第五章 线性微分方程组

§ 5.1 存在唯一性定理

§ 5.1.1 记号与定义

一阶微分方程组:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

初值条件:

$$x_1(t_0) = \eta_1,\ x_2(t_0) = \eta_2, \cdots,\ x_n(t_0) = \eta_n$$

§ 5.1.1 记号与定义

一阶线性微分方程组:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)}$$

$$\begin{cases} x_1'=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\cdots+a_{1n}(t)x_n+f_1(t) \\ x_2'=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\cdots+a_{2n}(t)x_2+f_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\cdots+a_{nn}(t)x_n+f_n(t) \end{cases} \quad \cdots(5.1)$$

$a_{ij}(t),\ f_i(t),\quad i,j=1,2,\cdots,n$ 在$[a,b]$上连续

§ 5.1.1 记号与定义

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5.2)$$

$$\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \cdots\cdots(5.3)$$

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \cdots\cdots\cdots\cdots (5.4)}$$

§ 5.1.1 记号与定义

$$\boldsymbol{B}(t)=\begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1n}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nn}(t) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

在区间 $a\le t\le b$ 可定义矩阵与向量函数

$$\boldsymbol{B}(t)=(b_{ij}(t))_{n\times n} \qquad \boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))^T$$

连续: $b_{ij}(t)$ $u_i(t)$ **在区间** $a\le t\le b$ **连续。**

可微: $b_{ij}(t)$ $u_i(t)$ **在区间** $a\le t\le b$ **可微。**

$$\boldsymbol{B}'(t)=(b'_{ij}(t))_{n\times n} \qquad \boldsymbol{u}'(t)=(u'_1(t),u'_2(t),\cdots,u'_n(t))^T$$

可积: $b_{ij}(t)$ $u_i(t)$ **在区间** $a\le t\le b$ **可积。**

§ 5.1.1 记号与定义

$$\int \boldsymbol{B}(t)dt = (\int b_{ij}(t)dt)_{n\times n}$$

$$\int \boldsymbol{u}(t)dt = (\int u_1(t)dt, \int u_2(t)dt, \cdots, \int u_n(t)dt)^T$$

1) $(\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t))' = \boldsymbol{A}'(t)+\boldsymbol{B}'(t)$

$(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{v}(t))' = \boldsymbol{u}'(t)+\boldsymbol{v}'(t)$

2) $(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t))' = \boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}'(t)$

3) $(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{u}(t))' = \boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}'(t)$

§ 5.1.1 记号与定义

定义1 设 $A(t)$ 是区间 $a \le t \le b$ 上的连续 $n \times n$ 矩阵，

$f(t)$ 是区间 $a \le t \le b$ 上的连续 n 维向量，方程组

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \quad \text{..............(5.4)}}$$

在某区间 $\alpha \le t \le \beta$ $([\alpha,\beta] \subset [a,b])$ 的解就是向量 $\mathbf{u}(t)$

$\mathbf{u}'(t)$在区间 $\alpha \le t \le \beta$ 上连续且满足

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \alpha \le t \le \beta$$

§ 5.1.1 记号与定义

定义2 **初值问题**

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta} \end{cases} \qquad \text{..............(5.5)}$$

的解就是方程组(5.4)在包含 t_0**的区间**$\alpha \le t \le \beta$

上的解 $\mathbf{u}(t)$, **使得** $\mathbf{u}(t_0) = \boldsymbol{\eta}$

§ 5.1.1 记号与定义

例1 验证向量 $u(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$ 是初值问题

$$\mathbf{x}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x},\ \mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ 在区间 $-\infty<t<+\infty$ 上的解。

解 $$\mathbf{u}'(t)=\begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$

$$u(0)=\begin{bmatrix} e^{0} \\ -e^{0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{u}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t)}$$

因此 $u(t)$ 是给定初值问题的解。

§ 5.1.1 记号与定义

n 阶线性微分方程 ➡ n个一阶线性微分方程构成的方程组

例1 $x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t)$

解 令 $x_1 = x,\ x_2 = x',\ \mathbf{x} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$

$$x_1' = x' = x_2 \ \Big|\ x_2' = x'' = -p(t)x' - q(t)x + f(t)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -q(t)x_1 - p(t)x_2 + f(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

§ 5.1.1 记号与定义

$$\boxed{x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)}$$

令 $x_1 = x,\ x_2 = x',\ x_3 = x'', \cdots, x_n = x^{(n-1)}$

$$\begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = x'' = x_3 \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1}' = x^{(n-1)} = x_n \\ x_n' = x^{(n)} = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \cdots - a_1(t)x_n + f(t) \end{cases}$$

§ 5.1.1 记号与定义

$$\boxed{x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$$

§ 5.1.1 记号与定义

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t) \\ x(t_0) = \eta_1, x'(t_0) = \eta_2, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = \eta_n \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.6)$$

$$\psi(t) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \psi'(t) \\ \vdots \\ \psi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$ 等价

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta} \quad \cdots\cdots\cdots(5.7)$$

§ 5.1.2 存在唯一性定理

初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta} \end{cases} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots(5.5)$$

的解的存在唯一性定理

逐步逼近法

向量、矩阵的范数

向量函数序列的收敛性

§ 5.1.2 存在唯一性定理

向量、矩阵的范数

对于$n\times n$矩阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 和 n 维向量 $x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^{\mathrm{T}}$

$$\|A\|=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}| \qquad \|x\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

设 A,B 是$n\times n$矩阵，x,y 是 n 维向量，具有如下性质:

$$\|AB\|\le\|A\|\bullet\|B\| \qquad \|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$$

$$\|Ax\|\le\|A\|\bullet\|x\| \qquad \|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$$

§ 5.1.2 存在唯一性定理

向量函数序列的收敛性

向量序列$\{x_k\}, x_k=(x_{1k},x_{2k},\cdots,x_{nk})^{\mathrm{T}}$称为**收敛的**，

如果对每一个 $i\ (i=1,2,\cdots,n)^{\mathrm{T}}$，数列 $\{x_{ik}\}$都是收敛的。

向量函数序列 $\{x_k(t)\}, x_k(t)=(x_{1k}(t),x_{2k}(t),\cdots,x_{nk}(t))^{\mathrm{T}}$

称为在区间 $a\le t\le b$ 上**收敛的（一致收敛的）**，

如果对每一个 $i\ (i=1,2,\cdots,n)^{\mathrm{T}}$，函数数列$\{x_{ik}(t)\}$ 在区间

$a\le t\le b$ 上收敛的（一致收敛的）。

§ 5.1.2 存在唯一性定理

向量函数序列的收敛性

向量函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)$ 称为在区间 $a \le t \le b$ 上收敛的（一致收敛的），如果其部分和作成的向量函数序列在区间 $a \le t \le b$ 上收敛的（一致收敛的）。

一般矩阵序列的收敛性

无穷矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 称为收敛的，如果它的部分和所成序列是收敛的。

无穷矩阵函数级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)$$

§ 5.1.2 存在唯一性定理

魏氏判别法

如果 $\|x_k(t)\| \le M_k,\ a \le t \le b$，而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 是收敛的，

则 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上收敛的（一致收敛的）。

积分号下取极限

如果 $\{x_k(t)\}$ 在区间 $a \le t \le b$ 上是一致收敛的，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b x_k(t)dt = \int_a^b \lim_{k\to\infty} x_k(t)dt$$

§ 5.1.2 存在唯一性定理

定理1（存在唯一性定理）

如果 $\mathbf{A}(t)$ 是 $n \times n$ 矩阵，$f(t)$ 是 n 维列向量，

它们都在区间 $a \le t \le b$ 上连续，则对于区间

$a \le t \le b$ 上的任何数 t_0 及任一常数向量 $\boldsymbol{\eta}$

方程组 $$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \cdots\cdots (5.4)$$

存在唯一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$，定义于整个区间 $a \le t \le b$ 上，

且满足初始条件 $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta}$

§ 5.1.2 存在唯一性定理

命题1 设 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是方程组的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta} \end{cases} \quad (a \le t \le b) \text{.........} (5.5)$$

的解的充要条件是 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是积分方程

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t} [\mathbf{A}(s)\mathbf{x}(s) + \mathbf{f}(s)]ds, \quad a \le t \le b \text{...} (5.8)$$

的定义于 $a \le t \le b$ 上的连续解。

§ 5.1.2 存在唯一性定理

证明完全类似于第三章

现取 $\varphi_0(t)=\eta$ ，构造皮卡逐步逼近向量函数序列：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}_0(t)=\boldsymbol{\eta}, & a\le t\le b \\ \boldsymbol{\varphi}_k(t)=\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}[\mathbf{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(s)+\mathbf{f}(s)]ds & (k=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{5.9}$$

向量函数 $\varphi_k(t)$ 称为(5.4)的第 k 次近似解。

§ 5.1.2 存在唯一性定理

命题2 对于所有的正整数k，向量函数 $\varphi_k(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上有定义且连续

命题3 向量函数序列 $\{\varphi_k(t)\}$ 在区间 $a \le t \le b$ 上是一致收敛的。

命题4 $\varphi(t)$ 是积分方程(5.8)的定义在区间 $a \le t \le b$ 上的连续解。

命题5 若 $\psi(t)$ 是积分方程(5.8)的定义于 $a \le t \le b$ 上的另一个连续解，则 $\varphi(t) \equiv \psi(t)$， $a \le t \le b$

§ 5.1.2 存在唯一性定理

命题3 向量函数序列 $\{\varphi_k(t)\}$ 在区间 $a \le t \le b$ 上是一致收敛的。

证明:

考虑向量函数级数:

$$\varphi_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} [\varphi_j(t) - \varphi_{j-1}(t)], \quad a \le t \le b \qquad (5.10)$$

它的部分和为： $\varphi_0(t) + \sum_{j=1}^{k} [\varphi_j(t) - \varphi_{j-1}(t)] = \varphi_k(t)$

因此，要证明向量函数序列 $\{\varphi_k(t)\}$ 在 $a \le t \le b$ 上一致收敛，

只需证明级数(5.10)在 $a \le t \le b$ 上一致收敛。

§ 5.1.2 存在唯一性定理

进行如下估计：$\boxed{\boldsymbol{\varphi}_k(t)=\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}[\mathbf{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(s)+\mathbf{f}(s)]ds \quad a\le t\le b}$

$\|\mathbf{A}(t)\|\le L, \|\mathbf{f}(t)\|\le K, a\le b\le t$ 并取 $M=L\|\boldsymbol{\eta}\|+K$

由（5.9）得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varphi}_1(t)-\boldsymbol{\varphi}_0(t)\| &\le \int_{t_0}^{t}\|\mathbf{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_0(s)+\mathbf{f}(\mathrm{s})\|ds \\ &\le \int_{t_0}^{t}[\|\mathbf{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_0(s)\|+\|\mathbf{f}(\mathrm{s})\|]ds \qquad (5.11) \\ &\le \int_{t_0}^{t}[\mathrm{L}\|\boldsymbol{\eta}\|+K]ds=M(t-t_0)\end{aligned}$$

及 $\|\boldsymbol{\varphi}_2(t)-\boldsymbol{\varphi}_1(t)\|\le\int_{t_0}^{t}\|\mathbf{A}(s)[\boldsymbol{\varphi}_1(s)-\boldsymbol{\varphi}_0(s)]\|ds$

§ 5.1.2 存在唯一性定理

由（5.11）得 $\left\|\boldsymbol{\varphi}_2(t)-\boldsymbol{\varphi}_1(t)\right\| \le L\int_{t_0}^{t} M(\mathrm{s}-t_0)ds = \dfrac{ML}{2!}(t-t_0)^2$

现设 $\left\|\boldsymbol{\varphi}_j(t)-\boldsymbol{\varphi}_{j-1}(t)\right\| \le \dfrac{ML^{j-1}}{j!}(t-t_0)^j$ 成立

由（5.9）当 $t_0 \le t \le b$ 时，有

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}_{j+1}(t)-\boldsymbol{\varphi}_j(t)\right\| \le \int_{t_0}^{t}\left\|\mathbf{A}(s)[\boldsymbol{\varphi}_j(s)-\boldsymbol{\varphi}_{j-1}(s)]\right\|ds$$

$$\le \mathrm{L}\int_{t_0}^{t}\frac{ML^{j-1}}{j!}(s-t_0)^j ds$$

$$=\frac{ML^j}{(j+1)!}(t-t_0)^{j+1}$$

§ 5.1.2 存在唯一性定理

由数学归纳法得到：对于所有的正整数 k，有如下的估计:

$$\|\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)\| \le \frac{ML^{k-1}}{k!}(t-t_0)^k,\quad t_0 \le t \le b \qquad (5.12)$$

由此可知，当 $t_0 \le t \le b$ 时

$$\|\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)\| \le \frac{ML^{k-1}}{k!}(b-t_0)^k \qquad (5.13)$$

(5.13)的右端是正项收敛级数 $\frac{M}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L^k(b-t_0)^k}{k!}$ 的一般项，

由魏氏判别法, 级数(5.13) 在 $t_0 \le t \le b$ 上一致收敛,

因而序列 $\{\varphi_k(t)\}$ 也在 $t_0 \le t \le b$ 上一致收敛。

命题3证毕

§ 5.1.2 存在唯一性定理

现设 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{\varphi}_k(t)=\boldsymbol{\varphi}(t)$

因$\boldsymbol{\varphi}(t)$是$\boldsymbol{\varphi}_k(t)$的一致收敛极限函数，则$\boldsymbol{\varphi}(t)$也在$a\le t\le b$上连续。

命题4 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是积分方程(5.8)的定义在区间 $a\le t\le b$ 上的连续解。

证明:

由$\boldsymbol{\varphi}_k(t)$在 $a\le t\le b$ 上一致收敛于$\boldsymbol{\varphi}(t)$，以及 $\mathbf{A}(t)$ 的连续性

推知序列$\{\mathbf{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_k(s)\}$在区间$a\le t\le b$上一致收敛于 $\mathbf{A}(s)\boldsymbol{\varphi}(s)$

§ 5.1.2 存在唯一性定理

因而，对(5.9)两边取极限，得到:

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{\varphi}_k(t)=\boldsymbol{\eta}+\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t}[\mathbf{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(s)+\mathbf{f}(s)]ds$$

$$=\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}[\lim_{k\to\infty}\mathbf{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(s)+\mathbf{f}(s)]ds$$

即 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}[\mathbf{A}(s)\boldsymbol{\varphi}(s)+\mathbf{f}(s)]ds$

这就是说, $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是积分方程(5.8)的定义于 $a\le t\le b$ 上的连续解。

命题4 证毕

§ 5.1.2 存在唯一性定理

命题5 若 $\psi(t)$ 是积分方程(5.8)的定义于 $a \le t \le b$ 上的另一个连续解, 则 $\varphi(t) \equiv \psi(t), \quad a \le t \le b$

证明:

首先证明 $\psi(t)$ 也是序列 $\{\varphi_k(t)\}$ 在 $a \le t \le b$ 的一致收敛极限函数。

根据（5.9）及 $\psi(t) = \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t} [\mathbf{A}(s)\psi(s) + \mathbf{f}(s)]ds$

像命题3进行的估计一样，可以得到下面的估计式

$$\left\| \varphi_k(t) - \psi(t) \right\| \le \frac{\tilde{M}L^k}{(k+1)!}(t - t_0)^{k+1}, \quad t_0 \le t \le b$$

§ 5.1.2 存在唯一性定理

$$\boxed{\left\|\varphi_k(t)-\psi(t)\right\| \le \frac{\tilde{M}L^k}{(k+1)!}(t-t_0)^{k+1}, \quad t_0 \le t \le b}$$

以 $\dfrac{\tilde{M}L^k}{(k+1)!}(b-t_0)^{k+1}$ 为公项的级数是收敛的，

故当 $k \to \infty$ 时，$\dfrac{\tilde{M}L^k}{(k+1)!}(b-t_0)^{k+1} \to 0$

因而 $\varphi_k(t)$ 在 $a \le t \le b$ 上一致收敛于 $\psi(t)$

根据极限的唯一性，即得：$\varphi(t) \equiv \psi(t), \quad t_0 \le t \le b$

对于 $a \le t \le t_0$，可以类似的证明。

命题5证毕

§ 5.1.2 存在唯一性定理

推论

如果 $a_1(t), a_2(t), \cdots, a_n(t), f(t)$ 都是区间 $a \le t \le b$ 上的连续函数，则对于区间 $a \le t \le b$ 上的任一数 t_0 及任意的 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 方程

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)$$

存在唯一解 $\omega(t)$，定义于整个区间 $a \le t \le b$ 上，且满足初始条件 $\omega(t_0) = \eta_1, \omega'(t_0) = \eta_2, \cdots, \omega^{(n-1)}(t_0) = \eta_n$