LA DYNAMIQUE DES NUAGES DE POUSSIÈRE SANS PRESSION ET DES ONDES DELTA

Zhang Minghe

1 Introduction

Ce rapport consiste à expliquer la méthode numérique pour obtenir la solution approchée du problème présenté dans l'article et montrer les résultat obtenue par la programmation.

2 Problème et Schéma numérique

2.1 Problème

L'objective est de résoudre numériquement l'équation de la dynamique des nuages de poussière sans pression :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) = 0 \end{cases}$$

Dans notre cas, cette équation consiste à mesurer le delta choc quand 2 nuage de poussière finis se heurtent.

2.2 Condition initiale

D'après l'article, on a la condition initiale :

$$\rho(x,-1) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad -2 < x < -1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x < 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} , \qquad u(x,-1) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -2 < x < -1 \\ -1 & \text{si} \quad 1 < x < 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans notre cas $x \in [-3, 6]$ et $dx = \frac{6-(-3)}{1000}$.
Pour évider le problème de diviser par 0, les états de vide dans les données initiales ont été remplacés par une densité $\rho = 10^{-20}$

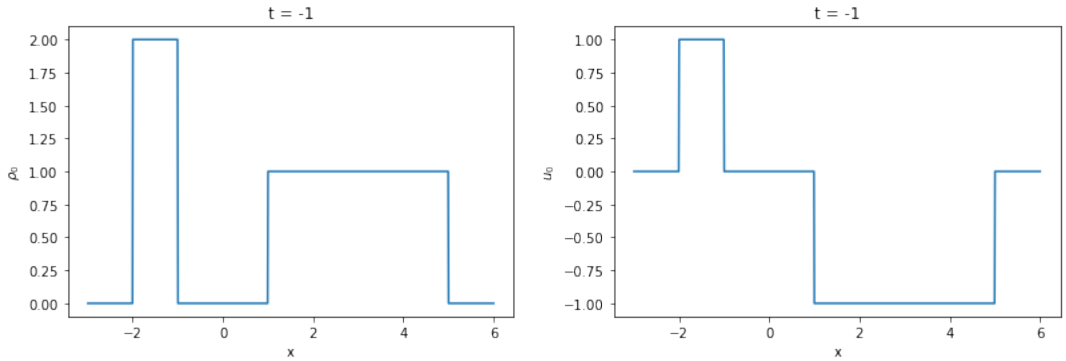

Figure 1: Condition initiale

2.3 Schéma Godunov

Pour l'équation

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$$

On peut le résoudre numériquement sous un schéma des volumes finis :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}})$$

Ici, la condition CFL est

$$\Delta t \leqslant \frac{\Delta x}{2max(|u_i^n|)}$$

Pour calculer de flux de l'interface, on choisi le flux de Godunov :

Si $u_{i-1} < 0 < u_i$alors la poussière s'éloigne de l'interface à $x_{i-\frac{1}{2}}$, laissant le vide entre, et ainsi

$$F_{i-\frac{1}{2}} = 0$$

Sinon, on programme

$$\hat{u}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\rho_{i-1}}u_{i-1} + \sqrt{\rho_i}u_i}{\sqrt{\rho_{i-1}} + \sqrt{\rho_i}}$$

et le flux :

$$F_{i-\frac{1}{2}} = \begin{cases} f(u_{i-1}^n) & \text{si} \quad \hat{u}_{i-\frac{1}{2}} > 0 \\ \frac{1}{2}(f(u_{i-1}^n) + f(u_i^n)) & \text{si} \quad \hat{u}_{i-\frac{1}{2}} = 0 \\ f(u_i^n) & \text{si} \quad \hat{u}_{i-\frac{1}{2}} < 0 \end{cases}$$

Pour simplifier le calcul du flux, on utilise le changement de variable

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}$$

le flux devient :

$$\begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \frac{u^2}{\rho} \end{pmatrix}$$

3 Solution exacte

Dans l'article, on peut savoir que les deux nuages entrent en collision au temps t = 0, le nuage de gauche est complètement accrété dans l'onde delta au temps T ≈ 1,21 et le nuage de droite est complètement accrété au temps $T_2 \approx 4,25$.

Donc, quand $t < 0$, les 2 nuages s'approche avec la vitesse $u_l = 1$ pour le nuage à gauche et $u_r = -1$ pour le nuage à droite, donc avec notre condition initiale:

$$\begin{cases} \rho(x,t) = 2 & \text{Si} \quad x \in [-2+(t+1)*1, -2+(t+1)*1+1] = [t-1, t] \\ \rho(x,t) = 1 & \text{Si} \quad x \in [1-(t+1)*1, 1-(t+1)*1+4] = [-t, 4-t] \\ \rho(x,t) = 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho(x,t)u(x,t) = 2 & \text{Si} \quad x \in [-2+(t+1)*1, -2+(t+1)*1+1] = [t-1, t] \\ \rho(x,t)u(x,t) = -1 & \text{Si} \quad x \in [1-(t+1)*1, 1-(t+1)*1+4] = [-t, 4-t] \\ \rho(x,t)u(x,t) = 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Quand $t > 0$, les nuages se heurtent, on peut utiliser la formule donnée dans la partie 2 de l'article :

$$\rho(x,t) = \rho_l + (\rho_r - \rho_l)H(x - X(t)) + D_1\delta(x - X(t))$$
$$\rho(x,t)u(x,t) = \rho_l u_l + (\rho_r u_r - \rho_l u_l)H(x - X(t)) + D_2\delta(x - X(t))$$

Ici, $H(x)$ est la fonction de Heaviside et

$$D_1 = [\rho_l(u_l - \hat{u}) + \rho_r(\hat{u} - u_r)]t$$

$$D_2 = [\rho_l u_l(u_l - \hat{u}) + \rho_r u_r(\hat{u} - u_r)]t$$

Le temps quand le nuage de gauche est complètement accrété dans l'onde delta est

$$T = \frac{w_l}{u_l - \hat{u}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}, \quad w_l \text{ est le longueur de nuage}$$

Dans ce cas $X(t) = \hat{u}t$

Donc quand $0 \leqslant t \leqslant \frac{\sqrt{2}+1}{2}$

$$\begin{cases} \rho(x,t) = 2 & \text{Si} \quad x \in [-1+t*1, X(t)[= [t-1, X(t)[\\ \rho(x,t) = 1 & \text{Si} \quad x \in]X(t), 4-t*1] =]X(t), 4-t] \\ \rho(x,t) = 2 + [2*(1-\hat{u}) + (\hat{u}+1)]t & \text{Si} \quad x = X(t) \\ \rho(x,t) = 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho(x,t)u(x,t) = 2 \qquad \text{Si} \quad x \in [-1+t*1, X(t)[= [t-1, X(t)[\\ \rho(x,t)u(x,t) = -1 \qquad \text{Si} \quad x \in]X(t), 4-t*1] =]X(t), 4-t] \\ \rho(x,t)u(x,t) = 2 + [2*(1-\hat{u}) - (\hat{u}+1)]t \qquad \text{Si} \quad x = X(t) \\ \rho(x,t)u(x,t) = 0 \qquad \text{Sinon} \end{cases}$$

Le delta choc a lieu quand $x = X(t)$, car en ce moment la fonction de Dirac a un valeur. Le temps quand le nuage de droite est complètement accrété est

$$T = \frac{w_r^2 + 2w_l w_r R + w_l^2 R}{2w_l R(u_l - u_r)} = \frac{34}{8} = 4.25, \quad \text{avec } R = \frac{\rho_l}{\rho_r}$$

Dans ce cas

$$X(t) = u_r t - w_l R + \sqrt{2w_l R(u_l - u_r)t + w_l^2(R^2 - R)}$$

et

$$D_1 = w_l \rho_l + (X(t) - u_r t)\rho_r$$

$$D_2 = w_l \rho_l u_l + (X(t) - u_r t)\rho_r u_r$$

Donc quand $\frac{\sqrt{2}+1}{2} \leqslant t \leqslant 4.25$

$$\begin{cases} \rho(x,t) = 1 \qquad \text{Si} \quad x \in]X(t), 4-t*1] =]X(t), 4-t] \\ \rho(x,t) = 4 + X(t) + t \qquad \text{Si} \quad x = X(t) \\ \rho(x,t) = 0 \qquad \text{Sinon} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho(x,t)u(x,t) = -1 \qquad \text{Si} \quad x \in]X(t), 4-t*1] =]X(t), 4-t] \\ \rho(x,t)u(x,t) = 4 - X(t) - t \qquad \text{Si} \quad x = X(t) \\ \rho(x,t)u(x,t) = 0 \qquad \text{Sinon} \end{cases}$$

Quand $t > T$, la solution consiste simplement à une fonction delta dans le vide qui a accumulé toute la matière, dans ce cas

$$D_1 = w_l \rho_l + w_r \rho_r$$

$$D_2 = w_l \rho_l u_l + w_r \rho_r u_r$$

et

$$X(t) = -\frac{1}{3}t + \frac{7}{6}$$

$X(t)$ est obtenue par l'équation

$$\begin{cases} X'(t) = \frac{D_2}{D_1} \\ X(4.25) = w_r + 4.25u_r \end{cases}$$

Donc quand $t > 4.25$

$$\begin{cases} \rho(x,t) = 8 & \text{Si} \quad x = X(t) \\ \rho(x,t) = 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho(x,t)u(x,t) = -2 & \text{Si} \quad x = X(t) \\ \rho(x,t)u(x,t) = 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

4 Résultat

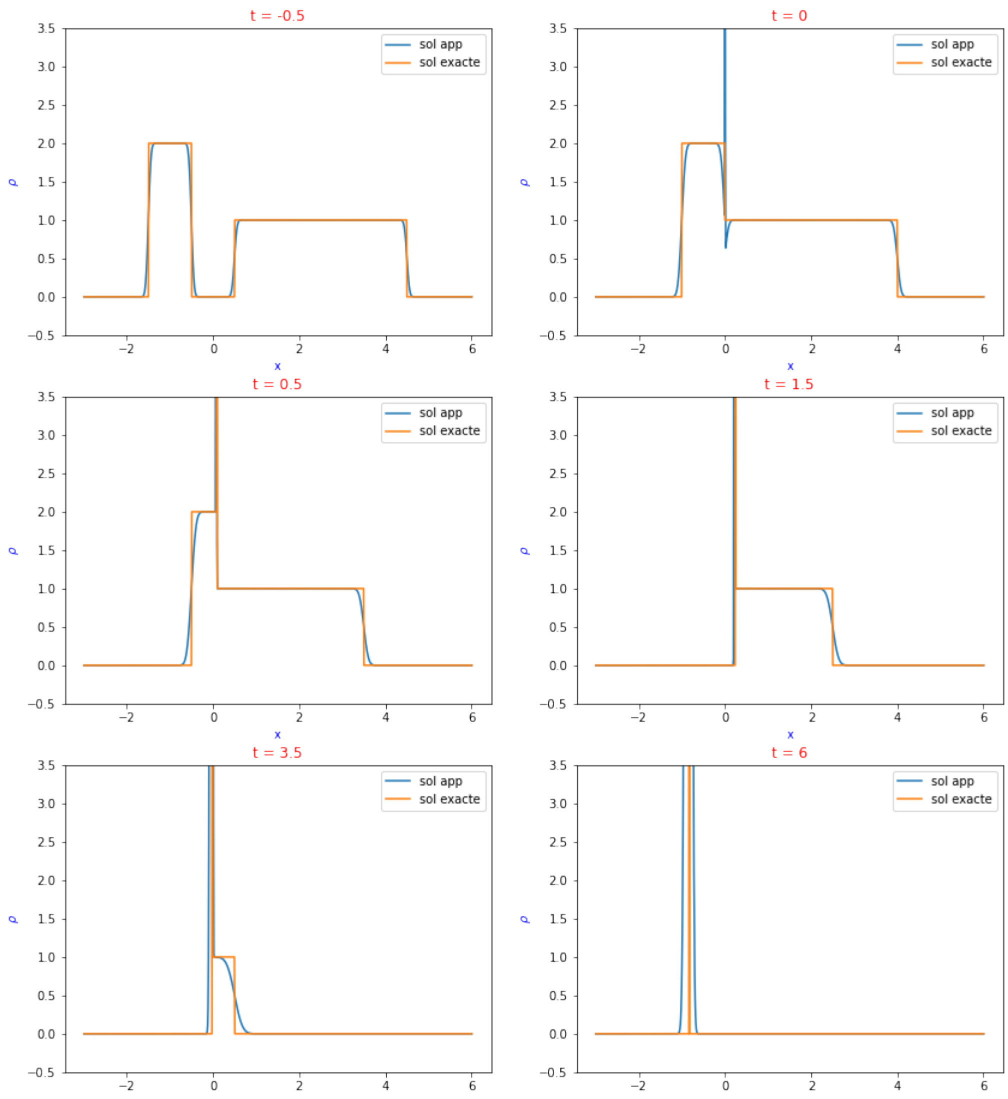

Figure 2: Solution du ρ

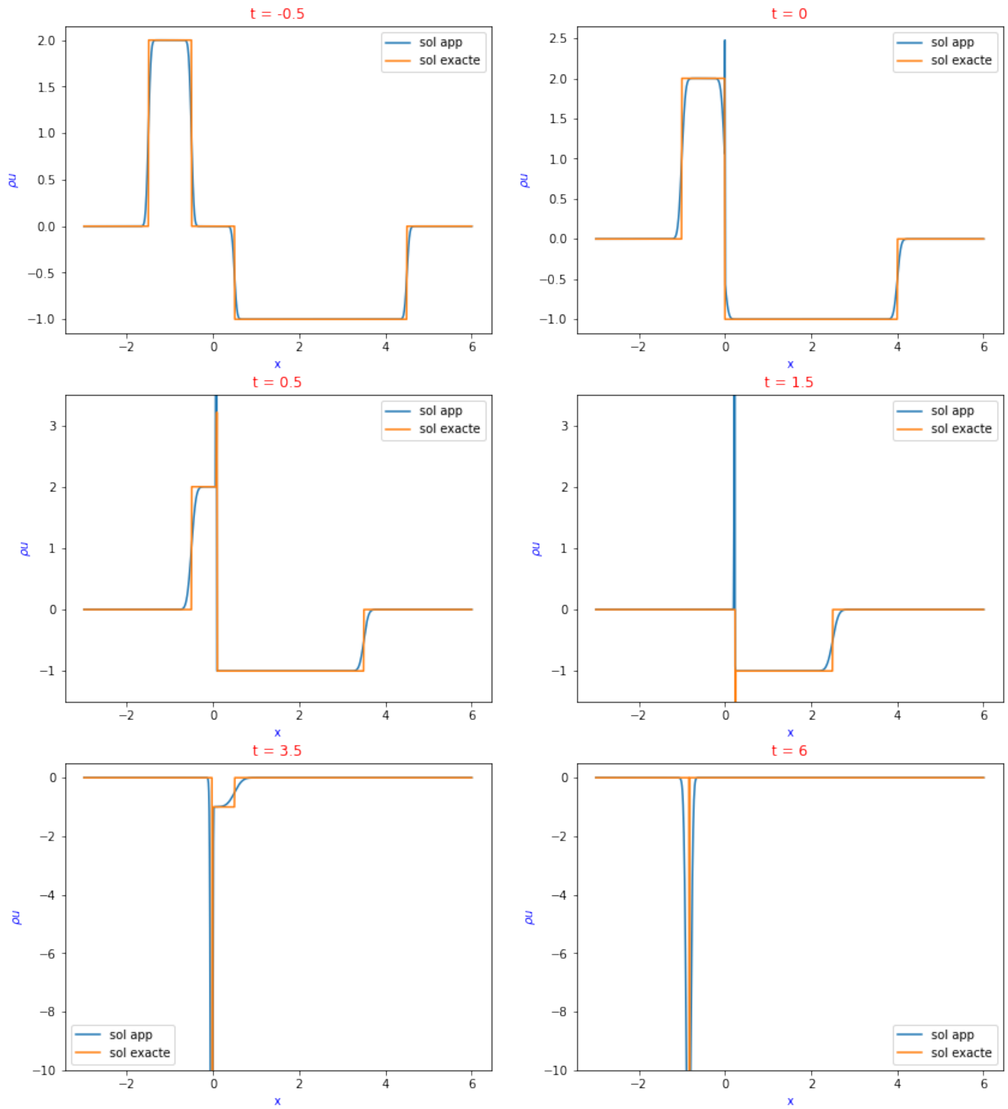

Figure 3: Solution du ρu

Toute les solutions obtenues par la programmation sont avec la fonction de Dirac :

$$\delta(x) = \begin{cases} 5 & si \;\; x = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

mais dans la partie précédent, le calcul de la solution exacte est avec la fonction de Dirac :

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

5 Conclusion

Les résultats du programme ont montré le processus quand les 2 nuages de poussière se heurtent, quand les 2 nuage n'ont pas rencontré, il se rapproche, quand les 2 nuages se heurtent, le delta choc apparaît, avec l'accrétion de nuage de gauche, le delta choc augment, quand le nuage de gauche est complètement accrété et le nuage de droite est en train d'être accréter, le delta choc diminue, et quand le nuage droite est complètement accrété, le delta choc se propage avec une vitesse constante.