3 n维向量

2020年7月18日 星期六 下午8:10

n维向量

向量的概念和运算

n维向量：n个数构成的一个有序数组 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 称为一个n维向量，记成 $\alpha = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$，并称 α 为n维行向量，$\alpha^T = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$ 称为n维列向量，其中 a_i 称为向量 α（或 α^T）的第i个分量。

运算

- 相等：若 $\alpha = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$，$\beta = [b_1, b_2, \cdots, b_n]$ 都是n维向量，则当且仅当 $a_i = b_i$ 时 $\alpha = \beta$.
- 加法：$\alpha + \beta = [a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n]$
- 数乘：$k\alpha = [ka_1, ka_2, \cdots, ka_n]$
- 内积：$(\alpha, \beta) = \alpha^T\beta = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$. $\Rightarrow$ 模 $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha,\alpha)} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$；若 $(\alpha,\beta)=0$ 则 α 与 β 正交 $\Rightarrow$.
  $= (\beta, \alpha) = \beta^T\alpha$

线性组合与线性表示

线性组合：设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是n维向量，$k_1, k_2, \cdots, k_s$ 是一组实数，称

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合.

线性表示：对n维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和 β，若存在实数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \beta$$

则称 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合，或者说 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示(出)

$\Rightarrow$ 设有两个n维向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$；(II) $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$；
如果(I)中的每个向量 α_i 都可由(II)中的向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出，则称向量组(I)可由向量组(II)线性表出。如果(I)、(II)这两个向量组可以互相线性表出，则称这两个向量组等价。$\Leftrightarrow$ $r(I) = r(II) = r(I,II)$

$\Rightarrow$ 向量组(II)能由向量组(I)

判定

① 向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出
$\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \beta$ 有解
$\Leftrightarrow$ $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta)$

② 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出，且表示法唯一.

③ 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出，则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \le r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$

线性相关：对n维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$，如果存在不全为0的数使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，否则，称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

$\Leftarrow$ 含有零向量或有成比例的向量的向量组必线性相关

线性相关

判定及推论

① 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关

⇔ 齐次线性方程组 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0$ 有非零解

⇔ 向量组的秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$ 向量组的秩小于向量的个数.

② n个n维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关的充分必要条件是行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=0$

③ $n+1$个n维向量一定线性相关

④ 部分向量组相关,则整体向量组相关;整体向量组无关,则部分向量组无关.

⑤ 原向量组无关,则延伸(增加分量)向量组无关;延伸向量组相关,则原向量组相关.

⑥ 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ $(s\geq 2)$ 线性相关,则其中必有一个向量可用其余的向量线性表示.反之亦成立

⑦ 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出,且 $s>t$,那么 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.也即 多数向量能用少数向量线性表出,那么多数向量一定线性相关.

⑧ 如果 $r(A)=r$,则 A 中有 r 个线性无关的列向量,而其他列向量都是这 r 个线性无关的列向量的线性组合,也就是 $r(A)=A$的列秩,一般,$r(A)=A$的行秩$=A$的列秩.

极大线性无关组与向量组的秩

极大线性无关组:在向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中,若存在 r 个向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关,再加进任意一个向量 α_i,向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\alpha_i$ 就线性相关,则称 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组.

向量组的秩:向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组中所含向量的个数称为这个向量组的秩.

三秩相等:$r(A)$(矩阵的秩) $=$ A的行秩 $=$ A的列秩

基本概念

向量空间:全体n维向量连同向量的加法和数乘运算合称为n维向量空间

基(底):若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是n维向量空间 R^n 中的线性无关的有序向量组,则任一向量 $\alpha\in R^n$ 均可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性表出,记表出式为

$$\alpha=a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n$$

称有序向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 R^n 的一个基,基向量的个数n称为向量空间的

向量空间

维数，而 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 称为向量 α 在基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 下的坐标，或称为 α 的坐标行向量

解空间：若 α, β 是 $AX=0$ 的解，则 $\alpha+\beta$，$k\alpha$，仍是 $AX=0$ 的解，所以解的集合 W 是 n 维向量空间的子空间，通常称为解空间

规范正交基：设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是向量空间的一组基，如果它们满足 $(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$，则称 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为规范正交基。 ⇒ 若 n 维向量 α_1, α $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性

证：设 $k_1\alpha_1 + k$ 左乘 α_1^T，得 $k_1\alpha_1^T\alpha_1 +$

因为两两正交 ⇔ $k_1\alpha_1^T\alpha_1$ ∵ $\alpha_1^T\alpha_1 > $ ∴ $k_1 = 0$， ∴ $\alpha_1, \alpha_2,$

基变换和坐标变换

基变换：$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 和 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 R^n 中的两个基

$$[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n] = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n] C$$

上式称为由基 $[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]$ 到 $[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]$ 的基变换公式。C 为过渡矩阵（可逆）

坐标变换：α 在上述两基下的坐标分别为 $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ 和 $y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$

则 $\alpha = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]x = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]y = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]Cy$

∴ $x = Cy$

上式为坐标变换公式。

$[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n] = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]C$ ⇓ 过渡矩阵

即：$\alpha = \xi x \xrightarrow{\eta=\xi C} \alpha = \eta y = \xi C y \Rightarrow x = Cy$

⇓

旧基下的坐标 = 过渡矩阵 × 新基下的坐标。