第二章　一阶微分方程的初等解法

§2.4 一阶隐式微分方程与参数表示

一、 能解出 y（或 x）的方程

(1) $y = f(x, \frac{dy}{dx})$ (2.4.1)

这里假设函数 $f(x, \frac{dy}{dx})$ 有连续的偏导数。

解法：引进参数 $\frac{dy}{dx} = p$ ，则(2.4.1)变为

$$y = f(x, p) \tag{2.4.2}$$

两边关于 x 求导，并把 $p = \frac{dy}{dx}$ 代入，得

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \tag{2.4.3}$$

方程（2.4.3）是关于 x 和 p 的一阶微分方程

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \qquad (2.4.3)$$

由（2.4.3）得

$$\boxed{\frac{dp}{dx} = \frac{p - \dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial p}}}$$

按照变量分离方程、线性方程、恰当方程等求解

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \qquad (2.4.3)$$

$\boxed{y=f(x,p)}$

(i) 若已得出(2.4.3)的通解形式为 $p=\phi(x,c)$ 代入(2.4.2)得

$y=f(x,\phi(x,c))$ 就是(2.4.1)的通解。

(ii) 若得出(2.4.3)通解形式为 $x=\psi(p,c)$ ，则原方程(2.4.1)

有参数形式的通解 $\begin{cases} x=\psi(p,c) \\ y=f(\psi(p,c),p) \end{cases}$

其中 p 是参数，c为任意常数。

(iii) 若求得(2.4.3)通解形式 $\Phi(x,p,c)=0$ ，则原方程(2.4.1)

有参数形式通解 $\begin{cases} \Phi(x,p,c)=0 \\ y=f(x,p) \end{cases}$

其中p是参数,c为任意常数。

一、 能解出 y （或 x)的方程

(2) $x = f(y, \frac{dy}{dx})$ (2.4.4)

这里假设函数 $f(y, \frac{dy}{dx})$ 有连续的偏导数。

解法：引进参数 $\frac{dy}{dx} = p$ ，则(2.4.4)变为

$$x = f(y, p) \tag{2.4.5}$$

两边关于 y 求导，并把 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ 代入，得

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} \tag{2.4.6}$$

方程（2.4.6）是关于 y 和 p 的一阶微分方程

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} \tag{2.4.6}$$

由（2.4.6）得 $$\boxed{\frac{dp}{dy}=\frac{\dfrac{1}{p}-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial p}}}$$

按照变量分离方程、线性方程、恰当方程等求解

若求得 $p=\psi(y,c)$ 则通解为 $x=f(y,\psi(y,c))$

若求得 $\Phi(y,p,c)=0$ 则通解为 $\begin{cases} x=f(y,p) \\ \Phi(y,p,c)=0 \end{cases}$

例1： **求解方程** $y=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}$

解： 令 $\frac{dy}{dx}=p$ 得到

$$y=p^2-xp+\frac{x^2}{2} \tag{2.4.7}$$

两边对 x 求导数，得到

$$\frac{dy}{dx}=2p\frac{dp}{dx}-x\frac{dp}{dx}-p+x$$

即

$$(\frac{dp}{dx}-1)(2p-x)=0$$

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2} \qquad (2.4.7) \qquad \boxed{(\frac{dp}{dx} - 1)(2p - x) = 0}$$

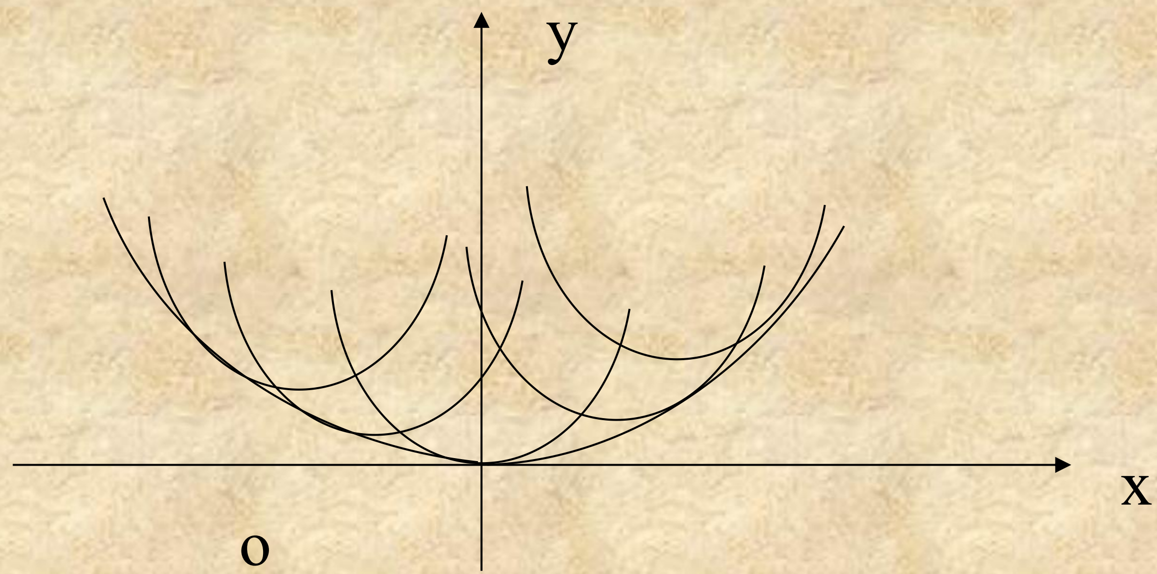
由 $\frac{dp}{dx} - 1 = 0$ 解得 $p = x + c$

将其代入（2.4.7）得方程通解 $\boxed{y = \frac{x^2}{2} + cx + c^2}$

由 $2p - x = 0$ 解得 $p = \frac{x}{2}$

将其代入（2.4.7）又得方程的一个解 $\boxed{y = \frac{x^2}{4}}$

$$y=\frac{x^2}{2}+cx+c^2 \qquad y=\frac{x^2}{4}$$



$y=\dfrac{x^2}{4}$ 与 $y=\dfrac{x^2}{2}+cx+c^2$ 中的每一条积分曲线均相切(如图)。这样的解我们称之为奇解,下一章将给出奇解的确切含义。

二、不显含 y（或 x 的方程）

(3) $F(x, y') = 0$ (2.4.8)

解法： 引入变换 $\boxed{x = \varphi(t)}$ 从(2.4.8)得到 $y' = \dfrac{dy}{dx} = \psi(t)$

引入变换 $\boxed{y' = \psi(t)}$ 从(2.4.8)得到 $x = \varphi(t)$

$$\boxed{dy = \psi(t)dx = \psi(t)\varphi'(t)dt}$$

$$\int dy = \int \psi(t)\varphi'(t)dt \quad \Rightarrow \quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c$$

则，方程的参数形式通解为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c \end{cases}$

二、不显含 y (或 x 的方程)

(3) $F(x, y') = 0$ (2.4.8)

特殊情形

令 $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$

$$x = \varphi(p)$$

$$dy = pdx = p\varphi'(p)dp$$

$$y = \int p\varphi'(p)dp + c$$

通解为 $\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \int p\varphi'(p)dp + c \end{cases}$

二、不显含 y（或 x 的方程）

(4) $F(y, y') = 0$ (2.4.9)

解法：引入变换 $\boxed{y = \varphi(t)}$ 从(2.4.8)得到 $y' = \dfrac{dy}{dx} = \psi(t)$

引入变换 $\boxed{y' = \psi(t)}$ 从(2.4.8)得到 $y = \varphi(t)$

$$\boxed{dx = \frac{1}{\psi(t)}dy = \frac{1}{\psi(t)}\varphi'(t)dt}$$

$$\int dx = \int \frac{1}{\psi(t)}\varphi'(t)dt \quad \Rightarrow \quad x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + c$$

则，方程的参数形式通解为 $\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + c \\ y = \varphi(t) \end{cases}$

二、不显含 y (或 x 的方程)

(4) $F(y,y')=0$ (2.4.9)

特殊情形

令 $y'=\dfrac{dy}{dx}=p$

$$y=\varphi(p)$$

$$dx=\frac{1}{p}dy=\frac{1}{p}\varphi'(p)dp$$

$$x=\int\frac{1}{p}\varphi'(p)dp+c$$

通解为 $\begin{cases} x=\displaystyle\int\frac{\varphi'(p)}{p}dp+c \\ y=\varphi(p) \end{cases}$

若 $F(y,0)=0$ 有实根 $y=k$

则 $y=k$ 也是方程的解。

例2：求解方程 $y^2(1-y')=(2-y')^2$

解： 令 $2-y'=yt$

把 $y'=2-yt$ 代入原方程，得 $y^2(yt-1)=y^2t^2$

由此，得 $\boxed{y=\frac{1}{t}+t}$ 且 $y'=1-t^2$

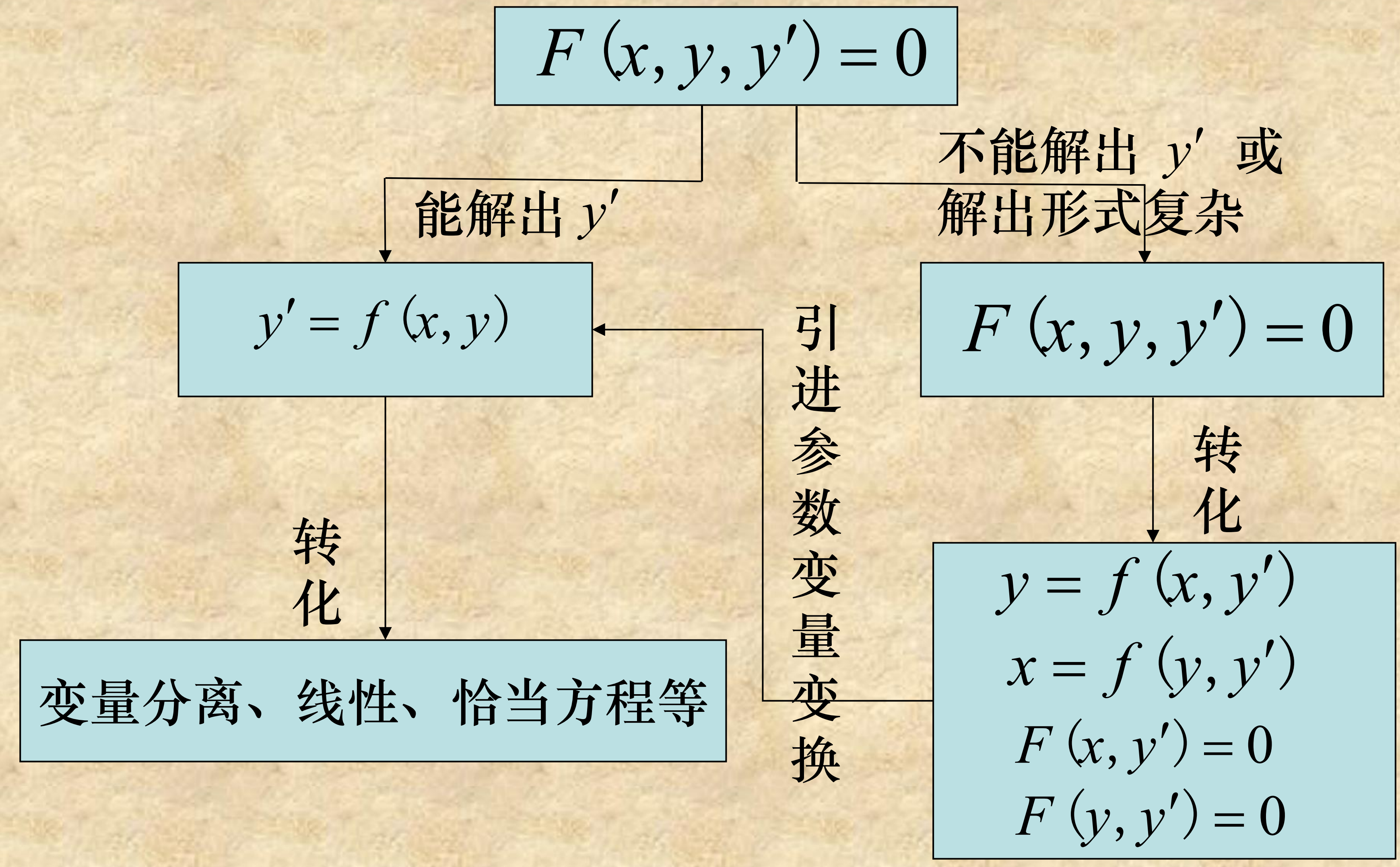
$$\boxed{dx=\frac{dy}{y'}=\frac{1}{1-t^2}d(\frac{1}{t}+t)=-\frac{1}{t^2}dt} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{t}+c}$$

方程的参数形式的通解为 $\begin{cases} x=\frac{1}{t}+c \\ y=\frac{1}{t}+t \end{cases}$

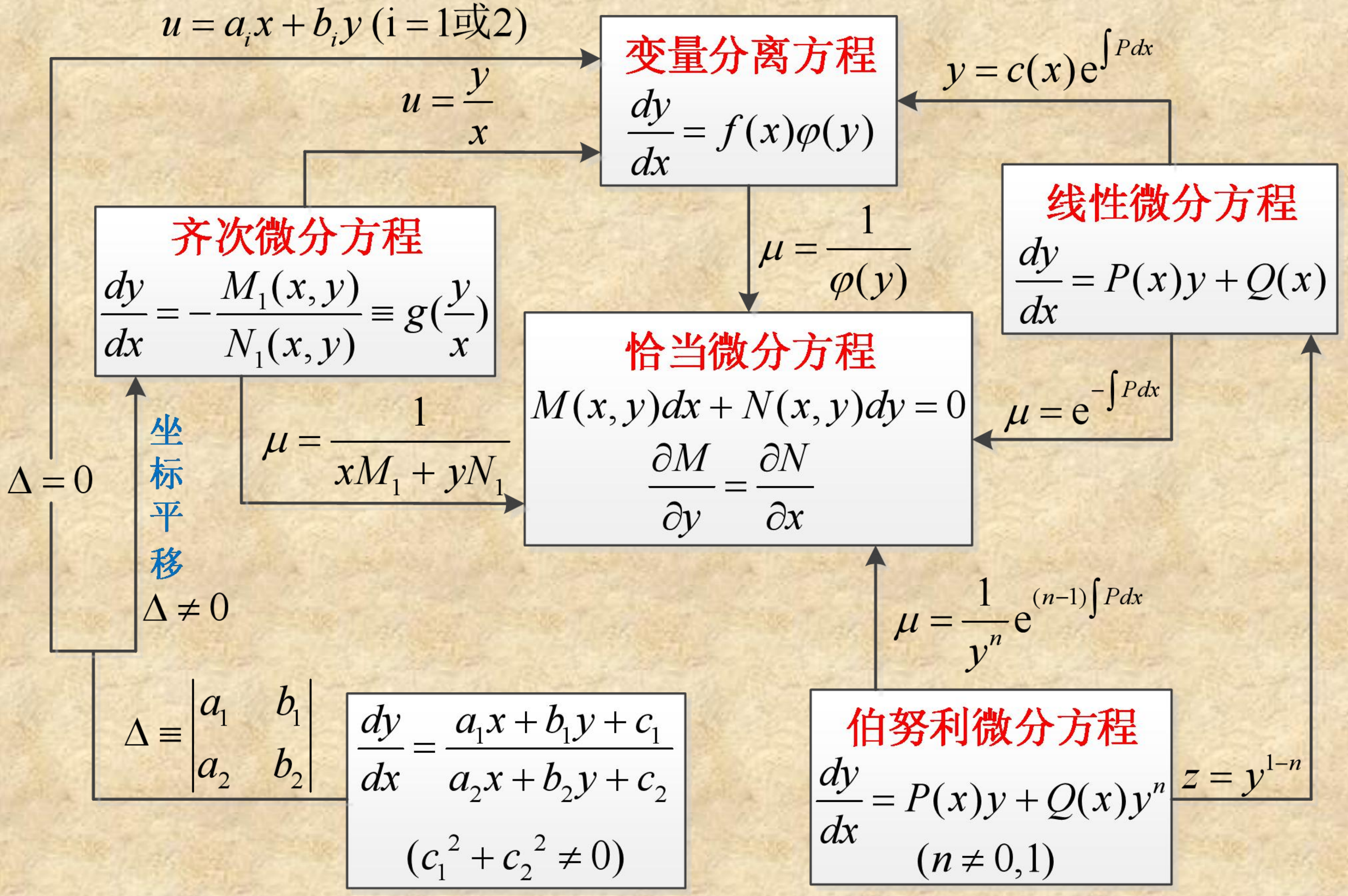
此外, $y=\pm 2$ 也是方程的解。

本节总结

一阶隐式微分方程的一般形式 $F(x, y, y') = 0$



本章总结


$u = a_i x + b_i y$ (i = 1或2)
变量分离方程
$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$
$y = c(x)e^{\int P dx}$
$u = \frac{y}{x}$
线性微分方程
$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)$
齐次微分方程
$\frac{dy}{dx} = -\frac{M_1(x,y)}{N_1(x,y)} \equiv g(\frac{y}{x})$
$\mu = \frac{1}{\varphi(y)}$
恰当微分方程
$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$
$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$
$\mu = e^{-\int P dx}$
$\mu = \frac{1}{xM_1 + yN_1}$
$\Delta = 0$
坐标平移
$\Delta \neq 0$
$\mu = \frac{1}{y^n} e^{(n-1)\int P dx}$
$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$
$(c_1^2 + c_2^2 \neq 0)$
伯努利微分方程
$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n$
$(n \neq 0,1)$
$z = y^{1-n}$