第二章总结： 主要介绍了几类特殊的一阶微分方程的初等解法

问题1： 绝大多数常微分方程不存在解析解

问题2： 实际问题需求满足某种初值条件的解（包括数值解）

---初值问题（柯西问题）

初值问题的解是否存在？

如果存在是否唯一？

例 方程 $\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}$ 过点 $(0,0)$ 的解就不唯一

解析 $y=\begin{cases}0, & 0\le x\le c\\ (x-c)^2, & c<x\le 1\end{cases}$ 都是方程过点 $(0,0)$ 而定义于区间 $0\le x<1$ 上的解

第三章　一阶微分方程的解的存在定理

§ 3.1　解的存在唯一性定理与逐步逼近法

§ 3.1.1 存在唯一性定理

一阶微分方程 $$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x, y)} \qquad (3.1)$$

这里，$f(x, y)$ 是在矩形域 R 上的连续函数。

$$\boxed{R: |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b} \qquad (3.2)$$

如果存在常数 L>0，使得不等式

$$\boxed{|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|}$$

对所有 $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ 都成立，则称函数 $f(x, y)$ 在R上关于y满足利普希茨条件，L称为利普希茨常数。

§ 3.1.1 存在唯一性定理

定理1 如果 $f(x,y)$ 在矩形域 R 上连续且关于 y 满足利普希茨条件，则方程（3.1）存在唯一的解 $y=\varphi(x)$，定义于区间 $|x-x_0|\le h$ 上，连续且满足初值条件

$$\varphi(x_0)=y_0, \qquad (3.3)$$

这里，$h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right), M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|.$

§ 3.1.1 存在唯一性定理

定理证明运用**皮卡逐步逼近法**的主要思想:

第一，证明求微分方程的初值问题的解等价于求积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx$$

的连续解。

第二，证明积分方程的解的存在唯一性。

注：只讨论区间 $x_0 \le x \le x_0 + h$，区间 $x_0 - h \le x \le x_0$ 上的讨论是一样的。

§ 3.1.1 存在唯一性定理

皮卡逐步逼近法:

（1）任取一连续函数$\varphi_0(x)$代入积分方程$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx$ 右端的y

得 $\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_0(x))dx$，$\varphi_1(x)$ 也是连续函数。

如果$\varphi_1(x) = \varphi_0(x)$，则$\varphi_0(x)$ 就是积分方程的解。

（2）如果$\varphi_1(x) \neq \varphi_0(x)$，则把$\varphi_1(x)$代入积分方程右端的$y$

得 $\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_1(x))dx$，$\varphi_2(x)$ 也是连续函数。

如果$\varphi_2(x) = \varphi_1(x)$，则 $\varphi_1(x)$ 就是积分方程的解。

§ 3.1.1 存在唯一性定理

皮卡逐步逼近法:

（3）如果 $\varphi_2(x) \neq \varphi_1(x)$，继续这个步骤，一般地作函数

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n-1}(x))dx \qquad (3.4)$$

得到连续函数序列 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots \varphi_n(x), \cdots$

如果 $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x)$，则 $\varphi_n(x)$ 就是积分方程的解。

§ 3.1.1 存在唯一性定理

皮卡逐步逼近法:

（4）如果 $\varphi_{n+1}(x) \neq \varphi_n(x)$，可证明上面的函数序列有一个极限函数$\varphi(x)$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$ 存在，对（3.4）取极限，可以得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) &= y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_{n-1}(x))dx \\ &= y_0+\int_{x_0}^{x} \underline{\lim_{n\to\infty} f(x,\varphi_{n-1}(x))}dx \\ &= y_0+\int_{x_0}^{x} \underline{f(x,\varphi(x))}dx\end{aligned}$$

即 $\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx$ 　　则 $\varphi(x)$就是积分方程的解

§ 3.1.1 存在唯一性定理

这种一步步地求出方程的解的方法---**逐步逼近法**

由(3.4) 确定的函数$\varphi_n(x)$称为初值问题(3.1)(3.2)的**第n近似解**

§ 3.1.1 存在唯一性定理

定理1的证明需要证明五个命题：

- ✍ **命题 1** 求解微分方程的初值问题
  等价于求解一个积分方程
- ✍ **命题 2** 构造一个连续的逐步逼近序列
- ✍ **命题 3** 证明此逐步逼近序列一致收敛
- ✍ **命题 4** 证明此收敛的极限函数为所求
  初值问题的解
- ✍ **命题 5** 证明唯一性

§ 3.1.1 存在唯一性定理

命题1 设 $y=\varphi(x)$ 是初值问题
$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\text{.........}(3.1)\\ \varphi(x_0)=y_0\text{.............}(3.3)\end{cases}$$

的解的充要条件是 $y=\varphi(x)$ 是积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx,\quad x_0\le x\le x_0+h\text{.............}(3.5)$$

的定义于 $x_0\le x\le x_0+h$ 上的连续解。

证明:

- 微分方程的初值问题的解满足积分方程（3.5）。
- 积分方程（3.5）的连续解是微分方程的初值问题的解。

§ 3.1.1 存在唯一性定理

证明:

因为 $y=\varphi(x)$ 是方程(3.1)的解，故有: $\dfrac{d\varphi(x)}{dx}=f(x,\varphi(x))$

两边从x_0 到 x 积分得到:

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx,\quad x_0\le x\le x_0+h$$

把(3.3)代入上式,即有:

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx,\quad x_0\le x\le x_0+h$$

因此, $y=\varphi(x)$是积分方程在 $x_0\le x\le x_0+h$ 上的连续解.

§ 3.1.1 存在唯一性定理

反之，如果 $y=\varphi(x)$ 是 (3.5) 的连续解，则有:

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx, \quad x_0 \le x \le x_0+h ....(3.6)$$

微分之，得到: $\dfrac{d\varphi(x)}{dx}=f(x,\varphi(x))$

又把 $x=x_0$ 代入(3.6)，得到: $\varphi(x_0)=y_0$

因此，$y=\varphi(x)$ 是方程(3.1)定义于 $x_0 \le x \le x_0+h$

上，且满足初始条件(3.3)的解。

命题1证毕

§ 3.1.1 存在唯一性定理

现在取 $\varphi_0(x)=y_0$，构造皮卡逐步逼近函数序列如下:

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=y_0\\ \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi, \quad x_0\le x\le x_0+h \quad (n=1,2,\cdots)\end{cases} \qquad \text{............(3.7)}$$

命题2 对于所有的 (3.7) 中函数 $\varphi_n(x)$ 在 $x_0\le x\le x_0+h$ 上有定义、连续且满足不等式

$$|\varphi_n(x)-y_0|\le b \quad \text{..(3.8)}$$

§ 3.1.1 存在唯一性定理

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))d\xi, \quad x_0 \le x \le x_0 + h \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3.7)$$

证明:

当 $n=1$ 时，$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi$

显然, $\varphi_1(x)$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上有定义、连续且满足

$$\left|\varphi_1(x) - y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi\right|$$

$$\le \int_{x_0}^{x} \left|f(\xi, y_0)\right| d\xi \le M(x - x_0) \le Mh \le b$$

即命题2 当 n=1 时成立。

§3.1.1 存在唯一性定理

现在用数学归纳法证明对于任何正整数 n ，命题2都成立。

假设命题2当n=k时成立，即 $\varphi_k(x)$ 在 $x_0 \le x \le x_0+h$ 上有定义、连续且满足不等式 $|\varphi_k(x)-y_0| \le b$，这时，

$$\varphi_{k+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_k(\xi))d\xi$$

由假设，命题2当n=k时成立，得知 $\varphi_k(x)$ 在 $x_0 \le x \le x_0+h$ 上有定义、连续且有

$$|\varphi_{k+1}(x)-y_0| \le \int_{x_0}^{x} |f(\xi,\varphi_k(\xi))| d\xi \le M(x-x_0) \le Mh \le b$$

即命题2当n=k+1时也成立。由数学归纳法知命题2对于所有n均成立。

命题2证毕

§ 3.1.1 存在唯一性定理

命题3 函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上是一致收敛的。

证明:

考虑级数:

$$\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)], \quad x_0 \le x \le x_0 + h \qquad (3.9)$$

它的部分和为: $\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n}[\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)] = \varphi_n(x)$

因此，要证明函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上一致收敛，

只需证明级数（3.9）在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上一致收敛。

§ 3.1.1 存在唯一性定理

进行如下估计：$\boxed{\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi, \quad x_0-h\le x\le x_0+h}$

由（3.7）以及利普希茨条件，得

$$\left|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)\right|\le\int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\varphi_0(\xi))\right|d\xi\le M(x-x_0) \qquad (3.10)$$

$$\left|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\right|\le\int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\varphi_1(\xi))-f(\xi,\varphi_0(\xi))\right|d\xi$$

$$\le L\int_{x_0}^{x}\left|\varphi_1(\xi)-\varphi_0(\xi)\right|d\xi$$

$$\le L\int_{x_0}^{x}M(\xi-x_0)d\xi$$

$$\le\frac{ML}{2!}(x-x_0)^2$$

§ 3.1.1 存在唯一性定理

设对于正整数 n ，不等式 $\left|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)\right| \le \dfrac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n$ 成立，

则由利普希茨条件，当 $x_0 \le x \le x_0+h$ 时，有

$$
\begin{aligned}
\left|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)\right| &\le \int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\varphi_n(\xi))-f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\right|d\xi \\
&\le L\int_{x_0}^{x}\left|\varphi_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)\right|d\xi \\
&\le \frac{ML^n}{n!}\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)^n\,d\xi \\
&= \frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}
\end{aligned}
$$

§ 3.1.1 存在唯一性定理

由数学归纳法得到：对于所有的正整数 k，有如下的估计:

$$\left|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)\right| \le \frac{ML^{k-1}}{k!}(x-x_0)^k, \quad x_0 \le x \le x_0+h \tag{3.11}$$

由此可知，当 $x_0 \le x \le x_0+h$ 时

$$\left|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)\right| \le \frac{ML^{k-1}}{k!}h^k \tag{3.12}$$

(3.12)的右端是正项收敛级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ML^{k-1}\dfrac{h^k}{k!}$ 的一般项，

由魏氏判别法, 级数(3.12) 在 $x_0 \le x \le x_0+h$ 上一致收敛,

因而序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 也在 $x_0 \le x \le x_0+h$ 上一致收敛。

命题3证毕

§ 3.1.1 存在唯一性定理

现设 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$，则 $\varphi(x)$ 也在 $x_0\le x\le x_0+h$ 上连续，

且由(3.8) 可知 $|\varphi(x)-y_0|\le b$

命题4 $\varphi(x)$ 是积分方程(3.5)的定义于 $x_0\le x\le x_0+h$ 上的连续解。

证明:

由利普希兹条件

$$|f(x,\varphi_n(x))-f(x,\varphi(x))|\le L|\varphi_n(x)-\varphi(x)|$$

以及 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0\le x\le x_0+h$ 上一致收敛于 $\varphi(x)$

即知序列 $\{f(x,\varphi_n(x))\}$ 在 $x_0\le x\le x_0+h$ 一致收敛于 $f(x,\varphi(x))$

§ 3.1.1 存在唯一性定理

因而，对(3.7)两边取极限，得到:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) &= y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi \\ &= y_0+\int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty} f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi\end{aligned}$$

即 $$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi(\xi))d\xi$$

这就是说, $\varphi(x)$ 是积分方程(3.5)的定义于$x_0\le x\le x_0+h$上的连续解。

命题4 证毕

§ 3.1.1 存在唯一性定理

命题5 若 $\psi(x)$ 也是积分方程(3.5)的定义于 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上的一个连续解，则 $\varphi(x) \equiv \psi(x), \quad x_0 \le x \le x_0 + h$

证明:

首先证明 $\psi(x)$ 也是序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 的一致收敛极限函数。

为此，从

$$\varphi_0(x) = y_0$$

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi)d\xi) \quad (n \ge 1)$$

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \psi(\xi))d\xi$$

§ 3.1.1 存在唯一性定理

$$\boxed{\begin{gathered}\varphi_0(x) = y_0 \\ \psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi,\psi(\xi))d\xi\end{gathered}}$$

进行如下的估计

$$\left|\varphi_0(x) - \psi(x)\right| \le \int_{x_0}^{x} \left|f(\xi,\psi(\xi))\right| d\xi \le M(x - x_0)$$

$$\begin{aligned}\left|\varphi_1(x) - \psi(x)\right| &\le \int_{x_0}^{x} \left|f(\xi,\varphi_0(\xi)) - f(\xi,\psi(\xi))\right| d\xi \\ &\le L\int_{x_0}^{x} \left|\varphi_0(\xi) - \psi(\xi)\right| d\xi \\ &\le ML\int_{x_0}^{x} (\xi - x_0) d\xi \\ &= \frac{ML}{2!}(x - x_0)^2\end{aligned}$$

§ 3.1.1 存在唯一性定理

现设 $\left|\varphi_{n-1}(x)-\psi(x)\right| \le \dfrac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n$

则有 $\left|\varphi_n(x)-\psi(x)\right| \le \int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))\right|d\xi$

$$\le L\int_{x_0}^{x}\left|\varphi_{n-1}(\xi)-\psi(\xi)\right|d\xi$$

$$\le \frac{ML^n}{n!}\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)^n\,d\xi$$

$$=\frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

§ 3.1.1 存在唯一性定理

故由数学归纳法得知对于所有的正整数 n ，有下面的估计式

$$|\varphi_n(x)-\psi(x)| \le \frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (3.13)$$

因此，在 $x_0 \le x \le x_0+h$ 上有:

$$|\varphi_n(x)-\psi(x)| \le \frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1} \qquad (3.14)$$

$\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}$ 是收敛级数的公项，故 $n \to \infty$ 时 $\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1} \to 0$

因而 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0 \le x \le x_0+h$ 上一致收敛于 $\psi(x)$

根据极限的唯一性，即得: $\varphi(x) \equiv \psi(x), \quad x_0 \le x \le x_0+h$

命题5证毕

§ 3.1.1 存在唯一性定理

例 求初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的第三次近似解。

解 $\varphi_0(x) = 0$ $\quad \varphi_1(x) = \int_0^x [x^2 + \varphi_0^2(x)]dx = \dfrac{x^3}{3}$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x [x^2 + \varphi_1^2(x)]dx = \int_0^x [x^2 + \frac{x^6}{3^2}]dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x [x^2 + \varphi_2^2(x)]dx = \int_0^x [x^2 + \frac{x^6}{3^2} + \frac{2x^{10}}{189} + \frac{x^{14}}{3969}]dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}$$

$$\boxed{\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi)d\xi)}$$

§ 3.1.1 存在唯一性定理

一阶隐式微分方程的解的存在唯一性

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.15) \\ y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.16) \end{cases}$$

定理 2 如果在点 (x_0, y_0, y_0') 的某一邻域中，

$a)$ $F(x,y,y')$ 对所有的变元 (x,y,y') 连续，且存在连续的偏导数；

$b)$ $F(x_0, y_0, y_0')=0$

$c)$ $\dfrac{\partial F(x_0, y_0, y_0')}{\partial y'} \neq 0$

则方程（3.15）存在唯一解 $y=y(x), |x-x_0| \le h$

满足初值条件（3.16）

§ 3.1.1 存在唯一性定理

事实上，由条件知 $F(x,y,y')=0$ 所确定的隐函数

$y'=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域内存在且连续，且

$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_{y'}}$ 在 (x_0,y_0) 邻域内连续，在以 (x_0,y_0)

为中心的某一闭矩形区域 D 中有界，所以 $f(x,y)$

在D 中关于 y 满足Lipschitz条件。

由解的存在唯一性定理，$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$

存在区间中的 h 可足够小。同时，有 $\begin{aligned}&y(x_0)=y_0\\ &y'(x_0)=y'_0=f(x_0,y_0)\end{aligned}$

§ 3.1.2 近似计算和误差估计

第 n 次近似解

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))d\xi \quad x_0 \le x \le x_0 + h \end{cases}$$

第 n 次近似解的误差公式

$$\boxed{\left|\varphi_n(x) - \varphi(x)\right| \le \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1}}$$

§ 3.1.2 近似计算和误差估计

例1 方程 $\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 定义在矩形域

$R:\ -1\le x\le 1,\ \ -1\le y\le 1,$ 试确定经过点

(0,0) 的解的存在区间，并求在此区间上与真

正解的误差不超过0.05 的近似解的表达式。

解 满足解的存在唯一性定理的条件

$$M=\max_{(x,y)\in R}\left|x^2+y^2\right|=2 \qquad h=\min(a,\frac{b}{M})=\min(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

Lipschitz 常数取为 ***L=2***，因为 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|=|2y|\le 2=L$

§ 3.1.2 近似计算和误差估计

$$\left|\varphi_n(x)-\varphi(x)\right| \le \frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1} = \frac{M}{L}\frac{1}{(n+1)!}(Lh)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} < 0.05 \qquad n = 3$$

$$\varphi_0(x) = 0 \qquad \varphi_1(x) = \int_0^x [x^2 + \varphi_0^2(x)]dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x [x^2 + \varphi_1^2(x)]dx = \int_0^x [x^2 + \frac{x^6}{3^2}]dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x [x^2 + \varphi_2^2(x)]dx = \int_0^x [x^2 + \frac{x^6}{3^2} + \frac{2x^{10}}{189} + \frac{x^{14}}{3969}]dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}$$