第三章　一阶微分方程的解的存在定理

§ 3.2　解的延拓定理

§ 3.3　解对初值的连续性和可微性

§ 3.4　奇解

§ 3.2 解的延拓定理

§ 3.1解的存在唯一性定理是局部的，它只肯定了解

至少在区间$\left|x-x_0\right|\le h, h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$上存在。

可能随着$f(x,y)$定义域的增大，解的存在区域反而缩小。

例如： **§ 3.1例题1**

定义域$R: -1\le x\le 1, -1\le y\le 1$时$, h=1/2$

定义域$R: -2\le x\le 2, -2\le y\le 2$时$, h=1/4$

§ 3.2 解的延拓定理

局部结果 $\xrightarrow{\text{解的延拓}}$ 适用于较大的范围

$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$右端函数$f(x,y)$在某一有界区域 G 中有意义。

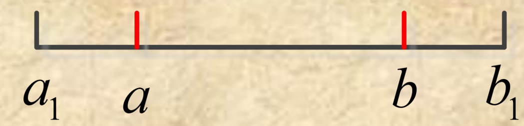
局部利普希兹条件

如果称 $f(x,y)$在 G 内满足局部利普希兹条件，即对区域G内的每一点，存在以其为中心的完全含于G 内的矩形域 R，在 R 上 $f(x,y)$ 满足利普希兹条件。

（注意：点不同，域 R 大小和常数 L 可能不同）

§ 3.2 解的延拓定理

解的延拓



设 $y=\varphi(x),\ x\in[a,b]$ 是

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x,y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1) \\ \varphi(x_0)=y_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.2) \end{cases}$$

的解，若 $y=\psi(x),\ x\in[a_1,b_1]$ 也是初值问题的解，

$[a,b]\subset[a_1,b_1]$，且当 $x\in[a,b]$ 时， $\varphi(x)\equiv\psi(x)$,

则称解 $\psi(x)$ 是解 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**延拓**。

§3.2 解的延拓定理

延拓方法

设方程(3.1)的解$y=\varphi(x)$已定义在区间$|x-x_0|\le h$上，

现取$x_1=x_0+h,\ y_1=\varphi(x_1)=\varphi(x_0+h)$

然后以$Q_1(x_1,y_1)$中心，作一小矩形，使它连同其边界

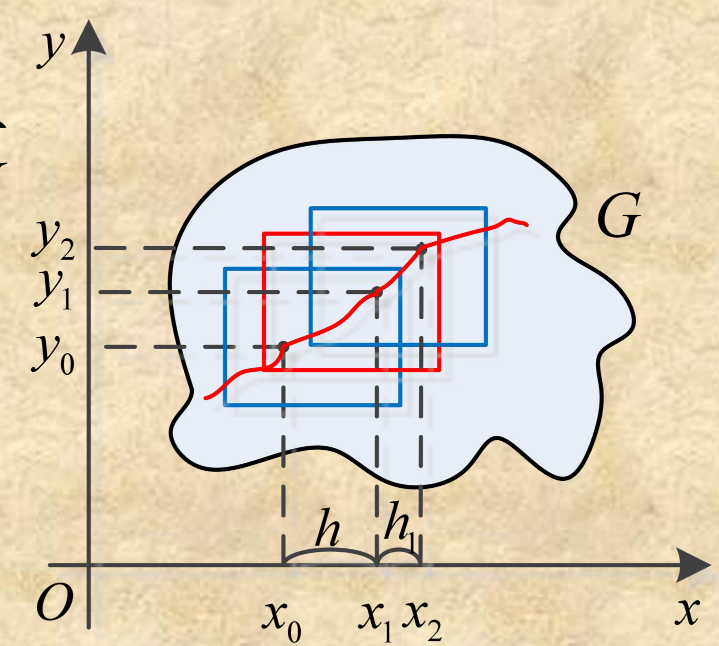
都含在区域 G 的内部，再用解的存在唯一性定理，

存在$h_1>0$使得在区间$|x-x_1|\le h_1$上,方程(3.1)有过

(x_1,y_1)的解$y=\psi(x)$，且在$x=x_1$处有$\psi(x_1)=\varphi(x_1)$

由于唯一性，显然解$y=\psi(x)$和解$y=\varphi(x)$

都在定义的区间$x_1-h_1\le x\le x_1$上,$\psi(x)\equiv\varphi(x)$



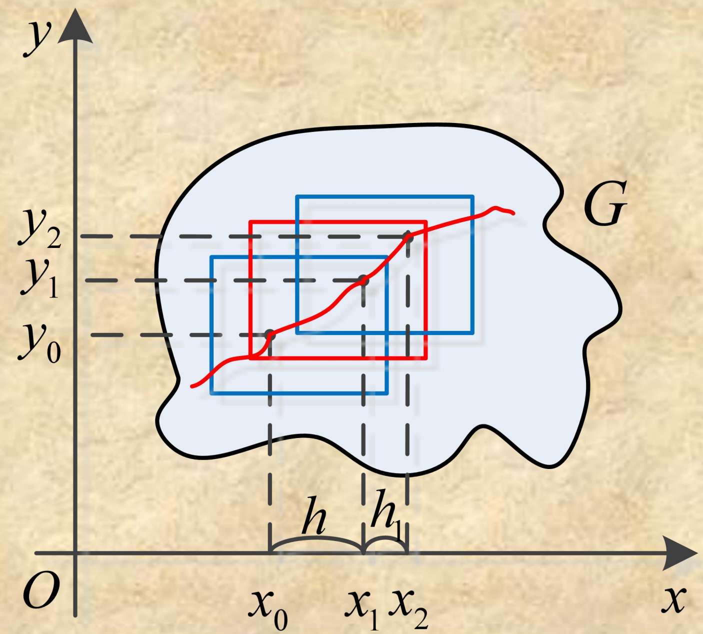
§ 3.2 解的延拓定理

但是在区间 $x_1 \le x \le x_1 + h_1$ 上，解 $y = \psi(x)$ 仍有定义，我们把它看成是原来定义在区间 $|x - x_0| \le h$ 上的解 $y = \varphi(x)$ 向右方的**延拓**。

在区间 $x_0 - h \le x \le x_0 + h + h_1$ 上确定方程的一个解

$$y = \begin{cases} \varphi(x), & x_0 - h \le x \le x_0 + h \\ \psi(x), & x_0 + h \le x \le x_0 + h + h_1 \end{cases}$$

即将解延拓到较大的区间 $x_0 - h \le x \le x_0 + h + h_1$



§3.2 解的延拓定理

再令 $x_2 = x_1 + h_1, \quad y_2 = \psi(x_1 + h_1)$

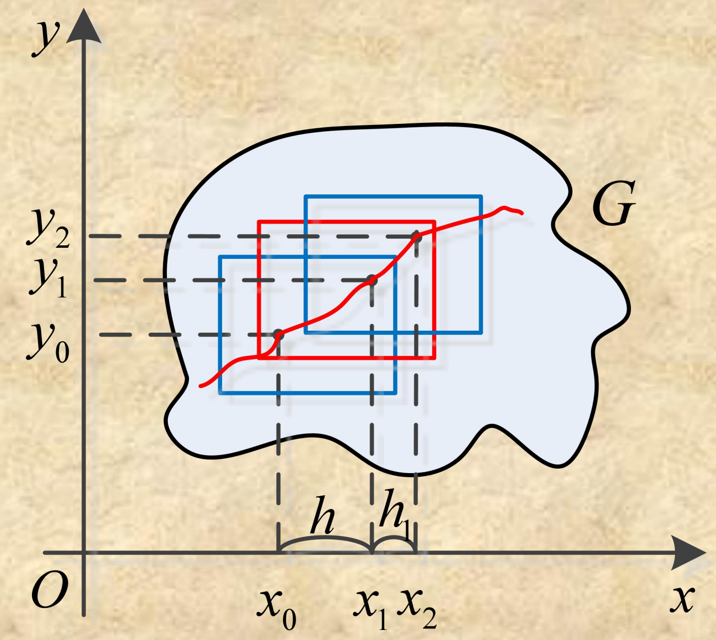
如果，$(x_2, y_2) \in G$, 我们又可以取 (x_2, y_2) 为中心，

作一小矩形，使它连同其边界都含在区域G 内。

仿前,又可以将解延拓到更大的区间

$$x_0 - h \le x \le x_0 + h + h_1 = x_0 + h + h_1 + h_2$$

上，其中 h_2 是某一个正常数。



对于 x 值减小的一边可以进行同样讨论，使解向左方延拓。

就是在原来的积分曲线 $y = \varphi(x)$ 左右端个接上一个积分的曲线段。

上述解的延拓的方法还可继续进行。

那么，$y = \varphi(x)$ 向两边延拓的最终情况如何呢？

$\boxed{y = \tilde{\varphi}(x) \ \text{饱和解}}$

§3.2 解的延拓定理

解的延拓定理

如果方程(3.1)右端的函数$f(x,y)$在有界区域 G 中连续，且在 G 内满足局部利普希兹条件，那么方程(3.1)通过G 内任何一点(x_0,y_0)的解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓,直到点$(x,\varphi(x))$任意接近区域G 的边界。

以向 x 增大的一方的延拓来说，如果 $y=\varphi(x)$ 只能延拓到区间$x_0 \le x < m$上，则当 $x \to m$时，$(x,\varphi(x))$ 趋近于区域 G 的边界。

§ 3.2 解的延拓定理

推论

如果 G 是无界区域，在上面解的延拓定理的条件下，方程(3.1)的通过点 (x_0, y_0) 的解 $y = \varphi(x)$ 可以延拓，以向 x 增大的一方的延拓来说，有下面的两种情况:

(1) 解 $y = \varphi(x)$ 可以延拓到区间 $[x_0, +\infty)$

(2) 解 $y = \varphi(x)$ 只可以延拓到区间 $[x_0, m)$

其中 m 为有限数，则当 $x \to m$ 时，或者 $y = \varphi(x)$ 无界，或者 $(x, \varphi(x))$ 趋于区域 G 的边界。

§ 3.2 解的延拓定理

例1 讨论方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{2}$ 的通过点(0,0)的解

以及通过点 $(ln2,-3)$ 的解的存在区间。

解 方程右端函数在整个 $x\,y$ 平面上满足

解的存在唯一性定理及解的延拓定理的条件。

方程的通解为 $y=\frac{1+ce^x}{1-ce^x}$

通过点(0,0)的解为 $y=\frac{1-e^x}{1+e^x}$ 其存在区间为 $(-\infty,+\infty)$

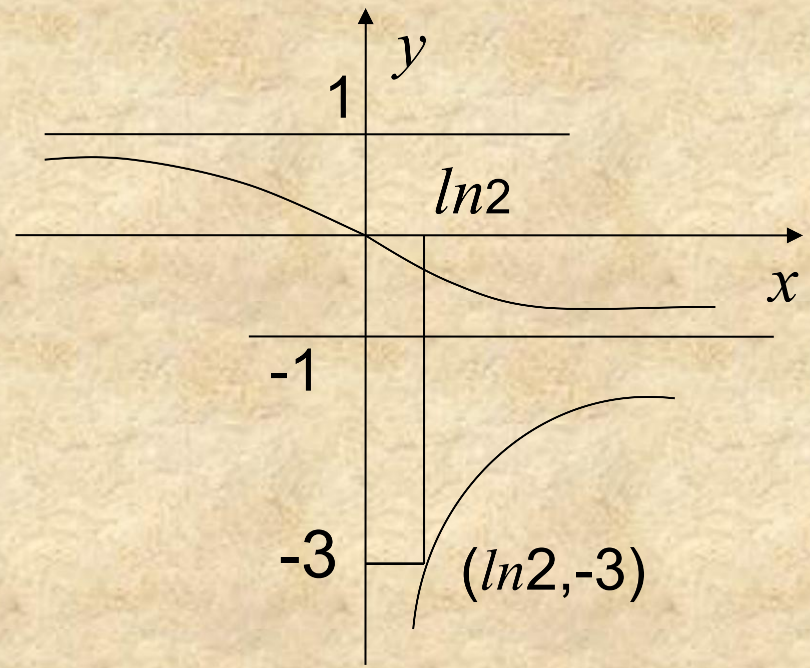
通过点$(ln2,-3)$的解为 $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$ 其存在区间为 $0<x<+\infty$

§3.2 解的延拓定理

注意：过点(ln2,-3)的解 $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$ 向右可以延拓到 $+\infty$

但向左方只能延拓到 0，因为当 $x\to 0_+$ 时，$y\to -\infty$ (无界)

这相当于解的延拓定理推论中(2)的第一种情况。



§ 3.2 解的延拓定理

例2 讨论方程$\frac{dy}{dx}=1+\ln x$满足条件$y(1)=0$的解的存在区间。

解 方程右端函数右半平面 $x>0$ 上定义且满足

解的存在唯一性定理及解的延拓定理的条件。

通过点(1,0)的解为$y=x\ln x$ 其存在区间为 $(0,+\infty)$

向右可以延拓到$+\infty$，但向左方只能延拓到 0,

因为当$x\to 0_+$ 时, $y=x\ln x\to 0$ (趋于G的边界 $y=0$)

这相当于解的延拓定理推论中(2)的第二种情况。

§ 3.3 解对初值的连续性和可微性

内容提要

- 解对初值的连续性
- 解对初值的可微性

本节要求：

1 了解解对初值及参数的连续依赖性定理；

2 了解解对初值及参数的可微性定理。

§ 3.3 解对初值的连续性和可微性

3.3.1 解对初值的对称性定理

设 $f(x,y)$ 于域 D 内连续且关于 y 满足利普希茨条件，

$$(x_0, y_0) \in G, \quad y = \varphi(x, x_0, y_0)$$

是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的唯一解，则在此表达式中，(x_0, y_0) 与 (x, y) 可以调换其相对位置，即在解的存在范围内成立着关系式

$$y_0 = \varphi(x_0, x, y)$$

§ 3.3 解对初值的连续性和可微性

3.3.2 解对初值的连续依赖性定理

假设 $f(x,y)$ 于域 G 内连续且关于 y 满足局部利普希茨条件，$(x_0, y_0) \in G$，$y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解，它于区间 $a \le x \le b$ 有定义 $(a \le x_0 \le b)$，那么，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，必存在正数 $\delta = \delta(\varepsilon, a, b)$ 使得当

$$(\bar{x}_0 - x_0)^2 + (\bar{y}_0 - y_0)^2 \le \delta^2$$

时，方程满足条件 $y(\bar{x}_0) = \bar{y}_0$ 的解 $y = \varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$ 在 $a \le x \le b$ 也有定义，并且 $\left|\varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0) - \varphi(x, x_0, y_0)\right| < \varepsilon,\quad a \le x \le b$

§ 3.3 解对初值的连续性和可微性

3.3.3 解对初值的连续性定理

假设 $f(x,y)$ 于域 G 内连续且关于 y 满足局部利普希茨条件，则方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续的。

§ 3.3 解对初值的连续性和可微性

含参数的一阶方程表示

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (E_\lambda)$$

$$G_\lambda: \quad (x, y) \in G, \ \alpha < \lambda < \beta$$

一致利普希兹条件

设函数$f(x, y, \lambda)$在 G_λ内连续，且在G_λ 内**一致地**关于 y 满足**局部利普希兹 (Lipschitz)条件**，即对 G_λ 内的每一点 (x, y, λ) 都存在以 (x, y, λ) 为中心的球 $C \subset G_\lambda$ ，使得对任何 (x, y_1, λ), (x, y_2, λ) 成立不等式

$$\left| f(x, y_1, \lambda) - f(x, y_2, \lambda) \right| \le L \left| y_1 - y_2 \right|$$

其中L 是与 λ 无关的正数。

§ 3.3 解对初值的连续性和可微性

3.3.4 解对初值和参数的连续依赖性定理

假设$f(x,y,\lambda)$于域 G_λ 内连续，且在G_λ内关于y一致地满足局部利普希茨条件，$(x_0,y_0,\lambda_0)\in G_\lambda$, $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)$是方程 E_λ 通过点 (x_0,y_0) 的解，在区间 $a\le x\le b$ 有定义其中 $a\le x_0\le b$, 那么，对任意给定的$\varepsilon>0$，必存在正数$\delta=\delta(\varepsilon,a,b)$使得当 $(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2+(\lambda-\lambda_0)^2\le\delta^2$时，方程满足条件 $y(\bar{x}_0)=\bar{y}_0$ 的解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0,\lambda)$ 在区间 $a\le x\le b$ 也有定义，并且

$$\left|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0,\lambda)-\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)\right|<\varepsilon,\quad a\le x\le b$$

§ 3.3 解对初值的连续性和可微性

3.3.5 解对初值和参数的连续性定理

假设 $f(x,y,\lambda)$ 于域 G_λ 内连续，且在 G_λ 内关于 y 一致地满足局部利普希茨条件，则方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda),$$

的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)$ 作为 x,x_0,y_0,λ 的函数在它的存在范围内是连续的。

§ 3.3 解对初值的连续性和可微性

3.3.6 解对初值的可微性定理

若函数 $f(x,y)$ 以及 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 都在区域 G 内连续，则方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续可微的。

§ 3.4 奇解

内容提要

- 奇解
- 数值解

本节要求：

1 了解包络、奇解的基本概念；

2 了解克莱罗微分方程

§ 3.4 奇解

存在一条特殊的积分曲线，它并不属于微分方程的积分曲线族，但在这条特殊曲线上的每一点处，都有积分曲线族中的一条曲线和它在此点相切。

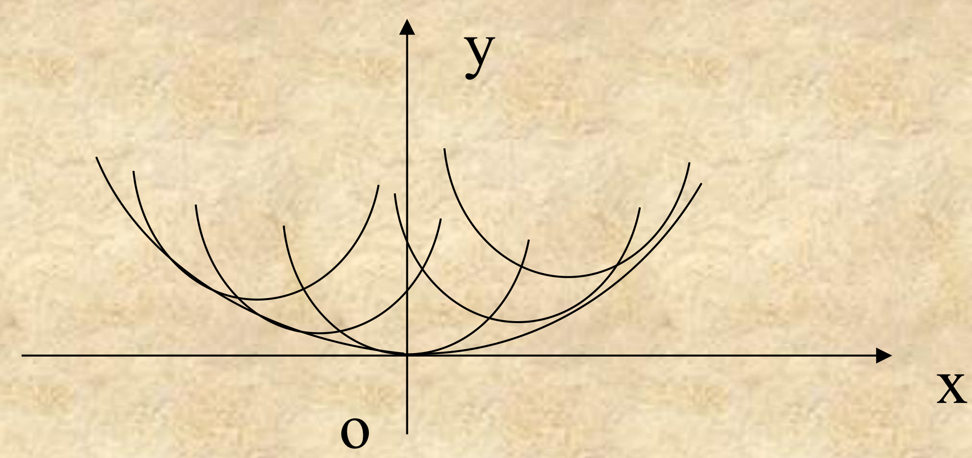
在几何学上，这条特殊积分曲线称为上述积分曲线族的包络

在微分方程里，这条特殊积分曲线所对应的解称为方程的奇解

§ 2.4中例1

$y=\frac{x^2}{4}$ 与 $y=\frac{x^2}{2}+cx+c^2$

中的每一条积分曲线均相切(如图)



§ 3.4 奇解

形如

$$y = xp + f(p)$$

的方程，称为**克莱罗（Clairaut）微分方程**

这里 $p = \dfrac{dy}{dx}$, $f(p)$是 p 的连续可微函数。

例

$$\boxed{y = xp + \frac{1}{p}} \xrightarrow{\text{通解}} \boxed{y = cx + \frac{1}{c}}$$