Guía de ejercicios prácticos (y útiles)

Modelos y Optimización I

Guía de Trabajos Prácticos

Se resume en esta guía problemas que se considera permiten la suficiente ejercitación para alcanzar un buen conocimiento de la materia.

Se solicita a los alumnos hagan llegar sus observaciones y comentarios, con el objeto de efectuar futuras correcciones y agregados que se consideren de interés.

Bibliografía

1-Hillier / Lieberman "Introducción a la investigación de operaciones" Ed. Mc Graw Hill

2-Wayne L. Winston - Investigación de Operaciones.

3-Hamdy A. Taha "Investigación de Operaciones" Ed. Wiley

Pautas para el uso de la Guía de Trabajos Prácticos

La guía de trabajos prácticos presentada contiene diversos problemas sobre los temas desarrollados en las clases teórico-prácticas de la materia.

Cada tema contiene: uno o varios ***Problemas Tipo*** *y varios* ***Problemas para resolver****.*

Problemas Tipo

Son problemas representativos que se muestran analizados y resueltos. El objetivo es facilitar al alumno su iniciación en cada uno de los temas.

Esto se relaciona fuertemente con el método didáctico empleado, el cual se basa sustancialmente en la participación activa de los alumnos en clase. Por este motivo es necesario que los mismos trabajen sobre los problemas tipo y así, posteriormente, en la resolución de los ejercicios propuestos para cada ocasión. De esta forma, se posibilitará una mejor comprensión de los temas actuando como catalizador positivo de la participación en clase y de la asimilación de los temas.

Problemas para resolver

En cada tema se enuncian varios problemas para resolver. No es necesario que el alumno resuelva todos los ejercicios para saber el tema.

Debe quedar claro que en los planteos de programación lineal no existe una única solución posible. Un mismo enunciado puede ser planteado de diversas maneras (cada una con sus hipótesis particulares) y todas ellas ser correctas, siempre que no se modifique ningún aspecto del enunciado dado.

Nunca *puede considerarse sabido un tema, con sólo haber leído y comprendido* ***problemas resueltos*** *por otra persona. Únicamente resolviendo una a una las dificultades que se van presentando al realizar el planteo de un problema, pueden irse incorporando los distintos conceptos de programación lineal. Al consultar el calendario, se verá que no todos los problemas que se incluyen en la guía están propuestos para resolver (no se pueden resolver todos por falta de tiempo). Lo principal es que los alumnos traigan los problemas propuestos resueltos para poder aprovechar las clases. Además es importante que los alumnos se acostumbren a que la resolución de los ejercicios debe efectuarse en forma prolija, clara y, en el caso de los modelos, a identificar cada grupo de inecuaciones en forma precisa junto con sus variables correspondientes.*

Breve descripción del WINQSB

Introducción

Los ejemplos de esta guía se realizaron con el software winqsb, que permite resolver modelos de Programación Lineal Continua y/o Entera y hacer el correspondiente análisis de sensibilidad. En el campus virtual en la cátedra elementos de investigación operativa se puede descargar el programa y manual de uso.

1. Modelización Básica y Resolución Gráfica

Temario

1-Análisis del enunciado del problema.

2-Resumen de la situación a resolver.

3-Identificación de incógnitas: su significado y unidades.

4-Planteo del sistema de inecuaciones correspondientes.

5-Disposición del sistema de ejes coordenados. Escalas.

6-Identificación de los semiplanos definidos por cada inecuación. Identificación de la recta límite.

7-Identificación del recinto de soluciones.

8-Pendiente del funcional. Rectas de isocosto e isobeneficio.

9-Solución óptima.

10-Obtención algebraica de los valores de las incógnitas para la solución óptima.
11-Significado de las variables slacks. Planteo del sistema de ecuaciones correspondiente al problema.

12-Valor de las variables slacks para la solución óptima.

13-Análisis gráfico de la variación en las restricciones existentes: aumento o disminución de disponibilidades.

14-Análisis gráfico de la inclusión de nuevas restricciones.

15-Análisis gráfico de variaciones en el funcional.

Problema Tipo Nº 1

1:

En un taller metalúrgico se fabrican **dos tipos de piezas**: A y B las que deben seguir los siguientes procesos:

- Estampado en hojas metálicas.
- Soldado.
- Pintado.

La operación de estampado consiste en preparar partes idénticas que luego serán soldadas formando la pieza A. El mismo proceso se realiza para la pieza B.

Los **insumos de equipos**, para la realización de cada una de las operaciones (expresados en segundos por pieza), son los siguientes:

OPERACION	A	B	TIEMPO DISPONIBLE (SEG/SEM)
Estampado	3	8	48000
Soldado	12	6	42000
Pintado	9	9	36000

La utilidad unitaria de cada pieza es de **4 $ para** A, y de **3 $ para B**. Establecer un programa semanal que maximice las ganancias.

Planteo:

X1: unidades de piezas A a fabricar por semana [u/s]

X2: unidades de piezas B a fabricar por semana

$Z= 4x1 + 3x2 \rightarrow Max$ $/u * u/s [$/s]

$Xi \geq 0;$

R1: $3x1+8x2 \leq 48000$

R2: $12x1+6x2 \leq 42000$ seg/u * u/s [seg/s]

R3: $9x1+9x2 \leq 36000$

Extendemos el modelo

R1: $3x1+8x2+ x3 = 48000$

R2: $12x1+6x2 + x4= 42000$

R3: $9x1+9x2 + x5 = 36000$

X4: sobrante de tiempo en segundos por semana en estampado

X5: sobrante de tiempo en segundos por semana en soldado

X4: sobrante de tiempo en segundos por semana en pintado

como se supone buscamos el óptimo que será aquel que utilice todo el tiempo disponible de los sectores, las slacks tomaran valores iguales a cero.

Analizando R1:

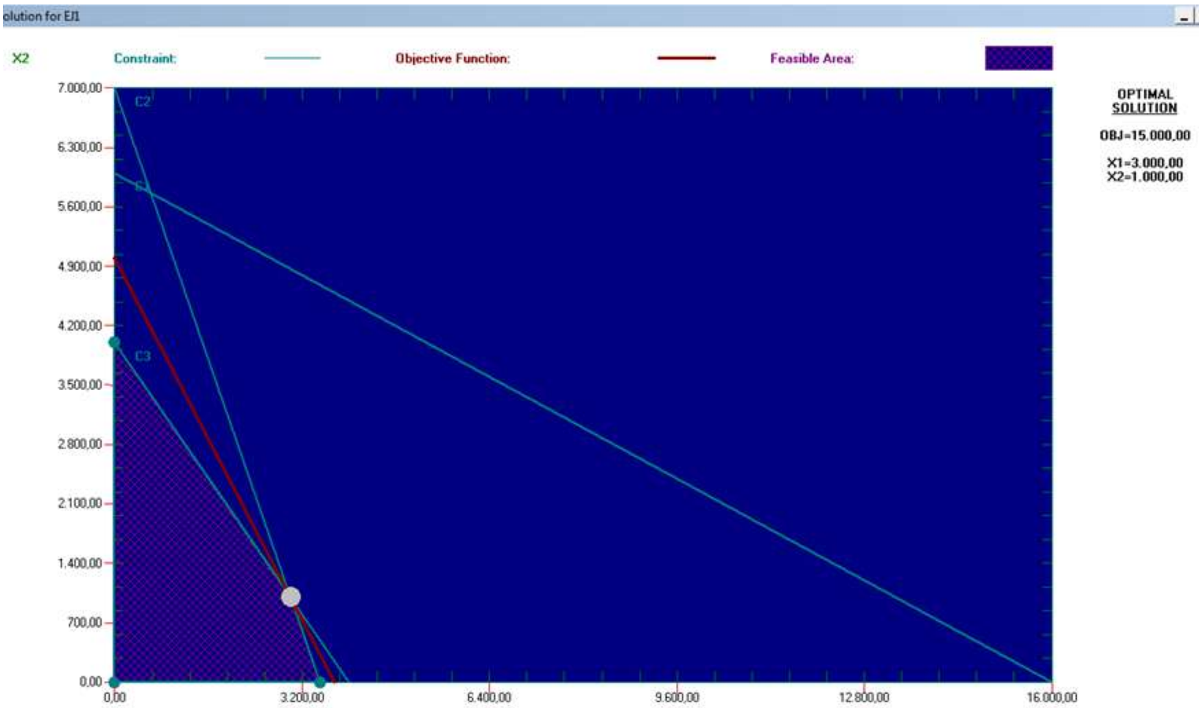
Si X1 = 0 entonces 8X2 = 48000 → X2= 6000 (0,6000)
Si X2 = 0 entonces 3X1 = 48000 →X1= 16000 (16000,0)

Analizando R2:

Si X1 = 0 entonces 6X2 = 42000 → X2=7000 (0,7000)
Si X2 = 0 entonces 12X1 = 42000 → X1= 16000 (3500,0)

Analizando R3:

Si X1 = 0 entonces 9X2 = 36000 → X2=4000 (0,4000)
Si X2 = 0 entonces 9X1 = 36000 → X1=4000 (0,4000)



Z= 4x1 + 3x2 → Max

X2= -4X1/3

Si X1=3 entonces X2= -4 [3,-4]
Si X1=-3 entonces X2= 4 [-3,4]

Vértices:

A= X2∩ R3

X1=0 entonces 9x2 = 36000 X2=4000

B= R2 ∩ R3 Op auxil.

$$\left|\begin{array}{cc|c} 12 & 6 & 42 \\ 9 & 9 & 36 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{cc|c} 12 & 6 & 42 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right|$$

2F * (-12) + 1F

$$\left|\begin{array}{cc|c} 12 & 6 & 42 \\ 0 & -6 & -6 \end{array}\right|$$

X2=1 reemplazo y despejo en R1
12X1 + 6 = 42 X1=3

Otra manera es igualando las rectas:
12X1+6X2-42 = 9X1 +9X2-36 tal que operando queda X1 = X2+2
Reemplazando en la primera restricción queda X2=1, reemplazo X1 y obtengo X1=3

$C = X1 \cap R2$

$X2=0$ entonces $12x1 = 42000$ $X1=3500$

Tabla

Vértices	X1	X2	X3	X4	X5	Z= 4x1 + 3x2
Origen	0	0	48	42	36	0
A	0	4	16	18	0	12
B	3	1	31	0	0	15
C	3,5	0	37,5	0	4,5	14

Interpretación:

Fabrique 3000 unidades de piezas A por semana, 1000 unidades de B. Con esto espera ganar 15000 pesos semanales.

Le sobraran 31000 seg/sem en estampado, y se ocupará todo el tiempo en pintado y soldado.

2:

Un fabricante de bombones entrega sus productos en cajas de un kilogramo, en dos variedades: A y B.

La caja tipo A contiene 300 gramos de bombones de licor, 500 gramos de bombones de nuez y 200 gramos de bombones de fruta. La caja tipo B contiene 400 gramos, 200 gramos y 400 gramos de cada tipo de bombón, respectivamente.

La utilidad por cada caja de bombones tipo A es de $ 120, y por cada caja de tipo B es de $ 90.

El fabricante dispone de 100 kilogramos de bombones de licor, 120 kilogramos de bombones de nuez, 100 kilogramos de bombones de fruta.

Se desea definir la cantidad de cajas de cada tipo que debe armar en esta situación para que su beneficio sea máximo.

Resolución del problema

Identificación de las incógnitas con sus unidades:

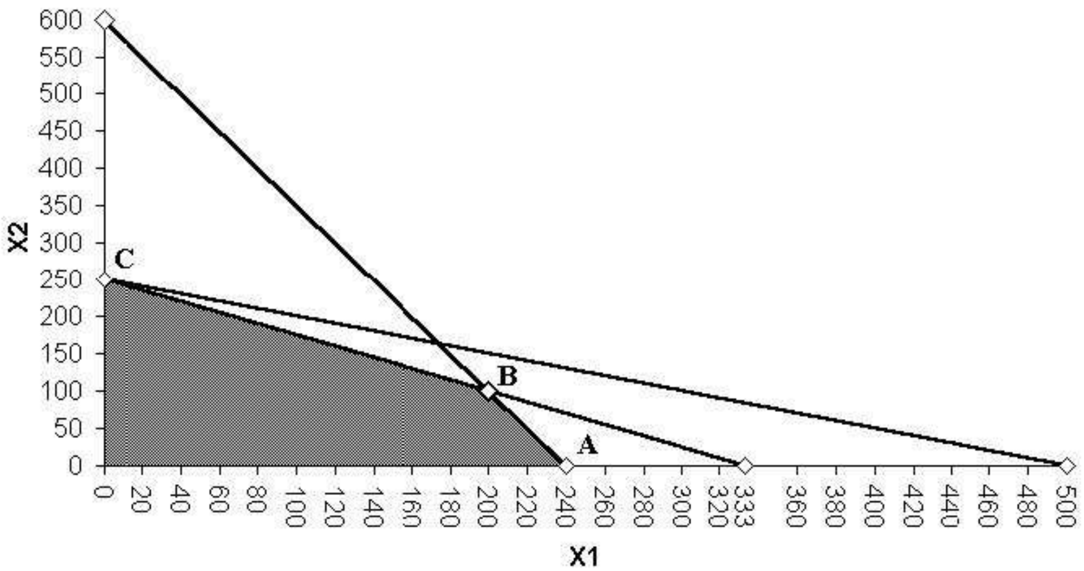
X1: Producción de cajas tipo A un: Nº de cajas/período
X2: Producción de cajas tipo B un: Nº de cajas/período

Planteo de las inecuaciones y funcional

$0,3X1 + 0,4X2 \leq 100 \rightarrow$ *Licor*
$0,5X1 + 0,2X2 \leq 120 \rightarrow$ *Nuez*
$0,2X1 + 0,4X2 \leq 100 \rightarrow$ *Fruta*
$X1, X2 \geq 0$

$Z = 120X1 + 90X2 \rightarrow$ *Máx*

Representación gráfica



Obtener algebraicamente los valores de X1, X2 y Z en vértices

Punto 0 ***X1 = 0 X2 = 0 Z = 0***
Punto A 0,5 X1 + 0,2 X2=120 ***X1 = 240 X2 = 0 Z = 28800***
Punto B 0,5 X1 + 0,2 X2=120 ***X1 = 200 X2 = 100 Z=33000***
0,3 X1 + 0,4 X2=100
Punto C 0,3 X1 + 0,4 X2=100 ***X1 = 0 X2 = 250 Z = 22500***

El punto C, por tratarse de un extremo "degenerado", puede definirse también con alguno de los *siguientes sistemas de ecuaciones:*

0,3 X1 + 0,4 X2 = 100 ó 0,2X1 + 0,4 X2 =100
0,2 X1 + 0,4 X2 = 100 X1 = 0

Variables Slacks – Planteo de Ecuaciones

0,3X1 + 0,4X2 + X3 =1000,
5X1 + 0,2X2 + X4 =1200,
2X1 + 0,4X2 + X5 =100

Variable Slack	***Descripción***	***Unidad***
X3	*Sobrante de bombones de licor*	*kilogramos/período*
X4	*Sobrante de bombones de nuez*	*kilogramos/período*
X5	*Sobrante de bombones de fruta*	*kilogramos/período*

Hallar algebraicamente el valor de las variables en el óptimo El punto extremo B, óptimo del problema, se define por la anulación de las variables X3 y X4. Por lo tanto, el valor del resto de las variables en el óptimo, surge del siguiente sistema de ecuaciones.

0,3 X1 + 0,4X2 = 1000,
5 X1 + 0,2X2 = 1200,
2 X1 + 0,4X2 + X5 =100

Por lo tanto, el valor de todas las variables y el funcional, en el óptimo, será:

X1 = 200 Cajas bombones tipo "A"/período

X2 = 100 Cajas bombones tipo "B'/período

X3 = 0 Kgs. Bombones de licor/períodoX4 = 0 Kgs. Bombones de nuez /período

X5 = 20 Kgs. Bombones de fruta/período

Z = 33.000 $/período

Problema Tipo Nº 2

1-Una empresa automotriz está equipada para producir automóviles y camiones. Su planta fabril está organizada en cuatro departamentos: estampado, montaje de motores, línea de montaje de automotores y línea de montaje de camiones. Las capacidades de cada departamento están limitadas de la siguiente forma:

Estampado puede producir 25.000 autos ó 35.000 camiones por año.

Montaje de motores puede producir 33.333 autos ó 16.667 camiones por año

Montaje de autos: 25.000 por año.

Montaje de camiones: 15.000 por año.

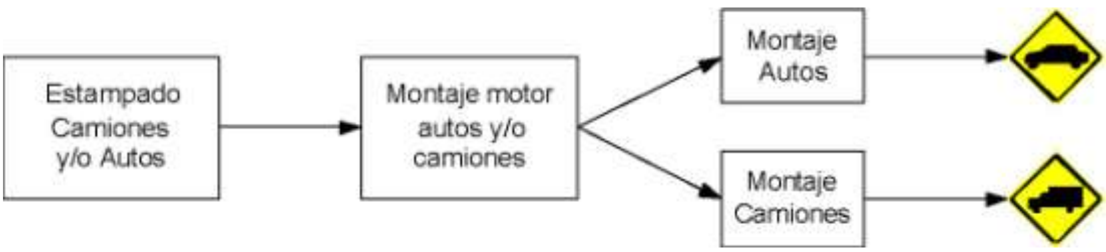
Se desea producir como mínimo 12.000 autos y 8.000 camiones por año, estimándose asimismo en 18.000 unidades la cantidad demandada máxima anual de automóviles.

El margen de beneficios es de 150.000 $ por auto y 125.000 $ por camión.

Se desea conocer el plan de producción que haga máximo el margen total de beneficio.

Resolución del problema

1. *Representación gráfica del subsistema a modelizar*
    - *Fábrica – Subsistema Producción*



Objetivo del problema:

Determinar el plan de producción de autos y camiones para el próximo año, de manera de maximizar la ganancia total de la empresa.

Hipótesis:

a-No hay stock ni inicial ni final. Se vende todo lo que se produce.
b-No existen costos fijos en el sistema producción.
c-Se vende al contado.
d-Se planifica a moneda constante.
e-Los excedentes de caja no se los trabaja a interés.
f-Las capacidades son prácticas, es decir, están afectadas por las paradas
g-No hay restricciones ni de Mano de Obra, ni de Producción, ni de MP.
h-No hay mermas en los procesos productivos.
i-Se produce un solo tipo de auto y un solo modelo de camión.

Variables:

Variable	*Descripción*	*Unidad*
X1	*Cantidad de autos a producir*	*unidades/año*
X2	*Cantidad de camiones a producir*	*unidades/año*

5. *Restricciones que debe cumplir el modelo*

1-Capacidad de estampado (autos y/o camiones)

2-Capacidad de motores (autos y/o camiones)

3-Capacidad de montaje autos.

4-Capacidad de montaje camiones.

5-Demanda mínima y máxima de autos.

6-Demanda mínima camiones.

De 1, la capacidad de estampado se debe expresar entre unidades iguales, vale decir, en autos o en camiones o en forma de capacidad. Si 35.000 camiones = 25.000 autos → 1 camión = 0,71 autos. La ecuación la podríamos expresar como:

$$X_1 + 0{,}71 * X_2 \leq 25.000$$

ó

$$X_1 * 1{,}4 + X_2 \leq 35.000$$

O bien en capacidad

$$\frac{x1}{25000} + \frac{x2}{3500} \leq 1$$

De esta forma la ecuación es homogénea en unidades.

En la restricción 2en forma de capacidad

$$\frac{x1}{33333} + \frac{x2}{16667} \leq 1$$

La 3: X1 ≤ 25.000;

La 4: X2 ≤ 15.000;

La 5: X1 ≥ 12.000;   X1 ≤ 18.000
La 6: X2 ≥ 8.000

Nota: Ver que la ecuación 3 no restringe el modelo, sino que es redundante ya que existe la 5: X1 ≤ 18.000.

X1; X2 ≥ 0

6. *Funcional*
   150.000 X1 + 125.000 X2 → Máx

Nota: Observar que, como se trata de un beneficio, está expresado en $/unidad de tiempo, en este caso $/año.

Observar que el problema puede tener otros funcionales acorde a otros objetivos:

Análisis posterior

Objetivo	***Funcional***
Maximizar ventas de camiones	$X2 \rightarrow$ *Máx*
Minimizar producción de autos	$X1 \rightarrow$ *Mín*
Minimizar capacidad ociosa de estampado	$X1 + 0{,}71\ X2 \rightarrow$ *Máx*
etc.	*etc.*

¿Qué pasa si no se cumple alguna hipótesis (3.a - 3.i)?a) Si no se vende todo lo que se produce hay que abrir las variables X1 y X2:

X1 ' → cantidad de autos a producir *X1 " → cantidad de autos a vender*
X2 ' → cantidad de camiones a producir *X2 " → cantidad de camiones a vender*

i-Si no es necesario considerar stocks, las ecuaciones a incorporar serían:

$X1' \geq X1''$

$X2' \geq X2''$

Donde las variables que representan stocks deben figurar también en otras restricciones o en el funcional, de lo contrario no tiene sentido para el modelo haberlas agregado.
En cualquier caso, las capacidades de línea de montaje de autos
y camiones serían:

$X1' \leq 25.000$ *[autos/año]*

$X2' \leq 15.000$ *[camiones/año]*

Análogamente, debería reemplazarse en las restricciones de capacidad de estampado y montaje de motores las variables X1 y X2 por X1' y X2'. Mientras que las restricciones de demanda quedarían:

$12.000 \leq X1'' \leq 18.000$ *[autos/año]*

$X2'' \geq 8.000$ *[camiones/año]*

b) Si se consideraran los costos fijos, habría que agregarlos en el funcional

$Z = 150.000\ X1 + 125.000\ X2 - \text{Costos fijos} \rightarrow$ *Máx*

c) Si no se vende al contado, y se quiere el ingreso a valores actuales, hay que dividir el precio por un coeficiente mayor a 1 (pérdida por interés). Ej: si se vende a 360 días e "i" es la tasa a 360 días. $Z = 150.000\ X1/(1 + i) + 125.000\ X2 /(1 + i) \rightarrow$ *Máx*

d) Si hubiera inflación habría que multiplicar los coeficientes de Z por 1a tasa anual de inflación, para obtener el valor actualizado al año.

e) Si suponemos que cada auto que se vende genera un excedente de caja de "b" \$/u y cada camión "c" \$/u, y este excedente se trabaja a una tasa "i". $Z = 150.000\ X1 + 125.000\ X2 + (b\ X1)i + (c\ X2)i \rightarrow$ *Máx*

f) Si las capacidades pudieran afectarse por 'paradas', habría que conocer un valor estimativo del porcentaje de pérdida de tiempo útil que estas provocan. Ej: Se usa un 10% linea montaje motor para preparar los equipos, entonces $X1 + 2\ X2 \leq 0{,}9 * 33.333$

g) Si se consideraran más modelos de autos y/o camiones, habría que trabajar con más variables. (Probablemente una para cada modelo)

Problema Tipo Nº 3

Dos aditivos “1” y “2” deben ser empleados para mejorar la calidad de una nafta. Se deben cumplir las siguientes condiciones: a-Como los aditivos no producen combustión es conveniente, para evitar la formación de depósitos en el carburador, que por cada 10 litros de gasolina no se agregue más de 1/2 litro de aditivos.

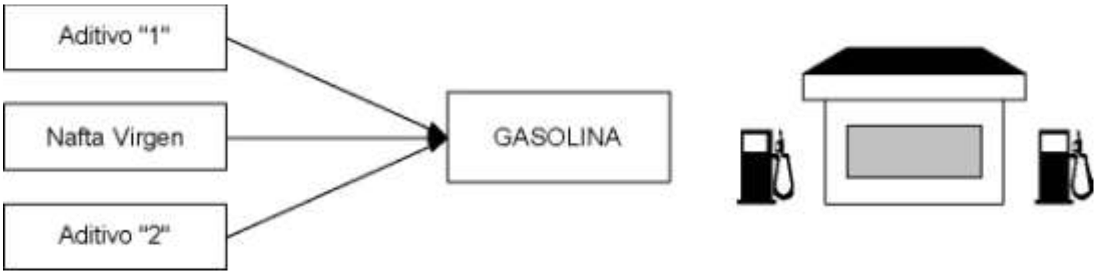
b-La cantidad de aditivo “2” más dos veces la cantidad de aditivo 1 debe ser, como mínimo, 1/2 litro por cada 10 litros de gasolina. De esta manera se logra una nafta de color óptimo.

c-Agregar un litro de aditivo “1” significa que a la nafta se agregan 10 unidades de octanaje y agregar un litro de aditivo “2”, 20 unidades de octanaje.

La nafta sin aditivos posee un octanaje de 84 y se quiere que, como mínimo, la gasolina obtenida posea un número de octanos superior a 90. El costo del aditivo “1” es de 153 $/litro y el del “2”, 400 $/litro.

Resolución del problema

Representación gráfica del subsistema a modelizar



Objetivo del problema

Determinar la cantidad de cada uno de los aditivos a agregar a la nafta virgen por cada 10 litros de gasolina de manera de minimizar los costos.

Hipótesis

- *No hay mermas en el proceso de mezcla.*
- *No hay costo en el proceso de mezcla.*
- *La relación de octanos es lineal.*
- *No hay costo de M.O.*
- *Todas las naftas vírgenes que pueda usar tienen igual costo.*
- *El aumento en unidades de octanaje de los aditivos se considera por cantidad agregada cada 10 litros de gasolina.*

Variables:

X1 = Cantidad de aditivo “1” a agregar a la nafta por c/10 lts. [litros / 10 litros]
X2 = Cantidad de aditivo “2” a agregar a la nafta por c/10 lts. [litros / 10 litros]

Restricciones que se deben cumplir:

1- *No agregar más de 0,5 litros de aditivos cada 10 litros de gasolina.*
2- *Relación entre el aditivo “1” y “2” por el color de la gasolina.*
3- *Número total de octanos de la gasolina.*

Inecuaciones:

1-Aditivo “1” + Aditivo “2” + Nafta virgen = 10 litros de gasolina.
La restricción dice que el agregado total de aditivos no puede ser superior a 1/2 litro, entonces:
$X1 + X2 \leq 0{,}5$ *[litros / 10 litros]*

2-Para obtener una coloración final óptima:
$2\,X1 + X2 \geq 0{,}5$ *[litros / 10 litros]*

3- *Dado que partimos de 84 octanos debemos mejorar por lo menos en 6, por lo que debemos agregar aditivos "1" y "2" para que se cumpla esto:*

$$10\frac{un}{l} * x1\frac{l}{10l} + 20\frac{un}{l} * x2\frac{l}{10l} \geq 6\frac{l}{10l}$$

X1, X2 ≥ 0

Funcional: Z = 153 X1 + 400 X2 [$ / 10 lts.] →Mín

Nota: Un planteo más general puede ser:

X1: Cantidad de aditivo "1" a agregar a una producción N

X2: Cantidad de aditivo "2" a agregar a una producción N

V: Cantidad de nafta virgen a agregar a una producción N

N = X1 + X2 + V

N≤M (En el supuesto de demanda máxima)

N ≥m (En el supuesto de demanda mínima)

La restricción 1 sería

$$X_1 + X_2 \leq 0{,}5/10\ [X_1 + X_2 + V\ ]$$

La restricción 2 sería

$$2X_1 + X_2 \leq 05/10\ [X_1 + X_2 + V\ ]$$

La restricción 3 sería
$10X_1 + 20X_2 \geq 6\ [X_1 + X_2 + V\ ]$

Fijarse que haciendo M →∞

m = 0

N = 10

obtenemos el planteo propuesto.
Si hubiéramos definido las variables así:

X1 = % de Aditivo "1"

X2 = % de Aditivo "2"

La 1 sería X1 + X2 ≤ 5%

La 2 sería 2X1 + X2 ≥ 5%

La 3 no se puede manejar con inecuaciones de Programación Lineal