第四章 高阶微分方程

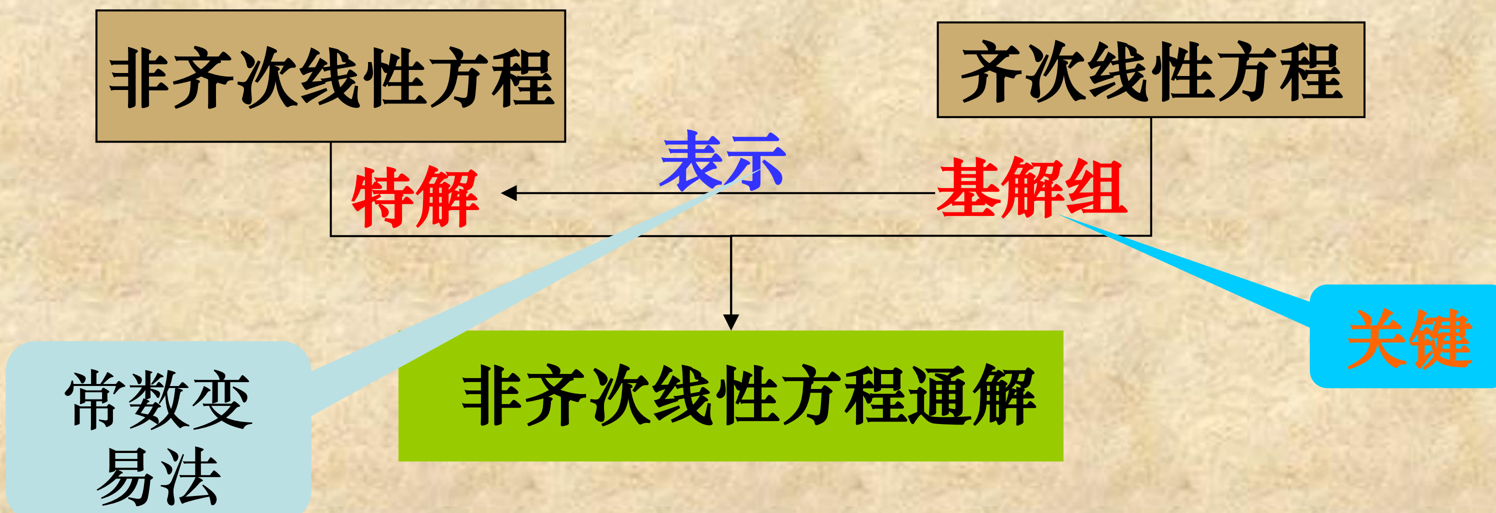
§4.2 常系数线性微分方程的解法

内容回顾

通解结构

齐次线性方程的通解可由其基本解组线性表示。

非齐次线性方程的通解等于对应齐次方程的通解与自身的一个特解之和。



§ 4.2.1 复值函数与复值解

一 定义 $z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)\quad t\in[a,b]$,

$\varphi(t)$，$\psi(t)$是定义在$[a,b]$上的实函数。

极限 $\lim\limits_{t\to t_0} z(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)+i\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t)\quad t_0\in[a,b]$,

连续 $\lim\limits_{t\to t_0} z(t)=z(t_0)\quad t_0\in[a,b]$,

导数 $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\phi(t)-\phi(t_0)}{t-t_0}+i\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}$

$$\lim_{t\to t_0}\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}=z'(t_0)=\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=t_0}+i\left.\frac{d\psi}{dt}\right|_{t=t_0}$$

§ 4.2.1 复值函数与复值解

二 性质

$$\frac{d}{dt}(z_1(t)+z_2(t))=\frac{dz_1(t)}{dt}+\frac{dz_2(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[cz_1(t)]=c\frac{dz_1(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(z_1(t)\cdot z_2(t))=\frac{dz_1(t)}{dt}z_2(t)+z_1(t)\frac{dz_2(t)}{dt}$$

§ 4.2.1 复值函数与复值解

二 关于 e^{kt} $k=\alpha+i\beta$ （α,β为实数，t为实变量）

定义 $e^{kt}=e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}e^{i\beta t}$

$=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$

$e^{\bar{k}t}=e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}e^{-i\beta t}$

$=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)$

$\bar{k}=\alpha-i\beta$ 表示 $k=\alpha+i\beta$ 共轭复数，

§ 4.2.1 复值函数与复值解

e^{kt} 性质

1） $e^{\overline{kt}} = \overline{e^{kt}}$ 2） $e^{(k_1+k_2)t} = e^{k_1 t} \cdot e^{k_2 t}$

3） $\dfrac{de^{kt}}{dt} = ke^{kt}$ 4） $\dfrac{d^n e^{kt}}{dt^n} = k^n e^{kt}$

结论

- 实变量的复值函数的求导公式与实变量的实值函数的求导公式一致。
- 实变量的复指数函数的求导公式与实变量的实指数函数的性质一致。

§ 4.2.1 复值函数与复值解

如果定义在 $[a,b]$ 上的实变量的复值函数 $x=z(t)$ 满足方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t) \qquad (4.1)$$

则称 $x=z(t)$ 为方程的一个复值解。

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

定理8 如果方程4.2中所有系数 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 都是实值函数，而 $x=z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ 是方程的复数解，则 $z(t)$ 的实部 $\varphi(t)$，虚部 $\psi(t)$ 和共轭复数函数 $\bar{z}(t)$ 也是方程4.2的解。

§ 4.2.1 复值函数与复值解

定理9 若方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=u(t)+iv(t)$

有复数解$x=U(t)+iV(t)$, 这里 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $u(t)$, $v(t)$

都是实函数。则这个解的实部 $U(t)$ 和虚部 $V(t)$ 分别是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=u(t)$$

和

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=v(t)$$

的解。

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

n 阶常系数齐次线性微分方程

$$\boxed{L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = 0} \cdots\cdots\cdots(4.19)$$

其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为常数。

为了求方程(4.19)的通解，只需求出它的基本解组。

指数形式的解

欧拉待定指数函数法

$$x = e^{\lambda t} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.20)$$

特征根法

$$\boxed{\begin{aligned} L[e^{\lambda t}] &\equiv \frac{d^n e^{\lambda t}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}e^{\lambda t}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{de^{\lambda t}}{dt} + a_n e^{\lambda t} \\ &= (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n)e^{\lambda t} \equiv F(\lambda)e^{\lambda t} \end{aligned}}$$

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

$$\boxed{F(\lambda)=(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n)\cdots\cdots\cdots\cdots(4.21)}$$ 特征方程

(4.20)为方程(4.19)的解的充要条件是 λ 是代数方程 $F(\lambda)=0$ 的根 特征根

1）特征根为单根的情形

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是特征方程（4.21）的 n 个互不相等的根，则相应的方程（4.19）有如下 n 个解

$$e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_n t}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.22)$$

这 n 个解在区间 $a\le t\le b$ 上线性无关，从而组成方程的基本解组。

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

$\boxed{\text{线性无关}}$

$\Updownarrow$

$\boxed{W(t)\neq 0}$

$$W(t)\equiv\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots\cdots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots\cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \cdots\cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}$$

朗斯基行列式

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots\cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots\cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

范德蒙德行列式

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t}\prod_{1\le j<i\le n}(\lambda_i-\lambda_j)$$

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

由于假设 $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$，故 $W(t) \neq 0$，解组(4.22)线性无关

$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$ 是方程的基本解组。

1. 如果 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 均为实数，则方程(4.19)的通解可表示为

$$\boxed{x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}}$$

2. 若 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ 为一对共轭复根，

则方程（4.19）有两个复值解

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$$

对应两个实值解（**定理8**）

$$e^{\alpha t}\cos\beta t$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t$$

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

例1 **求方程** $\dfrac{d^4x}{dt^4} - x = 0$ **的通解**

解 **第一步：求特征根**

$$F(\lambda) = \lambda^4 - 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i$$

第二步：求出基本解组 $\boxed{e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t}$

$$e^t,\ e^{-t}, \quad \cos t,\ \sin t$$

第三步：写出通解

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t$$

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

例2　求方程 $\dfrac{d^3x}{dt^3}+x=0$ 的通解

解　第一步：求特征根

$$F(\lambda)=\lambda^3+1=0 \qquad \lambda_1=-1, \quad \lambda_{2,3}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

第二步：求出基本解组

$$e^{-t}, \qquad e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

第三步：写出通解

$$x(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

2）特征根有重根的情形

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \cdots\cdots\cdots (4.19)$$

$$F(\lambda) = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.21)$$

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是特征方程（4.21）的 m 个互不相等的根。

$k_1, k_2, \cdots, k_m$ 重数 $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n, \quad k_i \geq 1$

$$\boxed{F(\lambda_1) = F'(\lambda_1) = \cdots = F^{(k_1-1)}(\lambda_1) = 0,\ F^{(k_1)}(\lambda_1) \neq 0}$$

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

2）特征根有重根的情形 $\boxed{L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \cdots\cdots\cdots(4.19)}$

I. 设 $\lambda_1 = 0$ 是 k_1 重特征根 $F(\lambda) = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0$

$$\boxed{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-k_1}\lambda^{k_1} = 0} \quad \boxed{a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-k_1+1} = 0} \boxed{a_{n-k_1} \neq 0}$$

$$\boxed{\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-k_1}\frac{d^{k_1}x}{dt^{k_1}} = 0}$$

显然 $1, t, t^2, \cdots, t^{k_1-1}$ 是方程的 k_1 个线性无关的解，

方程(4.19)有 k_1 重零特征根

方程恰有 k_1 个线性无关的解 $1, t, t^2, \cdots, t^{k_1-1}$

§4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

2）特征根有重根的情形 $\boxed{L[x]\equiv\dfrac{d^n x}{dt^n}+a_1\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\dfrac{dx}{dt}+a_n x=0\cdots\cdots\cdots(4.19)}$

II. 设 $\lambda_1\neq 0$ 是 k_1 重特征根

作变量变换 $\boxed{x=ye^{\lambda_1 t}}$

$$x^{(m)}=(ye^{\lambda_1 t})^{(m)}=e^{\lambda_1 t}\left[y^{(m)}+m\lambda_1 y^{(m-1)}+\frac{m(m-1)}{2!}\lambda_1^2 y^{(m-2)}+\cdots+\lambda_1^m y\right]$$

$$L[ye^{\lambda_1 t}]=e^{\lambda_1 t}\left(\frac{d^n y}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_n y\right)=0 \quad \boxed{L[ye^{\lambda_1 t}]=e^{\lambda_1 t}L_1[y]}$$

$$\boxed{L_1[y]\equiv\frac{d^n y}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_n y=0\cdots\cdots\cdots(4.23)}$$

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

$$\boxed{L[ye^{\lambda_1 t}] = e^{\lambda_1 t} L_1[y]}$$

$$\boxed{L_1[y] \equiv \frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = 0 \cdots\cdots\cdots (4.23)}$$

$$\boxed{L[e^{\lambda t}] \equiv F(\lambda) e^{\lambda t}}$$

$$\boxed{F(\lambda) = (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.21)}$$

特征方程 $\underline{G(\mu) = \mu^n + b_1 \mu^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\mu + b_n = 0 \cdots\cdots (4.24)}$ $\boxed{L_1[e^{\mu t}] \equiv G(\mu) e^{\mu t}}$

直接计算 $F(\mu+\lambda_1) e^{(\mu+\lambda_1)t} \equiv \boxed{L[e^{(\mu+\lambda_1)t}] = e^{\lambda_1 t} L_1[e^{\mu t}]} \equiv G(\mu) e^{(\mu+\lambda_1)t}$

因此 $$F(\mu+\lambda_1) = G(\mu)$$

$$\boxed{F^{(j)}(\mu+\lambda_1) = G^{(j)}(\mu),\ F^{(j)}(\lambda_1) = G^{(j)}(0),\ j = 1, 2, \cdots, k}$$

(4.19)的 k_1重特征根λ_1 $\longleftrightarrow$ (4.23)的 k_1 重零特征根

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

$$\boxed{L_1[y] \equiv \frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = 0 \cdots\cdots\cdots (4.23)}$$

$$\boxed{L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \cdots\cdots\cdots (4.19)}$$

方程(4.23)恰有 k_1 个线性无关的解 $1, t, t^2, \cdots, t^{k_1 - 1}$

由 $\boxed{x = ye^{\lambda_1 t}}$

方程(4.19)恰有 k_1 个线性无关的解 $\boxed{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 t}}$

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

类似地

$$\left.\boxed{\begin{array}{lll} \lambda_1 & k_1 & e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_2 & k_2 & e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, t^2 e^{\lambda_2 t}, \cdots, t^{k_2-1} e^{\lambda_2 t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_m & k_m & e^{\lambda_m t}, te^{\lambda_m t}, t^2 e^{\lambda_m t}, \cdots, t^{k_m-1} e^{\lambda_m t} \end{array}}\right\} \quad (4.26) \quad \text{基本解组}$$

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n, \quad k_i \geq 1$$

下面证明（4.26）全体 n 个解构成方程（4.19）对应的基本解组

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

证明 假若这些函数线性相关，则存在不全为零的数$A_j^{(r)}$使得

$$(A_0^{(1)} + A_1^{(1)}t + \cdots + A_{k_1-1}^{(1)}t^{k_1-1})e^{\lambda_1 t} +$$

$$(A_0^{(2)} + A_1^{(2)}t + \cdots + A_{k_2-1}^{(2)}t^{k_2-1})e^{\lambda_2 t} + \cdots +$$

$$(A_0^{(m)} + A_1^{(m)}t + \cdots + A_{k_m-1}^{(m)}t^{k_m-1})e^{\lambda_m t} \equiv 0$$

$$\boxed{P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + P_m(t)e^{\lambda_m t} \equiv 0 \qquad (4.27)}$$

假定多项式 $P_m(t)$ 至少有一个系数不为零，则 $P_m(t)$ 不恒为零

$\boxed{\div e^{\lambda_1 t}}$ $$P_1(t) + P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \cdots + P_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_1)t} \equiv 0$$

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

微分 k_1 次

$$[P_r(t)e^{(\lambda_r-\lambda_1)t}]^{(k_1)}$$

$$=[P_r^{(k_1)}(t)+k_1(\lambda_r-\lambda_1)P_r^{(k_1-1)}(t)+\cdots+(\lambda_r-\lambda_1)^{k_1}P_r(t)]e^{(\lambda_r-\lambda_1)t}$$

$$=Q_r(t)e^{(\lambda_r-\lambda_1)t} \quad (r=1,2,\cdots,m) \qquad \boxed{Q_1(t)=P_1^{(k_1)}(t)=0}$$

$$\boxed{Q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}+Q_3(t)e^{(\lambda_3-\lambda_1)t}+\cdots+Q_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_1)t}\equiv 0 \qquad (4.28)}$$

$Q_m(t)$ 不恒为零 $\boxed{\div e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}$ 微分 k_2 次 $\cdots$

$\vdots$ m-1 次

$\boxed{R_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_{m-1})t}\equiv 0}$ $R_m(t)$ 不恒为零，$e^{(\lambda_m-\lambda_{m-1})t}\neq 0$ 矛盾！

(4.26) 中函数线性无关，其构成的解本解组。

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

对于特征方程有复重根的情况

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ 方程的一个k重特征根

$\lambda_2 = \alpha - i\beta$ 也是一个k重特征根

它们对应2k个线性无关的实解是

$$\boxed{e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t,\cdots,t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,}$$

$$\boxed{e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t,\cdots,t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t,}$$

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

例3 求方程 $\frac{d^3x}{dt^3}-3\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}-x=0$ 的通解

$$\boxed{e^{\lambda_1 t},te^{\lambda_1 t},t^2e^{\lambda_1 t},\cdots,t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}}$$

解 第一步：求特征根

$$F(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0 \qquad \boxed{\lambda_1=1} \quad \boxed{\text{三重根}}$$

第二步：求出基本解组

$$e^t,\quad te^t,\quad t^2e^t,$$

第三步：写出通解

$$x(t)=c_1\,e^t+c_2\,te^t+c_3\,t^2e^t$$

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

例4 求方程 $\frac{d^4x}{dt^4}+2\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$ 的通解

解 第一步：求特征根

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad te^{\alpha t}\cos\beta t,\quad \cdots, t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, \\ e^{\alpha t}\sin\beta t,\quad te^{\alpha t}\sin\beta t,\quad \cdots, t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t, \end{array}}$$

$$F(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^2+1=0 \qquad \boxed{\lambda_{1,2}=\pm i} \quad \boxed{\text{二重根}}$$

第二步：求出基本解组

$$\cos t,\ t\cos t,\ \sin t,\ t\sin t,$$

第三步：写出通解

$$x(t)=c_1\cos t+c_2\,t\cos t+c_3\sin t+c_4\,t\sin t$$

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

可化为常系数线性方程的方程-------欧拉(Euler) 方程

$$\boxed{x^n\frac{d^n y}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_n y=0} \quad (4.29)$$

其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 为常数。

引入自变量代换 $x=e^t$ $\quad\boxed{\ln x=t}\quad$ $dx=e^t dt$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(e^{-t}\frac{dy}{dt})=(-e^{-t}\frac{dy}{dt}+e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2})\frac{dt}{dx}$$

$$=e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})=\frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$$

$$\vdots$$

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

$$\boxed{x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \quad (4.29)}$$

数学归纳法：对一切自然数m均有关系式

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{1}{x^m}\left(\frac{d^m y}{dt^m} + \alpha_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \cdots + \alpha_{m-1} \frac{dy}{dt}\right)$$

其中, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$ 都是常数。

于是 $$x^m \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d^m y}{dt^m} + \alpha_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \cdots + \alpha_{m-1} \frac{dy}{dt}$$

代入（4.29） $$\boxed{\frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = 0 \quad (4.30)}$$

其中，$b_1, b_2, \cdots, b_{m-1}$ 都是常数。 常系数齐次线性方程

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

$$\boxed{x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \quad (4.29)}$$

$$\boxed{\frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = 0 \quad (4.30)}$$

方程（4.30）有形如的 $y = e^{\lambda t}$ 解

$\boxed{t = \ln x}$

方程（4.29）有形如的 $y = x^{\lambda}$ 解

可直接求欧拉方程的形如的 $y = x^K$ 解

以 $y = x^K$ 代入（4.29）并约去因子 x^K

特征方程

$$K(K-1)\cdots(K-n+1) + a_1 K(K-1)\cdots(K-n+2) + \cdots + a_n = 0 \quad (4.31)$$

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

$$\boxed{K(K-1)\cdots(K-n+1)+a_1K(K-1)\cdots(K-n+2)+\cdots+a_n=0 \quad (4.31)}$$

方程（4.31）的 s 重实根 $K=K_0$ ，对应方程（4.29）的 m 个解

$$\boxed{x^{K_0}, x^{K_0}\ln|x|, x^{K_0}\ln^2|x|, \cdots, x^{K_0}\ln^{s-1}|x|,}$$

方程（4.31）的 s 重复根 $K=\alpha+i\beta$，对应方程（4.29）的 $2m$ 个解

$$\boxed{\begin{array}{l} x^{\alpha}\cos(\beta\ln|x|), x^{\alpha}\ln|x|\cos(\beta\ln|x|), \cdots x^{\alpha}\ln^{s-1}|x|\cos(\beta\ln|x|), \\ x^{\alpha}\sin(\beta\ln|x|), x^{\alpha}\ln|x|\sin(\beta\ln|x|), \cdots x^{\alpha}\ln^{s-1}|x|\sin(\beta\ln|x|), \end{array}}$$

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

求解欧拉方程的过程

欧拉方程 $\xrightarrow{x=e^t}$ 常系数线性方程 $\longrightarrow F(k)=0$

$\longrightarrow y=e^{kt} \longrightarrow y=x^k$

确定 $F(k)=0$

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0$$

设 $y=x^k$ 是欧拉方程的解

$$k(k-1)\cdots(k-n+1)x^k+\cdots+a_{n-2}k(k-1)x^k+a_{n-1}kx^k+a_nx^k=0$$

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

$$[k(k-1)\cdots(k-n+1)+a_1(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_{n-1}k+a_n]x^k=0$$

$$k(k-1)\cdots(k-n+1)+a_1k(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0$$

$$F(k)=k(k-1)\cdots(k-n+1)+a_1k(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_{n-1}k+a_n$$

解齐次欧拉方程的步骤

第一步：写出特征方程，并求特征根

第二步：求出的基本解组

先求出变换以后方程的基本解组

再求出原方程的基本解组

第三步：写出原方程的通解

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

例5 求方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ 的通解

解 第一步：写出特征方程，并求特征根

$$F(k)=k(k-1)-k+1=0 \qquad \boxed{k_{1,2}=1}$$

第二步：求出基本解组

$$e^t,\ \ te^t \xrightarrow{\quad x=e^t \quad} x,\ \ x\ln|x|$$

第三步：写出通解

$$y(x)=c_1x+c_2x\ln|x|$$

$$\boxed{F(k)=k(k-1)\cdots(k-n+1)+a_1k(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0}$$

§ 4.2.2常系数齐次线性方程和欧拉方程

例6 求方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+5y=0$ 的通解

解 第一步：写出特征方程，并求特征根

$$F(k)=k(k-1)+3k+5=0 \qquad \boxed{k_{1,2}=-1\pm 2i}$$

第二步：求出基本解组

$$e^{-t}\cos 2t,\quad e^{-t}\sin 2t \xrightarrow{x=e^t} \frac{1}{x}\cos 2\ln|x|,\quad \frac{1}{x}\sin 2\ln|x|$$

第三步：写出通解

$$y(x)=\frac{1}{x}(c_1\cos 2\ln|x|+c_2\sin 2\ln|x|)$$