第四章 高阶微分方程

§ 4.2 常系数线性微分方程的解法

§ 4.2.3 非齐次线性微分方程

常系数非齐次线性微分方程

$$\boxed{L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t)} \cdots\cdots\cdots (4.32)$$

其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为常数，$f(t)$ 为连续函数。

求解步骤：

（1）求对应齐次方程（4.19）的基本解组

（2）利用常数变易法，求得方程（4.32）的一个特解

（3）根据定理7，写出方程（4.32）的通解表达式

（4）利用初值条件确定通解中任意常数，得方程满足初值条件的解

§ 4.2.3 非齐次线性微分方程

注意　通过上述步骤求解往往是比较繁琐的，且必须经过积分运算

下面介绍当具有某些特殊形状时所适用的一些方法

比较系数法

拉普拉斯变换法

§ 4.2.3 非齐次线性方程-比较系数法

比较系数法

$$\boxed{L[x]\equiv\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t)\cdots\cdots\cdots(4.32)}$$

$$\boxed{F(\lambda)=(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n)}$$ 对应齐次方程的特征方程

类型I $$\boxed{f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)\cdot e^{\lambda t}}$$

其中 $\lambda,b_0,b_1,\cdots,b_m$ 为确定的实常数。

结论1 当方程(4.32)中$f(t)$为以上类型时，方程有如下形式的特解

$$\boxed{\tilde{x}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)\cdot e^{\lambda t}}\cdots\cdots\cdots(4.33)$$

其中，k 为特征方程 $F(\lambda)=0$ 的根 λ 的重数，单根相当于 $k=1$

不是特征根，取 $k=0$

而 $B_0,B_1,\cdots,B_m$ 为待定系数，可通过比较系数来确定。

§ 4.2.3 非齐次线性方程-比较系数法

1) $\lambda=0$ $\boxed{f(t)=b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m}$

(a) $\lambda=0$ 不是特征根，即 $F(0)\neq 0$，则 $a_n\neq 0$

取 $k=0$，以 $\tilde{x}=B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m$ 代入方程（4.32）

比较 t 的同次幂的系数，得到这些常数必须满足的方程

$$\begin{cases} B_0a_n=b_0, \\ B_1a_n+mB_0a_{n-1}=b_1, \\ B_2a_n+(m-1)B_1a_{n-1}+m(m-1)B_0a_{n-2}=b_2, \\ \cdots \\ B_ma_n+B_{m+1}a_{n-1}+2B_{m+2}a_{n-2}+\cdots=b_m \end{cases}$$

$\because a_n\neq 0,\quad B_0,B_1,\cdots,B_m$ 可唯一确定。

§ 4.2.3 非齐次线性方程-比较系数法

（b）$\lambda=0$ 是 k 重特征根，即 $F(0)=F'(0)=\cdots=F^{(k-1)}(0)=0, F^{(k)}(0)\neq 0$

也就是 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_{n-k+1}=0, a_{n-k}\neq 0.$

方程（4.32）将变为

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-k}\frac{d^k x}{dt^k}=f(t)\cdots\cdots\cdots(4.35)$$

令 $\boxed{\frac{d^k x}{dt^k}=z}$ 则方程（4.35）化为

$$\frac{d^{n-k}z}{dt^{n-k}}+a_1\frac{d^{n-k-1}z}{dt^{n-k-1}}+\cdots+a_{n-k}z=f(t)\cdots\cdots\cdots(4.36)$$

§ 4.2.3 非齐次线性方程-比较系数法

$$\boxed{\frac{d^{n-k}z}{dt^{n-k}}+a_1\frac{d^{n-k-1}z}{dt^{n-k-1}}+\cdots+a_{n-k}z=f(t)\cdots\cdots\cdots(4.36)}$$

$a_{n-k}\neq 0,\lambda=0$ 已不是方程（4.36）的特征根　k=0

因此，有如下形式的特解　$\tilde{z}=\tilde{B}_0t^m+\tilde{B}_1t^{m-1}+\cdots+\tilde{B}_{m-1}t+\tilde{B}_m$

因而方程（4.35）有特解 $\tilde{x}$ 满足

$$\boxed{\frac{d^k\tilde{x}}{dt^k}=\tilde{z}}=\tilde{B}_0t^m+\tilde{B}_1t^{m-1}+\cdots+\tilde{B}_{m-1}t+\tilde{B}_m$$

$$\frac{d^{k-1}\tilde{x}}{dt^{k-1}}=\frac{\tilde{B}_0}{m+1}t^{m+1}+\frac{\tilde{B}_1}{m}t^m+\cdots+\tilde{B}_mt$$

• • •

$$\boxed{\tilde{x}=t^k(\gamma_0t^m+\gamma_1t^{m-1}+\cdots+\gamma_m)}$$

$\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_m$ 为确定的数。

§ 4.2.3 非齐次线性方程-比较系数法

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \cdots\cdots\cdots (4.32)$$

2) $\underline{\lambda \neq 0}$

作变量变换 $\boxed{x = ye^{\lambda t}}$，将方程（4.32）化为

$$\frac{d^n y}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + A_{n-1}\frac{dy}{dt} + A_n y = \underline{b_0 t^m + \cdots + b_m} \cdots\cdots\cdots (4.37)$$

$$\lambda = 0 \to f(t)$$

其中，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为确定的常数。

当 λ 是(4.32)的 k 重特征根，则 *0* 就是(4.37)的 k 重特征根

当 λ 不是(4.32)对应齐次方程的特征根，则 *0* 就不是(4.37)的特征根

§ 4.2.3 非齐次线性方程-比较系数法

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \cdots\cdots\cdots (4.32)$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dt} + A_n y = b_0 t^m + \cdots + b_m \cdots\cdots\cdots (4.37)$$

利用**1)**的讨论

$$\boxed{x = ye^{\lambda t}}$$

λ 不是特征根的情形

(4.37)有形如以下的**特解** $\tilde{y} = B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_{m-1} t + B_m$

(4.32)有形如以下的**特解** $\tilde{x} = e^{\lambda t}(B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_{m-1} t + B_m)$

λ 是 k 重根的情形

(4.37)有形如以下的**特解** $\tilde{y} = t^k(\Upsilon_0 t^m + \Upsilon_1 t^{m-1} + \cdots + \Upsilon_{m-1} t + \Upsilon_m)$

(4.32)有形如以下的**特解** $\tilde{x} = t^k(\Upsilon_0 t^m + \Upsilon_1 t^{m-1} + \cdots + \Upsilon_{m-1} t + \Upsilon_m) \cdot e^{\lambda t}$

§ 4.2.3 非齐次线性方程-比较系数法

例1 求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=3t+1$ 的通解

解 第一步：求对应齐次方程的通解

$$F(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-3=0 \quad \boxed{\lambda_1=3,\lambda_2=-1}$$

通解 $c_1e^{-t}+c_2e^{3t}$

第二步：用比较系数法求一特解 $f(t)=3t+1,\boxed{\lambda=0}$

$\lambda=0$ 不是特征根， 则方程如下形式的特解 $\tilde{x}=A+Bt$

$$-2B-3A-3Bt=3t+1 \quad \begin{cases}-3B=3\\-2B-3A=1\end{cases} \quad B=-1,A=\frac{1}{3}$$

第三步：写出通解 $x=c_1e^{-t}+c_2e^{3t}-t+\frac{1}{3}$

§ 4.2.3 非齐次线性方程-比较系数法

例2 求方程 $\dfrac{d^3x}{dt^3}+3\dfrac{d^2x}{dt^2}+3\dfrac{dx}{dt}+x=e^{-t}(t-5)$ 的通解

解 第一步：求对应齐次方程的通解

$$F(\lambda)=\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0 \qquad \boxed{\lambda_{1,2,3}=-1}$$

通解 $(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{-t}$

第二步：用比较系数法求一特解 | 特解形式 $\tilde{x}=t^3(A+Bt)\mathrm{e}^{-t}$

$$f(t)=e^{-t}(t-5) \quad \boxed{\lambda=-1}$$

$$A=\frac{1}{24}, B=-\frac{5}{6} \qquad \tilde{x}=\frac{1}{24}t^3(t-20)\mathrm{e}^{-t}$$

第三步：写出通解 $x=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{-t}+\dfrac{1}{24}t^3(t-20)e^{-t}$

§ 4.2.3 非齐次线性方程-比较系数法

比较系数法

$$\boxed{L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \cdots\cdots\cdots (4.32)}$$

类型II $\boxed{f(t) = [A(t)\cos\beta t + B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}}$ $\boxed{\max(\partial A(t), \partial B(t)) = m}$

其中 α, β 实数，$A(t), B(t)$ 是 t 的实系数多项式

结论2 当方程(4.32)中$f(t)$为以上类型时，方程有如下形式的特解

$$\boxed{\tilde{x} = t^k[P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}} \cdots\cdots\cdots (4.38)$$

其中，k 为特征方程 $F(\lambda) = 0$ 的根 $\alpha + i\beta$ 的重数，$\alpha + i\beta$ 不是特征根，取 $k = 0$

而 $P(t), Q(t)$ 是次数不高于m的多项式，可通过比较系数来确定。

§ 4.2.3 非齐次线性方程-比较系数法

$$e^{(\alpha+i\beta)t}=[\cos\beta t+i\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t}=[\cos\beta t-i\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

$$e^{\alpha t}\cos\beta t=\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}+e^{(\alpha-i\beta)t}}{2}$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t=\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i}=-\frac{1}{2}i(e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t})$$

$$\begin{aligned}f(t)&=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}\\&=A(t)\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}+e^{(\alpha-i\beta)t}}{2}-iB(t)\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t}}{2}\\&=\boxed{\frac{A(t)-iB(t)}{2}e^{(\alpha+i\beta)t}}+\boxed{\frac{A(t)+iB(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t}}\\&=f_1(t)+f_2(t)\end{aligned}$$

叠加原理

显然 $\boxed{\overline{f_1(t)}=\frac{A(t)+iB(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t}=f_2(t)}$

$L[x]=f_1(t)$ 解 $\tilde{x}_1$

$L[x]=f_2(t)$ 解 $\tilde{x}_2$

$\bar{\tilde{x}}_1=\tilde{x}_2$ 类型I结论

$$\tilde{x}_1=t^kD(t)e^{(\alpha+i\beta)t}$$

$$\tilde{x}_2=t^k\bar{D}(t)e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$\tilde{x}=\tilde{x}_1+\tilde{x}_2$$

$$\boxed{\tilde{x}(t)=t^kD(t)e^{(\alpha+i\beta)t}+t^k\bar{D}(t)e^{(\alpha-i\beta)t}}$$

§ 4.2.3 非齐次线性方程-比较系数法

$$\tilde{x}(t) = t^k D(t) e^{(\alpha+i\beta)t} + t^k \bar{D}(t) e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$= t^k e^{\alpha t}[D(t)e^{i\beta t} + \bar{D}(t)e^{-i\beta t}]$$

$$= t^k e^{\alpha t}[D(t)(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

$$+ \bar{D}(t)(\cos\beta t - i\sin\beta t)]$$

$$= t^k e^{\alpha t}[(D(t) + \bar{D}(t))\cos\beta t$$

$$+ i(D(t) - \bar{D}(t))\sin\beta t)]$$

$$= \boxed{t^k e^{\alpha t}[P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)]}$$

$D(t)$ 是次数为 m 的多项式

$P(t), Q(t)$ 是次数不高于 m 的多项式

$$P(t) = 2\,\mathrm{Re}\{D(t)\}$$

$$Q(t) = 2\,\mathrm{Im}\{D(t)\}$$

§ 4.2.3 非齐次线性方程-比较系数法

例3 求方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4\dfrac{dx}{dt}+4x=\cos 2t$ 的通解

解 第一步：求对应齐次方程的通解

$$F(\lambda)=\lambda^2+4\lambda+4=0 \qquad \boxed{\lambda_{1,2}=-2}$$

通解 $(c_1+c_2t)e^{-2t}$

第二步：用比较系数法求一特解 | 特解形式 $\tilde{x}=A\cos 2t+B\sin 2t$

$\pm 2i$ 不是特征根

$$\begin{cases}4A+8B+4A=1\\4B-8A-4B=0\end{cases} \qquad \begin{cases}A=0\\B=\dfrac{1}{8}\end{cases} \qquad \tilde{x}=\frac{1}{8}\sin 2t$$

第三步：写出通解 $x(t)=(c_1+c_2t)e^{-2t}+\dfrac{1}{8}\sin 2t$

§ 4.2.3 非齐次线性方程-比较系数法

思考　试求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=\cos 2t+2\sin t$ **的通解**

提示

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=\cos 2t$$

叠加原理

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=2\sin t$$

§4.2.3非齐次线性方程-拉普拉斯变换法

拉普拉斯变换定义

对于在 $[0,\infty)$ 上有定义的函数 $f(t)$

若 $$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^{T} e^{-st} f(t)\, dt$$

对于已给的一些 s（一般为复数）存在，则称

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

为函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，记为 $L[f(t)] = F(s)$

$f(t)$称为Laplace变换的原函数，$F(s)$称为$f(t)$的像函数。

§ 4.2.3非齐次线性方程-拉普拉斯变换法

拉普拉斯变换法存在性

假若函数 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 的每一个有限区间上是分段连续的，

并且存在常数 $M > 0$ $\sigma \geq 0$ 使对于所有的 $t \geq 0$ 都有

$\left| f(t) \right| < M e^{\sigma t}$ 成立

则当 $\mathrm{Re}\, s > \sigma$ 时，$f(t)$ 的Laplace变换是存在的。

§ 4.2.3非齐次线性方程-拉普拉斯变换法

例1 $f(t)=1 \quad (t\geq 0)$

解 $\int_0^\infty e^{-st}\cdot 1dt=\lim_{T\to\infty}[-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^T]$

$$=\lim_{T\to\infty}[-\frac{1}{s}e^{-sT}+\frac{1}{s}]$$

$$=\frac{1}{s}(\mathrm{Re}\,s>0)$$

即 $L[1]=\frac{1}{s} \quad (\mathrm{Re}\,s>0)$

例2 $f(t)=e^{zt}$（z是给定的实数或复数）

解 $L[e^{zt}]=\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{zt}dt$

$$=\int_0^\infty e^{-(s-z)t}dt$$

$$=\frac{1}{s-z}(\mathrm{Re}(s-z)>0)$$

即 $L[e^{zt}]=\frac{1}{s-z} \quad (\mathrm{Re}\,s>\mathrm{Re}\,z)$

§ 4.2.3非齐次线性方程-拉普拉斯变换法

拉普拉斯变换的基本性质

1 线性性质

如果 $f(t),g(t)$ 是原函数，α,β 是任意两个常数(可以是复数)，

则有 $L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)]$

$$左=\int_0^{\infty} e^{-st}[\alpha f(t)+\beta g(t)]dt$$

$$=\alpha\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt+\beta\int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt$$

$$=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)]=右$$

§ 4.2.3非齐次线性方程-拉普拉斯变换法

拉普拉斯变换的基本性质

2 原函数的微分性质

如果 $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n)}(t)$ 都是原函数，则有

$$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0)$$

$$\vdots$$

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

如果 $f^{(k)}(t)$ 在 $t=0$ 处不连续，则 $f^{(k)}(0)$ 理解为 $\lim\limits_{T\to 0^+} f^{(k)}(T)$

§ 4.2.3非齐次线性方程-拉普拉斯变换法

拉普拉斯变换的基本性质

3 像函数的微分性质

$$F(s) = L[f(t)] \qquad F'(s) = -\int_0^{\infty} t e^{-st} f(t) dt$$

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^{\infty} t^n e^{-st} f(t) dt$$

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[f(t)]$$

§ 4.2.3非齐次线性方程-拉普拉斯变换法

拉普拉斯逆变换

已知象函数，求原函数 $L^{-1}[F(s)]=f(t)$

也具有线性性质

$$L^{-1}[c_1F_1(s)+c_2F_2(s)]=c_1L^{-1}[F_1(s)]+c_2L^{-1}[F_2(s)]$$

如果 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 可分解为

$$F(s)=F_1(s)+\cdots+F_n(s)$$

并假定 $F_i(s)=L[f_i(t)]$

则 $L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[F_1(s)]+\cdots+L^{-1}[F_n(s)]=f_1(t)+\cdots+f_n(t)$

§ 4.2.3非齐次线性方程-拉普拉斯变换法

例3 $F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$

解 $F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

$$=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

则 $f(t)=L^{-1}[F(s)]$

$$=L^{-1}[\frac{2}{s+1}]-L^{-1}[\frac{1}{s+2}]$$

$$=2e^{-t}-e^{-2t}\quad(t\geq 0)$$

例4 $F(s)=\dfrac{s^2-5s+s}{(s-1)(s-2)^2}$

解 $F(s)=\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{1}{(s-2)^2}$

则 $f(t)=L^{-1}[\dfrac{1}{s-1}]-L^{-1}[\dfrac{1}{(s-2)^2}]$

$$=e^{t}-te^{2t}\quad(t\geq 0)$$

§ 4.2.3非齐次线性方程-拉普拉斯变换法

拉普拉斯变换法-求非齐次线性方程的特解

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t) \quad (4.32)$$

其中 a_i 为常数且 $x(0)=x_0, x'(0)=x_0', \cdots, x^{(n-1)}(0)=x_0{}^{(n-1)}$

令 $X(s)=L[x(t)]\equiv\int_0^\infty e^{-st}x(t)dt$

$$L[x'(t)]=sX(s)-x_0$$

$$\vdots$$

$$\boxed{L[x^{(n)}(t)]=s^nX(s)-s^{n-1}x_0-s^{n-2}x_0'-\cdots-sx_0{}^{(n-2)}-x_0{}^{(n-1)}}$$

§ 4.2.3非齐次线性方程-拉普拉斯变换法

拉普拉斯变换法-求非齐次线性方程的特解

对(4.32)两端取Laplace变换

$$s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - s^{n-2}x_0' - \cdots - sx_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)}$$

$$+a_1\left[s^{n-1}X(s) - s^{n-2}x_0 - s^{n-3}x_0' - \cdots - x_0^{(n-2)}\right] +$$

$$\cdots + a_{n-1}\left[sX(s) - x_0\right] + a_n X(s) = F(s)$$

$$\left(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n\right)X(s) = F(s) + B(s)$$

$$\boxed{X(s) = \frac{F(s)+B(s)}{A(s)}}$$

$$\boxed{x(t) = L^{-1}\left[X(s)\right] = L^{-1}\left[\frac{F(s)+B(s)}{A(s)}\right]}$$

§4.2.3非齐次线性方程-拉普拉斯变换法

拉普拉斯变换法表P152

表(4.1) 拉普拉斯变换表

序号	原函数 $f(t)$	像函数 $F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$	$F(s)$的定义域
1	1	$\frac{1}{s}$	Re $s>0$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	Re $s>0$
3	$t^n(n>-1)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	Re $s>0$
4	e^{zt}	$\frac{1}{s-z}$	Re $s>$ Re z
5	te^{zt}	$\frac{1}{(s-z)^2}$	Re $s>$ Re z
6	$t^n e^{zt}(n>-1)$	$\frac{n!}{(s-z)^{n+1}}$	Re $s>$ Re z
7	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	Re $s>0$
8	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	Re $s>0$
9	$\mathrm{sh}\ \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	Re $s>\lvert\omega\rvert$
10	$\mathrm{ch}\ \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	Re $s<\lvert\omega\rvert$
11	$t\sin \omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$	Re $s>0$
12	$t\cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	Re $s>0$
13	$e^{\lambda t}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$	Re $s>\lambda$
14	$e^{\lambda t}\cos \omega t$	$\frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$	Re $s>\lambda$
15	$te^{\lambda t}\sin \omega t$	$\frac{2\omega(s-\lambda)}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^2}$	Re $s>\lambda$
16	$te^{\lambda t}\cos \omega t$	$\frac{(s-\lambda)^2-\omega^2}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^2}$	Re $s>\lambda$

§ 4.2.3非齐次线性方程-拉普拉斯变换法

例5 求方程 $\frac{dx}{dt} - x = e^{2t}$ 满足初始条件 $x(0) = 0$ 的特解

解 令 $L[x(t)] = X(s)$

$$L(\frac{dx}{dt}) - L[x] = L[e^{2t}] \Rightarrow sX(s) - x(0) - X(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}[\frac{1}{s-2}] - L^{-1}[\frac{1}{s-1}] = e^{2t} - e^{t}$$

§ 4.2.3非齐次线性方程-拉普拉斯变换法

例6 求方程$x''+2x'+x=e^{-t}$满足初始条件$x(1)=x'(1)=0$的特解

解 令$\tau=t-1$ $\qquad \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dx}{d\tau},\ \dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{d^2x}{d\tau^2},\ e^{-t}=e^{-\tau}\cdot e^{-1}$

$$x(\tau+1)\big|_{\tau=0}=0,\ x'(\tau+1)\big|_{\tau=0}=0 \qquad L[x(\tau)]=X(s)$$

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+2sX(s)-x(0)+X(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{e}$$

$$\boxed{(s^2+2s+1)X(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{e}} \quad \boxed{X(s)=\frac{1}{e(s+1)(s^2+2s+1)}=\frac{1}{e(s+1)^3}}$$

$$x(\tau)=\frac{1}{2}\tau^2e^{-\tau-1} \Rightarrow x(t)=\frac{1}{2}(t-1)^2e^{-(t-1)-1}=\frac{1}{2}(t-1)^2e^{-t}$$

§ 4.2.4 质点振动

振动问题 → 二阶常系数线性微分方程问题

（1）无阻尼自由振动 $$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=0$$

（2）有阻尼自由振动 $$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2n\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2\varphi=0$$

（3）无阻尼强迫振动 $$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=H\sin pt$$

（4）有阻尼强迫振动 $$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2n\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2\varphi=H\sin pt$$

§ 4.2.4 质点振动

无阻尼自由振动

数学摆-微分方程通解：　$\varphi = A\sin(\omega t + \theta)$　　　(4.41)

从(4.41)可以看出，无论A与θ为何值，摆的运动总是一个正弦函数。

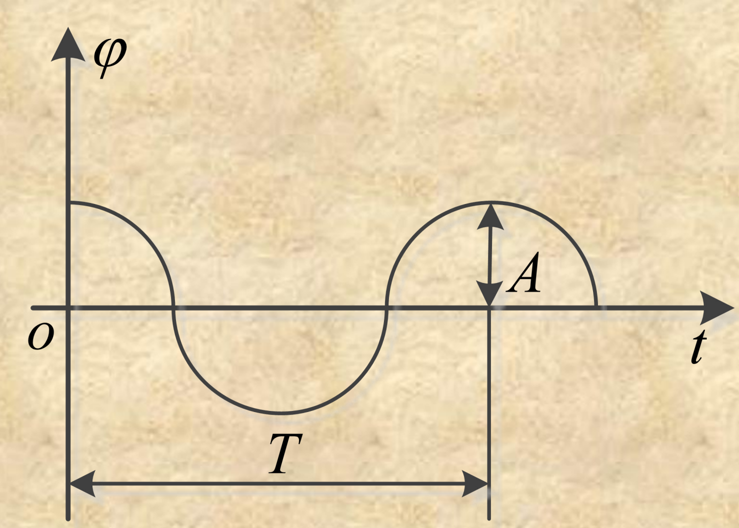
这种运动---简谐运动

振动往返一次所需时间---周期（$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$）

单位时间内振动次数---频率（$\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$）

摆离开平衡位置的最大偏离---振幅（A）

角频率（$\omega = 2\pi\nu$）　初位相（θ）

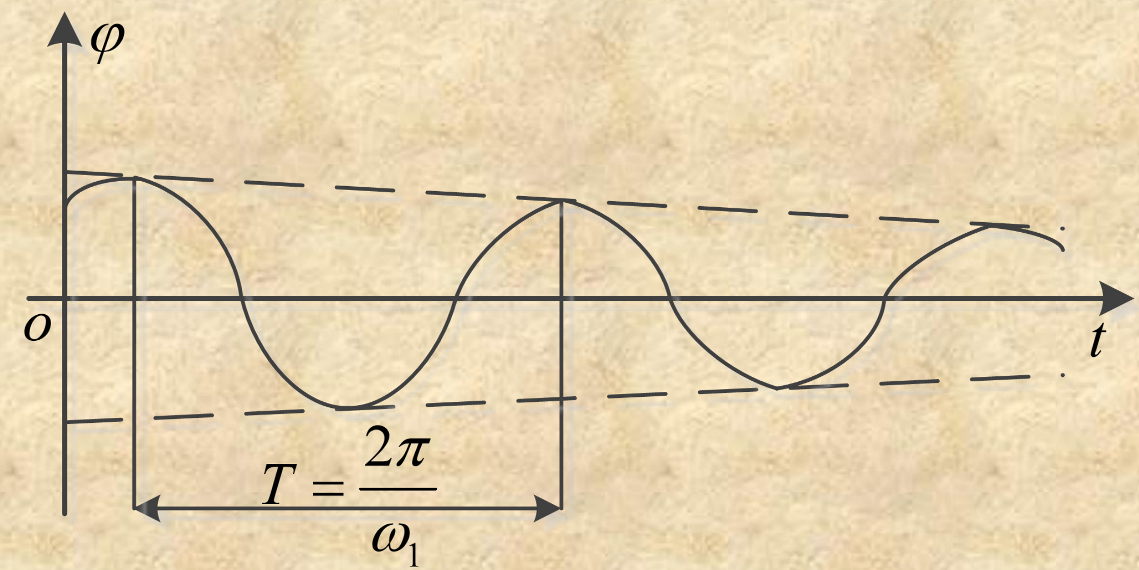


§ 4.2.4 质点振动

有阻尼自由振动

（1）小阻尼的情形（$n < \omega$）：　$\varphi = Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t + \theta)$　(4.45)

ω 为无阻尼角频率，n 为阻尼值，$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$ 。



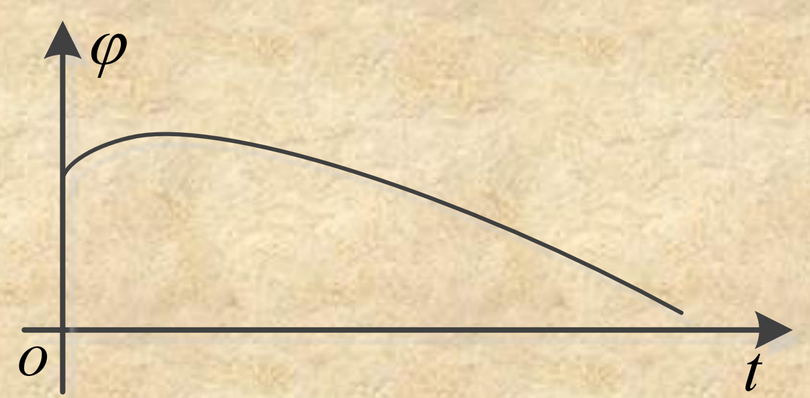
§ 4.2.4 质点振动

有阻尼自由振动

（2）大阻尼的情形（$n > \omega$）： $\varphi = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_1 e^{-\lambda_2 t}$ (4.46)

$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}$

（3）临界阻尼的情形（$n = \omega$）： $\varphi = e^{-nt}(c_1 + c_2 t)$ (4.47)



§ 4.2.4 质点振动

无阻尼强迫振动

数学摆强迫振动-微分方程通解：

$$\varphi = \underbrace{A\sin(\boxed{\omega}t+\theta)}_{\text{固有振动}} + \underbrace{\frac{H}{\omega^2-p^2}\sin \boxed{p}t}_{\text{强迫振动}} \qquad (4.50)$$

固有角频率

固有振动

如果 $p=\omega$，则 $\varphi = A\sin(\omega t+\theta) - \dfrac{H}{2\omega}t\cos\omega t \qquad (4.51)$

这种现象称为**共振现象**

§4.2.4 质点振动

有阻尼强迫振动

$$\varphi = \underbrace{Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t+\theta)}_{\text{固有振动}} + \underbrace{\frac{H}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\sin(pt+\theta^*)}_{\text{强迫振动}} \qquad (4.55)$$