第二章　一阶微分方程的初等解法

§2.1 变量分离方程与变量变换

§ 2.1.1 变量分离方程

变量分离方程 $$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)}$$

其中，$f(x), \varphi(y)$ 分别是 x 与 y 的已知连续函数。

解法步骤

如果 $\varphi(y) \neq 0$

（1）分离变量 $$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx$$

（2）两边积分 $$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx$$

§ 2.1.1 变量分离方程

（3）用 $\Psi(y), F(x)$ 分别表示

$\dfrac{1}{\varphi(y)}, f(x)$ 的某一个原函数

方程的通解为 $\Psi(y) = F(x) + C$

如果存在 y_i，使得 $\varphi(y_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, k$

直接验证得: $y \equiv y_i$ 为方程的常数解

变量分离方程的解为 $\begin{cases} \Psi(y) = F(x) + C, \\ y \equiv y_i, i = 1, 2, \cdots, k \end{cases}$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)}$$

例1： **求解方程** $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

解： $\varphi(y) = \frac{1}{y} \neq 0$

（1）分离变量 $ydy = -xdx$

（2）两边积分 $\int ydy = \int -xdx \Longrightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{c}{2}$

（3）求通解 $x^2 + y^2 = c \quad (y = \pm\sqrt{c - x^2})$

c 为任意正常数

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)}$$

例2：求解方程 $\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x$

并求出满足初始条件 $y(x=0)=1$ **的特解**

解： $y \neq 0$ **时**

（1）分离变量 $\frac{dy}{y^2} = \cos x dx$

（2）两边积分 $\int \frac{dy}{y^2} = \int \cos x dx + c \Rightarrow -\frac{1}{y} = \sin x + c$

（3）方程通解 $y = -\frac{1}{\sin x + c}$ （c 为任意常数）

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)}$$

注意： $y=0$ 时，也是方程的解，而其并不包含在通解中，

因而方程还有解 $y=0$

所以，原方程的解为 $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{\sin x + c} \\ y \equiv 0 \end{cases}$

求特解： 将初始条件 $y(0)=1$ 代入通解中，得 $c=-1$

则满足所给条件的特解为: $y = -\dfrac{1}{\sin x - 1}$

§ 2.1.2 可化为变量分离方程的类型

齐次微分方程 $$\boxed{\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x})}$$

这里，$g(u)$ 是 u 的连续函数。

解法步骤

（1）作变量变换 $\frac{y}{x}=u$ 即 $\boxed{y=ux}$

（2）对两边关于 x 求导 $$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$$

§ 2.1.2 可化为变量分离方程的类型

（3）将上式代入原方程，得 $x\dfrac{du}{dx}+u=g(u)$

进一步整理得 $\boxed{\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x}(g(u)-u)}$ → 变量可分离方程

（4）按变量分离方程求解

$$u=\phi(x,c) \quad 或 \quad \Phi(u,x,c)=0$$

（5）原方程的通解

$$y=x\phi(x,c) \quad 或 \quad \Phi(\frac{y}{x},x,c)=0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x})}$$

例3： **求解方程** $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$

解：（1）作变量变换 $u=\frac{y}{x}$ 或 $\boxed{y=ux}$

（2）关于 x 求导 $\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$

（3）代入原方程 $x\frac{du}{dx}+u=u+\tan u$

整理得 $\boxed{\frac{du}{\tan u}=\frac{dx}{x}}$ ➡ 实现变量分离

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x})}$$

（4）按变量分离方程求解

$\tan u \neq 0$ 时，

$$\int \frac{du}{\tan u}=\int \frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln|\sin u|=\ln|x|+\tilde{c}$$ （$\tilde{c}$ 为任意常数）

$$\Big\Downarrow$$

$$|\sin u|=e^{\tilde{c}}|x| \Longrightarrow \sin u=\pm e^{\tilde{c}}x$$

令 $c=\pm e^{\tilde{c}}$ 得：$\boxed{\sin u=cx}$（c 为非零任意数）

$\tan u=0$ 时，$u=0$ 也是方程的解且包含在上式解中$(c=0)$

因此，方程的通解为 $\sin u=cx$（c 为任意常数）

（5）原方程的通解为 $\boxed{\sin\frac{y}{x}=cx}$

可化为齐次微分方程的类型 $\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}}$

这里，$a_i, b_i, c_i, i=1,2$ 均为常数，且c_1, c_2不同时为零。

分类：

1. 若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ 即 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$

设 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k,\quad a_1=ka_2, b_1=kb_2$

则原方程可化为: $\frac{dy}{dx}=\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=\boxed{f(a_2x+b_2y)}$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=f(a_2x+b_2y)}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}}$$

令 $u=a_2x+b_2y$

则 $\dfrac{du}{dx}=a_2+b_2\boxed{\dfrac{dy}{dx}}=a_2+b_2f(u)$ ➡ 变量分离方程

2. 若 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 则 $\boxed{\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}}$

设交点为: (α,β) 令 $\begin{cases} X=x-\alpha \\ Y=y-\beta \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=X+\alpha \\ y=Y+\beta \end{cases}$

则原方程可化为: $\begin{cases} a_1X+b_1Y=0 \\ a_2X+b_2Y=0 \end{cases}$

$$\boxed{\begin{cases} a_1X+b_1Y=0 \\ a_2X+b_2Y=0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}}$$

则 $\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=g(\dfrac{Y}{X})$ ➡ 齐次微分方程

再作变换 $U=\dfrac{Y}{X}$

则原方程可化为：$X\dfrac{dU}{dX}+U=g(U)$

进一步整理得 $\dfrac{dU}{dX}=\dfrac{1}{X}(g(U)-U)$ ➡ 变量可分离方程

最后代回原变量即可得原方程的解

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}}$$

例4：求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+1}{x+y-3}$

解：（1）判断类型 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$

（2）解方程组 $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$ 得到 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

（3）作变换，令 $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-2 \end{cases}$ 则 $\boxed{\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{X-Y}{X+Y}}$ 齐次

（4）再作变换，令 $U=\dfrac{Y}{X}$ 即 $Y=UX$ 则 $\boxed{\dfrac{dY}{dX}=X\dfrac{dU}{dX}+U}$

$$\boxed{\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y}}\quad \boxed{\frac{dY}{dX}=X\frac{dU}{dX}+U}\quad \boxed{Y=UX}\quad \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}}$$

则 $X\dfrac{dU}{dX}+U=\dfrac{1-U}{1+U}$

进一步整理得 $\boxed{\dfrac{dX}{X}=\dfrac{1+U}{1-2U-U^2}dU}$ 变量分离

$1-2U-U^2\neq 0$ 时

（5）两边积分，得 $\ln|X|=-\dfrac{1}{2}\ln\left|U^2+2U-1\right|+\dfrac{\tilde{c}}{2}$

即 $\boxed{\ln X^2=-\ln\left|U^2+2U-1\right|+\tilde{c}}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\ln(X^2\left|U^2+2U-1\right|)=\tilde{c}} \Rightarrow \boxed{X^2(U^2+2U-1)=\pm e^{\tilde{c}}}$$

$$\boxed{X^2(U^2+2U-1)=\pm e^{\tilde{c}}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}}$$

（6）记 $\pm e^{\tilde{c}}=c_1$，并代回原变量，得

$$U=\frac{Y}{X}:\quad Y^2+2XY-X^2=c_1$$

$$\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-2 \end{cases}:(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=c_1$$

注意：$U^2+2U-1=0$ 时，即 $Y^2+2XY-X^2=0$

$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=0$ 也是方程的解

（7）原方程的通解 $y^2+2xy-x^2-6y-2x=c$

（c 为任意常数）