



第四章 高阶微分方程

§ 4.1 线性微分方程的一般理论

§ 4.1.1 引言

n 阶线性微分方程一般形式:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t) \quad (4.1)$$

其中 $a_i(t) (i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(t)$ 是区间 $a \leq t \leq b$ 上的连续函数。

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0 \quad (4.2)$$

称它为 n 阶齐次线性微分方程，而方程 (4.1) 为 n 阶非齐次线性微分方程。

§ 4.1.1 引言

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t) \quad (4.1)$$

方程 (4.1) 的解的存在唯一性定理:

定理1 如果 $a_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 及 $f(t)$ 都是区间 $a \leq t \leq b$ 上的连续函数, 则对于任一 $t_0 \in [a, b]$ 及任意的 $x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)}$, 方程 (4.1) 存在唯一解 $x = \varphi(t)$, 定义于区间 $a \leq t \leq b$ 上, 且满足初始条件:

$$\varphi(t_0) = x_0, \quad \frac{d\varphi(t_0)}{dt} = x_0^{(1)}, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1}\varphi(t_0)}{dt^{n-1}} = x_0^{(n-1)} \quad (4.3)$$

§ 4.1.2 齐次线性方程解的性质与结构

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0 \quad (4.2)$$

定理2 (叠加原理) 如果 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 是方程 (4.2)

的 k 个解, 则它们的线性组合

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_k x_k(t)$$

也是 (4.2) 的解,

这里 c_1, c_2, \cdots, c_k 是任意常数。

例 $\frac{d^2 y}{dx^2} + w^2 y = 0$ ($w > 0$ 为常数) **有解** $y = C_1 \cos wx$ $y = C_2 \sin wx$

$$y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$$

§ 4.1.2 齐次线性方程解的性质与结构

证明 $\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0 \quad (4.2)$

$$\begin{aligned} & [c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_k x_k(t)]^{(n)} + a_1(t)[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_k x_k(t)]^{(n-1)} \\ & + \cdots + a_n(t)[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_k x_k(t)] \\ & = c_1 \left[\frac{d^n x_1}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx_1}{dt} + a_n(t)x_1 \right] \\ & + c_2 \left[\frac{d^n x_2}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x_2}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx_2}{dt} + a_n(t)x_2 \right] \\ & + \cdots + c_k \left[\frac{d^n x_k}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x_k}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx_k}{dt} + a_n(t)x_k \right] \\ & = 0 \end{aligned}$$

§ 4.1.2 齐次线性方程解的性质与结构

问题: 当 $k = n$ 时, 若 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 是齐线性方程的解,

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t)$$

能否成为方程 (4.2) 的通解? **不一定**

例如 $\frac{d^2 y}{dx^2} + w^2 y = 0$ ($w > 0$ 为常数)

有解 $y_1 = \cos wx$ $y_2 = 5 \cos wx$ $y = C_1 \cos wx + C_2 5 \cos wx$

不包含解 $y = C_2 \sin wx$

要使 $x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t)$

$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 还需满足一定的条件。

§ 4.1.2 齐次线性方程解的性质与结构

函数线性无关和线性相关

定义在 $a \leq t \leq b$ 上的函数 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)$, 如果存在不全为零的常数 c_1, c_2, \dots, c_k 使得恒等式

$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_k x_k(t) \equiv 0$ 对所有 $t \in [a, b]$ 成立, 称这些函数是**线性相关**的, 否则称是**线性无关**的。

例如 $\cos x, \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关

$\cos^2 x, \sin^2 x, 1$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上线性相关

$1, t, t^2, \dots, t^n$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关

要使得 $c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^n \equiv 0 \quad t \in (-\infty, +\infty)$

则 $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

§ 4.1.2 齐次线性方程解的性质与结构

朗斯基行列式

定义在 $a \leq t \leq b$ 区间上的 k 个可微 $k-1$ 次的函数

$x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)$ 所作成的行列式

$$W(t) = W[x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)]$$

$$= \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

称为这些函数的朗斯基行列式。

§ 4.1.2 齐次线性方程解的性质与结构

定理3 若函数 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 在区间 $a \leq t \leq b$ 上线性相关, 则在 $[a, b]$ 上它们的朗斯基行列式 $W(t) \equiv 0$ 。

证明 由假设, 即知存在一组不全为零的常数 c_1, c_2, \dots, c_n ,

使得 $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \equiv 0 \quad a \leq t \leq b \quad (4.6)$

依次对 t 微分此恒等式，得到

[illegible]

§ 4.1.2 齐次线性方程解的性质与结构

把 (4.6) 和 (4.7) 看成关于 c_1, c_2, \dots, c_n 的齐次线性代数方程组，它的系数行列式就是 $W[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ ，由线性代数理论知道方程存在非零解的充要条件是系数行列式必须为零，即

$$W(t) \equiv 0 \quad a \leq t \leq b$$

证毕

其逆定理是否成立？ 不一定

即由其构成的伏朗斯基行列式为零，但它们也可能是线性无关的。

例如：

$$x_1(t) = \begin{cases} t^2 & -1 \leq t \leq 0 \\ 0 & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} 0 & -1 \leq t \leq 0 \\ t^2 & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

§ 4.1.2 齐次线性方程解的性质与结构

例如: $x_1(t) = \begin{cases} t^2 & -1 \leq t \leq 0 \\ 0 & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} 0 & -1 \leq t \leq 0 \\ t^2 & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$

$$W[x_1(t), x_2(t)] = \begin{cases} \begin{vmatrix} t^2 & 0 \\ 2t & 0 \end{vmatrix} = 0 & -1 \leq t \leq 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & t^2 \\ 0 & 2t \end{vmatrix} = 0 & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = \begin{cases} c_1 t^2 + c_2 \cdot 0 \equiv 0 & -1 \leq t \leq 0 \\ c_1 \cdot 0 + c_2 t^2 \equiv 0 & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$c_1 = c_2 = 0$$

故 $x_1(t), x_2(t) \quad t \in [-1, 1]$ 是线性无关的。

§ 4.1.2 齐次线性方程解的性质与结构

定理4 如果方程(4.2)的解 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 在区间 $a \leq t \leq b$ 上线性无关, 则 $W[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ 在这个区间的任何点上都不等于零, 即 $W(t) \neq 0 \quad (a \leq t \leq b)$

证明 反证法 设有某个 t_0 , $a \leq t_0 \leq b$, 使得 $W(t_0) = 0$

考虑关于 c_1, c_2, \dots, c_n 的齐次线性代数方程组

[illegible]

§ 4.1.2 齐次线性方程解的性质与结构

其系数行列式 $W(t_0) = 0$, 故 (4.9) 有非零解 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n$

构造函数 $x(t) = \tilde{c}_1 x_1(t) + \tilde{c}_2 x_2(t) + \dots + \tilde{c}_n x_n(t)$ ($a \leq t \leq b$)

根据叠加原理, $x(t)$ 是方程 (4.2) 的解, 且满足初始条件

$$x(t_0) = x'(t_0) = \dots = x^{(n-1)}(t_0) = 0 \quad (4.10)$$

但是 $x = 0$ 也是方程 (4.2) 的解, 也满足初始条件 (4.10)

由解的唯一性知 $x(t) \equiv 0$ ($a \leq t \leq b$), 即

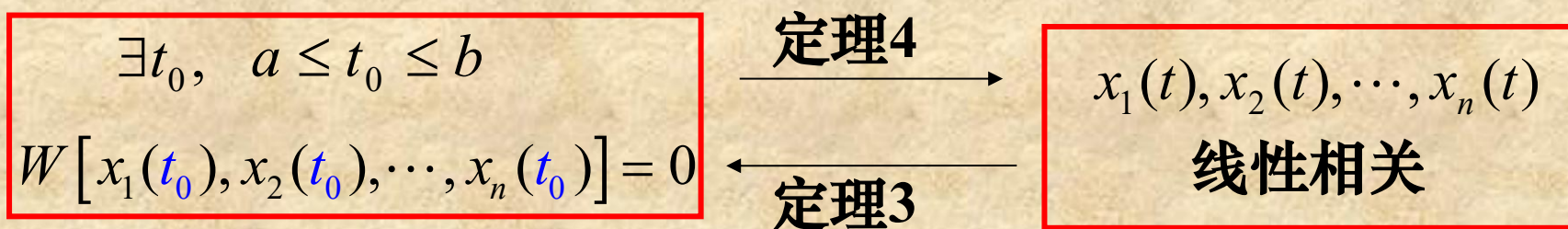
$$\tilde{c}_1 x_1(t) + \tilde{c}_2 x_2(t) + \dots + \tilde{c}_n x_n(t) \equiv 0 \quad (a \leq t \leq b)$$

因为 c_1, c_2, \dots, c_n 不全为 0 (线性相关), 与 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$

线性无关的假设矛盾。

证毕

§ 4.1.2 齐次线性方程解的性质与结构



重要结论

方程(4.2)的解 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 在区间 $a \leq t \leq b$ 上线性无关的充分必要条件是 $W[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \neq 0$ ($a \leq t \leq b$)

§ 4.1.2 齐次线性方程解的性质与结构

定理5 n 阶齐线性方程(4.2)一定存在 n 个线性无关的解, 且任意 $n+1$ 个解都线性相关。

证明 $a_i(t)$ ($i=1,2,\cdots,n$) 在 $a \leq t \leq b$ 上连续, 取 $t_0 \in [a,b]$ 则满足条件 $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$ 存在唯一。

$$x(t_0) = 1, x'(t_0) = 0, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = 0 \quad x_1(t)$$

$$x(t_0) = 0, x'(t_0) = 1, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = 0 \quad x_2(t)$$

.....

$$x(t_0) = 0, x'(t_0) = 0, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = 1 \quad x_n(t)$$

§ 4.1.2 齐次线性方程解的性质与结构

$$x(t_0) = 1, x'(t_0) = 0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = 0 \quad x_1(t)$$

$$x(t_0) = 0, x'(t_0) = 1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = 0 \quad x_2(t)$$

.....

$$x(t_0) = 0, x'(t_0) = 0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = 1 \quad x_n(t)$$

$$W[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]|_{t_0} = |\mathbf{E}| = 1 \neq 0$$

$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 线性无关。

即齐线性方程(4.2)一定存在 n 个线性无关的解。

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0 \quad (4.2)$$

§ 4.1.2 齐次线性方程解的性质与结构

任取方程(4.2)的 $n+1$ 个解, $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), x_{n+1}(t)$

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_{n+1}(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_{n+1}'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n)}(t) & x_2^{(n)}(t) & \cdots & x_{n+1}^{(n)}(t) \end{vmatrix}$$

任意 $n+1$ 个解都线性相关

$$= - \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_{n+1}(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_{n+1}'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^n a_i x_1^{(n-i)}(t) & \sum_{i=1}^n a_i x_2^{(n-i)}(t) & \cdots & \sum_{i=1}^n a_i x_{n+1}^{(n-i)}(t) \end{vmatrix} = 0$$

§ 4.1.2 齐次线性方程解的性质与结构

- n 阶齐线性方程的所有解构成一个 n 维线性空间。
- 方程(4.2)的一组 n 个线性无关解称为它的一个基本解组。

定理6 (通解结构)

如果 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 是方程 (4.2) 的 n 个线性无关的解, 则方程 (4.2) 的通解可表为

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) \quad (4.11)$$

其中 c_1, c_2, \dots, c_n 是任意常数, 且通解 (4.11) 包括方程 (4.2) 的所有解。

§ 4.1.3 非齐次线性方程与常数变易法

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t) \quad (4.1)$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0 \quad (4.2)$$

性质1 如果 $\bar{x}(t)$ 是方程 (4.1) 的解, 而 $x(t)$ 是方程 (4.2) 的解, 则 $\bar{x}(t) + x(t)$ 也是方程 (4.1) 的解。

性质2 方程 (4.1) 的任意两个解之差必为方程 (4.2) 的解。

$$\begin{aligned} & (\bar{x} + x)^{(n)} + a_1(t) (\bar{x} + x)^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t) (\bar{x} + x)' + a_n(t) (\bar{x} + x) \\ &= [\bar{x}^{(n)} + a_1(t) \bar{x}^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t) \bar{x}' + a_n(t) \bar{x}] \\ &+ [x^{(n)} + a_1(t) x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t) x' + a_n(t) x] = f(t) \end{aligned}$$

§ 4.1.3 非齐次线性方程与常数变易法

定理7 设 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为方程(4.2)的**基本解组**,
 $\bar{x}(t)$ 是方程(4.1)的某一解, 则方程(4.1)的通解为

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) + \bar{x}(t) \quad (4.14)$$

其中 c_1, c_2, \dots, c_n 是任意常数, 且通解(4.14)包括方程 (4.1) 的所有解。

证明 1) (4.14)一定是方程(4.1)的解, 且含有n个独立的任意常数, 是通解。

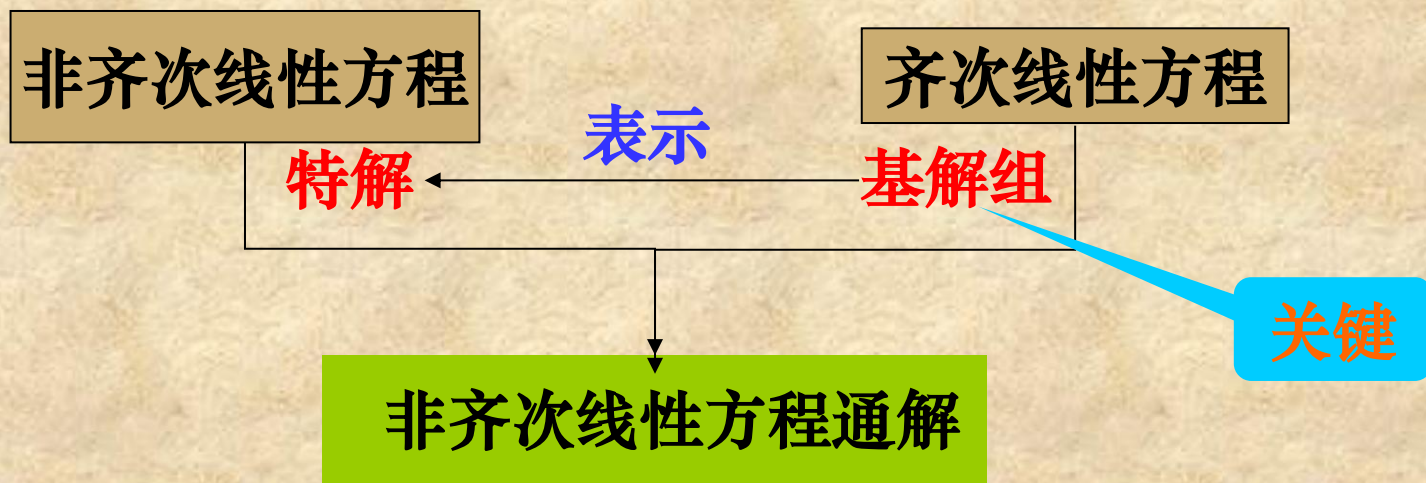
2) $\tilde{x}(t)$ 是方程(4.1)的任一个解, 则 $\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)$ 是方程(4.2)的解
根据定理6, $\exists \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n$, 使得

$$\tilde{x}(t) - \bar{x}(t) = \tilde{c}_1 x_1(t) + \tilde{c}_2 x_2(t) + \dots + \tilde{c}_n x_n(t)$$

$$\tilde{x}(t) = \tilde{c}_1 x_1(t) + \tilde{c}_2 x_2(t) + \dots + \tilde{c}_n x_n(t) + \bar{x}(t)$$

证毕

§ 4.1.3 非齐次线性方程与常数变易法



§ 4.1.3 非齐次线性方程与常数变易法

常数变易法

设 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为方程 (4.2) 的基本解组, 因而

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) \quad (4.15)$$

为 (4.2) 的通解。设

$$x = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) + \dots + c_n(t)x_n(t) \quad (4.16)$$

为 (4.1) 的解。

对 t 微分等式 (4.16)

§ 4.1.3 非齐次线性方程与常数变易法

$$x' = c_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t) + \cdots + c_n(t)x_n'(t) \\ + \underline{x_1(t)c_1'(t) + x_2(t)c_2'(t) + \cdots + x_n(t)c_n'(t)}$$

$$\text{令 } x_1(t)c_1'(t) + x_2(t)c_2'(t) + \cdots + x_n(t)c_n'(t) = 0 \quad (4.17)_1$$

$$x' = c_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t) + \cdots + c_n(t)x_n'(t) \quad (4.18)_1$$

继续对 t 微分 $(4.18)_1$

$$x'' = c_1(t)x_1''(t) + c_2(t)x_2''(t) + \cdots + c_n(t)x_n''(t) \\ + \underline{x_1'(t)c_1'(t) + x_2'(t)c_2'(t) + \cdots + x_n'(t)c_n'(t)}$$

$$\text{令 } x_1'(t)c_1'(t) + x_2'(t)c_2'(t) + \cdots + x_n'(t)c_n'(t) = 0 \quad (4.17)_2$$

$$x'' = c_1(t)x_1''(t) + c_2(t)x_2''(t) + \cdots + c_n(t)x_n''(t) \quad (4.18)_2$$

§ 4.1.3 非齐次线性方程与常数变易法

$$x_1^{(n-2)}(t)c_1'(t) + x_2^{(n-2)}(t)c_2'(t) + \cdots + x_n^{(n-2)}(t)c_n'(t) = 0 \quad (4.17)_{n-1}$$

$$x^{(n-1)} = c_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + c_2(t)x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n(t)x_n^{(n-1)}(t) \quad (4.18)_{n-1}$$

$$\begin{aligned} x^{(n)} &= c_1(t)x_1^{(n)}(t) + c_2(t)x_2^{(n)}(t) + \cdots + c_n(t)x_n^{(n)}(t) \\ &\quad + x_1^{(n-1)}(t)c_1'(t) + x_2^{(n-1)}(t)c_2'(t) + \cdots + x_n^{(n-1)}(t)c_n'(t) \end{aligned} \quad (4.18)_n$$

(4.16) (4.18)₁ (4.18)₂ \cdots (4.18)_{n-1} (4.18)_n 代入方程(4.1) (4.2)得

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t) \quad (4.1)$$

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0 \quad (4.2)$$

$$x_1^{(n-1)}(t)c_1'(t) + x_2^{(n-1)}(t)c_2'(t) + \cdots + x_n^{(n-1)}(t)c_n'(t) = f(t) \quad (4.17)_n$$

§ 4.1.3 非齐次线性方程与常数变易法

$$\begin{cases} x_1(t)c'_1(t) + x_2(t)c'_2(t) + \cdots + x_n(t)c'_n(t) = 0 & (4.17)_1 \\ x'_1(t)c'_1(t) + x'_2(t)c'_2(t) + \cdots + x'_n(t)c'_n(t) = 0 & (4.17)_2 \\ \vdots \\ x_1^{(n-2)}(t)c'_1(t) + x_2^{(n-2)}(t)c'_2(t) + \cdots + x_n^{(n-2)}(t)c'_n(t) = 0 & (4.17)_{n-1} \\ x_1^{(n-1)}(t)c'_1(t) + x_2^{(n-1)}(t)c'_2(t) + \cdots + x_n^{(n-1)}(t)c'_n(t) = f(t) & (4.17)_n \end{cases}$$

$W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \neq 0$ 方程组有唯一的解, 设为

$$c'_i(t) = \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

则

$$c_i(t) = \int \varphi_i(t) dt + \gamma_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

§ 4.1.3 非齐次线性方程与常数变易法

$$c_i(t) = \int \varphi_i(t) dt + \gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

代入(4.16)得方程(4.1)的通解

$$x = \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i(t) + \sum_{i=1}^n x_i(t) \int \varphi_i(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

特解 $\gamma_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

$$x = \sum_{i=1}^n x_i(t) \int \varphi_i(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

结构: 非齐线性方程的通解等于对应齐次方程的通解与自身的一个特解之和。

§ 4.1.3 非齐次线性方程与常数变易法

例1 求方程 $x'' + x = \frac{1}{\cos t}$ 的通解, 已知它对应齐线性方程的

基本解组为 $\cos t, \sin t$

解 令 $x = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t$

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \sin t = 0 \\ -c_1'(t) \sin t + c_2'(t) \cos t = \frac{1}{\cos t} \end{cases}$$

未知变量 $c_i'(t), i = 1, 2$

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{解得 } c_1'(t) = -\frac{\sin t}{\cos t} \quad c_2'(t) = 1 \quad \left| \quad c_1(t) = \ln |\cos t| + \gamma_1 \quad c_2(t) = t + \gamma_2 \right.$$

原方程的通解为 $x = \gamma_1 \cos t + \gamma_2 \sin t + \cos t \ln |\cos t| + t \sin t$

§ 4.1.3 非齐次线性方程与常数变易法

例2 求方程 $tx'' - x' = t^2$ 于域 $t \neq 0$ 上的所有解。

解 对应的齐线性方程为 $tx'' - x' = 0$ $\left| \begin{array}{l} \frac{x''}{x'} = \frac{1}{t} \rightarrow \frac{dx'}{x'} = \frac{1}{t} dt \end{array} \right.$

得 $x' = At \rightarrow x = \frac{1}{2} At^2 + B$ 这里 A, B 为任意常数。

易见有基本解组 $1, t^2$

$$x'' - \frac{1}{t} x' = t$$

设 $x = c_1(t) + c_2(t)t^2$ 为方程的解

$$\begin{cases} c_1'(t) + t^2 c_2'(t) = 0 \\ 2tc_2'(t) = t \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} c_1(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \gamma_1 \\ c_2(t) = \frac{1}{2}t + \gamma_2 \end{cases} \right.$$

故得原方程的通解

$$x = \gamma_1 + \gamma_2 t^2 + \frac{1}{3} t^3$$

(γ_1, γ_2 为任意常数)