2 矩阵

2020年7月18日 星期六 下午3:15

矩阵

- 概念：由 $m\times n$ 个数 a_{ij} 排成的 m 行 n 列的矩形表格 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
  称为一个 $m\times n$ 矩阵，简记为 A 或 $(a_{ij})_{m\times n}$．当 $m=n$ 时，称 A 为 n 阶方阵．[两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{s\times k}$，若 $m=s$，$n=k$ 则称 A 与 B 为同型矩阵
- 矩阵的基本运算
  - 相等：$A=(a_{ij})_{m\times n}=B=(b_{ij})_{s\times k} \Leftrightarrow m=s, n=k$ 且 $a_{ij}=b_{ij}$，即 A,B 是同型矩阵，且对应元素相等．
  - 加法：两个矩阵是同型矩阵时，可以相加，$C=A+B=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$
  - 数乘矩阵：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，k 为一个常数，则 $m\times n$ 矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 称为数 k 与矩阵 A 的数乘，记为 kA
  - 矩阵的乘法：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times s}$，那么 $m\times s$ 矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times s}$，其中
    $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ 称为 A 与 B 的乘积，记为 $C=AB$ ⇒ 行列式乘法公式：设 A,B 都是 n 阶
- 运算规律
  - 线性运算
    - ①交换律 $A+B=B+A$
    - ②结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$
    - ③分配律 $k(A+B)=kA+kB$，$(k+l)A=kA+lA$
    - ④数和矩阵相乘的结合律 $k(lA)=klA=l(kA)$
  - 矩阵乘法
    - ①结合律 $(A_{m\times s}B_{s\times r})C_{r\times n}=A_{m\times s}(B_{s\times r}C_{r\times n})$
    - ②分配律 $A_{m\times s}(B_{s\times n}+C_{s\times n})=A_{m\times s}B_{s\times n}+A_{m\times s}C_{s\times n}$
    - ③数乘与矩阵乘积的结合律 $(kA_{m\times s})B_{s\times n}=A_{m\times s}(kB_{s\times n})=k(A_{m\times s}B_{s\times n})$
- 矩阵的初等变换和初等矩阵
  - 初等变换
    - ① 一个非零常数乘矩阵的某一行(列) ⇒ 倍乘
    - ② 互换矩阵中某两行(列)的位置 ⇒ 互换
    - ③ 将矩阵的某一行(列)的 k 倍加到另一行(列) ⇒ 倍加．
  - 初等矩阵：单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵
    - ① $E_i(k)$ 表示 E 的第 i 行(列)乘以非零常数 k
    - ② E_{ij} 表示 E 的第 i 行(列)与第 j 行(列)互换
    - ③ $E_{ij}(k)$ 表示第 j 行的 k 倍加到第 i 行或第 i 列的 k 倍加到第 j 列．
  - 行阶梯矩阵
    - ① 如果矩阵中有零行(即这一行元素全是 0)，则零行在矩阵的底部
    - ② 每个非零行的主元(即该行最左边的第一个非零元)，它们的列指标随着行指标的递增而严格增加．

行最简矩阵：一个行阶梯矩阵，如果还满足，非零行的首元都是1，且首元所在的列的其他元素都是0，则称其为行最简矩阵。

初等矩阵的性质与重要公式
- ① 初等矩阵的转置仍是初等矩阵
- ② 初等矩阵都是可逆矩阵，且其逆矩阵仍是同一类型的初等矩阵
  - ∵ $|E_i(k)| = k \neq 0$，$|E_{ij}| = -1 \neq 0$，$|E_{ij}(k)| = 1 \neq 0$
  - ∴ $[E_i(k)]^{-1} = E_i(\frac{1}{k})$，$[E_{ij}]^{-1} = E_{ij}$，$[E_{ij}(k)]^{-1} = E_{ij}(-k)$
- ③ 若 A 是可逆矩阵，则 A 可以表示为有限个初等矩阵的乘积。
- ④ 对 n 阶矩阵 A 进行初等行变换，相当于 A 左乘相应的初等矩阵 (EA)
- ⑤ 对 n 阶矩阵 A 进行初等列变换，相当于 A 右乘相应的初等矩阵 (AE)

等价：如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B，则称矩阵 A 与矩阵 B 等价。$\Leftrightarrow PAQ = B$

矩阵的逆

定义：A,B为n阶方阵，E是n阶单位矩阵，若 $AB = BA = E$，则称 A 是可逆矩阵，并称 B 是 A 的逆矩阵，且逆矩阵是唯一的，记作 A^{-1}。

(非奇异矩阵)

n阶矩阵A可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
$\Leftrightarrow r(A) = n$
$\Leftrightarrow$ A的行(列)向量组线性无关
$\Leftrightarrow$ A与单位矩阵等价
$\Leftrightarrow$ 0不是A的特征值。

逆矩阵的性质 (A,B是同阶可逆矩阵)
- ① $(A^{-1})^{-1} = A$
- ② 若 $k \neq 0$，则 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
- ③ AB 也可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- ④ A^T 也可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- ⑤ $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

可逆的证明
- ① $|A| \neq 0$ 则A可逆 $\Leftarrow$ 充要条件
- ② $r(A) = n$ 则A可逆 $\Leftarrow$
- ③ 特征值均不为0 $\Leftarrow \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|$
- ④ 反证法。

求可逆矩阵
- ① 定义法：求一个矩阵B，使 $AB = E$，则A可逆，且 $A^{-1} = B$
- ② 分解法：将A分解成若干个可逆矩阵乘积，若 $A = BC$，则 $A^{-1} = (BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$
- ③ 分块法：若A,B均是可逆方阵，则 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$
- ④ 初等变换法：$(A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1})$

⑤ 伴随矩阵法：$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

矩阵的秩

定义：设A是m×n矩阵，若存在k阶子式不为零，而任意k+1阶子式全为零，则 $r(A)=k$，且 ⇒ 向量组的秩

若A是n×n矩阵，则 $r(A_{n\times n})=n \Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow$ A可逆

性质：初等变换不改变矩阵的秩 ⇒ 设A是m×n矩阵，P,Q分别是m阶n阶可逆矩阵，则

$$r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$$

若 $r(A)=1$ ⇒
- ① A可分解为一个列向量和行向量的乘积
- ② $\lambda=0$ 为其二重特征值，$\sum a_{ii}$ 为剩余特征值

秩的计算
- 初等变换法.
- 定义法.

公式
- ① $r(A) = r(A^T)$
- ② $r(A^TA) = r(A)$
- ③ 当 $k\neq 0$ 时，$r(kA) = r(A)$
- ④ $r(A+B) \leq r(A)+r(B)$，$r(A-B) \leq r(A)+r(B)$
- ⑤ $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- ⑥ 若A可逆，则 $r(AB) = r(B)$，$r(BA) = r(B)$ ⇐ 初等变换不改变矩阵的秩
- ⑦ 若A是m×n矩阵，B是n×s矩阵，$AB=0$，则 $r(A)+r(B) \leq n$ ⇒ $AX=0$ ⇒ $r(X) \leq n-r$
  ⇒ $r(A)+r(B) \leq r(A)+n-r$
- ⑧ $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$
- ⑨ 若 $A\sim B$，则 $r(A)=r(B)$，$r(A+kE) = r(B+kE)$
- ⑩ $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$

伴随矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

⇒ $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ ⇒ $A^* = |A|A^{-1}$ ⇒ $AA^* = |A|E$

(对于2阶矩阵，主对角线元素互换，副对角线元素变号即得伴随矩阵).

公式
- ① $AA^* = A^*A = |A|E$
- ② $A^* = |A|A^{-1}$ ⇒ $|A^*| = |A|^{n-1}$
- ③ $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A = (A^{-1})^*$

④ $(A^*)^T=(A^T)^*$，$(kA)^*=k^{n-1}A^*$，$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

特殊矩阵

转置矩阵
- 定义：把矩阵A的行换成同序数的列得到A的转置矩阵A^T
- 公式：$(A^T)^T=A$；$(A+B)^T=A^T+B^T$；$(kA)^T=kA^T$；$(AB)^T=B^TA^T$；$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

对称矩阵：$A^T=A \Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}$（对称矩阵的逆矩阵仍是对称矩阵

反对称矩阵：$A^T=-A \Leftrightarrow a_{ii}=0$，$a_{ij}=-a_{ji}$

正交矩阵：$AA^T=A^TA=E \Leftrightarrow A^{-1}=A^T$ $\Rightarrow |AA^T|=|E|=|A|^2=1$，正交矩阵的行(列)向量长度为1，且两两正交.

对角矩阵：$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & & \\ & a_2b_2 & \\ & & a_3b_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Lambda_1\Lambda_2=\Lambda_2\Lambda_1$，$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{pmatrix}$

二轮总结：

关于换位
- ① $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$
- ② $|A^{-1}|=|A|^{-1}$
- ③ $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$
- ④ $(A^*)^T=(A^T)^*$

矩阵的三大关系

矩阵等价
- 定义：设A,B为同型矩阵，若A经过有限次初等变换化为B，则称A与B等价，记为$A\cong B$.
- 判别：A,B为同型矩阵，则A与B等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B) \Leftrightarrow PAQ=B$

矩阵相似
- 定义：设A,B为n阶矩阵，若存在可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=B$，则称A与B相似，记为$A\sim B$
- 判别：设A,B为n阶矩阵，若A,B的特征值相同且A,B都可对
  则A与B相似

矩阵合同
- 定义：设A,B为n阶实对称矩阵，若存在可逆矩阵P，使得，$P^TAP=B$，称A与B合同，记为$A\simeq B$
- 判别：设A,B为实对称矩阵，则$A\simeq B \Leftrightarrow$ A,B的正、负惯