GUIA PROGRAMACION LINEAL - ENTERA

2 0 2 4

INGENIERIA EN SISTEMAS DE INFORMACION

UTN – F.R. Resistencia

Asignatura: Investigación Operativa

Nivel: Cuarto año – Primer cuatrimestre

Docente/s:

Comisión unica

Claudia Screpnik

Jorge Ariel Vera

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RESISTENCIA

www.frre.utn.edu.ar

Tel 0362-4432928

French 414 (3500) Resistencia – Chaco

-

Programación Lineal Programación Entera y Binaria

Programación entera binaria

1- Una fábrica de agroquímicos debe realizar un plan diario de producción. Para esto debe decidir que químicos producir entre cuatro tipos: A, B, C, D. La ganancia diaria que otorgaría cada producto viene dada por:

1000$/ día	
A	5
B	10
C	8
D	4

Hs. máq./día	
A	5
B	4
C	4
D	3

Además, se debe tener en cuenta que por cuestiones de seguridad no pueden producirse al mismo tiempo el producto C y D, ya que combinados son altamente volátiles, por lo tanto se debe evitar que se encuentren al mismo tiempo en la fábrica.
También debe tenerse en cuenta que el producto C utiliza para su producción los desechos generados por el A, así que sólo podrá producirse si lo hace este último. La fábrica cuenta con un máximo de 10 horas máquinas por día. Las necesidades de horas máquinas por cada producto se establece en tabla anterior.

Se debe decidir qué productos debe producir la fábrica para maximizar sus ganancias diarias.

Xi: Producir o no Productos A, B, D, D

xi : 1 producir, 0 no se produce

Z= 5. X1 + x2 . 10 + 8 . x3 + 4 . x4 --> Max $ / día

R1: x3 + x4 <= 1
R2: X1 >= X3 ~~ver x1 +x3 >= 1~~
R3: 5 x1 + 4 x2 + 4 x3 + 3 x4 < = 10 h maq/dia

2- La división de investigaciones y desarrollo de una compañía ha venido desarrollado cuatro líneas posibles de nuevos productos. La administración debe ahora tomar una decisión sobre cuáles de estos cuatro productos producir.

La puesta en marcha de la producción de cualquiera de los productos trae consigo un costo sustancial, los cuales se proporcionan en la siguiente tabla conjuntamente con los ingresos mensuales estimados:

	Producto			
	1	2	3	4
Costo Inicial	$ 50.000	$ 40.000	$ 70.000	$ 65.000
Ingreso Mensual	$ 70	$ 60	$ 90	$ 80

Además por política de la empresa, la gerencia a impuesto las siguientes pautas:

- No se puede producir más de 2 de estos productos
- Cualquiera de los productos 3 o 4 se puede producir sólo si se produce cualquiera de los productos 1 o 2.
- Se dispone de un capital capaz de soportar una inversión máxima de $112.000

El gerente quiere saber cuál es la combinación de productos más redituable, de acuerdo a las características expuestas

3- La compañía de ingeniería de software está analizando la posibilidad de lanzar al mercado:
   a) un nuevo antivirus o
   b) un traductor de idiomas ó Quizás ambos productos.

Si decidiera la opción `a´ se debería plantear si asociarse o no con otra compañía dedicada a desarrollar antivirus.
Si decidiera la opción `b´ se plantearía si fusionarse o no con otra empresa desarrolladora de software traductores.

Nº de decisión	Pregunta Si o No	Variable de decisión	Valor Presente Neto	Capital requerido
1	¿lanzar antivirus?	X1	$ 9 millones	$ 6 millones
2	¿lanzar traductor?	X2	$ 5 millones	$ 3 millones
3	¿asociarse con compañía ?	X3	$ 6 millones	$ 5 millones
4	¿fusionarse con empresa?	X4	$ 4 millones	$ 2 millones
Capital Disponible: $ 10 millones				

4- La mainboard ACME posee integrado los siguientes componentes, que se pueden desactivar por medio de jumpers, con su respectiva caída de pérformans cuando están activos.

Componente	**Var. I**	**Caída de pérformans**
Placa de video	X1	5%
Placa de sonido	X2	4%
MODEM	X3	6%
Placa de red	X4	4%
Puerto paralelo Centronics	X5	1%
Total de caída		**20%**

Teniendo la misma 3 ranuras de expansión PCI y 1 ISA para las cuales existen los siguientes componentes con su respectiva caída de pérformans

Componente	**Caída de pérformans PCI**	**Var. PCI**	**Caída de pérformans ISA**	**Var. ISA**
Placa de video	2.2%	X6	---	---
Placa de sonido	1.5%	X7	1%	X10
MODEM	2.5%	X8	2%	X11
Placa de red	2%	X9	2.5%	X12
Puerto paralelo Centronics	----	---	0.5%	X13

Considerando que se necesitan al menos uno de cada componente y que se quiere la menor caída de pérformans, determinar la mejor combinación

5- Identifique el tipo de problema de programación lineal que define el siguiente escenario
Un excursionista planea salir de campamento. Hay cinco artículos que desea llevar consigo, pero entre todos sobrepasan las 60 Ib que considera que puede cargar. Para auxiliarse en la selección, ha asignado un valor a cada artículo en orden ascendente de importancia:

Articulo	1	2	3	4	5
Peso, lb	52	23	35	15	7
Valor	100	60	70	15	15

¿Cuál es la cantidad de variables reales necesaria para formular el modelo de programación lineal para este problema? Defínalas
¿Qué artículos deberá llevar para maximizar el valor total, sin sobrepasar la restricción de peso?

$$x_i = \begin{cases} 0 & no\ llevar\ articulo\ i \\ 1 & llevar\ articulo\ i \end{cases}$$

$$Max\ Z = 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 + 15x_5$$

s.a.

$$42x_1 + 23x_2 + 21x_3 + 15x_4 + 7x_5 \leq 60$$

$$x_1 = \{0, 1\}$$

Problema de cobertura de conjuntos

La ciudad de Rosario desea determinar cuántas subestaciones postales se requieren para dar servicio a su población. La ciudad ha sido dividida en ocho zonas postales. Se han identificado cinco ubicaciones posibles para las subestaciones. Cada ubicación puede dar servicio a un número diferente de zonas, como se indica en la siguiente tabla:

UBICACION	ZONAS QUE SE PUEDEN ATENDER
1	1,2,3
2	1,4,5
3	2,4,5,8
4	3,5,6,7
5	6,7,8

Formule un modelo para determinar el menor número de subestaciones (y sus ubicaciones) necesarias para dar servicio a las ocho zonas postales.
Sugerencia: defina una variable apropiada para cada ubicación.

X<i>= subestación en la ubicación <i>. i=1,2,3,4,5

MIN X1 + X2 + X3 + X4 + X5 minimizar utilidades

SUBJECT TO
Z1) X1 + X2 >= 1 debe haber una subestación en la ubicación 1 y/o 2 para atender la zona 1
Z2) X1 + X3 >= 1
Z3) X1 + X4 >= 1
Z4) X2 + X3 >= 1

Z5) X2 + X3 + X4 >= 1
Z6 y Z7) X4 + X5 >= 1
Z8) X3 + X5 >= 1

Programación entera mixta
Problema de cargo Fijo

1- ACME S. A. planea producir 2000 piezas en tres máquinas. El tamaño mínimo de lote en cualquier máquina es 500 piezas. La siguiente tabla contiene los datos pertinentes del caso.

Máquina	Coste preparación	Coste producción/unidad	Capacidad (unidades)
1	300	2	600
2	100	10	800
3	200	5	1200

Formule el problema como problema lineal entero

$$x_i = Núm.\ de\ accesorios\ de\ la\ maquina\ i$$

$$y_i = \begin{cases} 0 & no\ producir\ en\ la\ maquina\ i \\ 1 & producir\ en\ la\ maquina\ i \end{cases}$$

$$Min\ Z = 2x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 300y_1 + 100y_2 + 200y_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2000$$

$$x_1 \geq 500y_1$$

$$x_2 \geq 500y_2$$

$$x_3 \geq 500y_3$$

$$x_1 \leq 600y_1$$

$$x_2 \leq 800y_2$$

$$x_3 \leq 1200y_3$$

$$x_i \geq 0 \qquad y_i = \{0,1\}$$

2- Tres compañías de teléfonos brindan servicios de larga distancia. Avantel cobra una tarifa fija de $16 al mes, más 25 centavos por minuto. Telmex cobra $25 al mes y un costo de 21 centavos por minuto. ATT tiene una tarifa mensual fija de $18 y un costo de 22 centavos por minuto.
Generalmente se realizan 200 minutos de llamadas de larga distancia al mes. Suponiendo que no pago la tarifa fija, a menos que haga las llamadas y de que pueda dividir mis llamadas entre las tres empresas según me parezca. ¿Cómo debo utilizar los servicios de las compañías para minimizar mi cuota mensual de teléfono?

$$Y_i = \begin{cases} 0 & no\ se\ usa\ el\ servicio\ i \\ 1 & si\ se\ usa\ el\ servicio\ i \end{cases} \qquad X_i = \#\ de\ minutos\ a\ usar\ en\ la\ empresa\ i$$

$$Min\ Z = 16Y_1 + 25Y_2 + 18Y_3 + .25X_1 + .21X_2 + X_3.22$$

$$s.a \quad X_1 + X_2 + X_3 = 200$$

$$X_1 \leq 200Y_1$$

$$X_2 \leq 200Y_2$$

$$X_3 \leq 200Y_3$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0 \qquad Y_i \in \{0,1\}$$

3- Una empresa fabrica tres tipos de ropa: camisas, shorts y pantalones. Hay que rentar la maquinaria requerida para fabricar cada tipo de ropa a las siguientes tarifas: para camisas $200 por semana, para shorts $150 a la semana y $100 por semana para pantalones. Se tienen 150 horas de trabajo y 160 yardas cuadradas disponibles de tela y se tienen los siguientes datos:

Prenda	Trabajo (hs)	Tela (m^2)	Precio venta	Costo Vble
Camisa	3	4	12	6
Short	2	3	8	4
Pantalón	6	4	15	7

Formule el problema como problema lineal entero

Se definen dos variables, una para saber si se fábrica o no la ropa y la otra para saber cuánto se fabricara del tipo i.

Variables:
Xi --> Número de productos de la ropa tipo i
Yi --> 0 - No fabrico la ropa i
1 - Si fabrico la ropa i

Maximizaremos las ganancias restando los costos de renta de la máquina

MAX Z= -$200\ Y_1\ -150Y_2 -100Y_3 + 6X_1 + 4X_2 + 7X_3$
s.a.
$3X_1 + 2X_2 + 6X_3 <= 150$ Tiempo que se tardan en fabricar la ropa de tipo i, 3, 2 , y 6 respectivamente, con un tiempo superior de 150, es decir se maneja <= ya que no debe excederse ese límite.
$4X_1 + 3X_2 + 4X_3 <= 160$ Nos indica la disponibilidad máxima de tela y la tela que se necesita para cada unidad de ropa, que sería 4,3 y 4 respectivamente.

En las siguientes restricciones se depende de la variable Yi, que es la que nos indica si se usará la maquinaria para producir ese tipo de ropa. Así que si $Y_1 = 1$, $X_1 > 0$ y será la cantidad de camisas a producir. Y significará lo mismo para las restricciones siguientes sólo que para Y_2 refiriéndonos a shorts y para Y_3 refiriéndonos a pantalones.

Analizo fabricar cada prenda por separado para determinar el máximo
$3X_1 <= 150$ → x1=50
$4X_1 <= 160$ → x1 = 40 cumple con las dos restricciones

$X_1 <= 40Y_1$
$X_2 <= 53Y_2$
$X_3 <= 25Y_3$

Condición de Integridad indicando que las variables serán binarias y enteras.

Xi >= 0 , i=1,2, Xi ∈ Z Yi ∈ {0,1}

<u>Solución del Modelo</u>:
Este tipo de Problemas se puede resolver con el Método Mixto de Gomory y con el Método de Ramificación y Acotamiento para modelos Mixtos
Se utilizó el paquete computacional Tora para resolvernos, dando la siguiente solución:

La solución óptima es Z = 75
$Y_1 = 0$
$Y_2 = 0$
$Y_3 = 1$
$X_1 = 0$
$X_2 = 0$
$X_3 = 25$

<u>Interpretación de Resultados</u>:
Se obtendrá una ganancia máxima de 75, Se deberá rentar la maquinaria 3 ya así producir 25 pantalones.

4- Una empresa de juguetes está considerando la puesta en marcha de tres nuevos modelos de juguetes (1, 2 y 3) para su posible inclusión en la próxima campaña de Navidad. La preparación de instalaciones para la fabricación de estos modelos costaría 25000 €, 35000 € y 30000 € respectivamente, y la ganancia unitaria sería de 10 €, 15 € y 13 € respectivamente.

La empresa dispone de tres plantas de producción para la elaboración de estos modelos, pero para evitar gastos sólo en una de ellas se producirían los juguetes, dependiendo la elección de la maximización de las ganancias.

El número de horas que se precisa para producir cada juguete en cada planta es

	juguete 1	juguete 2	juguete 3
planta1	5	4	6
planta 2	4	2	2
planta 3	3	3	2

Las plantas disponen al día 500, 600 y 630 horas de producción respectivamente.
La gerencia ha decidido desarrollar al menos uno de los tres juguetes.
Modelizar el problema utilizando programación lineal entera para maximizar el beneficio total.

Solución:

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

x_i = número de juguetes producidos diariamente del tipo i i=1, 2, 3

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se pone en marcha el juguete tipo } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{si se produce en la planta } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad j = 1, 2, 3$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max}(10x_1 - 25000y_1 + 15x_2 - 35000y_2 + 13x_3 - 30000y_3)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \\ x_i \leq My_i \qquad i = 1, 2, 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 500 + M(1 - z_1) \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 600 + M(1 - z_2) \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 630 + M(1 - z_3) \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ x_i \geq 0 \text{ y enteras } i=1, 2, 3 \\ y_i = 0, 1 \qquad i=1, 2, 3 \\ z_j = 0, 1 \qquad j=1, 2, 3 \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

Adicionales

Se están evaluando tres proyectos a lo largo de un horizonte de planificación de 5 años, la siguiente tabla proporciona las utilidades esperadas para cada proyecto y los egresos anuales asociados.

Año/ Proyecto	**1**	**2**	**3**	**Utilidad**
1	**5**	**1**	**8**	**20**
2	**4**	**7**	**10**	**40**
3	**3**	**9**	**2**	**20**
4	**7**	**4**	**1**	**15**
5	**8**	**6**	**10**	**30**
Fondos disponibles	**25**	**25**	**25**	

$$X_i = \begin{cases} 0 & no\ se\ invierte \\ 1 & se\ invierte\ en\ el\ proyecto\ i \end{cases}$$

$$Max\ Z = 20X_1 + 40X_2 + 20X_3 + 15X_4 + 30X_5$$

$$s.a.\quad 5X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 7X_4 + 8X_5 \leq 25$$

$$X_1 + 7X_2 + 9X_3 + 4X_4 + 6X_5 \leq 25$$

$$8X_1 + 10X_2 + 2X_3 + X_4 + 10X_5 \leq 25$$

$$X_i \in \{0,1\}$$