# Modélisation et simulation des écoulements de fluides dans la géosphère

# Projet: Écoulement dans un milieu hétérogène

Michel Kern (Michel.Kern@inria.fr)

## Description

Le but du projet est de simuler l'écoulement dans des milieux poreux hétérogènes. Les deux

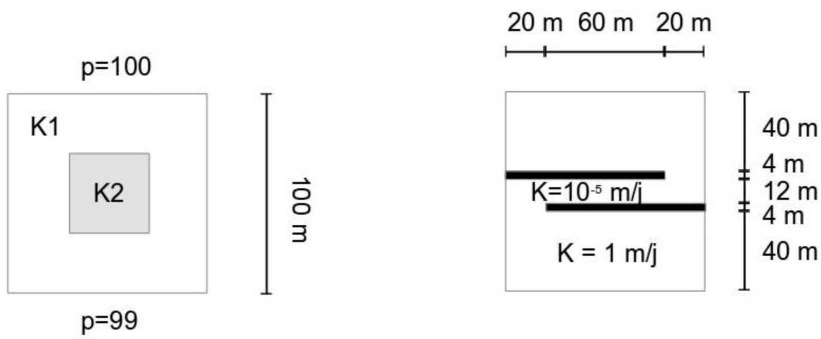


FIGURE 1 – Géométrie des modèles : à gauche, exemple 1, à droite : exemple 2

exemples visés sont représentés sur la figure 1. Dans les deux cas, il s'agit d'un carré de $L = 100\mathrm{m}$ de coté. Les conditions aux limites seront charge imposée sur les deux bords horizontaux ($H = 100\mathrm{m}$ en $y = 0$ et $H = 99\mathrm{m}$ en $y = 100\mathrm{m}$), et de flux nul sur les deux bords latéraux. La perméabilité du carré est $K = 1\mathrm{m/d}$ sauf lorsque cela est précisé ci-dessous.

**Validation** Le problème d'écoulement est de la forme

$$
\begin{aligned}
& -\operatorname{div}(K \operatorname{grad} p) = f(x,y) && \text{dans } \Omega = ]0,L[\times]0,L[, \\
& p = \bar{p} && \text{sur } \Gamma_d \\
& K\frac{\partial p}{\partial n} = \bar{g} && \text{sur } \Gamma_n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

où $\Gamma_d$ et $\Gamma_n$ sont des cotés du carré (une CL est définie sur un coté entier).

Pour valider le programme de calcul, on utilisera la solution $p(x,y) = (x/L)^3 + (y/L)^3$ avec $K = \mathrm{diag}(2,1)$.

**Exemple 1 : hétérogénéité carrée** Le premier exemple (représenté sur la partie gauche de la figure 1) contient un carré de 40 $\mathrm{m}$ de coté situé au centre du domaine. On considérera deux sous-cas

**Homogène** La perméabilité du « petit carré » est égale à celle du domaine.

**Hétérogène** La perméabilité du petit carré vaut $K = 10^{-5}\mathrm{m/d}$, puis $K = 10^{5}\mathrm{m/d}$.

On pourra également faire varier les conditions aux limites :

— Dirichlet en haut et en bas, avec une différence de pression de 1 (par exemple), Neumann à droite et à gauche ;

— Dirichlet à droite et à gauche, avec une différence de pression de 1 (par exemple), Neumann en haut et en bas ;

— Dirichlet autour des coins en bas à gauche et en haut à droite (sur quelques mailles), Neumann ailleurs.

**Exemple 2 : barrières imperméables** Le deuxième exemple (représenté sur la partie droite de la figure 1) contient deux barrières imperméables, de perméabilité $K = 10^{-5}\mathrm{m/d}$. Les conditions aux limites restent les mêmes.

Des fonctions en Matlab pour résoudre un problème sans conditions aux limites seront fournies. Elles sont inspirées du code disponible à `http://folk.ntnu.no/andreas/matlab-ressim` dans le répertoire `TPFA` (voir les explications dans la référence [1] : `https://folk.ntnu.no/andreas/papers/ResSimMatlab.pdf`).

# Travail demandé

— Programmer une fonction `addBC` pour ajouter une condition aux limites (Dirichlet ou Neumann) sur une partie spécifiée du bord ;

— Valider le code obtenu avec la solution exacte définie plus haut (calculer les fonctions $f$, $\bar{p}$ et $g$). Étudier numériquement la convergence de l'algorithme lorsqu'on raffine le maillage.

— Tester ce code pour l'exemple 1, d'abord dans le cas homogène, puis les deux autres sous-cas. Tracer les isovaleurs de la charge, et le champ de vitesse.

— Traiter le cas de l'exemple 2. Calculer la conductivité équivalente du milieu (celle qui donnerait le même flux à travers le milieu si celui-ci était homogène).

— Reprendre la question précédente en faisant varier les paramètres (valeur de la perméanbilité, écartement des hétérogénéités).

# Références

[1] J. E. Aarnes, T. Gimse and K.-A. Lie. *An introduction to the numerics of flow in porous media using Matlab*. In *Geometrical Modeling, Numerical Simulation, and Optimization : Industrial Mathematics at SINTEF*, Eds., G. Hasle, K.-A. Lie, and E. Quak, Springer Verlag, pp. 265-306, 2007.