# 第二章　一阶微分方程的初等解法

## §2.3 恰当微分方程与积分因子

# § 2.3.1 恰当微分方程

一阶微分方程一般形式 $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)}$

$\Downarrow$

微分形式 $\boxed{f(x, y)dx - dy = 0}$

把x和y平等看待：若x为自变量，则 y 就是 x 的函数；

若y为自变量，则 x 就是 y 的函数

则上式可写成 $\boxed{M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0}$

具有对称形式的一阶微分方程

# § 2.3.1 恰当微分方程

$$\boxed{M(x,y)dx+N(x,y)dy=0}$$

如果存在某一二元函数 $u(x,y)$，使得

$$\boxed{du(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy}$$

这里，$du(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy$，表示 $u(x,y)$ 的全微分

则称方程为**恰当微分方程（全微分方程）**

称 $u(x,y)$ 为 $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ 的一个原函数

# § 2.3.1 恰当微分方程

如果方程 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 为恰当微分方程

$$\boxed{du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy}$$

方程可改写成 $du(x,y) = 0$

则方程通解为: $\boxed{u(x,y) = C}$ （C是任意常数）

例如: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y} \Rightarrow xdx + ydy = 0$

存在 $u(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 使得 $xdx + ydy = d\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$

方程通解为: $u(x,y) = C$

# § 2.3.1 恰当微分方程

**求解恰当方程的关键就是求原函数的问题**

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad （2.3.1）$$

$$du(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy \qquad （2.3.2）$$

**问题**

（1）如何判断方程（2.3.1）是否为恰当方程?

（2）如果方程（2.3.1）是恰当方程，如何求满足条件（2.3.2）的函数u(x,y)，即方程（2.3.1）左端微分式的原函数?

# § 2.3.1 恰当微分方程

$$\boxed{M(x,y)dx+N(x,y)dy=0} \qquad (2.3.1)$$

**定理** 假设函数$M(x,y)$和$N(x,y)$在某区域内连续可微，

则方程（2.3.1）是恰当方程的充分必要条件是：

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x}}$$

此时，方程通解为：（C是任意常数）

$$\boxed{\int M(x,y)dx+\int[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]dy=C}$$

# § 2.3.1 恰当微分方程

$$\boxed{M(x,y)dx+N(x,y)dy=0} \qquad (2.3.1)$$

证明　必要条件

即证（2.3.1）为恰当方程时，有 $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$

若（2.3.1）是恰当方程，则存在某一二元

函数 u (x , y)，使得

$$du(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

# § 2.3.1 恰当微分方程

$$\boxed{du(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy}$$

$$\boxed{du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

# § 2.3.1 恰当微分方程

由于 $\dfrac{\partial M}{\partial y}, \dfrac{\partial N}{\partial x}$ 的连续性，可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

因此

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

# § 2.3.1 恰当微分方程

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0} \qquad （2.3.1）$$

充分条件

即证若 $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$ 时，（2.3.1）是恰当方程

即要找到一个二元函数 u (x , y)，使得

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

即 $$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

# § 2.3.1 恰当微分方程

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=M(x,y) \qquad (2.3.3)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=N(x,y) \qquad (2.3.4)$$

由（2.3.3）式出发，把 y 看作参数，解方程得

$$u(x,y)=\int M(x,y)\,dx+\varphi(y) \qquad (2.3.5)$$

这里, $\varphi(y)$ 是 y 任意可微函数。

# § 2.3.1 恰当微分方程

选择 $\varphi(y)$ 使 $u(x,y)$ 同时满足（2.3.4）式，即

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+\frac{d\varphi(y)}{dy}=N(x,y)$$

由此，

$$\frac{d\varphi(y)}{dy}=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \qquad \text{（2.3.6）}$$

证明（2.3.6）式的右端与 x 无关

# §2.3.1 恰当微分方程

只需要证明（2.3.6）式的右端关于 x 偏导恒为零

$$\frac{\partial}{\partial x}[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]$$

$$=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]$$

$$=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx]$$

$$=\boxed{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=0}$$

# §2.3.1 恰当微分方程

$$\boxed{u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y)} \qquad （2.3.5）$$

$$\boxed{\frac{d\varphi(y)}{dy}=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx} \qquad （2.3.6）$$

则（2.3.6）式的右端只含有 y，积分之，得

$$\varphi(y)=\int[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]dy \qquad （2.3.7）$$

将（2.3.7）式代入（2.3.5）式，得

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\int[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]dy$$

# § 2.3.1 恰当微分方程

$$\boxed{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0} \qquad (2.3.1)$$

因此，恰当微分方程（2.3.1）的通解就是

$$\int M(x,y)\,dx + \int [N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx]dy = c$$

这里，c 为任意常数。

**例1：求解方程** $\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$

**解：** $M=3x^2+6xy^2,\ N=6x^2y+4y^3,\ \boxed{\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=12xy}$

因此，方程是恰当微分方程

**方法一：**

求 u (x , y)，使其同时满足以下方程

$$\frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial x}=3x^2+6xy^2 \qquad （2.3.8）$$

$$\frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial y}=6x^2y+4y^3 \qquad （2.3.9）$$

$$\boxed{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=3x^2+6xy^2} \qquad (2.3.8)$$

对（2.3.8）式关于 x 积分，得

$$u(x,y)=x^3+3x^2y^2+\varphi(y) \qquad (2.3.10)$$

对（2.3.10）关于 y 求导，并使它满足（2.3.9）

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=6x^2y+\frac{d\varphi(y)}{dy}=6x^2y+4y^3$$

则 $$\frac{d\varphi(y)}{dy}=4y^3 \Rightarrow \varphi(y)=y^4$$

$$\boxed{u(x,y)=x^3+3x^2y^2+\varphi(y)} \qquad （2.3.10）$$

将 $\varphi(y)=y^4$ 代入（2.3.10），得

$$u(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4$$

因此，方程通解为：

$$x^3+3x^2y^2+y^4=c$$

这里，c为任意常数。

**方法二：** 直接利用公式

$$\boxed{\int M(x,y)\,dx+\int[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx]dy=c}$$

方程通解为：

$$\int[(6x^2y+4y^3)-\frac{\partial}{\partial y}\int(3x^2+6xy^2)\,dx]dy$$

$$+\int(3x^2+6xy^2)\,dx=c$$

即 $$x^3+3x^2y^2+y^4=c$$

方法三：“分项组合”法

$$\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$$

$$\Downarrow$$

$$3x^2dx+6xy^2dx+6x^2ydy+4y^3dy=0$$

$$\Downarrow$$

$$dx^3+3y^2dx^2+3x^2dy^2+dy^4=0$$

$$\Downarrow$$

$$d(x^3+3x^2y^2+y^4)=0$$

$$\Downarrow$$

$$x^3+3x^2y^2+y^4=c$$

**注意：** 常用二元函数的全微分

$$\begin{cases} ydx + xdy = d(xy) \\ \dfrac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\dfrac{x}{y}\right) \\ \dfrac{-ydx + xdy}{x^2} = d\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{ydx - xdy}{xy} = d\left(\ln\left|\dfrac{x}{y}\right|\right) \\ \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan\dfrac{x}{y}\right) \\ \dfrac{ydx - xdy}{x^2 - y^2} = \dfrac{1}{2} d\left(\ln\left|\dfrac{x - y}{x + y}\right|\right) \end{cases}$$

# §2.3.2 积分因子

恰当方程可以通过积分求出它的通解，
非恰当方程可以通过转化为恰当方程求解。

**问题**

如何将非恰当方程化为恰当方程？

# § 2.3.2 积分因子

## 积分因子的意义

$$\boxed{M(x,y)dx+N(x,y)dy=0} \quad （2.3.1）$$

如果存在连续可微的函数 $\mu=\mu(x,y)\neq 0$，使得

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0 \quad （2.3.11）$$

为一恰当微分方程，即存在函数 $v(x,y)$，使

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy\equiv dv(x,y)$$

则称 $\mu(x,y)$ 为方程（2.3.1）的积分因子

# §2.3.2 积分因子

$$\boxed{M(x,y)dx+N(x,y)dy=0} \qquad (2.3.1)$$

$$\boxed{\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0} \qquad (2.3.11)$$

此时，$v(x,y)=c$ 是（2.3.11）的通解

因而也就是（2.3.1）的通解

求解非恰当方程的关键是求积分因子！

# § 2.3.2 积分因子

$\boxed{\text{同一方程可以有不同的积分因子}}$

例如：方程 $ydx - xdy = 0$ 有如下积分因子：

$$\frac{1}{x^2},\ \frac{1}{y^2},\ \frac{1}{xy},\ \frac{1}{x^2+y^2},\ \frac{1}{x^2-y^2}\ \text{等等。}$$

因为

$$d\left(-\frac{y}{x}\right) = \frac{\boxed{ydx - xdy}}{x^2}$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\boxed{ydx - xdy}}{y^2}$$

$$d\left(\ln\frac{x}{y}\right) = \frac{\boxed{ydx - xdy}}{xy}$$

$$d\left(arctg\,\frac{x}{y}\right) = \frac{\boxed{ydx - xdy}}{x^2+y^2}$$

$$d\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x-y}{x+y}\right) = \frac{\boxed{ydx - xdy}}{x^2-y^2}$$

# § 2.3.2 积分因子

非恰当方程可以通过积分因子转化为恰当方程

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0} \qquad (2.3.1)$$

$$\boxed{\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0} \qquad (2.3.11)$$

方程（2.3.1）为恰当方程的充要条件为：$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}}$

则，方程（2.3.11）为恰当方程的充要条件为：

$$\boxed{\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}}$$

# §2.3.2 积分因子

因此，$\mu(x,y)$为（2.3.1）积分因子的充要条件为：

$$\boxed{\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}}$$

即

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu}$$

# § 2.3.2 积分因子

## 寻求积分因子的方法

**（1）观察法：** 利用已知的微分式的原函数求积分因子

**例如：** 解方程 $xdx + ydy + 4y^3\left(x^2 + y^2\right)dy = 0$

**解：** $\frac{1}{2}d\left(\boxed{x^2 + y^2}\right) + 4y^3\left(\boxed{x^2 + y^2}\right)dy = 0$

$$\boxed{\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{x^2 + y^2}d\left(x^2 + y^2\right) + 4y^3dy = 0$$

$$\Downarrow$$

$$d\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right)\right] + d\left[y^4\right] = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) + y^4 = C$$

# § 2.3.2 积分因子

## 寻求积分因子的方法

**（2）公式法：** 利用积分因子满足的微分方程来求积分因子

若 $\mu(x,y)$ 是方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 的积分因子

$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$ 为恰当方程

则有

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\equiv\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

即

$$\boxed{M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0}$$

# § 2.3.2 积分因子

单变量积分因子

$$\boxed{N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})\mu}$$

（1）$\mu=\mu(x)$ 为（2.3.1）的只与 x 有关的积分因子的充要条件为：

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}=(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx$$

$$\boxed{\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(x)}$$

这里，$\psi(x)$ 仅为 x 的函数。

此时积分因子为 $\boxed{\mu(x)=e^{\int\psi(x)dx}}$

# § 2.3.2 积分因子

单变量积分因子

$$\boxed{N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})\mu}$$

（2）$\mu=\mu(y)$ 为（2.3.1）的只与 y 有关的积分因子的充要条件为：

$$-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}dy$$

$$\boxed{\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\psi(y)}$$

这里，$\psi(y)$ 仅为 y 的函数。

此时积分因子为 $\boxed{\mu(y)=e^{\int\psi(y)dy}}$

# §2.3.2 积分因子

**思考：**

方程只与$x \pm y$，$xy$，$x^2 \pm y^2$有关的积分因子的充要条件？

# §2.3.2 积分因子

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})\mu$$

（3）方程（2.3.1）只与 x+y 有关的积分因子

的充要条件为：$N\frac{d\mu}{dt}-M\frac{d\mu}{dt}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$

$$\frac{d\mu}{\mu dt}=\frac{1}{N-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\psi(x+y)\triangleq\psi(t),(x+y\triangleq t)$$

这里，$\psi(t)$ 仅为 x+y 的函数，积分因子为 $\mu(t)=e^{\int\psi(t)dt}$

# § 2.3.2 积分因子

$$\boxed{N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})\mu}$$

（4）方程（2.3.1）只与 xy 有关的积分因子

的充要条件为：$Ny\frac{\partial\mu}{\partial t}-Mx\frac{\partial\mu}{\partial t}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$

$$\boxed{\frac{d\mu}{\mu dt}=\boxed{\frac{1}{Ny-xM}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\psi(xy)}\triangleq\psi(t),\ (xy\triangleq t)}$$

这里，$\psi(t)$ 仅为 xy 的函数，积分因子为 $\boxed{\mu(t)=e^{\int\psi(t)dt}}$

**例2：** **求解方程** $ydx+(y-x)dy=0$

**解：** $M=y, N=y-x, \frac{\partial M}{\partial y}=1, \frac{\partial N}{\partial x}=-1$

因此，方程不是恰当微分方程

$$\boxed{N\frac{\partial \mu}{\partial x}-M\frac{\partial \mu}{\partial y}=(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})\mu}$$

**方法一：** 公式法

因为 $\boxed{\frac{1}{-M}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})}=-\frac{2}{y}\triangleq\psi(y)$ 只与 y 有关，

故方程有只与 y 有关的积分因子

$$\mu(y)=e^{\int(-\frac{2}{y})dy}=e^{-2\ln|y|}=\frac{1}{y^2}$$

以 $\mu(y)=\dfrac{1}{y^2}$ 乘方程两边，得到

$$\frac{1}{y}dx+\frac{1}{y}dy-\frac{x}{y^2}dy=0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}+\frac{dy}{y}=0$$

因而，通解为

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=c$$

**方法二：** 观察法

将方程改写为： $ydx - xdy = -ydy$

由已知全微分 $ydx - xdy$ 的积分因子 $\mu = \frac{1}{y^2}, \mu = \frac{1}{x^2}, \cdots$

但考虑到右端只与 y 有关，故取 $\mu = \frac{1}{y^2}$ 为方程的积分因子

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = -\frac{1}{y}dy$$

因此，通解为

$$\frac{x}{y} + \ln|y| = c$$