membre est $f(x,y) = 0$
On obtient :



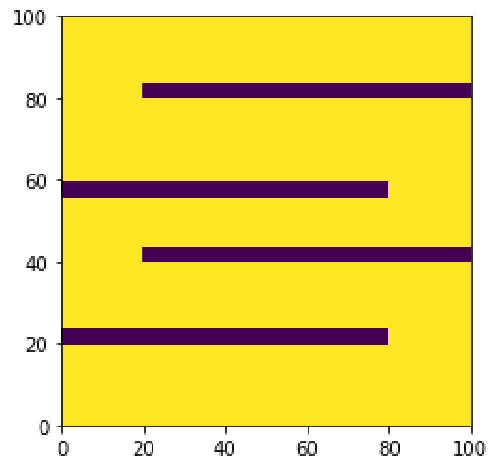
D'après la formule, la conductivité équivalente du milieu est

$$\bar{K} = \frac{L}{\frac{L_1}{K_1} + \frac{L_2}{K_2} + \frac{L_3}{K_3} + \frac{L_4}{K_4} + \frac{L_5}{K_5}}$$

Avec $L = 100, L_1 = 40, L_2 = 4, L_3 = 12, L_4 = 4, L_5 = 40$, et $K_1 = 1, K_2 = 10^{-5}, K_3 = 1, K_4 = 10^{-5}, K_5 = 1$
Donc $K \approx 1.25 \times 10^{-4}$

5 Troisième exemple

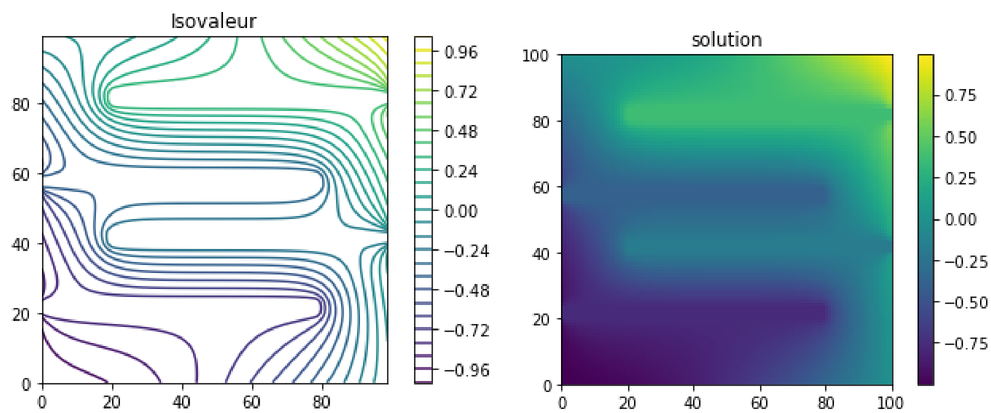
Dans cette exemple, on va changer une peu l'écartement des hétérogénéités du deuxième exemple, on va ajouter 2 bars, comme l'image ci-dessous :



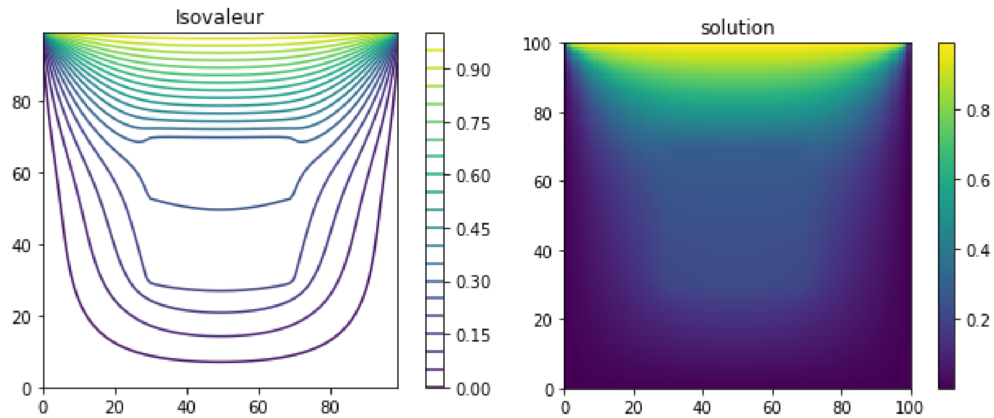
chaque barrière est de perméabilité $K = 10^{-5}\, m/d$, on prend la solution

$$p(x,y) = (\frac{x}{L})^2 + (\frac{y}{L})^2 - 1$$

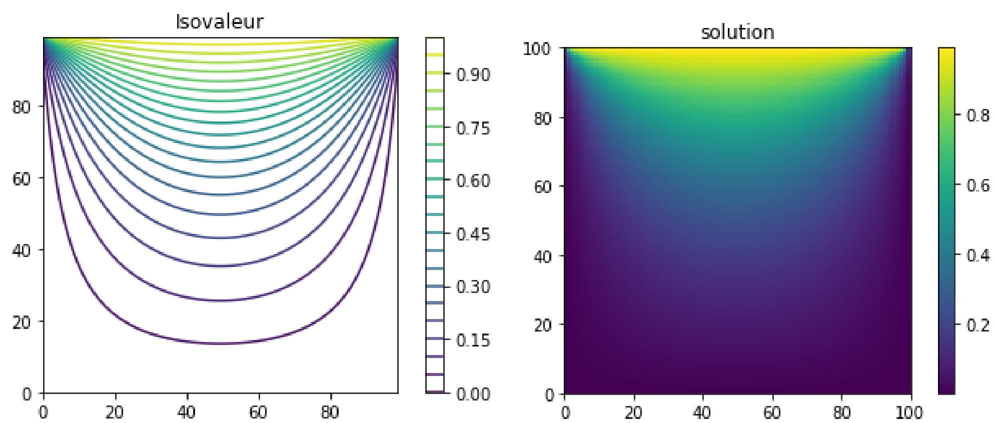
et les conditions aux limites sont toutes Dirichlet, le second membre est $f = \frac{-4}{L^2}$ on obtient :



Si maintenant on prend le milieu comme le premier exemple, avec le de perméabilité du petit carré est $K = 10$, et on prend pas la solution régulière, on prend les conditions aux limites sont Dirichlet, avec une différence de pression de 1 pour le bord en haut et en bas. On considère la valeur sur le bord en haut est 1, et 0 sur les autres bords, et le second membre $f = 0$, avec ces données, on obtient :



et on compare avec le cas homogène :



On peut voir que les fluides coulent lentement dans le petit carré, le petit carré est perméable avec perméabilité $K = 10m/d$.