第五章 线性微分方程组

§5.2 线性微分方程组的一般理论

§ 5.2. 线性微分方程组的一般理论

线性微分方程组 $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)}$

解的结构问题

当 $\mathbf{f}(t) \neq 0$ 时

$\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)}$ ➡ 非齐次线性微分方程组

当 $\mathbf{f}(t) = 0$ 时

$\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}}$ ➡ 齐次线性微分方程组

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{5.14}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{5.15}$$

定理2（叠加原理） 如果 $\boldsymbol{u}(t)$和 $\boldsymbol{v}(t)$是(5.15)的解，则它们的线性组合 $\alpha\,\boldsymbol{u}(t)+\beta\,\boldsymbol{v}(t)$ 也是(5.15)的解，这里 α,β 是任意常数。

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

定义在区间 $a \le t \le b$ 上的向量函数

$$\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_m(t)$$

是线性相关的，如果存在不全为零的常数

$c_1, c_2, \cdots, c_m$， 使得等式

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + c_m\boldsymbol{x}_m(t) \equiv \boldsymbol{0}, \quad a \le t \le b$$

成立；否则，$\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_m(t)$ 为线性无关的。

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

设有 n 个定义在区间 $a \le t \le b$ **上的向量函数**

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2(t) = \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{x}_n(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

由这n个向量函数构成的行列式，

$$W[\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)] \equiv W(t) \equiv \det \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

称为这些向量函数的朗斯基行列式。

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

定理3 **如果向量函数** $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ **在区间** $a \le t \le b$ **上线性相关，则它们的伏朗斯基行列式**

$$W(t) \equiv 0, \quad a \le t \le b$$

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

证明 由假设，存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使得

$$c_1\mathbf{x}_1(t)+c_2\mathbf{x}_2(t)+\cdots+c_n\mathbf{x}_n(t)\equiv\mathbf{0},\ a\le t\le b \tag{5.16}$$

$$\begin{cases} c_1x_{11}(t)+c_2x_{12}(t)+\cdots+c_nx_{1n}(t)=0 \\ c_1x_{21}(t)+c_2x_{22}(t)+\cdots+c_nx_{2n}(t)=0 \\ \cdots\cdots \\ c_1x_{n1}(t)+c_2x_{n2}(t)+\cdots+c_nx_{nn}(t)=0 \end{cases}$$

其系数行列式恰是 $W(t)$

非零解 $\quad W(t)\equiv 0(a\le t\le b)$ **证毕**

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

$$\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad \mathbf{(5.15)}}$$

定理4 如果(5.15)的解 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关，那么，它们的伏朗斯基行列式 $W(t) \neq 0 (a \leq t \leq b)$

证明 **用反证法。**

设有某一个 $t_0 (a \leq t_0 \leq b)$ 使得 $W(t_0) = 0,$

考虑下面的齐次线性代数方程组:

$$c_1 \boldsymbol{x}_1(t_0) + c_2 \boldsymbol{x}_2(t_0) + \cdots + c_n \boldsymbol{x}_n(t_0) = \boldsymbol{0} \qquad (5.17)$$

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

它的系数行列式 $W(t_0)=0$ ，所以(5.17)有非零解

$c_{1,}c_2,\cdots,c_n$， $c_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+c_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t_0)=\boldsymbol{0}$

以这个非零解作向量函数

$$\mathbf{x}(t)\equiv\tilde{c}_1\mathbf{x}_1(t)+\tilde{c}_2\mathbf{x}_2(t)+\cdots+\tilde{c}_n\mathbf{x}_n(t) \qquad \textbf{(5.18)}$$

根据定理2易知 $\mathbf{x}(t)$ 是(5.15)的解，且满足初始条件

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{0} \qquad \textbf{(5.19)}$$

而在 $a\le t\le b$ 上恒等于零的向量函数 $\mathit{0}$ 也是(5.15)的满足初始条件(5.19)的解。

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

由解的唯一性，知道 $\boldsymbol{x}(t)\equiv \boldsymbol{0}$ 即

$$\tilde{c}_1\mathbf{x}_1(t)+\tilde{c}_2\mathbf{x}_2(t)+\cdots+\tilde{c}_n\mathbf{x}_n(t)=\mathbf{0},\ a\le t\le b$$

因为 $c_{1,}c_2,\cdots,c_n$ 不全为零，这就与

$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关矛盾。 **定理得证。**

结论 **由(5.15) 的解** $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ **作成的伏朗斯基行列式** $W(t)$ **或者恒等于零，或者恒不等于零。**

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

定理5　**(5.15)一定存在 n 个线性无关的解。**

解的存在唯一性定理

$$\mathbf{x}_1(t_0)=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\mathbf{x}_2(t_0)=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\mathbf{x}_n(t_0)=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

$W(t_0)=1\neq 0$, 根据定理4，$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$

线性无关　　**定理得证。**

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

$$\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad \textbf{(5.15)}}$$

定理6 如果 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 是 (5.15) n 个线性无关的解

则(5.15)的任一解 $x(t)$ 均可表示为

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)$$

这里 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是相应的确定常数。

证明 任取(5.15)的任一解 $\mathbf{x}(t)$，它满足 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, t_0 \in [a,b]$

令 $\mathbf{x}(t_0) = c_1\mathbf{x}_1(t_0) + c_2\mathbf{x}_2(t_0) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t_0) \quad (5.20)$

上式看作是以 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为未知量的线性代数方程组，

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

系数行列式就是$W(t_0)$，因为 $\mathbf{x}_1(t),\mathbf{x}_2(t),\cdots,\mathbf{x}_n(t)$

线性无关，则 $W(t_0)\neq 0$，(5.20)有唯一解

$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得 $\tilde{c}_1\mathbf{x}_1(t_0)+\tilde{c}_2\mathbf{x}_2(t_0)+\cdots+\tilde{c}_n\mathbf{x}_n(t_0)=\mathbf{x}(t_0)$

作向量函数 $c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)$

它显然是(5.15)的解，且满足条件

$$\tilde{c}_1\mathbf{x}_1(t_0)+\tilde{c}_2\mathbf{x}_2(t_0)+\cdots+\tilde{c}_n\mathbf{x}_n(t_0)=\mathbf{x}(t_0)$$

$\boldsymbol{x}(t)$与 $c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)$ 具有相同的

初始条件，因此由解的存在唯一性条件可知

$$x(t)=\tilde{c}_1x_1(t)+\tilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\tilde{c}_nx_n(t)$$

证毕

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

推论1　(5.15)线性无关解的最大个数等于 n 。

基本解组：(5.15)的 n 个线性无关解。

解矩阵：由(5.15) n 个解的列构成的矩阵。

基解矩阵：由(5.15) n 个线性无关解的列构成的矩阵。

标准基解矩阵：$\Phi(t_0) = \mathbf{E}$　$\det\boldsymbol{\Phi}(t) \neq 0$

$\Phi(t)$ 表示由 (5.15)的 n 个线性无关的解作为列构成的基解矩阵

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$$

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

定理1* (5.15)一定存在一个基解矩阵 $\Phi(t)$.

如果 $\psi(t)$ 是(5.15)的任一解，则 $\boldsymbol{\psi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}$

这里$\boldsymbol{c}$是确定的n维常数列向量。

定理2* (5.15)的一个解矩阵是基解矩阵的充要条件是

$$\det\Phi(t)\neq 0 \quad (a\le t\le b)$$

而且，如果对某一个 $t_0\in[a,b]$, $\det\boldsymbol{\Phi}(t_0)\neq 0$,

则 $\det\Phi(t)\neq 0 \quad (a\le t\le b)$

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

例1 **验证** $\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$ **是方程组**

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x},\ 其中\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

的基解矩阵。

解 首先证明 $\Phi(t)$ 是解矩阵。令 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$ 表示 $\Phi(t)$ 的第一列，$\boldsymbol{\varphi}_2(t)$ 表示 $\Phi(t)$ 的第二列

§5.2.1 齐次线性微分方程组

$$\varphi_1'(t)=\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\varphi_1(t)$$

$$\varphi_2'(t)=\begin{bmatrix} e^t+te^t \\ e^t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} te^t \\ e^t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\varphi_2(t)$$

这表示 $\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t)$ 是方程组的解，因此 $\boldsymbol{\Phi}(t)=[\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t)]$ 是解矩阵。

又因为 $\det\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{2t}\neq 0$，所以 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是基解矩阵。

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

推论1* **如果$\Phi(t)$是(5.15)在区间$a \le t \le b$上的基解矩阵，C 是非奇异$n \times n$常数矩阵，那么，$\Phi(t)C$也是(5.15)在区间 $a \le t \le b$上的基解矩阵。**

证明 令 $\Psi(t) \equiv \Phi(t)\mathbf{C} \quad (a \le t \le b)$

$$\Psi'(t) \equiv \Phi'(t)\mathbf{C} \equiv \mathbf{A}(t)\Phi(t)\mathbf{C} \equiv \mathbf{A}(t)\Psi(t)$$ $\Psi(t)$是解矩阵。

$$\det \Psi(t) = \det \Phi(t) \cdot \det \mathbf{C} \ne 0 \quad (a \le t \le b)$$

$\Psi(t) \equiv \Phi(t)\mathbf{C}$ 是(5.15)的基解矩阵。 **证毕**

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

推论2* 如果 $\Phi(t)$,$\Psi(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上是方程组(5.15)的两个基解矩阵，那么，存在一个非奇异 $n \times n$ 常数矩阵C，使得在区间 $a \le t \le b$ 上 $\Psi(t)=\Phi(t)C$

证明 $\Phi(t)$ 基解矩阵， $\Phi^{-1}(t)$ 存在，

令 $\Phi^{-1}(t)\cdot\Psi(t)=X(t)$ 或 $\Psi(t)=\Phi(t)X(t)$

$$\mathbf{A}(t)\Psi(t)\equiv\Psi'(t)\equiv\Phi'(t)\cdot\mathbf{X}(t)+\Phi(t)\cdot\mathbf{X}'(t)$$

$$=A(t)\Phi(t)\cdot X(t)+\Phi(t)\cdot X'(t)=A(t)\Psi(t)+\Phi(t)\cdot X'(t)$$

$\Phi(t)\cdot X'(t)=0$ $X'(t)=0$ $X(t)=C$

$\Psi(t)=\Phi(t)C$ $\det C=\det\Phi^{-1}(0)\cdot\Psi(0)\neq 0$ 证毕

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

推论3* **如果Φ(t)在区间$a \le t \le b$上是某方程组的基解矩阵，那么，这个方程组为**

$$\mathbf{x}' = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t)\mathbf{x} \quad a \le t \le b$$

证明 设所求方程组为 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$

则 $\Phi'(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t) \quad a \le t \le b$

故 $\mathbf{A}(t) = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t) \quad a \le t \le b$

证毕

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

例 已知一个一阶线性齐次方程组的基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}，求该方程组。$$

解 $$\Phi^{-1}(t)=\frac{1}{e^{4t}}\begin{bmatrix} e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$A(t)=\Phi'(t)\Phi^{-1}(t)=\frac{1}{e^{4t}}\begin{bmatrix} 2e^{2t} & e^{2t}+2te^{2t} \\ 0 & 2e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1+2t \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

所求方程组为 $\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

§ 5.2.1 齐次线性微分方程组

练习

已知一个一阶线性齐次方程组的基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{bmatrix}$$，求该方程组。

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \qquad \textbf{(5.14)}$$

性质1 如果 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是(5.14)的解，$\boldsymbol{\psi}(t)$ 是对应齐次方程组(5.15)的解，则 $\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\psi}(t)$ 是(5.14)的解。

$$\left[\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\psi}(t)\right]' = \boldsymbol{\varphi}'(t)+\boldsymbol{\psi}'(t)$$

$$= \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{f}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\psi}(t)$$

$$= \boldsymbol{A}(t)\left[\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\psi}(t)\right]+\boldsymbol{f}(t)$$

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \qquad \textbf{(5.14)}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \qquad \textbf{(5.15)}$$

性质2 如果 $\tilde{\varphi}(t), \overline{\varphi}(t)$ 是(5.14)的任意两个解，

则 $\tilde{\varphi}(t) - \overline{\varphi}(t)$ 是(5.15)的解。

$$[\tilde{\varphi}(t) - \overline{\varphi}(t)]'$$

$$= [\mathbf{A}(t)\tilde{\varphi}(t) + \mathbf{f}(t)] - [\mathbf{A}(t)\overline{\varphi}(t) + \mathbf{f}(t)]$$

$$= \mathbf{A}(t)[\tilde{\varphi}(t) - \overline{\varphi}(t)]$$

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

定理7 设$\boldsymbol{\Phi}(t)$是(5.15)的基解矩阵，$\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)$是(5.14)的某一解，则(5.14)的任一解$\boldsymbol{\varphi}(t)$都可以表示为:

$$\varphi(t) = \Phi(t)\mathbf{c} + \overline{\varphi}(t) \qquad (5.23)$$

这里 c 是确定的常数列向量。

证明 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是(5.14)的任一解，$\boldsymbol{\varphi}(t) - \overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)$是齐次方程组(5.15)的解，因此存在常列向量 c ，使得

$$\varphi(t) - \overline{\varphi}(t) = \Phi(t)\mathbf{c} \Rightarrow \varphi(t) = \Phi(t)\mathbf{c} + \overline{\varphi}(t)$$ **证毕**

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

为了寻求(5.14)的通解，只要知道(5.14) 对应齐的齐线性方程组(5.15)的基解矩阵和自身的一个解即可。已知(5.15)的基解矩阵 $\mathbf{\Phi}(t)$ ，则可用常数变易法求(5.14)的特解 $\varphi(t)$

假设(5.14)存在形如 $\varphi(t)=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}(t)$ (5.24)

的解，则 $\mathbf{\Phi}'(t)\mathbf{c}(t)+\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}(t)+\mathbf{f}(t)$

而

$$\mathbf{\Phi}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)$$

因此

$$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}'(t)=\mathbf{f}(t) \qquad (5.25)$$

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

$$\mathbf{c}'(t)=\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{f}(t)$$

$$\boxed{\mathbf{c}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds, \qquad t_0,t\in[a,b]}$$

其中 $\boldsymbol{c}(t_0)=\boldsymbol{0}$。这样，(5.24)变为

$$\boxed{\varphi(t)=\mathbf{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds \quad t_0,t\in[a,b] \qquad (5.26)}$$

如果(5.14)有一个形如(5.24)的解 $\varphi(t)$, 则 $\varphi(t)$

由(5.26)决定。反之易证明由(5.26)决定的向量函数 $\varphi(t)$

一定是(5.14)的解。

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

$$\boxed{\varphi(t) = \mathbf{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds \quad t_0, t \in [a,b] \qquad (5.26)}$$

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \underline{\boldsymbol{\Phi}'(t)}\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds + \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)$$

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\left(\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds\right) + \boldsymbol{f}(t)$$

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\underline{\boldsymbol{\varphi}(t)} + \boldsymbol{f}(t)$$

§5.2.2 非齐次线性微分方程组

定理8 如果 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是(5.15)的基解矩阵，则向量函数

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \qquad (5.26)$$

是(5.14)的解，且满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{0}$

(5.14) 满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ **的解是**

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \qquad \textbf{(5.27)}$$

(5.14) 的通解是 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds$

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

例2 试求下面初值问题的解

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}，\text{其中，}\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解
$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + e^{-t} \\ x_2' = \qquad\ \ x_2 \end{cases}$$

齐次

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = \qquad\ \ x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c_1 e^t + c_2 t e^t \\ x_2 = c_2 e^t \end{cases}$$

$$\begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{matrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{matrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} te^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)=\frac{1}{e^{2s}}\begin{bmatrix} e^s & -se^s \\ 0 & e^s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}e^{-s} \qquad \boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=E$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}e^{-s}\cdot\begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix}ds\right\}$$

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\int_0^t \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-s}\cdot\begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2s} \\ 0 \end{bmatrix} ds\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(e^{-2t}+1) \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} te^t-\frac{1}{2}(e^t+e^{-t}) \\ e^t \end{bmatrix}$$

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

分析常数变易法

$$\varphi(t)=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}(t)=\mathbf{x}_1(t)c_1(t)+\mathbf{x}_2(t)c_2(t)+\cdots+\mathbf{x}_n(t)c_n(t)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{f}(t) \tag{5.25}$$

由(5.25)

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \cdots \\ c_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

$$W(t)=\det\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix} \qquad \tilde{W}_k(t)=\det\begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & f_1(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \cdots & f_2(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & f_n(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$c_k'(t)=\frac{\tilde{W}_k(t)}{W(t)} \qquad k=1,2,\cdots,n$$

$$c_k(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{W_k(s)}{W(s)}ds \qquad k=1,2,\cdots,n$$

$$\varphi(t)=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}(t)=\mathbf{x}_1(t)c_1(t)+\mathbf{x}_2(t)c_2(t)+\cdots+\mathbf{x}_n(t)c_n(t)$$

$$\boxed{\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}_k(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\tilde{W}_k(s)}{W(s)}ds}$$

是(5.14)的满足$\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{0}$的解。

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

应用到n阶线性方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad (5.21)$$

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \qquad (5.28)$$

推论3 如果 $a_1(t),a_2(t),\cdots,a_n(t),f(t)$ 是区间 $a\le t\le b$ 上的连续函数，$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是对应齐次方程的基本解组，那么，非齐次线性方程（5.28）满足初始条件 $\varphi(t_0)=0,\varphi'(t_0)=0,\cdots,\varphi^{(n-1)}(t_0)=0(t_0\in[a,b])$ 的解为

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

$$\boxed{\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(t)\int_{t_0}^{t}\{\frac{W_k[x_1(s),x_2(s),\cdots x_n(s)]}{W[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]}\}f(s)ds \qquad \textbf{(5.29)}}$$

$$W(t)=\det\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

$$W_k(t)=\det\begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & 0 & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \cdots & 0 & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & 1 & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = f(t) \qquad (5.28)$$

(5.28)的常数变易公式是

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t)\int_{t_0}^{t} \{\frac{W_k[x_1(s), x_2(s), \cdots x_n(s)]}{W[x_1(s), x_2(s), \cdots, x_n(s)]}\} f(s)ds$$

(5.28)的通解可以表示为

$$x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) + \varphi(t)$$

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

当n=2时，公式(5.29)就是

$$\varphi(t) = x_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{W_1[x_1(s), x_2(s)]}{W[x_1(s), x_2(s)]} f(s)ds$$

$$+ x_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{W_2[x_1(s), x_2(s)]}{W[x_1(s), x_2(s)]} f(s)ds$$

$$W_1[x_1(s), x_2(s)] = \begin{vmatrix} 0 & x_2(s) \\ 1 & x_2'(s) \end{vmatrix} = -x_2(s)$$

$$W_2[x_1(s), x_2(s)] = \begin{vmatrix} x_1(s) & 0 \\ x_1'(s) & 1 \end{vmatrix} = x_1(s)$$

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

因此，当n=2时常数变易公式变为

$$\varphi(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{x_2(t)x_1(s)-x_1(t)x_2(s)}{W[x_1(s),x_2(s)]}f(s)ds \qquad \textbf{(5.31)}$$

而通解就是 $x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\varphi(t)$ **(5.32)**

这里 c_1,c_2 **任意常数。**

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

例3 试求方程 $x'' + x = \tan t$ 的一个特解。

解 易知对应的齐线性方程 $x'' + x = 0$ 的基本解组为:

$$x_1(t) = \cos t, x_2(t) = \sin t$$

利用公式(5.31)来求方程的一个解,

$$W[x_1(t), x_2(t)] = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} \equiv 1$$

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{x_2(t)x_1(s) - x_1(t)x_2(s)}{W[x_1(s), x_2(s)]} f(s)ds$$

$$= \int_0^t (\sin t\cos s - \cos t\sin s)\tan s ds$$

§ 5.2.2 非齐次线性微分方程组

$$\int_0^t (\sin t \cos s - \cos t \sin s)\tan s\, ds$$

$$= \sin t \int_0^t \sin s\, ds - \cos t \int_0^t \sin s \tan s\, ds$$

$$= \sin t\,(1-\cos t) + \cos t\,(\sin t - \ln\left|\sec t + \tan t\right|)$$

$$= \sin t - \cos t \ln\left|\sec t + \tan t\right|$$

注意，因为sint是对应的齐线性方程的解，所以函数

$$\bar{\varphi}(t) = -\cos t \ln\left|\sec t + \tan t\right|$$

也是原方程的一个解。