Tratando de safar a ella le safan

2do Parcial IO

Programación no lineal

Restringida 1° y 2° derivada

Minimizar

Hallar
$$x \geq 0 / z = g(x) \rightarrow \min$$
$$z = x_1^{\,2} + 3x_2^{\,2} - 8x_1 - 6x_2 + 24$$

1. **Calculamos derivada primera, segunda y cruzada.**

$$\frac{\partial g^1}{\partial x_1} = 2x_1 - 8 \qquad \frac{\partial g^1}{\partial x_2} = 6x_2 - 6 \qquad \frac{\partial g^2}{(\partial x_1)^2} = 2 \qquad \frac{\partial g^2}{(\partial x_2)^2} = 6$$

$$\frac{\partial g^2}{\partial x_1 {*} x_2} = 0 \qquad \frac{\partial g^2}{\partial x_2 {*} x_1} = 0$$

2. **Condición necesaria**
   $2x_1 - 8 = 0$ → x1 = 4
   $6x_2 - 6 = 0$ → x2 = 1

   $x^0 = (4,1)$
   En caso de que el punto estacionario X^0 tenga algún componente negativo, no cumple la condición de no negatividad y por tanto el ejercicio se corta aca.
3. **El hessiano:**

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

$$\text{Det(H)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12$$

4. **Verificamos que es un mínimo**
   Condición suficiente: Que sea positiva definida
   - Determinante de primer orden = 2
   - Determinante de segundo orden = 12

   Se cuple Positiva definida

   o también podemos hacer:

$$X.H.X^T = [x1\ x2] \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 2x_2^2 > 0$$

   Se cumple que es positivo para cualquier Xi excepto Xi = 0
5. **Conclusión**
   Se verifica que z(4,1)= 5 es un mínimo

Maximizar

$$x \geq 0 / z = g(x) \rightarrow \max$$

$$z = -(x_1 - 4)^2 - 3(x_2 - 2)^2 + 24$$

1. **Obtener derivada, primera y segunda y cruzadas.**

$$\frac{\partial g^1}{\partial x_1} = -2x_1 + 8 \qquad \frac{\partial g^1}{\partial x2} = -6x_2 + 12 \qquad \frac{\partial g^2}{(\partial x_1)^2} = -2 \qquad \frac{\partial g^2}{(\partial x2)^2} = -6$$

las derivadas cruzadas $\frac{\partial g^2}{\partial x_1 . x_2}. = 0$

2. **Obtener punto estacionario**

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} -2x_1 + 8 \\ -6x_2 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x^o = (4, 2)$ punto estacionario

$-2x_1 + 8 = 0 \rightarrow x_1 = -8/-2 = 4$

$-6x_2 + 12 = 0 \rightarrow x_2 = -12/-6 = 2$

En caso de que el punto estacionario X^0 tenga algún componente negativo, no cumple la condición de no negatividad y por tanto el ejercicio se corta aca.

3. **Formamos el Hessiano**

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

4. **Verificamos que es un mínimo**

   Condición suficiente: Que sea negativa definida
   - Determinante de primer orden = -2
   - Determinante de segundo orden = 12

   Se cuple negativa definida segun la regla de : $(-1)^k$
   - Primer orden: $(-1)^1 = -1$ … determinante de primer orden: -2 ✅
   - Primer orden: $(-1)^2 = 1$ … determinante de segundo orden: 12 ✅

   o también podemos hacer:

   $X.H.X^T < 0 \quad (x_1, x_2)\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

   Para cualquier valor de Xi excepto Xi = 0 $\quad (-2x_1, -6x_2) . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -2x_1^2 - 6x_2^2 < 0$

5. **Conclusión**

   Se verifica que z(4,2)= 24 es un mínimo

Lagrange

Maximización: Sí comenzando con el determinante ppal. mayor de orden (2m+1) los últimos (n-m) determinantes de H^B forman pauta de signos alternativos con $(-1)^{m+1}$
Minimización: Sí comenzando con el determinante menor ppal. de orden (2m+1) los últimos (n-m) determinantes tienen signos $(-1)^m$

Matriz hessiana

$$H^B = \begin{bmatrix} O| & P \\ P^T| & Q \end{bmatrix} (m+n).(m+n)$$

$$P = \begin{bmatrix} \nabla g1(x) \\ \ldots \\ \nabla gn(x) \end{bmatrix} mxn \qquad Q = \left\| \frac{\partial^2 L(x_1,\lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} \right\| nxm \quad \text{para todo i, j} \quad \text{derivadas segunda Xi y cruzadas}$$

Función Lagragiana

$$L(x_{1,}, x_2, \lambda) = f(x) \oplus \sum \lambda_1 (gi(x) - bi).$$

$$Para \min \oplus \longrightarrow +$$

$$para Max \oplus \longrightarrow -$$

Ejemplo con igualdad

Consigna

Hallar $x / z = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 2x_1 - 2x_2 + 4 \rightarrow Min$

Sujeto a $g(x) = x_1 + x_2 = 4$

1. **Formamos L**

$$L(x_{1,}, x_2, \lambda) = f(x) \oplus \sum \lambda_1 (gi(x) - bi).$$

Queremos minimizar entonces en el XOR va una resta

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 2x_1 - 2x_2 + 4 + \lambda(x_1 + x_2 - 4)$$

2. **Derivamos respecto de x_1,x_2 y λ e igualamos a cero para despejar los**

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2 + \lambda = 0 \longrightarrow x_1 = \frac{-\lambda + 2}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x2} = 2x_2 - 2 + \lambda = 0 \longrightarrow x_2 = \frac{-\lambda + 2}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 4 = 0$$

De 1 y 2 reemplazado en 3 me da $\frac{-\lambda + 2}{2} + \frac{-\lambda + 2}{2} - 4 = 0 \longrightarrow \lambda = -2$

3. **Evaluó x_1,x_2 con λ obtenido**

reemplazo $X_1=2$ y $X_2 = 2$

$$X^o = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. **Verificación**

$$H^B = \begin{bmatrix} O| & P \\ P^T| & Q \end{bmatrix} (m+n).(m+n)$$

Considerando los coeficientes de la restricción (P) y su transpuesta:

Sujeto a $g(x) = x_1 + x_2 = 4$

P

$$H^B = \frac{[0]}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \cdot \frac{|1 \quad 1}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

Minimización:Sí comenzando con el determinante menor principal de orden (2m+1) los últimos (n-m) determinantes m tienen signos (-1)

- Variables = 2 = n
- Restricciones = 1 = m
    - n-m = 1 --> $(-1)^m = -1$
- Determinante de orden 3= 0+0+0-2-2-0= -4
- Determinante de orden 2 = 0-2= -2

Es mínimo en (2, 2) con Z= 4

Ejemplo con desigualdad

Esto sería Kuhn - Tucker

Método dicotómico

Método de búsqueda dicótomo
$x1 = \frac{1}{2}(xR + xL - \Delta)$
$x2 = \frac{1}{2}(xR + xL + \Delta)$

Ejemplo - Una función y un intervalo

Maximizar $f(x) = x_1^2 + (1-x_1)$ entre 2<=x<=4 , Haga 3 iteraciones, suponiendo Δ = 0.02

Iteración 1:

I0= (2,4)

x1 = 0.5*(4+2-0.02) = 2.99 → F(x1) = 6.95

x2 = ½*(4+2+0,02) = 3,01 → F(x2) = 7.05

f(x2) > f(x1) → xL=2.99

Reemplazo la cota inferior por el valor de de x1 cuando $f(x_2) > f(x_1)$

Reemplazo la cota superior por el valor de de x2 cuando $f(x_2) < f(x_1)$

I1=(2.99,4)

Iteración 2:

I1=(2.99,4)=(xL,xR)

x1=0.5(4+2.99-0.02)= 3.48 , $F(3.48)=(3.48)^2 +(1-3.48) = 9.63$

x2=0.5(4+2.99+0.02)= 3.50 , $F(3.50) = (3.50)^2 +(1-3.50) = 9.75$

f(x2) > f(x1) --> xL=2.99

Reemplazo la cota inferior por el valor de de x1 cuando $f(x_2) > f(x_1)$

Reemplazo la cota superior por el valor de de x2 cuando $f(x_2) < f(x_1)$

I1=(3.48,4)

Iteración 3:

I2=(3.48,4)=(xL,xR)

x1=0.5(4+3.48-0.02)= 3.73, $F(3.73)=(3.73)^2 +(1-3.73) = 11.18$

x2=0.5(4+3.48+0.02)= 3.75, $F(3.75) = (3.75)^2 +(1-3.75) = 11.31$

f(x2) > f(x1) → xL=3.73

Reemplazo la cota inferior por el valor de de x1 cuando $f(x_2) > f(x_1)$

Reemplazo la cota superior por el valor de de x2 cuando $f(x_2) < f(x_1)$

I1=(3.73,4)

Ejemplo - Función por tramos

Maximizar	f(x) =	| 3x	0<= x <= 2	Δ = 0.1
		| ⅓ (-x + 20)	2<= x <= 3	

Formamos tantas funciones como intervalos
$F_1 = 3x$
$F_2 = ⅓ (-x + 20)$

Mnemotecnia by lucho: Cuando es $F(x_1)$ el menor se cambia xL, cuando es $F(X_2)$ se cambia xR

F(x1)	F(x2)
xL	xR

Iteración 1

$x_1 = 0.5 * (3 + 0 - 0.1) =$ **1.45**

Cómo x_1 cae dentro del intervalo de F_1 evaluamos F_1

⇒ $F_1(x_1) = 3 * 1.45 = 4.35$

$x_2 = 0.5 * (3 + 0 + 0.1) = 1.55$

Cómo x_2 cae dentro del intervalo de F_1 evaluamos F_1

⇒ $F_1(x_2) = 3 * 1.55 = 4.65$

$F_1(x2) > F_1(x1)$ ⇒ xL = 1.45
⇒ I1 = (**1.45**,3)

Iteración 2

$x_1 = 0.5 * (3 + 1.45 - 0.1) = 2,17$

Cómo x_1 cae dentro del intervalo de F_2 evaluamos F_2

⇒ $F_2(x_1) = 5,94$

$x_2 = 0.5 * (3 + 1.45 + 0.1) =$ **2,27**

Cómo x_2 cae dentro del intervalo de F_2 evaluamos F_2

⇒ $F_2(x_2) = 5,91$

$F_2(x_2) < F_2(x_1)$ ⇒ xR = 1.45
⇒ I = (1.45,**2,27**)

Método seccion dorada

Método de sección dorada
$x1 = xR - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).(xR - xL)$
$x2 = xL + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).(xR - xL)$

Mismo procedimiento que el [método dicotómico]

Método del gradiente

Es un proceso iterativo en el que se busca el máximo/mínimo a través del movimiento del plano y evaluación continua de su entorno.

Ejemplo

$f(x) = (2x_2-x_1)^2 + 2(1-x_1)$

Primera iteración

$P_t = (0,0)$
Se evaluó la función comenzando en este caso en el punto (0,0)
$f(P_t) = 2$

Se deriva respecto de x1 y x2
$\frac{\partial F}{\partial x1} = -4x_2 + 2x_1 + 2$
$\frac{\partial F}{\partial x2} = 8x2 - 4x1$

Se reemplazan con los valores 0,0
Evaluamos derivadas en P_t
$\frac{\partial F}{\partial x1} = -4*0 + 2*0 + 2 = 2 = x1$
$\frac{\partial F}{\partial x2} = 8 * 0 - 4 * 0 = 0 = x2$

Construimos el gradiente con las derivadas
$\nabla f(P_t) = (2,0)$

Calculo del próximo paso

$$x^1 = x^0 + \Delta x$$
$$x^1 = x^0 + r\nabla f(x^0)$$

Aca si quiero maximizar pongo "+", si quiero minimizar pongo "-"

$$\textbf{max} \rightarrow x^n = x^{n-1} + r\nabla f(x^{n-1})$$
$$\textbf{min} \rightarrow x^n = x^{n-1} - r\nabla f(x^{n-1})$$

Punto anterior + r * el gradiente
$x^1 = (0,0) + r(2,0) = (2r,0)$

Se reemplaza el punto x^1 de arriba en la función original
$f(x) = (2x_2 - x_1)^2 + 2(1 - x_1)$
$h(r) = f(2r,0) = (2*0-2r)^2 + 2(1-2r) = 4r^2 + 2 - 4r$
Derivamos, igualamos a 0 y despejamos r
$h'(r) = f'(2r,0) = 8r - 4 = 0 \rightarrow r = 1/2$

Reemplazamos r en el x anterior y obtenemos el siguiente punto
$x^1 = (2*(1/2),0) = (1,0)$

cálculo otro f
$z = f(x^1) = (2*0-1)^2 + 2(1-1) = (2*0-1)^2 + 0 = 1$

Puedo tener condición de parada por un en la diferencia de la función en ambos pasos (opcional)
$|f(x0)-f(x1)=|2-1|=1$

Segunda iteración

$f(x) = (2x_2 - x_1)^2 + 2(1 - x_1)$
$x^1 = (1,0)$

Evaluar la derivada con x^1

$\frac{\partial F}{\partial x1} = -4x_2 + 2x_1 + 2 = 4$
$\frac{\partial F}{\partial x2} = 8x2 - 4x1 = -4$
$\nabla f(x_1) = (4,-4)$

Aca si quiero maximizar pongo "+", si quiero minimizar pongo "-"

max → $x^n=x^{n-1}+r\nabla f(x^{n-1})$

min → $x^n=x^{n-1}-r\nabla f(x^{n-1})$

Punto anterior + r *el gradiente
x^2 = (1,0) + r(4,-4) = (5r,-4r)
Se reemplaza el punto x^2 de arriba en la función original
f(x) = $(2x_2-x_1)^2 + 2(1-x_1)$
h(r) = f(5r,-4r) = $((2*-4r)-5r)^2 + 2(1-5r)$ =
h'(r) = f'(5r,-4r) = $(-13r)^2$ - 10
338r -10 => r= 10/338 => r = 5/169 = 0,029
Evaluamos el punto x2 con el r obtenido
x^2 = (25/169,-20/169)
z = f (x^2) = $((2*20/169)-(25/169))^2 + 2(1-(25/169))$ = 1,71

Aca podriamos seguir iterando…. (En este caso se nota z va creciendo - este caso era maximizar)

Hay que iterar hasta que x^n no quede en funcion de r, eso nos indica que no se puede mejorar.

Kuhn - Tucker

Consigna

Ejercicio 1: (ptos.) Resuelva el siguiente ejercicio aplicando el método más adecuado.

Hallar : $X=\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$ / Z = f(x) = $-2x_1^2 - 2x_2^2$ → MAX

sujeto a : $\begin{cases} g_1(x) = x_1 - 2x_2 \leq -6 \\ g_2(x) = x_1 \geq 2 \end{cases}$

Agregamos slacks para convertir en ecuaciones
G1 : x_1-2x_2 +s1+6 = 0
G2 : $-x_1$ <= -2 → $-x_1$+2 +s2 = 0

Formamos L, como en lagrangiano

Función Lagragiana

$L(x_1,x_2,\lambda) = f(x) \oplus \sum \lambda_1 (gi(x) - bi).$

$Para \min \oplus \longrightarrow +$

$paraMax \oplus \longrightarrow -$

F = $-2x_1^2 - 2x_2^2$ $-\lambda_1(x_1-2x_2$ +s1+6)- λ2($-x_1$+2 +s2)

Derivamos respecto de todas las variables

$\frac{\partial F}{\partial x1} = - 4x1 - \lambda 1 + \lambda 2 = 0$ =>

$\frac{\partial F}{\partial x2}$ = -4x2 +2λ1=0 =>

$\frac{\partial F}{\partial \lambda 1} = - x1 + 2x2 - s1 - 6 = 0$ =>

$\frac{\partial F}{\partial \lambda 2} = \quad + x1 - 2 \ - s2$=0

$\frac{\partial F}{\partial s1} \times \lambda 1 = \lambda 1 * s1$

$\frac{\partial F}{\partial s2} \times \lambda 2 = \lambda 2 * s2$

Para despejar las variables usamos una de las siguientes cuatro combinacion

De las derivadas de s por λ tengo 2^n combinaciones donde n = restricciones
Tengo cuatro combinaciones

$\lambda_2 \neq 0 y s_2 = 0 \qquad s_2 = 0 y s_1 = 0$

$\lambda_1 \neq 0 y s_1 = 0 \qquad \lambda_1 = 0 y \lambda_2 = 0$

Selecciono la opción $s2 = 0 \ y \ s1 = 0$ **(Si este no funciona seleccionamos otros)**

$\lambda 2 = 16$

$x1 = 2$

λ1=8

$x2 = 4$

Cumple la condición de no negatividad asique corta aca

x = [2 4]

Camino crítico

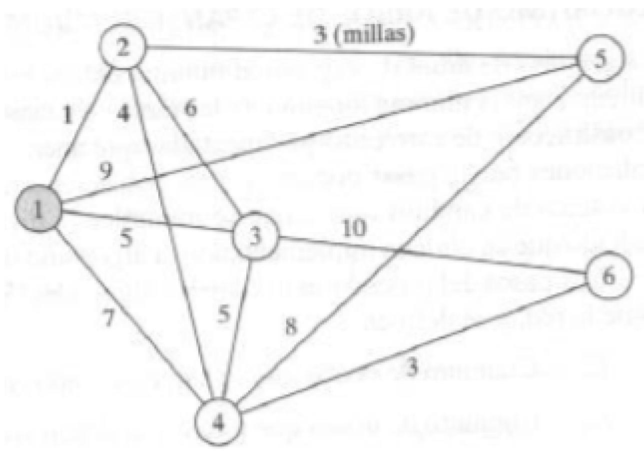
Modelos de redes:

- Redes deterministas 🤖(CPM = Método de la ruta crítica)
- Redes probabilistas ⁉ (PERT = Técnica de evaluación y revisión de programas)
  - Hay tres estimaciones de PERT, es decir, tiempo optimista (to), tiempo más probable ™, tiempo pesimista (tp). Por otro lado, solo hay una estimación en CPM.

CPM

Ejemplo 1

Midwest TV Cable Company está en el proceso de proporcionar servicio de cable a cinco nuevas áreas habitacionales. La figura representa los enlaces posibles de TV entre las 5 áreas. Las millas de cable se muestran en cada arco. Determine la red de cable más económica.



$C_0=\{1\}$ y $C'_0=\{2,3,4,5,6\}$
$C_1=\{1,2\}$ y $C'_1=\{3,4,5,6\}$ 1m
$C_2=\{1,2,5\}$ y $C'_2=\{3,4,6\}$ 4m
$C_3=\{1,2,5,4\}$ y $C'_3=\{3,6\}$ 8m
$C_4=\{1,2,5,4,6\}$ y $C'_4=\{3\}$ 11m
$C_5=\{1,2,5,4,6,3\}$ y $C'_5=\{\}$ 16m
Comenzando en el nodo 1 se tiene un resultado de 16 millas.

PERT

Ejemplo 1

Antes de poder introducir un nuevo producto al mercado se deben realizar todas las actividades que se muestran en la tabla (todos los tiempos están en semanas).

$$Te = \frac{To + 4*Tn + Tp}{6} \qquad \sigma^2 * te = \left(\frac{tp-to}{6}\right)^2$$

Actividad	Descripción	Precedencia	TO	TP	TM	TE	σ²
A	Diseño del producto	-	2	10	6	6	1,78
B	Estudio del mercado	-	4	6	5	5	
C	Emitir ordenes materiales	A	2	4	3	3	0,11
D	Recibir materiales	C	1	3	2	2	0,11
E	Construir prototipo	A, D	1	5	3	3	
F	Desarrollo y promoción	B	3	5	4	4	
G	Puesta en marcha planta para producción masiva	E	2	6	4	4	0,44
H		F, G	0	4	2	2	0,44

Matriz de precedencia

	A	B	C	D	E	F	G	H
A			x		x			
B						x		
C				x				
D					x			
E							x	
F								x
G								x
H								

Diagrama de potenciales

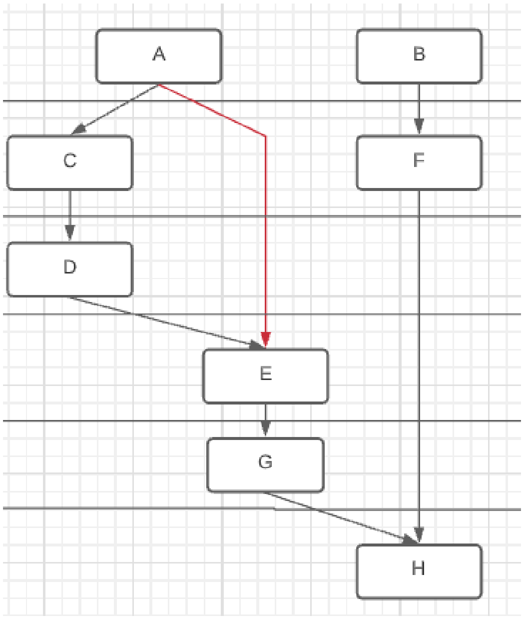


Diagrama de redes

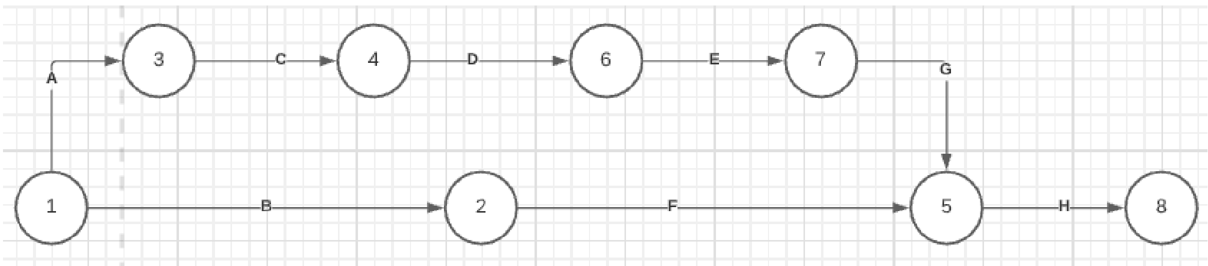
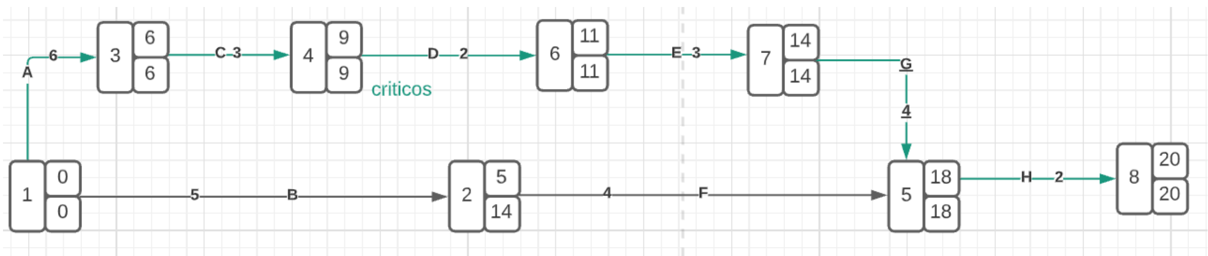


Diagrama de Flechas



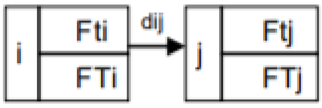
- **Actividades Críticas**: A, C, D, E, G, H
  Las actividades críticas son aquellas donde el numerito de arriba es igual al de abajo (los cuadraditos chiquitos).

- **Nodos Críticos**: 1, 3, 4, 6, 7, 5, 8
  Son los nodos que conectan las actividades críticas.

  <u>Esto se hace solo para las actividades no críticas:</u>

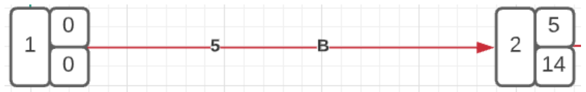
  Calcular márgenes Márgenes de suceso = FTi - Fti

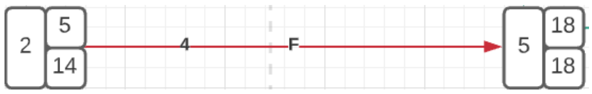
Margen Total: MTij = FTj – Fti - dij 0
Margen Libre: MLij = Ftj – Fti - dij 0
Margen Independiente: MIij = Ftj – FTi - dij < , > , = 0



Tareas	MT	ML	MI
B	9	0	0
F	9	9	0

<u>**Esto se hace solo para las actividades no criticas:**</u>
PFC, UFC, PFF, UFF:
PFC: Primera Fecha de Comienzo: PFCij = Fti
UFC: Ultima Fecha de Comienzo: UFCij = FTj – dij
PFF: Primera Fecha de Finalización: PFFij = Fti + dij
UFF: Ultima Fecha de Finalización: UFFij = FTj





Actividades	B	F
PFC	**0**	**5**
UFC	**9**	**14**
PFF	**5**	**9**
UFF	**14**	**18**

Ejemplo 2

$$Te = \frac{To + 4 * Tn + Tp}{6} \qquad \sigma^2 * te = \left(\frac{tp - to}{6}\right)^2$$

Actividad	Predec.	TO	TM	TP	TE	σ2
A	-	6	9	11	8,83	0,69
B	-	5	7	10	7,17	
C	-	3	3	9	4,00	

D	A	3	5	7	5,00	0,44
E	A, C	1	2	5	2,33	
F	C	2	4	6	4,00	
G	C	3	7	9	6,67	
H	B, F	1	4	5	3,67	
I	B, F	3	4	6	4,17	
J	D	4	9	11	8,50	1,36
K	H, I	4	5	8	5,33	
					22,33	2,50

Aca se suman solo las actividades críticas

Matriz de precedencia

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	-			X	X						
B		-						X	X		
C			-		X	X	X				
D				-						X	
E					-						
F						-		X	X		
G							-				
H								-			X
I									-		X
J										-	
K											-

Matriz de potenciales

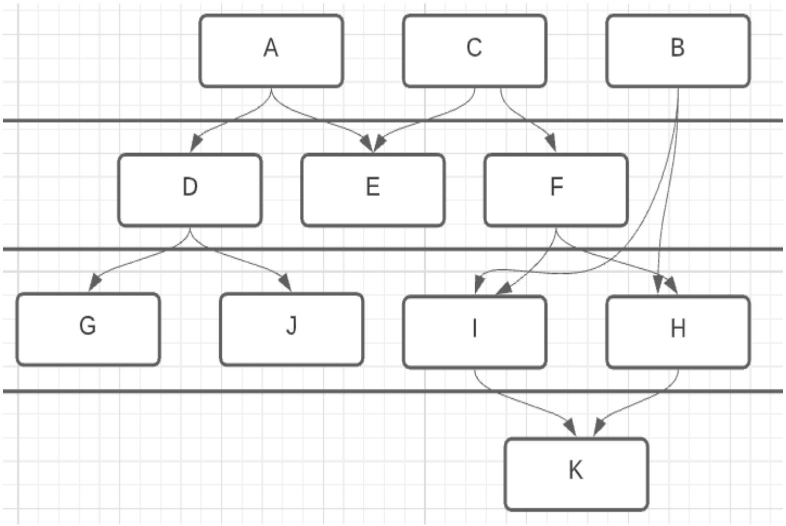
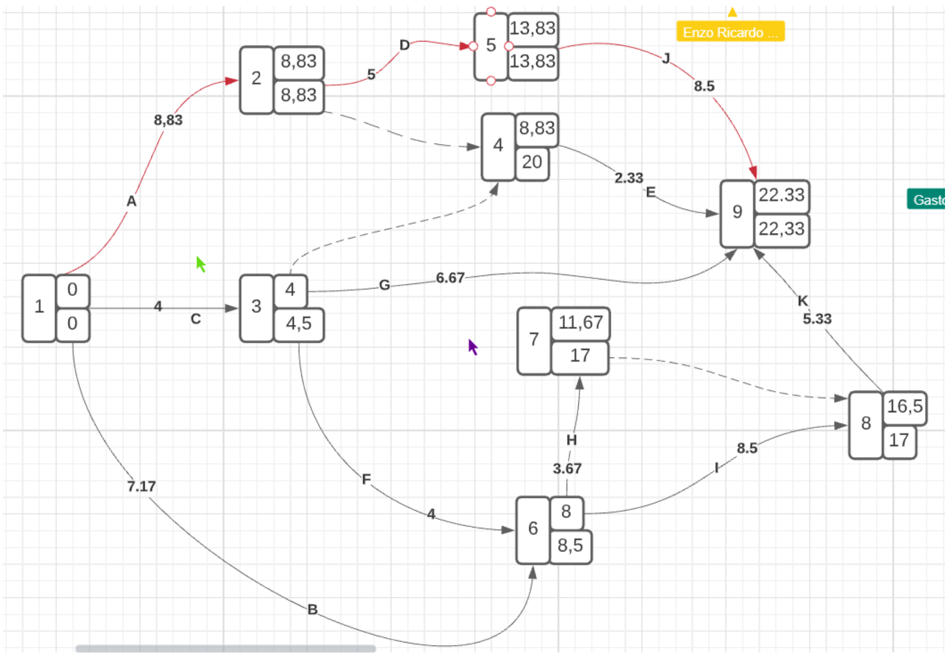


Diagrama de Flechas



Camino crítico:1, 2, 5, 9

- Son los nodos en los que el numerito de arriba es igual al de abajo,

Tareas criticas:A, D, J

- Son las aristas que unen los nodos críticos

<u>Esto se hace solo para las actividades no críticas:</u>

Calcular márgenes Márgenes de suceso = FTi - Fti

Margen Total: MTij = FTj – Fti - dij 0

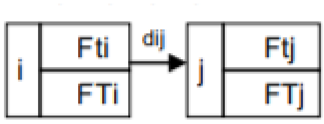
Margen Libre: MLij = Ftj – Fti - dij 0

Margen Independiente: MIij = Ftj – FTi - dij < , > , = 0

Tareas	MT	ML	MI

B	1,33	0,83	0,83
C	0,5	0	0
F	0.5	0	-0.5
E	11.17	11.17	0
G	11.16	11.66	11.16
H	5,33	0	-0,5
I	0.5	0	-0.5
K	0.5	0.5	0

Esto se hace solo para las actividades no críticas:
PFC, UFC, PFF, UFF:
PFC: Primera Fecha de Comienzo PFCij = Fti
UFC: Última Fecha de Comienzo: UFCij = FTj – dij
PFF: Primera Fecha de Finalización: PFFij = Fti + dij
UFF: Última Fecha de Finalización: UFFij = FTj



Actividades	B	C	F	E	G	H	I	K
PFC	**0**	**0**	**4**	**8.83**	**4**	**8**	**8**	**16.5**
UFC	**1.33**	**0,5**	**4,5**	**20**	**15.66**	**13.33**	**8.5**	**17**
PFF	**7,17**	**4**	**8**	**11.16**	**10.67**	**11.67**	**16.5**	**21.83**
UFF	**8,5**	**4,5**	**8,5**	**22.33**	**22.33**	**17**	**17**	**22.33**

Probabilidad de acabar en 20 días, y plazo de ejecución con una probabilidad de cumplimiento del 84%.

84% --> 0,99 || (Buscamos 84% en la tabla normal y obtenemos el valor de z = 0.99)

desvío estándar = raíz(σ^2) = raíz(2,50) = 1.58 || σ^2 se saca de la sumatoria en la tabla 1

te'=te+zσ → t_e obtiene de la suma de valores de las actividades críticas, tabla 2.
te'=22.33+0,99*1,58= 23,89 ---> 24 días

se recalcula Z

Z=(te’-te)/σ = (23,89-22.33)/1.58= 0.98 =(se busca en tabla)=> 0,8365 => 84%

Modelos gestión de stock

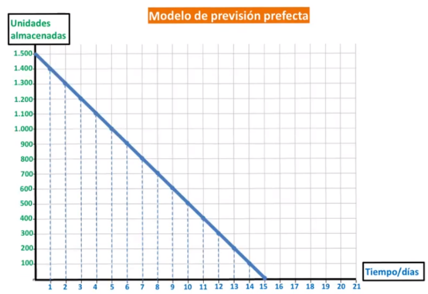
K = Costo de preparación, lanzamiento o emisión de la orden de adquisición, producción o de arranque
b = Costo de producto, de adquisición o producción.
D = Demanda total en un tiempo T = **n * q**
C_1 = Costo de almacenamiento
C_2 = Costo de escasez, agotamiento
d = Demanda unitaria = **D/T**
q = Lote de reposición
n = veces que se solicita un reaprovisionamiento = **D/q** = **T/q**
T = **n *** T_i
T_i = Tiempo entre orden y orden de stock

Conceptos previos

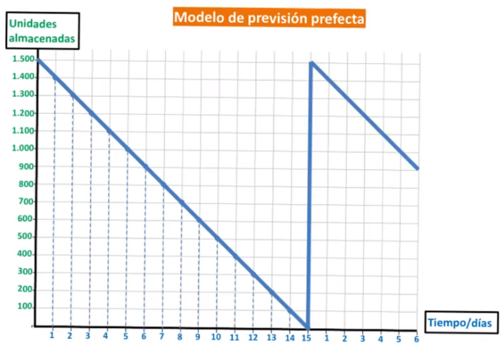
- **Punto de pedido** : Número de mercancías que nos indicará el momento de realizar el pedido
- **Stock de seguridad** : Cantidad de mercancía que nos permitirá atender los pedidos de un producto evitando rotura de stock
- **Rotura de stock** : Producida cuando no disponemos de mercancía suficiente para atender pedidos.

Explicacion conceptos

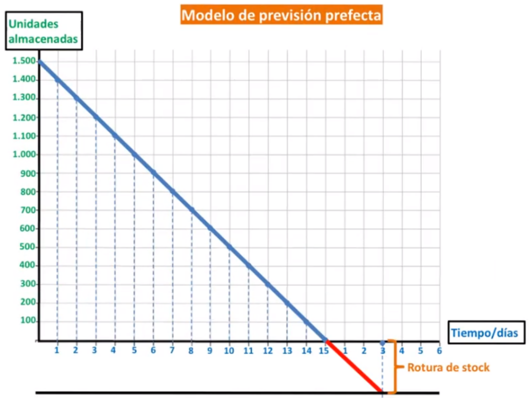
Si la demanda es constante las unidades disminuye linealmente



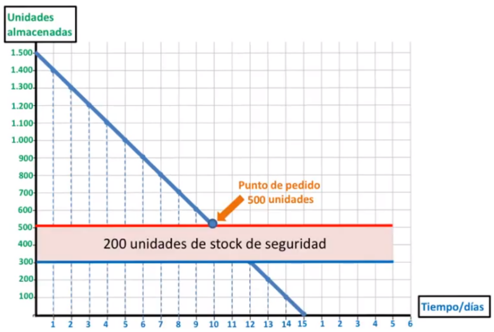
Si suponemos que el proveedor nos brinda lo requerido de forma inmediata, aprovisionamos el día que nos quedamos sin stock.



Si el proveedor nos brinda lo requerido con retraso de por ejemplo 3 días se produce una rotura de stock si no compramos antes, en concreto perdimos 300 ventas, dado que son 100 ventas diarias.



Para que no suceda lo anterior debemos definir un **stock de seguridad**, el cual se va a definir según el tiempo de servicio del proveedor.
Lógicamente si tarda hasta 5 días, y vendemos 100 unidades diarias, para no quedarnos sin stock debemos encargar 5 días antes cuando tenemos 500 unidades (**Punto de pedido**) o a más tardar cuando tengamos 300 unidades.



Modelos

Utilizamos según que escenarios disponemos:

Modelo I	Modelo II	Modelo III	Modelo IV	Modelo V
Sin Agotamiento	Sin Agotamiento + Stock proteccion	Con agotamiento	Resposición no instantánea	Sin agotamiento, precio adquisición o producción variables según el tamaño del lote

Modelo I - Simple sin agotamiento

Costo total de preparación = $\frac{D}{q} \cdot K$

Costo total del producto = $b.D$

Costo total de almacenamiento = $\frac{1}{2}\, q\, T\, C_1$

$$CTE = \frac{D}{q} \cdot K + b.D + \frac{1}{2}\, q\, T\, C_1$$

$$\boxed{CTE_0 = b.D + \sqrt{2.T.D.K.C_1}} \quad \boxed{q_0 = \sqrt{\frac{2.K.D}{T.C_1}}} \quad \boxed{T_0 = \frac{T}{n_0} = \frac{T.q_0}{D} = \sqrt{\frac{2.K.T}{D.C_1}}}$$

Análisis de la sensibilidad a izquierda y derecha del valor óptimo

$$\boxed{\alpha = \frac{q'}{q_0}} \quad \boxed{\lambda = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha} + \alpha\right]} \quad \boxed{CTE' = \lambda \, . \, CTE_0}$$

Ejemplo 1

Un contratista tiene que proveer 100 displays por día a una fábrica de celulares. El costo de mantener un display en stock por mes es de $0,20 y el costo de arranque de un lote de producción es de $1200. ¿Con que frecuencia debe fabricar los lotes de producción?. Simular 1 mes (30 días).

K = Costo de preparación, lanzamiento o emisión de la orden de adquisición, producción o de arranque = $1200
b = Costo de producto, de adquisición o producción. → No tenemos producción aca
D = Demanda total en un tiempo T T= **n * q** = 30 * 100 = 3000 [u]
C_1 = Costo de almacenamiento = $0.20 [$/u*mes]
C_2 = Costo de escasez, agotamiento → No tenemos agotamiento aca
d = Demanda unitaria = **D/T** = 100[u/día] = 3000/30 = 100 [u/día]
q = Lote de reposición = 6000 [u]
n = veces que se solicita un reaprovisionamiento = 0.5
T = **n * T_i** = 30 [días]
T_i = Tiempo entre orden y orden de stock = 60 dias

CÁLCULOS

El lote máximo a disponer es q = 6000 [u]

$$qo = \sqrt{\frac{2.K.D}{T.C1}} \quad \sqrt{\frac{2 \cdot 1200 \cdot 3000}{1 \cdot 0.2}} = 6000 \text{ [Unidades}$$

Las veces que solicitamos reaprovisionamiento es 0.5
n = D/q = 3000 [u]/ 6000 [u] = 0.5

El reaprovisionamiento lo hacemos cada 60 dias

$$to = \frac{T.qo}{D}$$

t_i = (6000*1)/3000 = 2 [mes] * 30 [dias/mes] = 60 dias

Nota: cuando q > D, se hace que q tendria el valor de D y se utiliza la fórmula de CTE en lugar de CTE_0, un ejemplo de esto se ve el el Ejemplo 3
El costo total esperado será 6572.67 +b D

$$CTE_0 = b.D + \sqrt{2.T.D.K.C_1} = 6572.67069\ldots + bD$$

El área del gráfico suma en total veces de reaprovisionamiento, donde un triángulo completo es 1 y si tenemos el triángulo incompleto entonces tenemos que calcular: **parte decimal * t_i** para saber el día en que se corta el triángulo.
En este caso n = 0.5, el triángulo corta en el día 1 (0.5* 2)

Modelo II - Simple sin agotamiento y con stock de protección

Modelo II Modelo Simple sin Agotamiento y con stock de protección

sp : stock de protección (stock mínimo de reposición)

Costo total de preparación = $\frac{D}{q} \cdot K$

Costo total del producto = $b \cdot D$

Costo total de almacenamiento = $\frac{1}{2}\, q\, T\, C_1$

Costo de adquisición del sp = $sp\ b$

Costo de mantenimiento del sp = $sp\ T\, C_1$

$$CTE = \frac{D}{q} \cdot K + b \cdot D + \frac{1}{2}\, q\, T\, C_1 + sp\ T\, C_1 + sp\ b$$

$$\boxed{CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot T \cdot D \cdot K \cdot C_1} + sp\ T\, C_1 + sp\ b}$$

$$\boxed{q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot D}{T \cdot C_1}}}$$

$$\boxed{T_o = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot T}{D \cdot C_1}}}$$

Ejemplo 2

Una compañía consume una materia prima a una tasa de 8500 kgs. /mes. Este componente cuesta 1.5 euros/kg y tiene un coste de emisión de pedido de 1000 euros/pedido. El coste de mantener el inventario es 0.01 euros/kg mes.

Determine cuándo y cuánto se debe ordenar, si desea minimizar el coste total.

D = 8500 kg/mes
T = 1 mes
b = 1.5 euros/kg
K = 1000 euros/pedido
C_1 = 0,01 euros/kg mes
q = sqrt((2kD)/(TC1))= sqrt((2*1000*8500)/(1*0,01)) = 41231,06
t_0 = sqrt((2*K*T)/(D*C1)) = 4,85

Modelo III - Simple con agotamiento

Modelo III Modelo Simple con Agotamiento

s : stock real almacenado
q : lote de reposición

$q_o - s_o$ = cantidad pendiente óptimo

$$\text{Costo total de preparación} = \frac{D}{q} \cdot K$$

$$\text{Costo total del producto} = b \cdot D$$

$$\text{Costo total de almacenamiento} = \frac{1}{2} s^2 \cdot \frac{T}{q} C_1$$

$$\text{Costo de agotamiento} = \frac{1}{2} \frac{T}{q} (q - s)^2 C_2$$

$$CTE = \frac{D}{q} \cdot K + b \cdot D + \frac{1}{2} s^2 \cdot \frac{T}{q} C_1 + \frac{1}{2} \frac{T}{q} (q - s)^2 C_2$$

$$s_o = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot D}{T \cdot C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}}$$

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot D}{T \cdot C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}}$$

$$CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot T \cdot D \cdot K \cdot C_1} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}}$$

$$T_o = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot T}{D \cdot C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}}$$

Ejemplo 3

Basado en el Ejemplo 2 considero suponga que se permiten roturas de stock, y que éste asciende a 0.5 euros/kg mes.

C_2 = 0.5 euros/kg

👀Aca como q > D, asigna a q el valor de D, y se utiliza CTE👀
q = 8500

CTE = $(D/q)*K + b*D + ½ s^2* (T/q)*C_1 + ½ * (T/q)*(q-s)^2*C_2$
CTE = $(8500/8500)*1000 + 1.5*8500 + ½ s^2* (1/8500)*0.5 + ½ * (1/8500)*(8500-s)^2*0.5$
CTE = $15874.87 - 0.49s^2 - 0{,}49997s$

Ejemplo 4

Un contratista se compromete a surtir motores a un fabricante de camiones a razón de 25 por día. Encuentra que el costo de mantener un motor completo en el almacén es de $16 por mes, y existe una cláusula en el contrato, que lo multa con $10 por motor por día de atraso en la entrega. La producción de motores es en lotes y cada vez que se inicia un nuevo lote hay costos de arranque de $1000. ¿Con que frecuencia debe iniciarse los lotes de producción y cuál debe ser el nivel inicial de inventario al tiempo que se completa la producción de un lote.

D = 25 motores*30 = 750 motores
T = mes
C_1 = 16 $/mes
C_2 = 300$ / mes

K = $1000

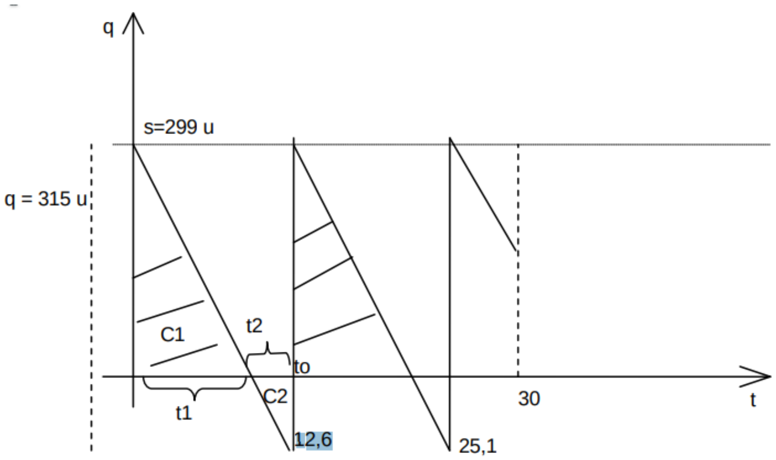
t_0 = T /n = T / (D/q) = 30 / (750/ 315) = 12.6

q_0 = 315

n = D/q_0= 750/315 = 2.38

q_0 = sqrt(2.K.D/T.C1)*sqrt(C1+C2/C2)=sqrt(2*$1000*750/1 mes*16$/mes)*sqrt((16$/mes + 300$/mes)/300$/mes)=314.25 ≒315

$S_0 = (C_2 / (C_1+C_2))*q_0$ = (300/ (16+300))*315 = 299



12,6 $^{+12,6}\rightarrow$ 25,1 $\rightarrow^{+4.78}$ 29,88(30)

n = 2,38 → parteDecimal(n) = 0,38 → 0.38*12,6 = 4,78

$t_0 = t_1 + t_2$

s es el stock real en almacenado

$$\frac{s}{t_1} = \frac{q_o}{t_o} \qquad \frac{q-s}{t_2} = \frac{q_o}{t_o}$$

Despejando:

$t_1 = st_0/q_0$ = (299*12.6)/315 = 11.96

t_2 = (q - s)*t / q_0 = $t_0 - t_1$ = 12.6 - 11.96 = 0.64

Modelo IV - Modelo Triangular (reposición no instantánea)

Modelo IV Modelo Triangular (reposición no instantánea)

p : velocidad de producción (u. prod / u. tpo)

P > d

Costo total de preparación = $\frac{D}{q} \cdot K$

Costo total del producto = b. D

Costo total de almacenamiento = $\frac{1}{2}\, q\, T\, C_1 \left(1 - \frac{d}{p}\right)$

$$CTE = \frac{D}{q} \cdot K + b.\,D + \frac{1}{2}\, q\, T\, C_1 \left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

$$q_o = \sqrt{\frac{2.K.D}{C_1\left(1 - \frac{d}{p}\right)T}} = \sqrt{\frac{2.K.\,d}{C_1\left(1 - \frac{d}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2\,.\,K\,.\,d\,.\,p}{C_1\,(p - d)}}$$

Ejemplo 5

Un contratista tiene que proveer 1000 cojinetes por día a una fábrica de automóviles. Encuentra que cuando inicia un lote de producción, puede producir 25.000 cojinetes por día, el costo de mantener un cojinete en stock por año es de $2 y el costo de arranque de un lote de producción es de $1800. ¿Con que frecuencia debe fabricar los lotes de producción?

d = 1000
D=1000 u/dia *365 día = 365000 u
p = velocidad de producción
p: 25000 u/dia =9125000u/año
C1=$2 por año
K = 1800 $ (<-- el signo va adelante del número)
T= 1 año

$\mathbf{q_0}$ = sqrt((2*K*(D/T)*p) / (C_1*(p-(D/T))) = sqrt((2*K*(D/T)*p) / (C_1*(p-(D/T)))
$\mathbf{q_0}$ =sqrt((2*$1800*(1000)*9125000u/año) / ($2*(9125000u/año-(1000)))=
$\mathbf{q_0}$=26160

t_o = T/n = T /(D/q) = 365 / (365000/26160) = 26.16 dias
t_p = q_0/ p = 26160[u]/25000[u/dia] =1,05 dias

Existencia maxima = S(tp) = tp (p -d) = q - tp*D
Sm = tp (p - d) = 1.05(25000 - 1000) = 25200

Modelo V - Modelo simple sin agotamiento con precios de adquisición o producción variables de acuerdo al tamaño del lote ordenado

Modelo V Modelo Simple sin Agotamiento con precios de adquisición o producción variables de acuerdo al tamaño del lote ordenado

P : porcentaje de interés que se produciría con el dinero inmovilizado
C'i : Costo efectivo de almacenamiento
bi : Costo del i-esimo producto

$$C_i = P \cdot b_i + C'_i$$

Costo total de preparación = $\frac{D}{q} \cdot K$

Costo total del producto = $b_i \cdot D$

Costo total de almacenamiento = $\frac{1}{2}\, q\, T\, C_i$

Costo del dinero inmovilizado = $P \cdot b_i$

$$CTE(q, b_i) = \frac{D}{q} \cdot K + b_i \cdot D + \frac{1}{2}\, q\, T \left[P \cdot b_i + C'_i \right]$$

$$\boxed{q_{oi} = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot D}{T \cdot (P \cdot b_i + C'_i)}}}$$

Ejemplo 6

Un artículo puede ser adquirido según la siguiente ley de precios. q < 200 $400/unidad. 200 <= q < 500 $350/unidad. 500 <= q $300/unidad. La demanda mensual es de 400 unidades. Costo de orden: $3.000 Interés sobre el capital invertido: 2 % anual. Costo de reordenamiento: $3 / unidad. mes. Se pide: Representar la ley de precios. Determinar el lote óptimo. Calcular el CTE de la operación.

b_1= $400/unidad. q < 200
b_2= $350/unidad. 200 <= q < 500
b_3= $300/unidad. 500 <= q

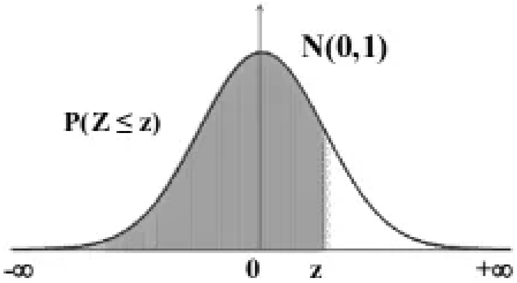
d= 400 unidades.por mes
D=400 u * 12 meses= 4800u/meses
K = Costo de orden: $3.000
P = Interés sobre el capital invertido: 2 % anual.
C1 = Costo de reordenamiento: $3 / unidad mes. =3*12=36 $/u.año
T=1 año

q_{01}=sqrt((2*$3000*4800 u/mes)/(1 año*(0,02*$400*+36 $/u.año))) = 809.03
q_{02} =sqrt((2*K*D)/(T*(P*b2+C1))) = sqrt((2*$3000*4800 u/mes)/(1 año *(0,02*$350*$36 /u.año))) = 338.06
q_{03} =sqrt((2*K*D)/(T*(P*b3+C1))) = sqrt((2*3000*4800)/(1*(0,02*300+36)))=828.07 u

Como q_{o3} > 500 -intervalo más grande (cae dentro del intervalo de validez) entonces calculo CTEo
CTE_o (q3, b3) = D/q * K+ bi*D + ½ T* q* (p*b_3+C_1') = 1474779 ,326

Tabla normal

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998