4 随机变量的数字特征

2020年7月31日 星期五 下午7:27

- 随机变量的数字特征
  - 一维随机变量的数字特征
    - 数学期望
      - 随机变量X的数学期望
        - 离散型随机变量X的数学期望：设随机变量X的概率分布为 $P\{X=$
          如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称
          记作 $E(X)$ 或 EX，即 $EX=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$
        - 连续型随机变量X的数学期望：设随机变量X的概率密度为
          此积分为随机变量X的数学
      - 随机变量X的函数 $Y=g(X)$ 的数学期望
        - ①离散型：设随机变量X的概率分布为 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$
          如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则随机变量 $Y=g(X)$ 的
          $$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k.$$
        - ②连续型：设随机变量X的概率密度为 $f(x)$，如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x$
          $$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x$$
      - 性质
        - ① 对任意常数 a_i 和随机变量 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 有
          $$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i EX_i \Rightarrow E(C)=C\ (C为常数),\ E(aX+C)=aE(X)+C,\ E$$
        - ② 设X,Y相互独立，则
          $$E(XY)=E(X)\cdot E(Y),\quad E[g_1(X)\cdot g_2(Y)]=E[g_1(X)]\cdot E[g_2(Y)]$$
          一般地，设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则
          $$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)=\prod_{i=1}^{n} E(X_i),\quad E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right]=\prod_{i=1}^{n} E[g_i(X_i)]$$
    - 随机变量的方差、标准差和矩
      - 方差与标准差
        - 概念：设X是随机变量，如果 $E[(X-E(X))^2]$ 存在，则称 $E[(X-EX$
          记为 $D(X)$，即 $D(X)=E[(X-EX)^2]=E(X^2)-(EX)^2$
          称 $\sqrt{DX}$ 为X的标准差或均方差，记为 $\sigma(X)$，称随机变量 $X^*=\frac{X}{}$
        - 性质
          - ①、$D(X)\geq 0$，$E(X^2)=D(X)+(EX)^2\geq (EX)^2$
          - ②、$D(C)=0$，C为常数
          - ③、$D(aX+b)=a^2D(X)$
          - ④、X和Y独立 $\Rightarrow$ X,Y不相关 $\Leftrightarrow D(aX\pm bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)$
          - ⑤、$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$.
      - 矩
        - 设X,Y是两个随机变量：
        - 原点矩：若 $E(X^k)$，$k=1,2,\cdots$，存在，则称之为X的k阶原点矩，简称为k阶矩.
        - 中心矩：若 $E\{[X-E(X)]^k\}$，$k=1,2,\cdots$，存在，则称之为X的k阶中心矩.
        - 混合矩：若 $E(X^kY^l)$，$k,l=1,2,\cdots$，存在，则称之为X和Y的k+l阶混合矩
        - 混合中心矩：若 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$，$k,l=1,2,\cdots$ 存在则称之为
          X和Y的k+l阶混合中心矩.

二维随机变量的数字特征

随机变量 (X,Y) 的函数 $Z=g(X,Y)$ 的数学期望

① 离散型：设随机变量 (X,Y) 的概率分布为 $P\{X=x_i, Y=y_j\} = p_{ij}$，$i,j=1,2,\ldots$，如果级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则随机变量 $Z=g(X,Y)$ ……

$$E(Z) = E[g(X,Y)] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$$

② 连续型：设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f$ …… $Z=g(X,Y)$ 的数学期望为

$$E(Z) = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g \ldots$$

协方差和相关系数

概念

- 协方差：对于随机变量 X 和 Y，如果 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 存在则称之为 X 和 Y 协方差 ……

$$Cov(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- 相关系数：对于随机变量 X 和 Y，如果 $D(X)D(Y)\neq 0$，则称 $\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 为 X 和 Y 和相关系数 ……

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \Rightarrow \text{如果} D(X)D(Y)=0\text{，则 } \rho_{XY}=0.$$

- 不相关：如果随机变量 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0$，则称 X 和 Y 不相关

公式和性质

协方差的公式和性质

公式
- ① $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$；
- ② $D(X\pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2Cov(X,Y)$；

性质
- ① $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$；
- ② $Cov(aX,bY) = abCov(X,Y)$，其中 a,b 是常数；
- ③ $Cov(X_1+X_2,Y) = Cov(X_1,Y) + Cov(X_2,Y)$；

相关系数性质
- ① $|\rho_{XY}| \le 1$；
- ② $|\rho_{XY}|=1$ 的充分必要条件是存在常数 a 和 b，其中 $a\neq 0$，使得 $P\{Y=aX+b\}=1$

独立与不相关
- ① 二维正态随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho_{XY})$：$X$ 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow \rho=0 \Leftrightarrow$ X 和 Y 不相关
- ② 随机变量 X 和 Y 相互独立 $\Rightarrow$ X 和 Y 不相关（反之则不成立）

常用分布的数字期望和方差：

注：若 $f(x) = C_1\Phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) + C_2\Phi\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)$，$C_1+C_2=1$

分布	分布律或概率密度	期望	方差
0-1分布	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}, k=0,1$	p	$p(1-p)$
二项分布 $X\sim B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $X\sim P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,\cdots$	λ	λ
几何分布 $X\sim G(p)$	$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,\cdots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty<x<+\infty$	μ	σ^2
均匀分布 $X\sim U(a,b)$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其他\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $X\sim E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

($\Phi(x)$ 表示标准正态分布的分布函数)

则 $E(X)=C_1\mu_1+C_2\mu_2$