4 线性方程组

2020年7月19日 星期日 上午8:48

线性方程组

齐次线性方程组

概念：方程组(I)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

，称为m个方程n个未知量的齐次线性方程组

⇒ 向量形式 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$，$\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$，$j=1,2,\cdots,n$

⇒ 矩阵形式 $A_{m\times n}x_{n\times 1} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

有解的条件：
① 当 $r(A)=n$ 时（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关），方程组(I)有唯一零解
② 当 $r(A)=r<n$ 时（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关），方程组(I)有非零解，且有 $n-r$ 个线性无关解. ⇔ A的列向量线性相关.（齐次

线性方程组的初等变换：
① 用一个非零常数乘方程的两边.
② 把某方程的k倍加到另一方程上.
③ 互换两个方程的位置.
⇒ 线性方程组的初等行变换把线性方程组变成与它同解的方程组.

解的性质：如果 η_1,η_2 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的两个解，那么其线性组合仍是该齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解.

基础解系和解的结构：
- 基础解系：设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 满足
  ① 是方程组 $Ax=0$ 的解.
  ② 线性无关.
  ③ 方程组 $Ax=0$ 的任一解均可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表出.
  ，则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系.
  $n-r$ 个线性无关解.
- 通解：设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 是方程组 $Ax=0$ 的通解，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数.
  $Ax=0$ 的基础解系由 $n-r(A)$ 个线性无关的解向量所构成

求解方法与步骤：
① 将系数矩阵A作初等行变换化成阶梯形矩阵B（或最简形），$Ax=0$ 和 $Bx=0$ 同解，只需解 $Bx=0$ 即可，设 $r(A)=r$
② 按列找出一个秩为r的子矩阵，则剩余列位置的未知数即设为自由变量.（有 $n-r$ 个自由变量）
⇓ 可取任意值，设为 k_i
③ 按基础解系定义求出 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，并写出通解.

赋值法：特解自由变量赋0法；通解自由变量赋(1,0)(0,1)法

概念：(II)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

⇒ 向量形式 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$，$\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$，$j=1,2,\cdots,n$，$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$(a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}\ ;\ b_1$

非齐次线性方程组

$\Rightarrow$ 矩阵形式：$Ax=b$， $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$， $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ 增广矩阵 $[A\,|\,b]$ 或 $[A, b]$ 或 $\bar{A}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$，$Ax=0$ 为其导出组。

有解的条件

① 若 $r(A) \neq r([A, b])$，也即 b 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出，则方程组(I)无解

② 若 $r(A) = r([A, b]) = n$，即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, b$ 线性相关，则方程组(I)有唯一解。$\Rightarrow$ 可用克拉默法则求解。

③ $r(A) = r([A, b]) = r < n$，则方程组(I)有无穷多解。

$\Rightarrow$ 非齐次方程组有解 $\Leftrightarrow$ β 可由 α_1, α_2

解的性质

① 如果 α, β 是线性方程组 $Ax=b$ 的两个解，则 $\alpha-\beta$ 是导出组 $Ax=0$ 的解。

② 如果 α 是线性方程组 $Ax=b$ 的解，η 是导出组 $Ax=0$ 的解，则 $\alpha+\beta$ 是 $Ax=b$ 的解。

求解方法与步骤

① 写出 $Ax=b$ 的导出方程组 $Ax=0$，求出 $Ax=0$ 的通解 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$

② 写出 $Ax=b$ 的一个特解

③ 则 $Ax=b$ 的通解为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta$，其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意常数。

齐次线性方程组求解的一般方法？

①、对系数矩阵作初等行变换化其为阶梯形，

②、由秩 $r(A)$ 确定自由变量的个数 $n-r(A)$

③、找出一个秩为 $r(A)$ 的矩阵，则其余的 $n-r(A)$ 列对应的就是自由变量。

④、每次给一个自由变量赋值为1，其余的自由变量赋值为0（注意需赋值 $n-r(A)$ 次）。

⑤、对阶梯方程组由下往上依次求解，即可得到方程组的解。

非齐次线性方程组求解的一般方法？

①．对增广矩阵作初等行变换化为阶梯形矩阵。

②、求导出组的一个基础解系

③、求方程组的一个特解（为简捷，可令自由变量全为0）

④、按解的结构写出通解。