第二章　一阶微分方程的初等解法

§2.2 线性微分方程与常数变易法

§ 2.2.1 线性方程

一阶线性微分方程 $$\boxed{\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)}$$

其中, $P(x), Q(x)$ 是 x 的已知连续函数。

当 $Q(x) = 0$ 时

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = P(x)y} \Rightarrow \boxed{\text{一阶齐次线性微分方程}}$$

当 $Q(x) \neq 0$ 时

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)} \Rightarrow \boxed{\text{一阶非齐次线性微分方程}}$$

§ 2.2.1 线性方程

1.一阶齐次线性方程 $\boxed{\dfrac{dy}{dx}=P(x)y}$ → $\boxed{\text{变量可分离方程}}$

解法步骤

如果 $y\neq 0$

（1）分离变量 $$\frac{dy}{y}=P(x)dx$$

（2）两边积分 $$\int\frac{dy}{y}=\int P(x)dx+C_1$$

§ 2.2.1 线性方程

$$\boxed{\int \frac{dy}{y} = \int P(x)dx + C_1}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = P(x)y}$$

（3）方程通解为：$y = Ce^{\int P(x)dx}, C = \pm e^{C_1}$

其中，C为非零任意数

如果 $y \equiv 0$

直接验证得：$y = 0$ 也为方程的解

因此，原方程通解为:$\boxed{y = Ce^{\int P(x)dx}}$（$C$为任意常数）

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = P(x)y}$$

例1： 求解方程 $\frac{dy}{dx} + y\sin x = 0$

并求出满足初始条件 $y(x = \frac{\pi}{2}) = 2$ 的特解

解： $P(x) = -\sin x$

由公式 $\boxed{y = Ce^{\int P(x)dx}}$ 得

$$y = Ce^{-\int \sin x dx} \Rightarrow y = Ce^{\cos x}$$

由 $y(\frac{\pi}{2}) = 2$ 得 $C = 2$

因此，方程满足初始条件得特解为：$y = 2e^{\cos x}$

§ 2.2.1 线性方程

2.一阶非齐次线性方程 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+\boxed{Q(x)}$

（1）参照 $\frac{dy}{y}=P(x)dx$ 的通解形式 $y=Ce^{\int P(x)dx}$

将常数C变易为x的待定函数 $C(x)$

常数变易法

（2）令 $y=C(x)e^{\int P(x)dx}$

变量变换法

（3）取微分得 $\frac{dy}{dx}=\frac{dC(x)}{dx}e^{\int P(x)dx}+C(x)P(x)e^{\int P(x)dx}$

§ 2.2.1 线性方程

$$\boxed{y = C(x)e^{\int P(x)dx}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}e^{\int P(x)dx} + C(x)P(x)e^{\int P(x)dx}}$$

（4）将（2）（3）式代入原方程

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{\int P(x)dx} + C(x)P(x)e^{\int P(x)dx} = P(x)C(x)e^{\int P(x)dx} + Q(x)$$

即 $$\frac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{-\int P(x)dx}$$

§ 2.2.1 线性方程

$$\boxed{\frac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{-\int P(x)dx}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)}$$

（5）取积分得

$$C(x) = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + \tilde{C}$$

（6）原方程通解

$$y = e^{\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + \tilde{C}\right)$$（$\tilde{C}$为任意常数）

§ 2.2.1 线性方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$$

注意：$y=e^{\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+C\right)$

$$y=\boxed{Ce^{\int P(x)dx}}+\boxed{e^{\int P(x)dx}\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx}$$

齐次方程通解　　非齐次方程特解

非齐次线性方程通解的结构：

其对应齐次方程的通解+自身的一个特解

例2： **求解方程** $\cos x\dfrac{dy}{dx}=y\sin x+\cos^2 x$ $\boxed{\dfrac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)}$

解: 等式变换得 $\dfrac{dy}{dx}=y\tan x+\cos x,\ (\cos x\neq 0)$

$P(x)=\tan x$

此外，当 $\cos x=0$ 时，$y=0$

$Q(x)=\cos x$

方法一：

（1）求其对应其次方程通解 $\boxed{\dfrac{dy}{dx}=y\tan x} \Rightarrow \boxed{\dfrac{dy}{y}=\tan x dx}$

变量分离 $y\neq 0$

通解为: $\boxed{y=\dfrac{c}{\cos x}}$ (c为任意常数)

注: $y=0$ 也为方程的解且包含在通解中(c=0)

$$\boxed{y = \frac{c}{\cos x}} \quad \boxed{\cos x \frac{dy}{dx} = y \sin x + \cos^2 x} \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)}$$

（2）利用常数变易法求解原方程通解

令 $y = \dfrac{c(x)}{\cos x}$，并两边取微分得：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c(x)}{\cos^2 x}\sin x + \frac{1}{\cos x}\frac{d(c(x))}{dx}$$

将上述两式代入原方程并整理得：

$$\frac{d(c(x))}{dx} = \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

解得：$c(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + \tilde{c}$

$$\boxed{c(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\tilde{c}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)}$$

因此，原方程通解为：

$$\boxed{y=\frac{1}{\cos x}(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\tilde{c})} \quad (\tilde{c}\text{为任意常数})$$

方法二：

直接利用公式 $\boxed{y=ce^{\int P(x)dx}+e^{\int P(x)dx}\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx}$

$$P(x)=\tan x,\quad Q(x)=\cos x$$

通解为：$y=e^{\int \tan xdx}(\int \cos xe^{-\int \tan xdx}dx+c)$

$$\boxed{y=e^{-\ln\cos x}(\int \cos xe^{\ln\cos x}dx+c)} \quad (c\text{为任意常数})$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)}$$

例3：求解方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x - y^2}$

解: 原方程不是未知函数y的线性微分方程

（1）转换变量位置 $\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{2x - y^2}{y} = \frac{2}{y}x - y}$

把x看作未知函数，y看作自变量

对于 x，$\frac{dx}{dy}$，上述方程就是一个线性微分方程

变换后方程为：$\boxed{\frac{dx}{dy} = P(y)x + Q(y)}$

$$\boxed{\frac{dx}{dy}=\frac{2}{y}x-y}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dy}=P(y)x+Q(y)}$$

（2）利用公式求方程通解

$$\boxed{x=ce^{\int P(y)dy}+e^{\int P(y)dy}\int Q(y)e^{-\int P(y)dy}dy}$$

$$P(y)=\frac{2}{y},\quad Q(y)=-y$$

原方程通解为：$x=ce^{\int \frac{2}{y}dy}-e^{\int \frac{2}{y}dy}\int ye^{-\int \frac{2}{y}dy}dy$

$$=cy^2-y^2\ln|y|$$

$$=y^2(c-\ln|y|)$$ c为任意常数

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = P(y)x + Q(y)}$$

注意:

有时方程关于 $y, \dfrac{dy}{dx}$ 不是线性的

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)}$$

把x看作未知函数，y看作自变量

$$\Downarrow$$

若方程关于 $x, \dfrac{dx}{dy}$ 是线性的

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = P(y)x + Q(y)}$$

则仍可以根据一阶非齐次线性微分方程求解方法求解

§ 2.2.2 可化为线性方程的方程

伯努利微分方程 $$\boxed{\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n}$$

其中, $P(x), Q(x)$ 是 x 的连续函数, $n \neq 0,1$ 是常数。

利用变量变换将伯努利微分方程化为线性微分方程

当 $y \neq 0$ 时

（1）等式两边同乘以 y^{-n}

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = y^{1-n}P(x) + Q(x)$$

§ 2.2.2 可化为线性方程的方程

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n}$$

（2）引入变量变换 $z = y^{1-n}$

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

（3）代入原方程

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = (1-n)P(x)z + (1-n)Q(x)}$$

一阶线性非齐次微分方程 $\boxed{\frac{dz}{dx} = P(x)z + Q(x)}$

§ 2.2.2 可化为线性方程的方程

$$\boxed{\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x)}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n}$$

（4）方程通解

$$z=Ce^{\int(1-n)P(x)dx}+e^{\int(1-n)P(x)dx}\int(1-n)Q(x)e^{-\int(1-n)P(x)dx}dx$$

（5）代入原变量 $z=y^{1-n}$，原方程通解为：

$$\boxed{y^{1-n}=Ce^{\int(1-n)P(x)dx}+e^{\int(1-n)P(x)dx}\int(1-n)Q(x)e^{-\int(1-n)P(x)dx}dx}$$

此外，当 $n>0$ 时，方程还有解 $y=0$

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n$$

例4：求解方程 $\frac{dy}{dx}=6\frac{y}{x}-xy^2$

解：首先分析方程特征　**伯努利微分方程**

$$P(x)=\frac{6}{x},\ Q(x)=-x,\ n=2$$

方法一：

当 $y\neq 0$ 时

（1）等式两边同乘以 y^{-2}

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{6}{x}y^{-1}-x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=6\frac{y}{x}-xy^2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n}$$

（2）引入变量变换 $z=y^{-1}$

$$\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

（3）代入原方程 $z=y^{-1}$

$$\boxed{\frac{dz}{dx}=-\frac{6}{x}z+x}$$

一阶线性非齐次方程

（4）方程通解 $z=ce^{\int -\frac{6}{x}dx}+e^{\int -\frac{6}{x}dx}\int xe^{\int \frac{6}{x}dx}dx$

$$\boxed{z = ce^{\int -\frac{6}{x}dx} + e^{\int -\frac{6}{x}dx}\int xe^{\int \frac{6}{x}dx}dx}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n}$$

（5）代入原变量 $z = y^{-1}$，原方程通解为：

$$\boxed{y^{-1} = \frac{c}{x^6} + \frac{x^2}{8}} \Rightarrow \boxed{\frac{x^6}{y} - \frac{x^8}{8} = c}$$

此外，方程还有解 $y = 0$

方法二：直接利用公式 $P(x) = \dfrac{6}{x}, Q(x) = -x, n = 2$

$$\boxed{y^{1-n} = ce^{\int (1-n)P(x)dx} + e^{\int (1-n)P(x)dx}\int (1-n)Q(x)e^{-\int (1-n)P(x)dx}dx}$$

原方程通解为：$y^{-1} = \dfrac{c}{x^6} + \dfrac{x^2}{8}$