

# ADMINISTRACIÓN DE OPERACIONES

ESTRATEGIA Y ANÁLISIS

QUINTA  
EDICIÓN



INCLUYE CD



LEE J. KRAJEWSKI      LARRY P. RITZMAN

# Suplemento III PROGRAMACIÓN LINEAL

## METAS DE APRENDIZAJE

Después de leer este suplemento, usted podrá...

1. explicar las características y suposiciones básicas de los métodos de programación lineal.
2. formular modelos apropiados para diversos problemas.
3. realizar análisis gráficos correspondientes a problemas con dos variables y encontrar la solución algebraica para el punto vértice que, según se haya determinado, sea el óptimo.
4. describir el significado de las variables de holgura y de excedentes.
5. discutir el significado del análisis de sensibilidad aplicado a los coeficientes de la función objetivo y los parámetros del lado derecho.
6. interpretar los datos de salida de la computadora en la resolución de problemas de programación lineal.

En muchas situaciones de negocios, los recursos son limitados y la demanda de los mismos es grande. Por ejemplo, puede ser necesario programar múltiples recorridos de un número limitado de vehículos para atender a los clientes, o tal vez sea necesario desarrollar un plan de personal que permita atender la demanda variable esperada con el menor número posible de empleados. En este suplemento describiremos una técnica llamada **programación lineal**, que es útil para asignar recursos escasos entre las distintas demandas que compiten por ellos. Los recursos pueden ser tiempo, dinero o materiales, y las limitaciones se conocen como restricciones. La programación lineal ayuda a los administradores a encontrar la mejor solución, en materia de asignaciones, y les proporciona información sobre el valor de recursos adicionales.

### ■ ■ ■ CONCEPTOS BÁSICOS

Para que podamos demostrar la forma de resolver problemas de administración de operaciones por medio de la programación lineal, tenemos que explicar primero varias características comunes de todos los modelos de programación lineal y las suposiciones matemáticas que se aplican a ellos:

1. Función objetivo
2. Variables de decisión
3. Restricciones
4. Región factible
5. Parámetros
6. Linealidad
7. No negatividad

La programación lineal es un proceso de *optimización*. Con una sola función objetivo se expresa matemáticamente lo que se intenta maximizar (p. ej., las ganancias o el valor presente) o minimizar (p. ej., los costos o el desperdicio) en cada caso. La función objetivo proporciona el sistema de calificaciones mediante el cual se juzgará en qué medida son atractivas las diferentes soluciones.

variables de decisión

Las variables de decisión representan aquellas selecciones que están bajo el control de la persona que toma las decisiones. Resolviendo el problema se obtienen sus valores óptimos. Por ejemplo, una variable de decisión podría ser el número de unidades de un producto que se fabricarán durante el mes próximo o el número de unidades de inventario que se manejarán el mes entrante. La programación lineal se basa en la suposición de que las variables de decisión son *continuas*, ya sean cantidades fraccionales o números enteros. Con frecuencia esta suposición es realista, como cuando la variable de decisión está expresada en dólares, horas o alguna otra medida continua. Sin embargo, aun en el caso de que las variables de decisión representen unidades no divisibles, como trabajadores, mesas o camiones, a veces es posible simplemente redondear hacia arriba o abajo la solución obtenida por el procedimiento de programación lineal y así obtenemos una solución razonable que no viola ninguna restricción, o bien, podemos aplicar una técnica más avanzada que se llama *programación con enteros*.

restricciones

Las restricciones son limitaciones que restringen las selecciones permisibles para las variables de decisión. Cada limitación puede expresarse matemáticamente en cualquiera de estas tres formas: una restricción menor que o igual a ( $\leq$ ), igual a (=), o mayor que o igual a ( $\geq$ ). Una restricción  $\leq$  impone un límite superior a cierta función de las variables de decisión y se emplea con mayor frecuencia en problemas de maximización. Por ejemplo, una restricción  $\leq$  puede especificar el número máximo de clientes a los cuales es posible atender, o bien, el límite de capacidad de una máquina. Una restricción = significa que la función tiene que ser igual a un valor determinado. Por ejemplo, que es necesario fabricar 100 unidades de un producto (no 99 ni 101). Una restricción  $\geq$  se usa frecuentemente para indicar ciertas relaciones obligatorias, como el hecho de que el inventario final siempre debe ser igual al inventario inicial más la producción menos las ventas. Una restricción  $\geq$  impone un límite inferior a alguna función de las variables de decisión. Por ejemplo, una restricción  $\geq$  puede especificar que la producción de cierto producto debe exceder o igualar a la magnitud de la demanda.

región factible

Todo problema de programación lineal debe tener una o varias restricciones. Consideradas en conjunto, esas restricciones definen una *región factible*, la cual representa todas las combinaciones permisibles de las variables de decisión. En algunas situaciones inusuales, el problema está tan estrictamente restringido que sólo existe una solución posible (o tal vez ninguna). No obstante, en el caso más común, la *región factible* contiene un número infinitamente grande de soluciones posibles, suponiendo que las combinaciones factibles de las variables de decisión puedan ser valores fraccionales. La meta de la persona que toma las decisiones consiste en encontrar la mejor solución posible.

parámetro

La función objetivo y las restricciones son funciones de las variables de decisión y los parámetros. Un *parámetro*, también conocido como *coeficiente* o *constante dada*, es un valor que la persona a cargo de tomar la decisión no es capaz de controlar y que no cambiará cuando la solución sea implementada. Se supone que todos los parámetros se conocen con certidumbre. Por ejemplo, un programador de computadoras puede saber de antemano que la ejecución de un programa de *software* requerirá tres horas, ni más ni menos.

Se supone que la función objetivo y las ecuaciones de restricción son lineales. La *linealidad* implica proporcionalidad y aditividad; no puede haber en ella productos (p. ej.,  $10x_1x_2$ ) ni potencias (p. ej.,  $x_1^3$ ) de las variables de decisión. Supongamos que las ganancias obtenidas con la elaboración de dos tipos de artículos (representados mediante las variables de decisión  $x_1$  y  $x_2$ ) son  $2x_1 + 3x_2$ . La proporcionalidad implica que una unidad de  $x_1$  hace una contribución de \$2 a las ganancias y que dos unidades contribuyen con \$4, independientemente de la se trate de la primera o la décima unidad producida. El principio de aditividad significa que el valor total de la función objetivo es igual a las ganancias de  $x_1$  más las ganancias de  $x_2$ . Finalmente, hacemos una suposición de *no negatividad*, lo cual significa que las variables de decisión deben ser positivas o cero. Por ejemplo, una empresa que fabrica salsa para espagueti jamás podrá producir un número negativo de frascos. Para que una restricción  $\geq 0$  para cada variable de decisión, tiene que mostrar una res-

certidumbre

linealidad

no negatividad

Aun cuando las suposiciones de linealidad, de certidumbre y de que las variables son continuas implican condiciones restrictivas, la programación lineal suele ayudar a los administradores a analizar muchos problemas complejos de asignación de recursos. El proceso de construcción del modelo obliga a los administradores a identificar las variables de decisión y las restricciones importantes, lo cual constituye un paso útil por derecho propio. La identificación de la naturaleza y el alcance del problema es un paso primordial hacia su solución. En una sección posterior, mostraremos la forma en que el análisis de sensibilidad puede ayudar al administrador a lidiar con las incertidumbres de los parámetros y a responder preguntas del tipo "¿qué pasaría si?".

### Formulación de un problema

Las aplicaciones de la programación lineal comienzan con la formulación de un *modelo* del problema con las características generales antes descritas. Ilustraremos aquí el proceso de construcción de un modelo con el problema de la mezcla de productos, es decir, un tipo de planificación agregada para un solo periodo, cuya solución proporciona las cantidades de producción (o la mezcla de productos) óptimas para un grupo de productos o servicios, de acuerdo con la capacidad de los recursos disponibles y las restricciones de la demanda del mercado. La formulación de un modelo que permita representar cada problema único, aplicando la siguiente secuencia de tres pasos, constituye la parte más creativa de la programación lineal y, posiblemente, la más difícil.

**Paso 1. Definir las variables de decisión.** ¿Qué es lo que se pretende decidir? Defina específicamente cada variable de decisión, recordando que las definiciones empleadas en la función objetivo deberán ser igual de útiles en el caso de las restricciones. También deberán ser lo más específicas que sea posible. Considere las dos definiciones alternativas siguientes:

$$x_1 = \text{producto 1}$$

$x_1$  = número de unidades del producto 1 que serán producidas y vendidas el mes entrante

La segunda definición es mucho más específica que la primera, lo cual facilita los siguientes pasos.

**Paso 2. Escribir la función objetivo.** ¿Qué es lo que se intenta maximizar o minimizar? Si se trata de las ganancias del mes entrante, escriba una función objetivo en la cual las ganancias del próximo mes sean una función lineal de las variables de decisión. Identifique los parámetros que acompañarán a cada variable de decisión. Por ejemplo, si cada unidad de  $x_1$  vendida produce una ganancia de \$7, la ganancia total procedente del producto  $x_1$  será igual a  $7x_1$ . Si una variable no tiene efecto alguno sobre la función objetivo, su coeficiente en la función objetivo será 0. Con frecuencia, se hace que la función objetivo sea igual a  $Z$  y en ese caso el objetivo que se persigue es maximizar o minimizar  $Z$ .

**Paso 3. Escribir las restricciones.** ¿Cuáles factores limitan los valores de las variables de decisión? Identifique las restricciones o los parámetros de cada variable de decisión incluida en esas expresiones. Igual que en el caso de la función objetivo, el parámetro correspondiente a una variable que no produce efecto alguno sobre una restricción es 0. A fin de mantener la debida corrección formal, escriba también las restricciones de no negatividad.

Como comprobación de la consistencia, asegúrese de utilizar la misma unidad de medición en ambos lados de cada restricción y en la función objetivo. Por ejemplo, supongamos que el lado derecho de una restricción está expresado en horas de capacidad por mes. Entonces, si una variable de decisión en el lado izquierdo de la restricción corresponde al número de unidades producido por mes, las dimensiones del parámetro que se multiplica por la variable de decisión deberán ser horas por unidad, porque

$$\left( \frac{\text{horas}}{\text{unidad}} \right) \left( \frac{\text{unidades}}{\text{mes}} \right) = \left( \frac{\text{horas}}{\text{mes}} \right)$$

Por supuesto, también es posible saltar de un paso a otro, dependiendo de la parte del problema que atraiga más nuestra atención. Si usted no logra superar el paso 1, ensaye con un nuevo conjunto de definiciones para las variables de decisión. Puede haber más de una forma de construir correctamente el modelo de un problema.

### EJEMPLO H.1

#### Formulación de un modelo de programación lineal

La Stratton Company produce dos tipos básicos de tubo de plástico. Tres recursos son fundamentales para la producción de esos tubos: las horas de extrusión, las horas de embalaje y un aditivo especial para las materias primas del plástico. Los siguientes datos representan la situación correspondiente a la semana próxima. Todos los datos están expresados en unidades de 100 pies de tubo.

Recurso	Producto		Disponibilidad de recursos
	Tipo 1	Tipo 2	
Extrusión	4 h	6 h	48 h
Embalaje	2 h	2 h	18 h
Mezcla aditiva	2 lb	1 lb	16 lb

La contribución a las ganancias y a los gastos generales por cada 100 pies de tubo es de \$34 para el tipo 1 y \$40 para el tipo 2. Formule un modelo de programación lineal para determinar qué cantidad de cada tipo de tubo será necesario producir para maximizar la contribución a las ganancias y a los gastos generales.

#### Solución

**Paso 1.** Para definir las variables de decisión que determinan la mezcla de productos, supondremos que

$x_1$  = cantidad de tubo tipo 1 que será necesario producir y vender la semana próxima, medida en incrementos de 100 pies (por ejemplo,  $x_1 = 2$  significa 200 pies de tubo tipo 1)

$y$

$x_2$  = cantidad de tubo tipo 2 que deberá producirse y venderse la semana próxima, medida en incrementos de 100 pies

**Paso 2.** A continuación, definiremos la función objetivo. La meta consiste en maximizar la contribución total de los dos productos a las ganancias y los gastos generales. Cada unidad de  $x_1$  reditúa \$34 y cada unidad de  $x_2$  reditúa \$40. Para valores específicos de  $x_1$  y  $x_2$ , encontramos la ganancia total multiplicando el número de unidades fabricadas de cada producto por la ganancia por unidad y sumándolas después. Así, nuestra función objetivo se convierte en:

$$\text{Maximizar: } \$34x_1 + \$40x_2 = Z$$

**Paso 3.** El paso final consiste en formular las restricciones. Cada unidad producida de  $x_1$  y  $x_2$  consume una parte de los recursos productivos críticos. En el departamento de extrusión, la producción de una unidad de  $x_1$  requiere 4 horas y la de una unidad de  $x_2$  requiere 6 horas. El total no deberá exceder las 48 horas de capacidad disponibles, por lo cual usaremos el signo  $\leq$ . Por lo tanto, la primera restricción es:

$$4x_1 + 6x_2 \leq 48 \quad (\text{extrusión})$$

En forma similar, podemos formular las restricciones que corresponden al embalaje y las materias primas:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\leq 18 && \text{(embalaje)} \\ 2x_1 + x_2 &\leq 16 && \text{(mezcla aditiva)} \end{aligned}$$

Estas tres restricciones limitan nuestra selección de valores para las variables de decisión, porque los valores que seleccionamos para  $x_1$  y  $x_2$  deberán satisfacerlas a todas. Los valores negativos de  $x_1$  y  $x_2$  no tendrían ningún sentido, por lo cual agregaremos al modelo restricciones de no negatividad:

$$x_1 \geq 0 \quad \text{y} \quad x_2 \geq 0 \quad \text{(restricciones de no negatividad)}$$

Ahora ya podemos formular el modelo completo, el cual ha sido complementado con las definiciones de variables.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & \$34x_1 + \$40x_2 = Z \\ \text{Sujeto a: } & 4x_1 + 6x_2 \leq 48 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ & x_1 \geq 0 \quad \text{y también} \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde  $x_1$  = cantidad de tubo tipo 1 que será producido y vendido durante la semana próxima, medida en incrementos de 100 pies

$x_2$  = cantidad de tubo tipo 2 que será producido y vendido durante la semana próxima, medida en incrementos de 100 pies

## ■ ■ ■ ANÁLISIS GRÁFICO

Una vez que hemos formulado el modelo, buscaremos la solución óptima. En la práctica, la mayoría de los problemas de programación lineal se resuelve con ayuda de la computadora. Sin embargo, se puede captar el significado de los resultados que ésta ofrece, así como los conceptos de programación lineal en general, analizando un problema sencillo de dos variables con el **método gráfico de programación lineal**. Por consiguiente, comenzaremos con el método gráfico, a pesar de que no es una técnica práctica para resolver los problemas que tienen tres o más variables de decisión. Los cinco pasos básicos son:

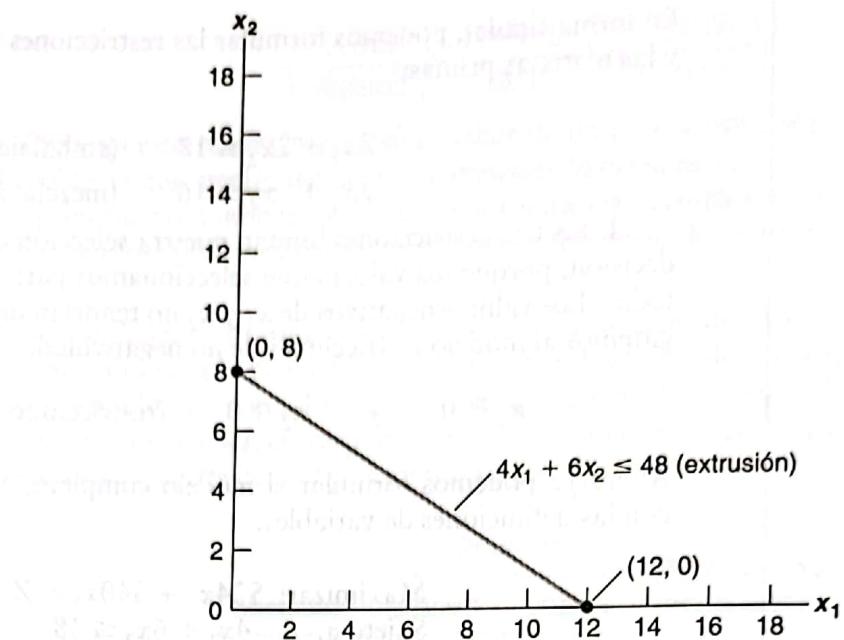
1. trazar la gráfica de las restricciones,
2. identificar la región factible,
3. trazar la gráfica de una línea de función objetivo,
4. encontrar la solución visual, y
5. encontrar la solución algebraica.

### Trazar la gráfica de las restricciones

Para empezar, trazaremos la gráfica de las ecuaciones de restricción, pasando por alto la parte de la desigualdad correspondiente a las restricciones ( $<$  o  $>$ ). Al hacer que las restricciones se conviertan en igualdades ( $=$ ), éstas se transforman en la ecuación de una recta. La recta se traza en cuanto identifiquemos dos puntos contenidos en ella. Podemos seleccionar dos puntos cualesquiera razonablemente distantes; los más sencillos de encontrar son las *intersecciones con los ejes*, es decir, aquéllos donde la recta cruza cada uno de los ejes. Para encontrar la intersección con el eje  $x_1$ , hacemos  $x_2$  igual a 0 y resolvemos la ecuación para  $x_1$ . En el caso de la Stratton Company, mencionada en el ejemplo H.1, la ecuación de la recta correspondiente al proceso de extrusión es la siguiente:

$$4x_1 + 6x_2 = 48$$

**FIGURA H.1**  
Gráfica correspondiente a la restricción de extrusión



Para la intersección con el eje  $x_1$ ,  $x_2 = 0$  y, por lo tanto,

$$4x_1 + 6(0) = 48$$

$$x_1 = 12$$

Para encontrar la intersección con el eje  $x_2$ , hacemos  $x_1 = 0$  y resolvemos para  $x_2$ :

$$4(0) + 6x_2 = 48$$

$$x_2 = 8$$

Unimos los puntos  $(0, 8)$  y  $(12, 0)$  por medio de una recta, como muestra la figura H.1.

### EJEMPLO H.2

Cómo trazar las gráficas de las restricciones



Para el problema de la compañía Stratton, trazamos la gráfica de las demás restricciones: una para el embalaje y otra para la mezcla aditiva.

**Solución** La ecuación de la recta correspondiente al proceso de embalaje es  $2x_1 + 2x_2 = 18$ . Para encontrar la intersección  $x_1$ , hagamos  $x_2 = 0$ :

$$2x_1 + 2(0) = 18$$

$$x_1 = 9$$

Para encontrar la intersección con el eje  $x_2$ , hagamos  $x_1 = 0$ :

$$2(0) + 2x_2 = 18$$

$$x_2 = 9$$

La ecuación de la recta correspondiente a la mezcla aditiva es  $2x_1 + x_2 = 16$ . Para encontrar la intersección  $x_1$ , hagamos  $x_2 = 0$ :

$$2x_1 + 0 = 16$$

$$x_1 = 8$$

Para encontrar la intersección con el eje  $x_2$ , sea  $x_1 = 0$ :

$$2(0) + x_2 = 16$$

$$x_2 = 16$$

Por medio de una recta, unimos los puntos  $(0, 9)$  y  $(9, 0)$  para representar la restricción del embalaje, y los puntos  $(0, 16)$  y  $(8, 0)$  para la restricción de la mezcla aditiva. La figura H.2 muestra la gráfica con las tres restricciones incluidas.

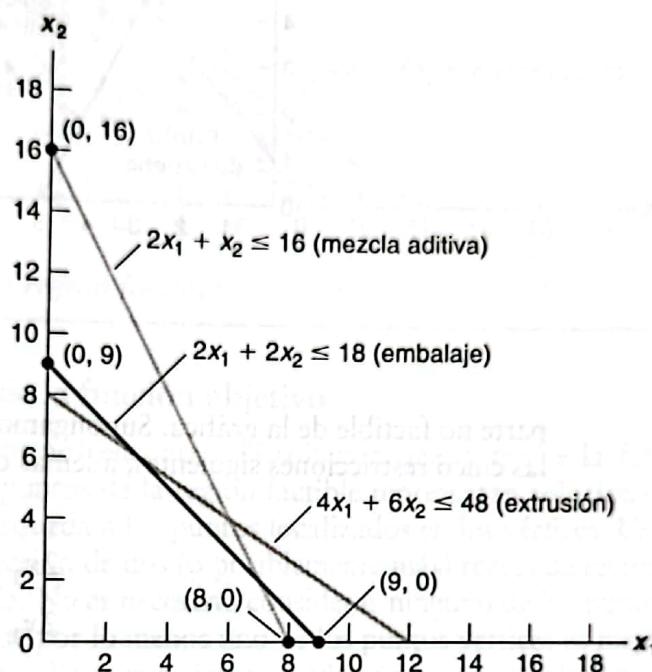


FIGURA H.2 Gráfica de las tres restricciones

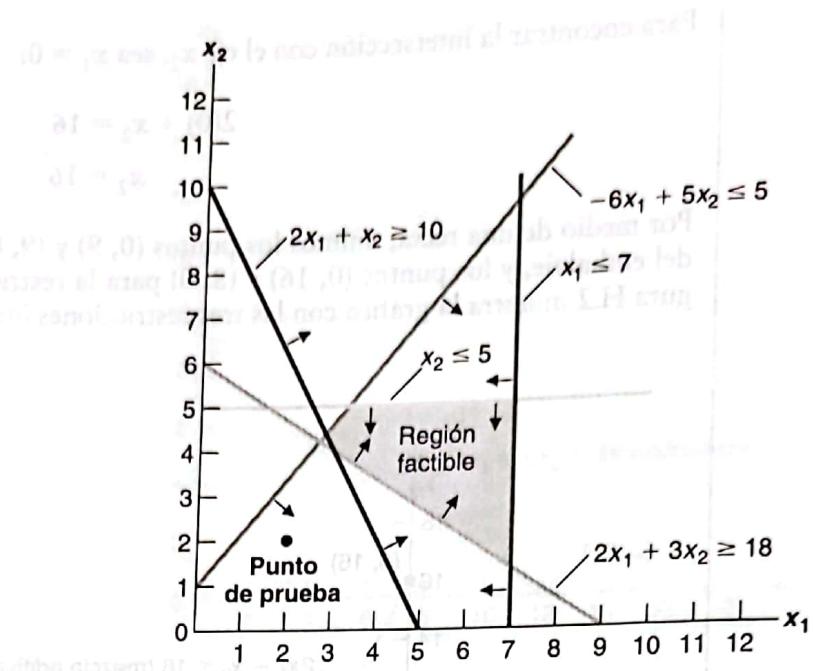
### Identificar la región factible

La región factible es el área de la gráfica que contiene las soluciones capaces de satisfacer simultáneamente todas las restricciones, incluso las restricciones de no negatividad. Para encontrar la región factible, localice primero los puntos factibles para cada restricción y, a continuación, el área que satisfaga todas las restricciones. Generalmente, las tres reglas siguientes identifican los puntos factibles para una restricción dada:

1. Para la restricción  $=$ , sólo los puntos de la recta son soluciones factibles.
2. Para la restricción  $\leq$ , los puntos de la recta y los puntos debajo y a la izquierda de ella son soluciones factibles.
3. Para la restricción  $\geq$ , los puntos de la recta y los puntos arriba y a la derecha de la misma son soluciones factibles.

Las excepciones a estas reglas se presentan cuando uno o varios de los parámetros del lado izquierdo de una restricción son negativos. En esos casos, trazamos la recta de restricción y ensayamos con alguno de los puntos que se localizan a un lado de la misma. Si dicho punto no satisface la restricción, eso significa que ésta se encuentra en la recta por el punto  $(0, 0)$ . Hacemos lo mismo en el punto opuesto. Este punto se localiza

FIGURA H.3  
Identificación de la  
región factible



parte no factible de la gráfica. Supongamos que un modelo de programación lineal tiene las cinco restricciones siguientes, además de las restricciones de no negatividad:

$$2x_1 + x_2 \geq 10$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 18$$

$$x_1 \leq 7$$

$$x_2 \leq 5$$

$$-6x_1 + 5x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La región factible es la región sombreada en la figura H.3. Las flechas que aparecen junto a cada restricción indican cuál de los lados de la recta es factible. Las reglas son válidas para todas las restricciones, excepto la quinta, pues ésta tiene un parámetro negativo,  $-6$ , para  $x_1$ . Hemos seleccionado arbitrariamente  $(2, 2)$  como el punto de prueba, que, como se aprecia en la figura H.3, está debajo y a la derecha de la recta. En ese punto encontramos  $-6(2) + 5(2) = -2$ . Puesto que  $-2$  no es mayor que  $5$ , la porción de la figura que contiene  $(2, 2)$  es factible, cuando menos para esta quinta restricción.

#### EJEMPLO H.3

#### Identificación de la región factible

Identifique la región factible para el problema de la Stratton Company.

**Solución** En virtud de que sólo tenemos restricciones  $\leq$  y los parámetros del lado izquierdo de cada restricción son no negativos, las porciones factibles se localizan a la izquierda y debajo de cada restricción. La región factible, que aparece sombreada en la figura H.4, satisface simultáneamente las tres restricciones.

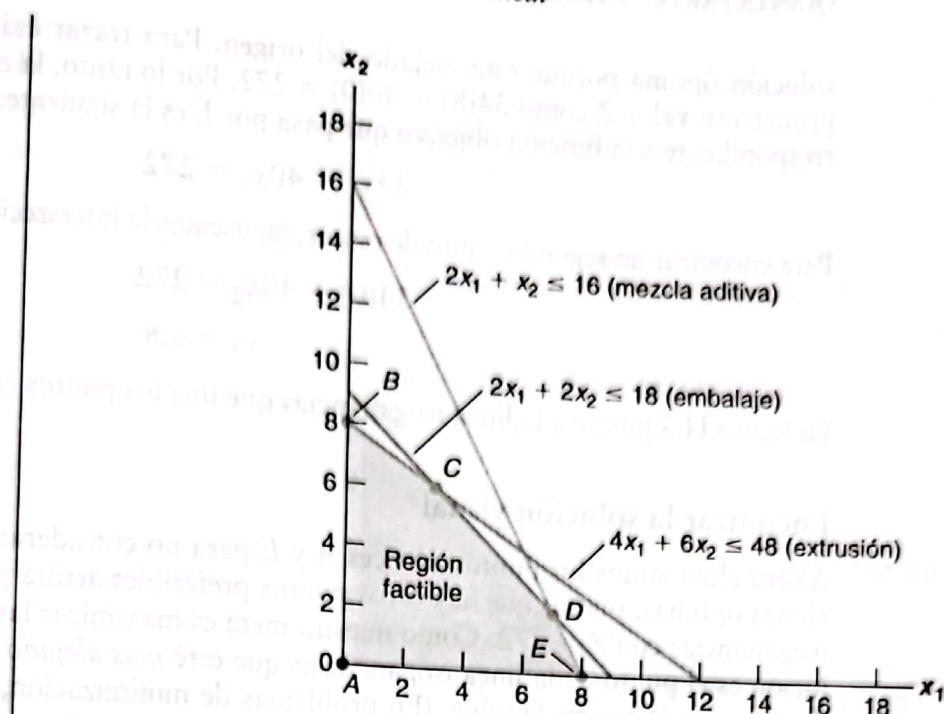


FIGURA H.4 La región factible

### Trazar la recta de la función objetivo

Ahora nos proponemos encontrar la solución que optimice la función objetivo. Aun cuando todos los puntos de la región factible representan soluciones posibles, podemos limitar nuestra búsqueda a los puntos localizados en los vértices. Un punto vértice se localiza en la intersección de dos (o posiblemente más) rectas de restricción, en la frontera de la región factible. No es necesario considerar ninguno de los puntos interiores de la región factible porque por lo menos uno de los puntos vértices es mejor que cualquiera de los puntos interiores. En forma similar, podemos pasar por alto otros puntos de la frontera de la región factible porque existe un punto vértice que es tan satisfactorio como cualquiera de ellos, cuando menos.

En la figura H.4, los cinco puntos vértices están marcados con las letras A, B, C, D y E. El punto A es el origen (0, 0) y podemos pasarlo por alto porque cualquier otro punto factible es una solución mejor. Podemos ensayar con cada uno de los demás puntos vértices de la función objetivo y seleccionar aquel que maximice  $Z$ . Por ejemplo, el punto vértice B se encuentra en (0, 8). Si sustituimos estos valores en la función objetivo, el valor resultante de  $Z$  es 320:

$$34x_1 + 40x_2 = Z$$

$$34(0) + 40(8) = 320$$

Sin embargo, es posible que no podamos leer con precisión los valores de  $x_1$  y  $x_2$  correspondientes a algunos de los puntos (p. ej., C o D) de la gráfica. La resolución algebraica de dos ecuaciones lineales para cada punto vértice también resulta ineficaz cuando hay muchas restricciones y, por lo tanto, muchos puntos vértices.

El mejor procedimiento consiste en trazar la función objetivo sobre la gráfica de la región factible, para valores arbitrarios de  $Z$ . A partir de esas rectas de la función objetivo nos es posible distinguir visualmente la mejor solución. Si la función objetivo corresponde a ganancias, cada recta se conoce como una *línea isoganancias* y cada punto de ésta redundará la misma ganancia. Si  $Z$  mide el costo, esa recta se llama *línea isocostos* y cada uno de sus puntos representa el mismo costo. Podemos simplificar la búsqueda trazando la primera recta en la región factible, más o menos donde esperamos que se encuentre la solución óptima. Para el ejemplo de la Stratton Company, hagamos pasar una recta por el punto E (8, 0). Hemos localizado un punto vértice. Éste podría ser incluso la

solución óptima porque está alejado del origen. Para trazar esa línea, identificaremos primero su valor  $Z$  como  $34(8) + 40(0) = 272$ . Por lo tanto, la ecuación de la recta correspondiente a la función objetivo que pasa por  $E$  es la siguiente:

$$34x_1 + 40x_2 = 272$$

Para encontrar un segundo punto de esta recta, usemos la intersección  $x_2$ , en la cual  $x_1 = 0$ :

$$34(0) + 40x_2 = 272$$

$$x_2 = 6.8$$

La figura H.5 muestra la línea isoganancias que une los puntos  $(8, 0)$  y  $(0, 6.8)$ .

### Encontrar la solución visual

Ahora eliminamos los puntos vértices  $A$  y  $E$  para no considerarlos como posibles soluciones óptimas, puesto que hay otros puntos preferibles arriba y a la derecha de la línea isoganancias con  $Z = 272$ . Como nuestra meta es maximizar las ganancias, la mejor solución es el punto de la línea isoganancias que esté *más alejado* del origen, pero que todavía toque la región factible. (En problemas de minimización, éste será el punto de la región factible sobre la línea isocostos que se encuentre *más cerca* del origen.) Para identificar cuál de los puntos vértices restantes ( $B$ ,  $C$  o  $D$ ) es el punto óptimo, dibujaremos, paralelamente a la primera recta, una o más líneas isoganancias que produzcan mejores valores de  $Z$  (más altos si la meta es maximizar y más bajos si lo que intentamos es minimizar). La recta que apenas toque la región factible corresponderá a la solución óptima. Para el problema de la Stratton Company, la figura H.6 muestra la segunda línea isoganancias. La solución óptima será el último punto que toque la región factible, es decir, el punto  $C$ . Tal parece que dicho punto se encuentra en la vecindad de  $(3, 6)$ , pero recordemos que la solución visual no es exacta.

Un problema de programación lineal puede tener más de una solución óptima. Esta situación se presenta cuando la función objetivo es paralela a una de las caras de la región factible. Ese caso se presentaría si, en el problema de la Stratton Company, nuestra función objetivo fuera  $\$38x_1 + \$38x_2$ . Los puntos  $(3, 6)$  y  $(7, 2)$  serían óptimos, lo mismo que cualquier otro punto de la recta que une esos dos puntos vértices. En ese caso, la

FIGURA H.5

**Cómo hacer que una línea isoganancias pase por  $(8, 0)$**

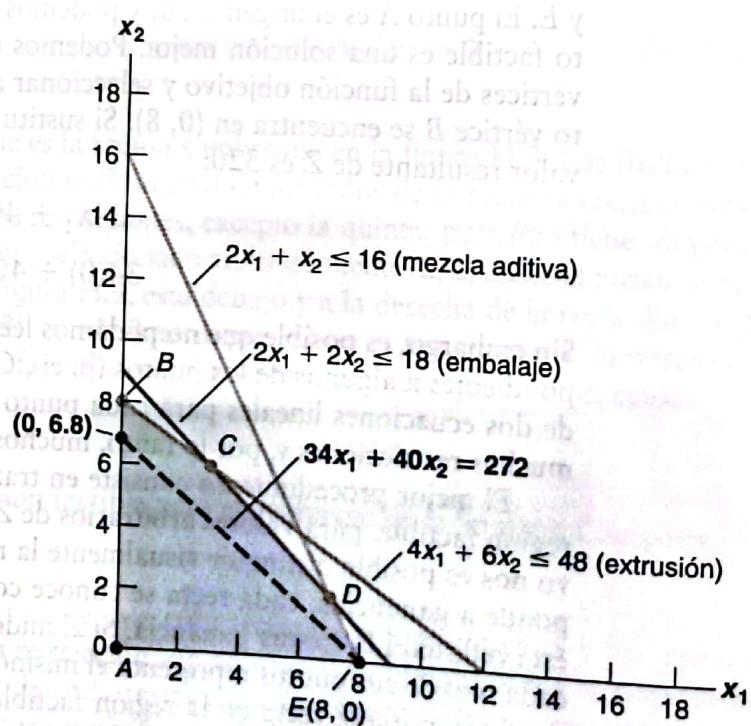
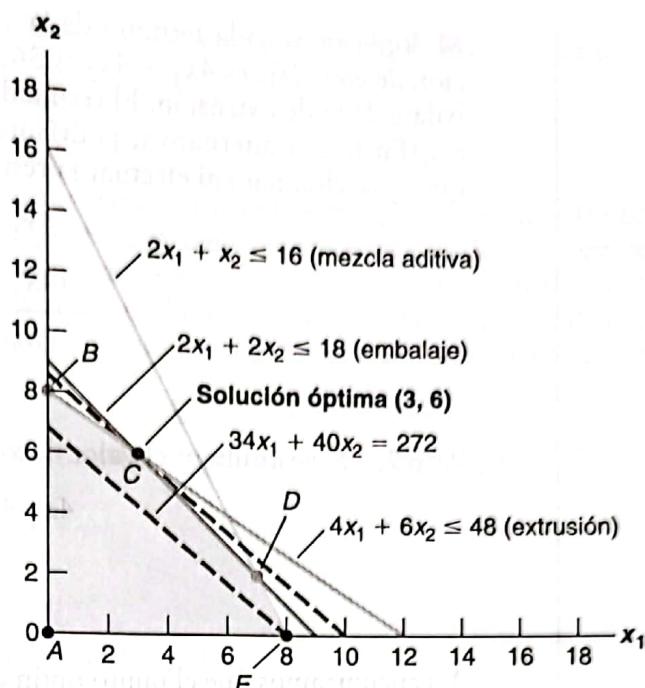


FIGURA H.6

**Cómo trazar la segunda línea isoganancias**



gerencia probablemente basaría su decisión final en factores no cuantificables. Sin embargo, es importante comprender que al optimizar una función objetivo, sólo necesitamos considerar los puntos vértices de la región factible.

### Encontrar la solución algebraica

Para encontrar una solución exacta tenemos que usar el álgebra. Comenzaremos por identificar la pareja de restricciones que, en su intersección, definen el punto vértice. A continuación, formularemos las restricciones como ecuaciones y las resolveremos en forma simultánea para encontrar las coordenadas  $(x_1, x_2)$  del punto vértice. Las ecuaciones simultáneas pueden resolverse de diversas maneras. Si se trata de problemas pequeños, el método más sencillo es el siguiente:

**Paso 1.** Desarrolle una ecuación con una sola incógnita. Comience multiplicando ambos lados de la ecuación por una constante, de manera que el coeficiente de una de las dos variables de decisión sea *idéntico* en ambas ecuaciones. Después, reste una ecuación de la otra y resuelva la ecuación resultante para obtener el valor de su única incógnita.

**Paso 2.** Sustituya el valor de esa variable de decisión en cualquiera de las restricciones originales y resuelva la ecuación para encontrar la otra variable de decisión.

Encuentre algebraicamente la solución óptima para el problema de la Stratton Company. ¿Cuál es el valor de  $Z$  cuando las variables de decisión tienen sus valores óptimos?

### Solución

**Paso 1.** La figura H.6 muestra que el punto vértice óptimo se localiza en la intersección de las restricciones de extrusión y de embalaje. Si escribimos las restricciones como igualdades, tenemos:

$$4x_1 + 6x_2 = 48 \quad (\text{extrusión})$$

$$2x_1 + 2x_2 = 18 \quad (\text{embalaje})$$

**EJEMPLO H.4**  
**Cómo encontrar algebraicamente la solución óptima**



Multiplicamos cada término de la restricción de embalaje por 2. Ahora la restricción de embalaje es  $4x_1 + 4x_2 = 36$ . A continuación, restamos la restricción de embalaje de la de extrusión. El resultado será una ecuación en la cual se ha suprimido  $x_1$ . (En forma alternativa, podríamos multiplicar la segunda ecuación por 3 para que  $x_2$  se eliminara al efectuar la resta.) Así pues:

$$\begin{array}{r} 4x_1 + 6x_2 = 48 \\ -(4x_1 + 4x_2 = 36) \\ \hline 2x_2 = 12 \\ x_2 = 6 \end{array}$$

Paso 2. Si sustituimos el valor de  $x_2$  en la ecuación de extrusión, obtenemos:

$$\begin{array}{r} 4x_1 + 6(6) = 48 \\ 4x_1 = 12 \\ x_1 = 3 \end{array}$$

Así encontramos que el punto óptimo es (3, 6). La Stratton Company deberá producir, la próxima semana, 300 pies de tubo tipo 1 y 600 pies de tubo tipo 2. Esta solución produce una ganancia total de  $34(3) + 40(6) = \$342$ .

### Variables de holgura y de excedentes

La figura H.6 muestra que la mezcla de productos óptima agotará todos los recursos de extrusión y embalaje, porque, en el punto vértice óptimo (3, 6), las dos restricciones se convierten en igualdades. Al sustituir los valores de  $x_1$  y  $x_2$  en esas restricciones, vemos que el lado izquierdo de las ecuaciones se vuelve igual al lado derecho de las mismas:

$$4(3) + 6(6) = 48 \quad (\text{extrusión})$$

$$2(3) + 2(6) = 18 \quad (\text{embalaje})$$

Una restricción (como la correspondiente a la extrusión) que ayuda a formar el punto vértice óptimo recibe el nombre de **restricción obligatoria**, porque limita la posibilidad de mejorar la función objetivo. Si una restricción obligatoria se *relaja*, es decir, se vuelve menos restrictiva, surge la posibilidad de encontrar una solución mejor. Relajar una restricción significa incrementar el parámetro del lado derecho, si se trata de una restricción  $\leq$ , o reducirlo si se trata de una restricción  $\geq$ . No es posible obtener una mejoría si la restricción que se ha relajado no es obligatoria, como en el caso de la restricción de la mezcla aditiva ilustrada en la figura H.6. Si aumentáramos el lado derecho de 16 a 17 y resolvíramos nuevamente el problema, la solución óptima no cambiaría. En otras palabras, ahora tendríamos una mezcla aditiva mayor de lo necesario.

En el caso de restricciones de desigualdad no obligatorias, es útil saber en cuánto difieren entre sí el lado izquierdo y el derecho. Esa información nos indica en qué grado se acerca la restricción a convertirse en obligatoria. Para una restricción  $\leq$ , la cantidad por la cual el lado izquierdo es menor que el lado derecho se conoce como **holgura**. Para una restricción  $\geq$ , la cantidad por la cual el lado izquierdo es mayor que el lado derecho se conoce como los **excedentes**. Para encontrar la holgura de una restricción  $\leq$  por el método algebraico, *agregamos* una variable de holgura a la restricción y convertimos ésta en una igualdad. A continuación, sustituimos los valores de las variables de decisión y resolvemos para la holgura. Por ejemplo, la restricción de la mezcla aditiva de la figura H.6,  $2x_1 + x_2 \leq 16$ , se puede volver a escribir agregando la variable de holgura  $s_1$ :

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 16$$



Después, calculamos la holgura correspondiente a la solución óptima (3, 6):

$$2(3) + 6 + s_1 = 16$$

$$s_1 = 4$$

El procedimiento es muy parecido al que se usa para encontrar el excedente de una restricción  $\geq$ , excepto que en este caso *restamos* una variable de excedentes del lado izquierdo. Supongamos que  $x_1 + x_2 \geq 6$  fuera otra restricción en el problema de Stratton Company, que representara un límite más bajo para el número de unidades producidas. Entonces reescribiríamos la restricción, restando una variable de excedentes  $s_2$ :

$$x_1 + x_2 - s_2 = 6$$

La holgura en la solución óptima (3, 6) sería la siguiente:

$$3 + 6 - s_2 = 6$$

$$s_2 = 3$$

## ■■■ ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Rara vez se conocen con certeza los parámetros de la función objetivo y las restricciones. Con frecuencia solamente son estimaciones de sus valores reales. Por ejemplo, las horas disponibles señaladas para embalaje y extrusión en la Stratton Company son estimaciones que no reflejan las incertidumbres asociadas al ausentismo o a las transferencias de personal, y las horas requeridas por unidad por embalar o extruir pueden ser normas de trabajo que, en esencia, son simples promedios. En forma semejante, las contribuciones a las ganancias utilizadas para determinar el valor de los coeficientes de la función objetivo no reflejan las incertidumbres presentes en los precios de venta y en ciertos costos variables, como salarios, materias primas y embarques.

A pesar de esas incertidumbres, se requieren estimaciones iniciales para resolver el problema. Los sistemas de información de contabilidad, marketing y normas de trabajo nos proporcionan a menudo esas estimaciones iniciales. Después de haber resuelto el problema utilizando esos valores estimados, el analista puede determinar en qué medida resultarían afectados los valores óptimos de las variables de decisión y el valor de la función objetivo  $Z$  si ciertos parámetros tuvieran valores diferentes. Este tipo de análisis posterior a la solución, que se realiza para responder preguntas del tipo "qué pasaría si", se llama *análisis de sensibilidad*.

Una forma de efectuar análisis de sensibilidad para problemas de programación lineal es el laborioso enfoque de resolución directa, que consiste en cambiar uno o varios valores de los parámetros y volver a resolver todo el problema. Este enfoque puede ser aceptable para problemas pequeños, pero resulta ineficaz cuando intervienen muchos parámetros. Por ejemplo, el enfoque de resolución directa del análisis de sensibilidad, utilizando 3 valores separados para cada uno de 20 coeficientes de la función objetivo, requiere ensayar con  $3^{20}$ , es decir, ¡3,486,784,401 soluciones diferentes! Por fortuna, disponemos de métodos eficientes para obtener información relacionada con la sensibilidad, sin tener que resolver de nuevo todo el problema. Esos métodos son los que se usan habitualmente en la mayoría de los paquetes de programación lineal de *software* para computadora. Aquí, realizaremos el análisis de sensibilidad sobre los coeficientes de la función objetivo y los parámetros del lado derecho de las restricciones, modificando un solo parámetro en cada ocasión.

### Coeficientes de la función objetivo

Comenzaremos el análisis de sensibilidad de la función objetivo de un problema con dos variables, calculando la pendiente de las líneas isoganancias (o isocostos). La ecuación de cualquier recta puede escribirse como  $y = mx + b$ , donde  $m$  es la pendiente de la recta. En nuestra solución gráfica de la figura H.6, usamos  $x_2$  en lugar de  $y$ , y usamos  $x_1$  en lugar de  $x$ .

Así, la ecuación que muestra la pendiente de una recta será  $x_2 = mx_1 + b$ . Para expresar en esta forma la función objetivo, resolvemos dicha función para  $x_2$  en términos de  $x_1$  y  $Z$ :

$$34x_1 + 40x_2 = Z$$

$$40x_2 = -34x_1 + Z$$

$$x_2 = -\frac{34x_1}{40} + \frac{Z}{40}$$

De esta manera, la pendiente  $m$  de las rectas isoganancias para el caso de la Stratton Company es  $-34/40$ , o sea,  $-0.85$ . En general, es el valor negativo de la razón el que se encuentra al dividir el coeficiente de  $x_1$  de la función objetivo entre el coeficiente de  $x_2$  de la misma función.

Veamos ahora lo que pasa cuando cambia un coeficiente de la función objetivo. Definimos  $c_1$  como la contribución a las ganancias por cada 100 pies de  $x_1$ , y  $c_2$  como la contribución a las ganancias por cada 100 pies de  $x_2$ . En estas condiciones, la ecuación de la línea isoganancias se convierte en:

$$x_2 = -\frac{c_1x_1}{c_2} + \frac{Z}{c_2}$$

Si  $c_1$  aumenta mientras  $c_2$  permanece constante, la pendiente se vuelve más negativa (o empinada) y la recta gira en sentido inverso (en el sentido de las agujas del reloj). Por ejemplo, si  $c_1$  aumenta a \$40, la pendiente cambia a  $-1.00$ , o sea,  $-40/40$ . Pero si  $c_1$  disminuye, la pendiente se vuelve menos negativa y la recta gira en sentido directo. Si la reducción es suficientemente apreciable, la pendiente de la función objetivo será igual a la pendiente de la restricción de extrusión. Cuando esto sucede, el punto  $B$  se convierte en un punto vértice óptimo. Si, en cambio,  $c_1$  aumenta a tal grado que la pendiente de la función objetivo se vuelve más negativa que la pendiente de la restricción de embalaje, entonces el punto vértice  $D$  se convierte en óptimo. Podemos sacar conclusiones similares en el caso de los cambios de  $c_2$ .

**Rango de optimización.** Cuando el coeficiente de la función objetivo hace que la pendiente de dicha función sea mayor que la pendiente de la restricción de embalaje, pero menor que la pendiente de la restricción de extrusión, el punto  $C$  seguirá siendo la solución óptima. En la figura H.7 aparece sombreada el área comprendida entre las dos restricciones obligatorias, es decir, la extrusión y el embalaje. Observe que el punto  $C$  continúa siendo óptimo si la pendiente de la función objetivo es mayor que  $-1.00$ , o sea, la pendiente de la restricción de embalaje, y menor que  $-2/3$ , es decir, la pendiente de la restricción de extrusión. En consecuencia, tenemos las siguientes relaciones:

$$-1 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -\frac{2}{3}$$

Usamos esta relación para encontrar el rango en el cual  $c_1$  puede variar sin que cambie la optimización del punto  $C$ , manteniendo  $c_2$  constante en \$40:

$$-1 \leq -\frac{c_1}{40} \leq -\frac{2}{3}$$

Puesto que buscamos el rango correspondiente a  $c_1$  y no a  $-c_1/40$ , multiplicamos por  $-40$ . Cuando multiplicamos por un número negativo, la dirección de las desigualdades se invierte, con lo cual obtenemos:

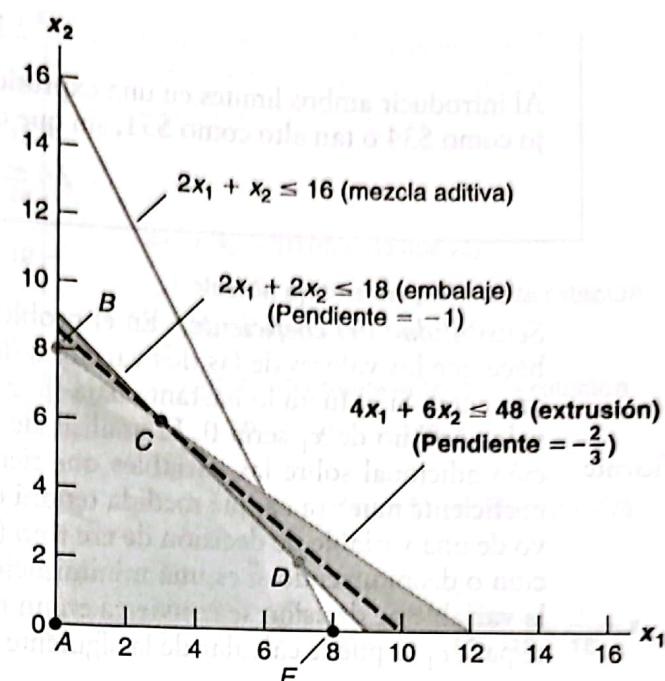
$$40 \geq c_1 \geq 26.67$$

Al reordenar los términos para facilitar la lectura de la ecuación, tenemos:

$$26.67 \leq c_1 \leq 40$$

FIGURA H.7

Cómo encontrar el rango de optimización



Así pues, el coeficiente de la función objetivo para  $x_1$  fluctúa entre un *límite inferior* de \$26.67 y un *límite superior* de \$40. Este rango de optimización define un límite inferior y uno superior, dentro de los cuales los valores óptimos de las variables de decisión permanecen sin cambios. Por supuesto, el valor de  $Z$  se modificaría si  $c_1$  cambiara. Por ejemplo, si  $c_1$  aumentara de \$34 a \$40, el valor de  $Z$  en el punto C cambiaría a 360:

$$40x_1 + 40x_2 = Z$$

$$40(3) + 40(6) = 360$$

#### EJEMPLO H.5

Cómo encontrar el rango de optimización para  $c_2$

¿Cuál es el rango de optimización para  $c_2$  en el problema de la Stratton Company?

**Solución** Si mantenemos constante  $c_1$  en \$34, la relación para la pendiente de las líneas isoganancias será:

$$-1 \leq -\frac{34}{c_2} \leq -\frac{2}{3}$$

En virtud de que  $c_2$  aparece en el denominador, lo más fácil es definir un límite a la vez. En el caso del límite de la izquierda, obtenemos:

$$-1 \leq -\frac{34}{c_2}$$

Si multiplicamos por  $c_2$ , encontramos el límite inferior:

$$c_2 \geq 34$$

Ahora, si tomamos la segunda relación de la derecha, tenemos:

$$-\frac{34}{c_2} \leq -\frac{2}{3}$$

Si multiplicamos por  $-c_2$ , encontramos el límite superior:

$$34 \geq \frac{2c_2}{3}$$

$$51 \geq c_2$$

Al introducir ambos límites en una expresión final, encontramos que  $c_2$  puede ser tan bajo como \$34 o tan alto como \$51, sin que cambie la optimización del punto C, es decir,

$$34 \leq c_2 \leq 51$$

### sensibilidad del coeficiente

**Sensibilidad del coeficiente** En el problema de la Stratton Company, el punto óptimo hace que los valores de las dos variables de decisión sean mayores que 0 (3 y 6 respectivamente). Si  $c_1$  fuera lo bastante baja (por debajo de 26.67), el punto B sería óptimo y el valor óptimo de  $x_1$  sería 0. El análisis de sensibilidad puede proporcionarnos información adicional sobre las variables que tienen valores óptimos de 0. La sensibilidad del coeficiente muestra en qué medida tendrá que mejorar el coeficiente de la función objetivo de una variable de decisión de ese tipo (incrementándose si se trata de una maximización o disminuyendo si es una minimización), antes de que la solución óptima cambie y la variable de decisión se convierta en un número positivo. La sensibilidad del coeficiente para  $c_1$  se puede calcular de la siguiente manera:

**Paso 1.** Averigüe en qué dirección de rotación (ya sea en sentido directo o inverso) debe hacerse girar la línea isoganancias (o isocostos) para que sea posible mejorar  $c_1$ . Haga girar la línea isoganancias (o isocostos) en esa dirección hasta que llegue a un nuevo punto vértice óptimo en el cual  $x_1$  sea mayor que 0.

**Paso 2.** Determine cuál de las restricciones obligatorias tiene la misma pendiente que la línea isoganancias (o isocostos), después de girar hasta este nuevo punto. Resuelva para el valor de  $c_1$ , con el cual la pendiente de la función objetivo sea igual a la pendiente de esta restricción obligatoria.

**Paso 3.** Haga que la sensibilidad del coeficiente sea igual a la diferencia entre este valor y el valor actual de  $c_1$ .

#### EJEMPLO H.6

### Cómo encontrar la sensibilidad del coeficiente para un problema revisado

Supongamos que el problema de la Stratton Company fuera modificado, de manera que el valor de  $c_1$  fuera \$20 en lugar de \$34. La figura H.8 muestra que ahora la línea isoganancias más alta pasa por el punto B, por lo cual éste se convierte en la solución óptima, en lugar del punto C. En el punto B, el valor óptimo de  $x_1$  es cero. ¿Cuál es entonces la sensibilidad del coeficiente para  $c_1$ ?

**Solución** Aplicamos los tres pasos de la solución al problema revisado de Stratton.

**Paso 1.** Puesto que se trata de un problema de maximización, sabemos que  $c_1$  mejora a medida que su valor *aumenta*. Cuando  $c_1$  aumenta, la línea isoganancias gira en sentido inverso. La rotación continuará hasta que se alcance el punto C, es decir, un punto vértice en el cual el valor de  $x_1$  se convierte en un número positivo (3).

**Paso 2.** La restricción obligatoria que tiene la misma pendiente es la de extrusión. Al resolver para la  $c_1$  que sea capaz de hacer que las dos pendientes sean iguales, tenemos:

$$-\frac{c_1}{40} = -\frac{2}{3}$$

$$c_1 = 26.67$$

**Paso 3.** La sensibilidad del coeficiente es \$6.67, o sea, \$26.67 – \$20.

Por lo tanto,  $c_1$  deberá incrementarse en \$6.67 antes de que su valor sea óptimo para hacer que  $x_1$  sea mayor que 0.

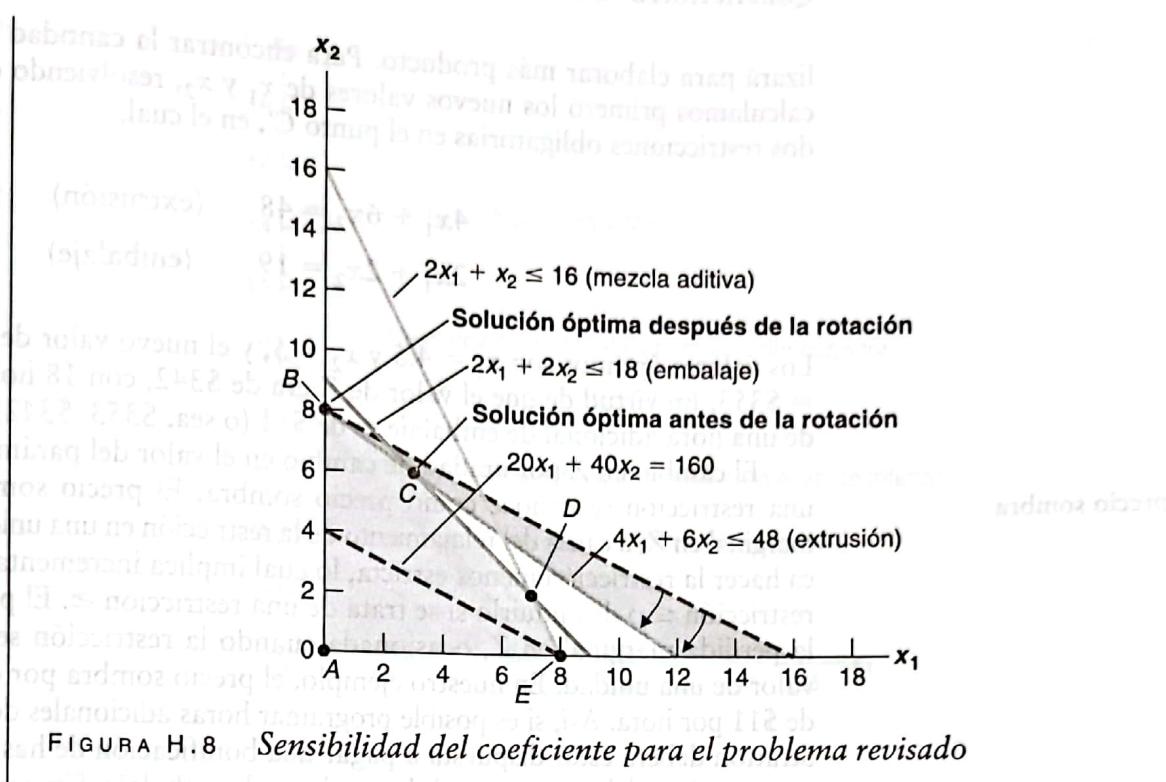


FIGURA H.8 Sensibilidad del coeficiente para el problema revisado

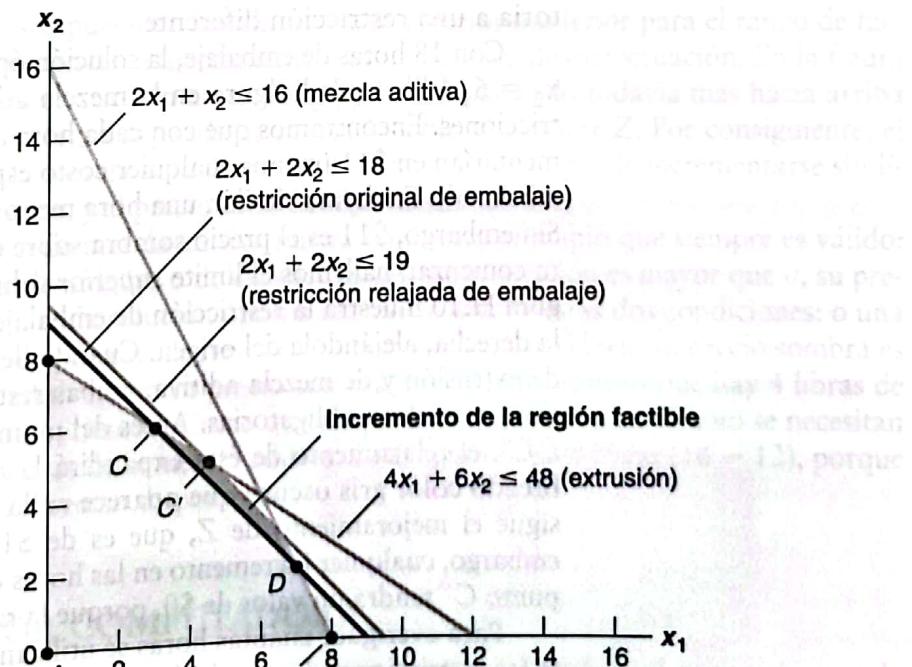
### Parámetros del lado derecho

Veamos ahora de qué manera un cambio en el parámetro del lado derecho de una restricción puede afectar la región factible y, tal vez, provocar también un cambio en la solución óptima. Regresemos al problema original de la Stratton Company, modificando nuevamente  $c_1$  de \$20 a \$34. Sin embargo, ahora estudiaremos la posibilidad de añadir una hora más al recurso correspondiente al embalaje, incrementando éste de 18 a 19 horas.

**Precios sombra** Como se aprecia en la figura H.9, este cambio expande la región factible, con lo cual la solución óptima cambia del punto C al punto C'. El punto C' es mejor en términos de Z porque la unidad agregada de una restricción obligatoria se utiliza más eficientemente.

FIGURA H.9

Cómo ampliar la  
región factible  
relajando en una hora  
la restricción de  
embalaje



lizará para elaborar más producto. Para encontrar la cantidad de dicho mejoramiento, calculamos primero los nuevos valores de  $x_1$  y  $x_2$ , resolviendo en forma simultánea las dos restricciones obligatorias en el punto  $C'$ , en el cual,

$$4x_1 + 6x_2 = 48 \quad (\text{extrusión})$$

$$2x_1 + 2x_2 = 19 \quad (\text{embalaje})$$

Los valores óptimos son  $x_1 = 4.5$  y  $x_2 = 5$ , y el nuevo valor de  $Z$  es  $\$34(4.5) + \$40(5)$  =  $\$353$ . En virtud de que el valor de  $Z$  era de  $\$342$ , con 18 horas de embalaje, el valor de una hora adicional de embalaje es de  $\$11$  (o sea,  $\$353 - \$342$ ).

El cambio en  $Z$  por unidad de cambio en el valor del parámetro del lado derecho de una restricción se conoce como precio sombra. El precio sombra es el mejoramiento marginal en  $Z$ , a causa del relajamiento de la restricción en una unidad. Relajamiento significa hacer la restricción menos estricta, lo cual implica incrementar el lado derecho de una restricción  $\leq$  o disminuirlo si se trata de una restricción  $\geq$ . El precio sombra también es la pérdida marginal en  $Z$ , ocasionada cuando la restricción se hace más estricta en el valor de una unidad. En nuestro ejemplo, el precio sombra por el recurso de embalaje es de  $\$11$  por hora. Así, si es posible programar horas adicionales de embalaje, la gerencia de Stratton deberá estar dispuesta a pagar una bonificación de hasta  $\$11$  por hora, además y por encima del costo normal de una hora de embalaje. Sin embargo, si la capacidad se reduce en una hora, las ganancias disminuirán en  $\$11$ .

#### precio sombra

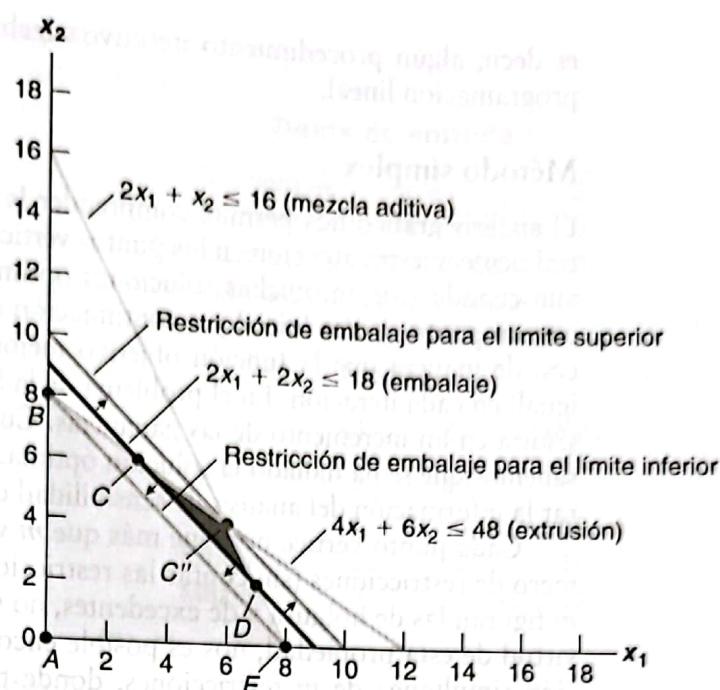
#### rango de factibilidad

**Rango de factibilidad.** Con un límite inferior y un límite superior se define el rango de factibilidad, es decir, el intervalo en el cual el parámetro del lado derecho puede variar mientras su precio sombra sigue siendo válido. Si el lado derecho se incrementa más allá del límite superior, o si se reduce por debajo del límite inferior, entonces por lo menos una de las otras restricciones se vuelve obligatoria, lo cual altera, a su vez, la tasa de cambio de  $Z$ . Estos dos límites quedan establecidos en el momento en que, durante el relajamiento o endurecimiento de la recta de restricción, se alcanza un nuevo punto vértice dentro de la región factible que haga obligatoria a una restricción diferente.

Con 18 horas de embalaje, la solución óptima para la Stratton Company es de  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 6$ , 4 libras de holgura en la mezcla aditiva y 0 de holgura para las otras dos restricciones. Encontramos que con cada hora adicional de embalaje, las ganancias se incrementarían en  $\$11$  (menos cualquier costo especial necesario para adquirir esta capacidad adicional). En forma similar, una hora menos de embalaje reduciría las ganancias en  $\$11$ . Sin embargo,  $\$11$  es el precio sombra sobre una gama limitada de horas de embalaje. Para comenzar, hallemos el límite *superior* sobre el cual este precio sombra es válido. La figura H.10 muestra la restricción de embalaje, que ya ha sido relajada y desplazada hacia la derecha, alejándose del origen. Cuando llega al punto  $C''$ , donde cruza las restricciones de extrusión y de mezcla aditiva, ambas restricciones, la de mezcla aditiva y la de extrusión, se vuelven obligatorias. Antes del momento en que la restricción de embalaje llegue a  $C''$ , el relajamiento de ésta expandirá la región factible, como se aprecia por el sombreado color gris oscuro que aparece en la región factible. Con esta expansión se sigue el mejoramiento de  $Z$ , que es de  $\$11$  por cada hora de embalaje añadida. Sin embargo, cualquier incremento en las horas de embalaje más allá de lo que se utilizó en el punto  $C''$  tendrá un valor de  $\$0$ , porque la restricción ya no será obligatoria.

Para averiguar cuántas horas se utilizan en el punto  $C''$ , resolvemos simultáneamente las restricciones de mezcla aditiva y de extrusión, porque  $C''$  se encuentra en su intersección. Al hacerlo, obtenemos  $x_1 = 6$  y  $x_2 = 4$ . Al sustituir esos valores en la restricción de embalaje, encontramos que el límite superior del precio sombra de  $\$11$  corresponde a 20 horas de embalaje, o sea,  $2(6) + 2(4) = 20$ .

**FIGURA H.10**  
**Cómo definir los límites superior e inferior para el rango de factibilidad del embalaje**



**EJEMPLO H.7**

**Cómo encontrar el límite inferior sobre el precio sombra de \$11**

¿Cuál es el límite inferior sobre el precio sombra de \$11 para las horas de embalaje?

**Solución** La figura H.10 muestra que cuando las horas de embalaje se reducen, la restricción se desplaza a la izquierda, hacia el origen, reduciéndose la región factible y, por ende, el valor de  $Z$ . Finalmente, la restricción llega al punto vértice  $B$ , definido por la restricción de extrusión y la de no negatividad de  $x_1$ . En virtud de que una nueva restricción es obligatoria (la restricción de no negatividad de  $x_1$ ),  $B$  define el límite inferior del precio sombra del embalaje. Como vimos anteriormente, en el punto  $B$ , tenemos que  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 8$ . Al sustituir estos valores en la restricción de embalaje, averiguamos que el límite inferior del precio sombra de \$11 es de 16 horas de embalaje, es decir,  $2(0) + 2(8) = 16$ .

En algunos casos puede no existir un límite superior o inferior para el rango de factibilidad. La restricción de la mezcla aditiva es un ejemplo de esta situación. En la figura H.6 vemos que esta restricción no es obligatoria. Desplazando todavía más hacia arriba la restricción, no se logra expandir la región factible ni mejorar  $Z$ . Por consiguiente, el precio sombra de la mezcla aditiva es de \$0. El lado derecho puede incrementarse sin límites, hasta el infinito, y el precio sombra sigue siendo de \$0.

Esta restricción de mezcla aditiva ilustra un último principio que siempre es válido: cuando la variable de holgura o de excedentes de una restricción es mayor que 0, su precio sombra es 0. En cada solución óptima se cumple una de estas dos condiciones: o una variable de holgura (o de excedentes) de una restricción es 0, o bien, su precio sombra es 0. Para la mezcla aditiva, con su precio sombra de \$0, encontramos que hay 4 libras de holgura en el punto óptimo  $C$ . Como quiera que  $x_1 = 3$  y  $x_2 = 6$  en  $C$ , sólo se necesitan  $2(3) + 1(6) = 12$  libras de la mezcla aditiva. La holgura es de 4 libras ( $16 - 12$ ), porque 16 libras de la mezcla están disponibles.



## SOLUCIÓN POR COMPUTADORA

La mayoría de los problemas de programación lineal del mundo real se resuelve con la ayuda de computadoras, por lo cual nos concentraremos aquí en comprender cómo se usa la programación lineal y la lógica en la cual se basa. El procedimiento de solución incorporado a los códigos de computadora es una de las variantes del método simplex,

es decir, algún procedimiento iterativo algebraico para la resolución de problemas de programación lineal.

### Método simplex

El análisis gráfico nos permite comprender la lógica del método simplex, enfocando inicialmente nuestra atención en los puntos vértices. Un punto vértice siempre será el óptimo, aun cuando existan muchas soluciones óptimas. Así pues, el método simplex comienza con un punto vértice inicial y a continuación evalúa sistemáticamente otros puntos vértices, de manera que la función objetivo mejore (o, en el peor de los casos, permanezca igual) en cada iteración. En el problema de la Stratton Company, una posible mejora consistiría en un incremento de las ganancias. Cuando ya no es posible lograr más mejorías, sabemos que se ha hallado la solución óptima.<sup>1</sup> El método simplex también ayuda a generar la información del análisis de sensibilidad que nosotros desarrollamos gráficamente.

Cada punto vértice no tiene más que  $m$  variables mayores que 0, donde  $m$  es el número de restricciones (sin contar las restricciones de no negatividad). Entre las variables  $m$  figuran las de holgura y de excedentes, no sólo las variables originales de decisión. En virtud de esta propiedad, nos es posible encontrar un punto vértice mediante la resolución simultánea de  $m$  restricciones, donde todas las variables, excepto  $m$  de ellas, se igualan a 0. Por ejemplo, el punto  $B$  que observamos en la figura H.6, tiene tres variables distintas de 0:  $x_2$ , la variable de holgura del embalaje y la variable de holgura de la mezcla aditiva. Sus valores se encuentran resolviendo simultáneamente las tres restricciones, haciendo que  $x_1$  y la variable de holgura de la extrusión sean iguales a 0. Despues de haber determinado este punto vértice, el método simplex aplica información similar a la sensibilidad del coeficiente, a fin de decidir qué nuevo punto vértice puede encontrar a continuación, con el cual se obtenga un valor de  $Z$  aún mejor. El procedimiento continúa en la misma forma hasta que ya no sea posible encontrar ningún punto vértice mejor. El último punto vértice evaluado será el óptimo.

### Salida de datos de la computadora

Los programas de computadora reducen drásticamente el tiempo que se requiere para resolver problemas de programación lineal. Es posible desarrollar programas de propósito general para utilizarlos con las aplicaciones que es necesario repetir con frecuencia. Esos programas simplifican el ingreso de datos y generan la función objetivo y las restricciones apropiadas para el problema. Además, son capaces de preparar informes administrativos personalizados.

Las capacidades y visualizaciones que encontramos en los paquetes de *software* no son uniformes. Por ejemplo, el Solver del programa Excel de Microsoft tiene capacidad para manejar gran variedad de pequeños problemas de optimización, no sólo la programación lineal. Para resolver un problema de programación lineal, el usuario debe especificar que se trata de un *modelo lineal* y también tiene que imponer la restricción de no negatividad sobre todas las variables. Sin embargo, es muy sencillo imponer restricciones de no negatividad y éstas se incorporan al procedimiento como una más de las 100 restricciones permisibles.

El listado impreso 1 presenta los datos de entrada para el problema de la Stratton Company. La visualización, ya sea en pantalla, papel o disco, permite que el usuario comience variables de holgura y de excedentes, según se requiera. En la última mitad del listado 1, aparecen los valores y el tipo de las restricciones ( $\leq$ ,  $=$  o  $\geq$ ). El usuario tiene las nes y los valores del lado derecho. En este caso, a la restricción de extrusión, las restricciones y los valores del lado derecho. En este caso, a la restricción de extrusión se le aplicó el rótulo "Extrusión" y los valores del lado derecho se rotularon "RHS". Los datos de entrada pueden guardarse en un archivo para utilizarlos después en otras sesiones.

<sup>1</sup>Para mayor información sobre la forma de realizar manualmente el método simplex, véase Cook y Russell (1993) o cualquier otro libro de texto actual sobre ciencia de la administración.

**Listado impreso 1****Datos de entrada**

Número de variables : 2  
 Número de restricciones  $\leq$  : 3  
 Número de restricciones = : 0  
 Número de restricciones  $\geq$  : 0

**Modelo**

	X1	X2	RHS
Max-Z	34	40	
Ext	4	6	$\leq 48$
Embalaje	2	2	$\leq 18$
Mezcla	2	1	$\leq 16$

**Listado impreso 2****Solución**

Rótulo de la variable	Valor de la variable	Coeficiente original	Sensibilidad del coeficiente
X1	3	34	0
X2	6	40	0

Rótulo de la restricción	Valor original del lado derecho	Holgura o excedentes	Precio sombra
Ext	48	0	3
Embalaje	18	0	11
Mezcla	16	4	0

Valor de la función objetivo : 342

**Listado impreso 3****Análisis y rangos de sensibilidad****Coeficientes de la función objetivo**

Rótulo de la variable	Límite Inferior	Coeficiente original	Límite superior
X1	26.6667	34	40
X2	34	40	51

**Valores del lado derecho**

Rótulo de la restricción	Límite inferior	Valor original	Límite superior
Ext	40	48	54
Embalaje	16	18	20
Mezcla	12	16	sin límite



### VISTA PREVIA DE SOFTWARE

Visite <http://www.prenhall.com/krajewski/> para obtener información adicional sobre el software disponible para resolver problemas de programación lineal.

#### EJEMPLO H.8

#### Utilización de precios sombra para la toma de decisiones

El listado impreso 2 muestra la solución óptima para el problema de la Stratton Company, incluso los valores óptimos de las variables de decisión ( $x_1 = 3$  y  $x_2 = 6$ ), los coeficientes de su función objetivo y las sensibilidades de sus coeficientes. En este ejemplo, las sensibilidades de los coeficientes no nos aportan nuevos conocimientos, porque su valor siempre es 0 cuando las variables de decisión tienen valores positivos en la solución óptima. En cuanto a las restricciones, el listado impreso 2 muestra los valores originales del lado derecho, las variables de holgura o de excedentes y los precios sombra. Por ejemplo, hay 4 libras de holgura para la mezcla aditiva. El embalaje es una restricción obligatoria porque no tiene holgura. El precio sombra de una hora adicional de embalaje es de \$11. Todo esto confirma nuestros cálculos y el análisis gráfico que realizamos anteriormente.

El listado impreso 3 informa sobre el rango de optimización dentro del cual los coeficientes de la función objetivo pueden variar sin que se modifiquen los valores óptimos de la función objetivo. Observe que  $c_1$ , que actualmente tiene un valor de \$34, posee un rango de optimización que abarca desde \$26.67 hasta \$40. En la última parte del listado impreso 3, se presenta el rango de factibilidad sobre el cual los parámetros del lado derecho pueden oscilar sin provocar cambios en los precios sombra. Por ejemplo, el precio sombra de \$11 por embalaje es válido dentro del rango que abarca desde 16 hasta 20 horas. Una vez más, estos hallazgos son idénticos a los resultados del análisis de sensibilidad realizado por métodos gráficos.

La Stratton Company necesita encontrar respuestas para tres preguntas importantes: ¿valdrá la pena incrementar las capacidades en el área de embalaje o extrusión si el costo correspondiente sería de \$8 por hora, además y por encima de los costos normales que ya están reflejados en los coeficientes de la función objetivo? ¿Valdrá la pena incrementar la capacidad de embalaje si su costo implicaría \$6 adicionales por hora? ¿Valdrá la pena comprar más materias primas?

**Solución** Expandir la capacidad de extrusión costaría una suma adicional de \$8 por hora, por lo cual la compañía no deberá expandirse; el precio sombra de esa capacidad es únicamente de \$3 por hora. Sin embargo, incrementar las horas de embalaje costaría sólo \$6 por hora más que el precio reflejado en la función objetivo, y el precio sombra es de \$11 por hora. Por consiguiente, la compañía debería incrementar su capacidad de embalaje. Finalmente, la compra de más materias primas no valdría la pena porque ya existe un excedente de 4 libras; el precio sombra para ese recurso es 0.

## ■ ■ ■ APLICACIONES

Muchos problemas de administración de operaciones y de otras áreas funcionales han sido modelados como problemas de programación lineal. Generalmente, si la persona a cargo de tomar decisiones sabe formular un problema, podrá adaptarlo después a la situación que se le presente.

A continuación, presentamos una lista donde se describen algunos problemas que pueden resolverse mediante la programación lineal. Los problemas de repaso que aparecen al final de este suplemento y de otros capítulos ilustran muchos problemas de esa índole.

- Planificación agregada

**Producción:** encontrar el programa de producción cuyo costo sea mínimo, tomando en cuenta los costos de contrataciones y despidos, acumulación de inventarios, horas extra y subcontratación, bajo diversas restricciones de capacidad y de políticas.

**Personal:** encontrar los niveles óptimos de personal para diversas categorías de trabajadores, bajo diferentes restricciones de demanda y de políticas.

**Mezclas:** encontrar la proporción óptima de diversos ingredientes utilizados para fabricar diversos productos, como gasolina, pinturas y alimentos, bajo ciertos requisitos mínimos.

- **Distribución**

**Embarques:** encontrar las asignaciones óptimas para los embarques, desde fábricas hasta centros de distribución o desde almacenes hasta tiendas de venta al detalle.

- **Inventario**

**Control de inventarios:** determinar la mezcla de productos óptima para incluir la en el inventario en un almacén.

**Selección de proveedores:** encontrar la combinación óptima de proveedores para minimizar el volumen de inventario no deseado.

- **Localización**

**Plantas o almacenes:** determinar la localización óptima para una planta o almacén, en relación con los costos totales de transporte, eligiendo entre diferentes localizaciones alternativas y partiendo de fuentes de aprovisionamiento y demanda ya existentes.

- **Administración de procesos**

**Recorte de material:** conocidas las dimensiones de un rollo u hoja de materia prima, encontrar el patrón de corte que minimice la cantidad de material desperdiciado.

- **Programación**

**Turnos:** determinar la asignación de trabajadores por turnos, con la cual se produzca un costo mínimo, bajo una demanda variable.

**Vehículos:** asignar vehículos a productos o clientes y determinar el número de recorridos por hacer, dependiendo del tamaño del vehículo, la disponibilidad del mismo y las restricciones de la demanda.

**Rutas:** encontrar las rutas óptimas de un producto o servicio a través de diversos procesos secuenciales, cada uno con su respectiva capacidad y otras características propias.

## Problema resuelto 1

O'Connel Airlines está estudiando la posibilidad de proporcionar servicio aéreo desde su eje de operaciones en Cicely, Alaska, hasta Rome, Wisconsin, y Seattle, Washington. O'Connel tiene una terminal en el aeropuerto de Cicely, el cual está en servicio 12 horas diarias. Cada vuelo requiere el uso de la terminal durante 1 hora. Cada vuelo a Rome consume 15 horas de tiempo de la cuadrilla de pilotos y se espera que produzca una ganancia de \$2500. Para atender a Seattle se requieren 10 horas de tiempo de la cuadrilla de pilotos por vuelo y eso redundaría en una ganancia de \$2000 por vuelo. El trabajo de la cuadrilla de pilotos está limitado a 150 horas diarias. El mercado para el servicio a Rome se limita a nueve vuelos al día.

- Aplique el método gráfico de programación lineal para maximizar las ganancias de O'Connel Airlines.
- Identifique las restricciones de holgura y de excedentes, si las hay.
- Encuentre el rango de optimización para  $c_1$ , es decir, la ganancia por vuelo a Rome.

- d. Chris Hoover afirma que la publicidad por radio incrementaría la demanda de los viajes a Rome. ¿Cuál sería el valor de un incremento de la demanda (relajando la restricción del mercado) por un total de un vuelo a Rome?
- e. ¿En qué cantidad aumentaría la función objetivo de O'Connel si el Aeropuerto de Cicely funcionara una hora adicional todos los días? ¿Esas horas adicionales de operación se traducirían en un incremento del servicio de la aerolínea a Rome, a Seattle o a ambas ciudades?
- f. Maurice Foster afirma con gran convencimiento que O'Connel se beneficiaría con la contratación de más pilotos con experiencia. ¿Cuál sería el valor de una hora adicional de los recursos representados por la cuadrilla de vuelo? ¿Cuál es el límite superior del rango de factibilidad correspondiente al tiempo de la cuadrilla de vuelo?

**Solución** a. La función objetivo tiene el propósito de maximizar las ganancias,  $Z$ :

$$\text{Maximice: } \$2500x_1 + \$2000x_2 = Z$$

donde  $x_1$  = número de vuelos por día a Rome, Wisconsin

$x_2$  = número de vuelos por día a Seattle, Washington

Las restricciones son:

$$x_1 + x_2 \leq 12 \quad (\text{capacidad de la terminal})$$

$$15x_1 + 10x_2 \leq 150 \quad (\text{mano de obra})$$

$$x_1 \leq 9 \quad (\text{mercado})$$

$$x_1 \geq 0 \quad \text{y también} \quad x_2 \geq 0$$

Si dibujamos cuidadosamente líneas isoganancias paralelas a la que aparece en la figura H.11, veremos que el punto  $D$  representa la solución óptima. Se encuentra en la intersección de las restricciones de mano de obra y de capacidad de la terminal. Resolviendo algebraicamente, obtenemos:

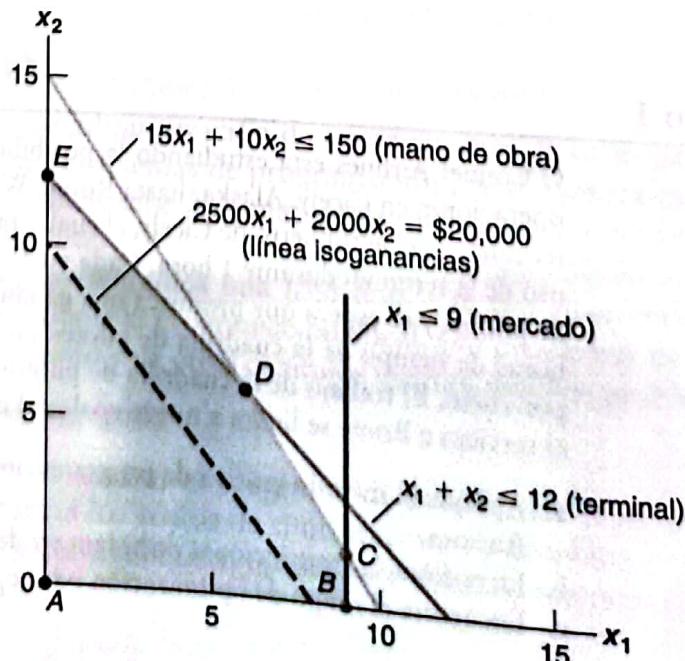
$$15x_1 + 10x_2 = 150 \quad (\text{mano de obra})$$

$$-10x_1 - 10x_2 = -120 \quad (\text{terminal} \times -10)$$

$$\hline 5x_1 + 0x_2 = 30$$

$$x_1 = 6$$

FIGURA H.11



Ejemplo de libro

(solo el caso)

$$6 + x_2 = 12 \quad (\text{terminal})$$

$$x_2 = 6$$

La ganancia máxima se conseguiría realizando seis vuelos a Rome y seis vuelos a Seattle:

$$\$2500(6) + \$2000(6) = \$27,000$$

- b. La restricción del mercado tiene tres unidades de holgura, por lo cual la demanda de vuelos a Rome no se satisface por completo:

$$x_1 \leq 9$$

$$x_1 + s_3 = 9$$

$$6 + s_3 = 9$$

$$s_3 = 3$$

- c. El punto  $D$  seguirá siendo óptimo mientras la pendiente de la función objetivo  $(-c_1/c_2)$  se encuentre entre  $-3/2$ , o sea, la pendiente de la restricción de mano de obra, y  $-1.00$ , es decir, la pendiente de la restricción referente a la capacidad de la terminal, o sea:

$$-\frac{3}{2} \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -1$$

Si mantenemos constante  $c_2$  en 2000, obtenemos:

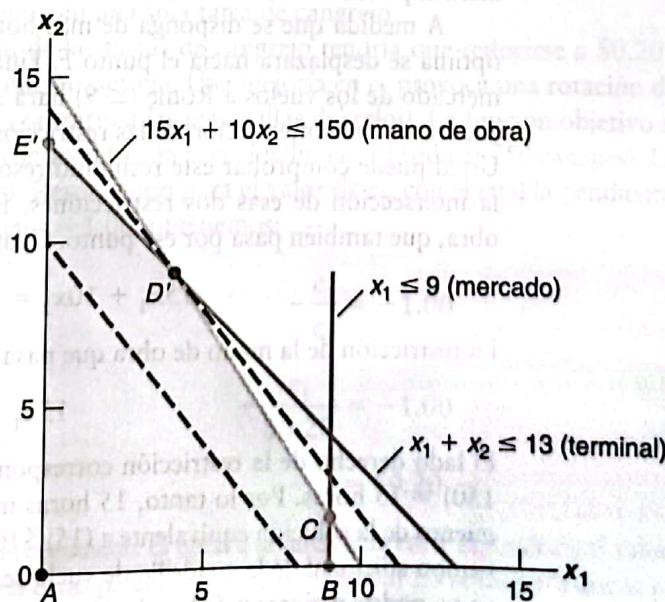
$$-\frac{3}{2} \leq -\frac{c_1}{2000} \leq -1$$

y multiplicando por 2000 resulta:

$$3000 \geq c_1 \geq 2000 \quad \text{o bien, } 2000 \leq c_1 \leq 3000$$

- d. Puesto que la restricción del mercado ya tiene holgura, la solución óptima no mejoraría con un incremento de la demanda correspondiente al servicio a Rome.

- e. La figura H.12 muestra lo que pasaría si la terminal permaneciera abierta 13 horas, en lugar de 12 horas. El incremento de una hora de operaciones acrecentaría el servicio a Seattle de seis a nueve vuelos, pero *disminuiría* el servicio a Rome de seis a cuatro vuelos. Las restricciones que se cruzan entre sí son:



$$x_1 + x_2 \leq 13 \quad (\text{capacidad de la terminal})$$

$$15x_1 + 10x_2 \leq 150 \quad (\text{mano de obra})$$

Resolviendo algebraicamente, obtenemos:

$$15x_1 + 10x_2 = 150 \quad (\text{mano de obra})$$

$$-10x_1 - 10x_2 = -130 \quad (\text{terminal} \times -10)$$

$$\hline$$

$$5x_1 + 0x_2 = 20$$

$$x_1 = 4$$

$$4 + x_2 = 13 \quad (\text{terminal})$$

$$x_2 = 9$$

La función objetivo sería  $\$2500(4) + \$2000(9) = \$28,000$ , o sea, un incremento de  $\$1000$  con respecto a la solución anterior. El precio sombra de la capacidad de la terminal sería de  $\$1000$  por hora.

f. Las restricciones que se intersecan son:

$$x_1 + x_2 \leq 12 \quad (\text{capacidad de la terminal})$$

$$15x_1 + 10x_2 \leq 151 \quad (\text{mano de obra})$$

Resolviendo algebraicamente, obtenemos como resultado:

$$15x_1 + 10x_2 = 151 \quad (\text{mano de obra})$$

$$-10x_1 - 10x_2 = -120 \quad (\text{terminal} \times -10)$$

$$\hline$$

$$5x_1 + 0x_2 = 31$$

$$x_1 = 6.2$$

$$6.2 + x_2 = 12 \quad (\text{terminal})$$

$$x_2 = 5.8$$

La función objetivo sería de  $\$2500(6.2) + \$2000(5.8) = \$27,100$ , o sea, un incremento de  $\$100$  sobre la solución anterior. El precio sombra correspondiente al tiempo de la cuadrilla de vuelo es de  $\$100$  por hora. Al aumentar el tiempo de la cuadrilla de vuelo, se incrementaría el servicio a Rome y se reduciría el servicio a Seattle. Sin embargo, un cambio de una hora en el tiempo de la cuadrilla de vuelo no produciría como resultado un cambio en el número de vuelos que pudiera expresarse con un número entero.

A medida que se disponga de más horas de servicio de la cuadrilla de vuelo, la solución óptima se desplazará hacia el punto F. Finalmente, como muestra la figura H.13, el límite de mercado de los vuelos a Rome ( $\leq 9$ ) hará que la solución se vuelva obligatoria. El punto F se encuentra en la intersección de las restricciones de mercado y de terminal, y se localiza en (9, 3). Usted puede comprobar este resultado resolviendo algebraicamente las ecuaciones para hallar la intersección de esas dos restricciones. Encontraremos ahora la restricción de la mano de obra, que también pasa por ese punto. Cuando  $x_1 = 9$  y  $x_2 = 3$ ,

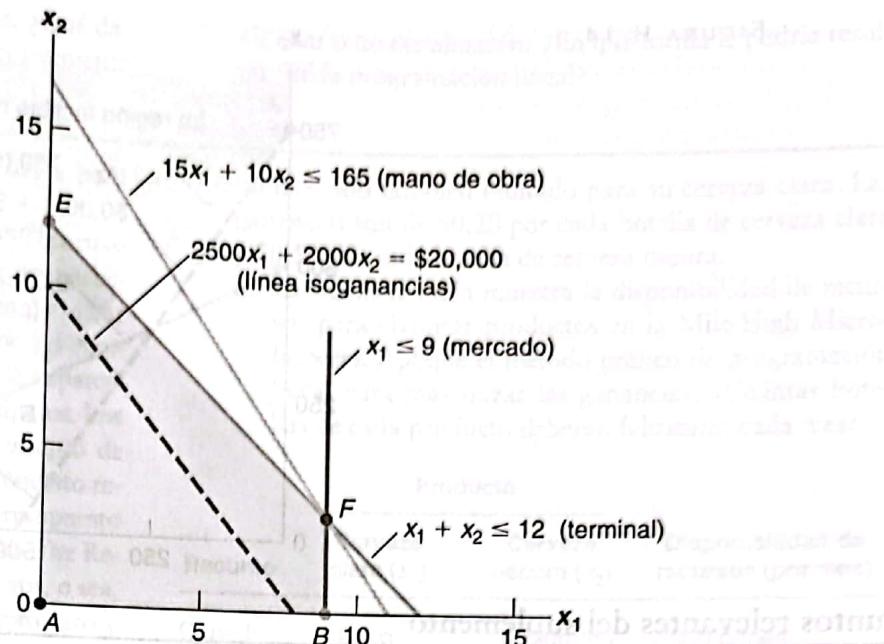
$$15x_1 + 10x_2 = 15(9) + 10(3) = 165$$

La restricción de la mano de obra que pasa por el punto (9, 3) es:

$$15x_1 + 10x_2 \leq 165$$

El lado derecho de la restricción correspondiente a la mano de obra ha aumentado en  $(165 - 150) = 15$  horas. Por lo tanto, 15 horas más de la cuadrilla de vuelo significarían un mejoramiento de la solución equivalente a  $(15)(\$100 \text{ precio sombra}) = \$1500$ . Más allá de ese punto, el tiempo adicional de la cuadrilla de vuelo se convertiría sencillamente en un recurso de holgura y ya no podría mejorar más la solución.

FIGURA H.13



### Problema resuelto 2

Holling desea minimizar el costo que implica la preparación de una cantidad mínima de 750 canapés para una fiesta. La compañía está considerando dos posibles recetas: las tartas de cangrejo de Dave ( $x_1$ ) y el bocadillo sorpresa de mariscos de Shelly ( $x_2$ ). El costo por unidad es de \$0.30 para las tartas de cangrejo y de \$0.20 para los mariscos sorpresa. Holling cuenta con un buen proveedor de cangrejo rey de Alaska, pero tiene que hacer pedidos de 20 libras, por lo menos, para conseguirlos a un precio razonable. Para la receta de la tarta se requieren 0.02 libras de carne de cangrejo por unidad. Para el bocadillo de mariscos se necesitan 0.04 libras por unidad. Puesto que la carne de cangrejo tiene una vida corta en el anaquel, Holling desea usar un pedido completo de ese producto en la preparación de los canapés. También en este caso, es indispensable que consuma 20 libras de carne de cangrejo cuando menos.

- Aplique el método gráfico de programación lineal para minimizar los costos de Holling.
- A partir de la sensibilidad del coeficiente, determine el valor de  $c_1$ , es decir, el costo de las tartas de cangrejo, que colocaría la opción correspondiente a  $x_1$  dentro de la solución (haciendo que  $x_1$  sea mayor que 0).

#### Solución

- La solución gráfica (figura H.14) muestra que la solución óptima está localizada en el punto A. En consecuencia, lo más conveniente sería producir 750 unidades del bocadillo sorpresa de mariscos de Shelly y ni una sola tarta de cangrejo.
- El costo unitario de las tartas de cangrejo tendría que reducirse a \$0.20 para que  $x_1$  quedara incluido en la solución óptima. Una mejoría en  $c_1$  provoca una rotación de la línea isocostos en sentido directo (contrario a las manecillas del reloj). La función objetivo se vuelve paralela a la restricción de la cantidad (según la cual habría que producir 750 canapés). La pendiente de esa restricción es  $-1.00$ . Resolviendo para el valor de  $c_1$ , con el cual la pendiente de la función objetivo,  $-c_1/c_2$ , es igual a  $-1.00$ , obtenemos:

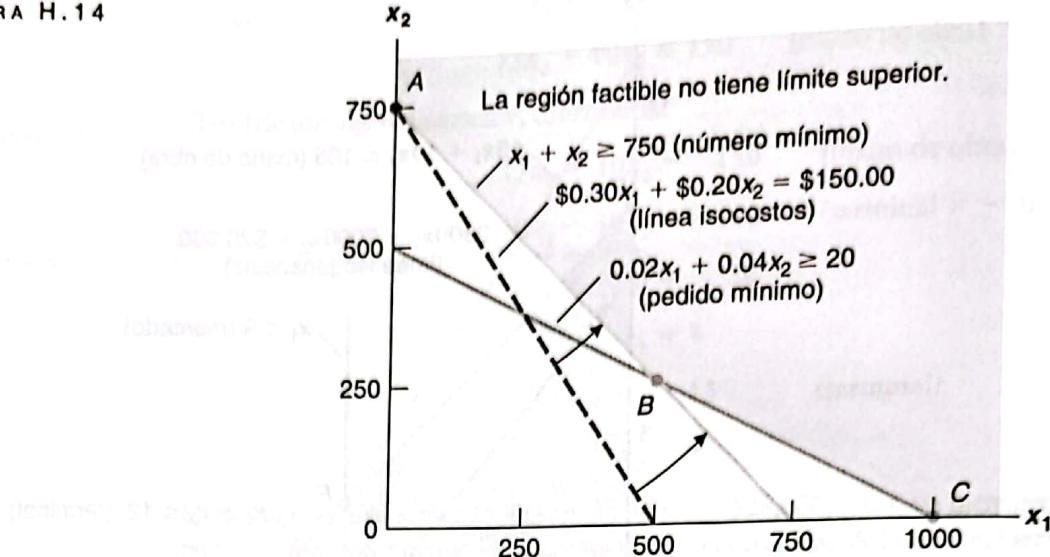
$$-\frac{c_1}{c_2} = -1.00$$

$$-\frac{c_1}{0.20} = -1.00$$

$$c_1 = \$0.20$$

La sensibilidad del coeficiente es igual a la diferencia entre este valor y el valor actual de  $c_1$ :  $\$0.30 - \$0.20 = \$0.10$ . En otras palabras, el hecho de forzar las cosas para que la producción de una tarta de cangrejo forme parte de la solución, implicaría tener que pagar una penalización de \$0.10.

FIGURA H.14



### Puntos relevantes del suplemento

- La programación lineal es una herramienta eficaz para resolver problemas complejos de asignación de recursos, cuando el objetivo y las restricciones se pueden expresar por medio de ecuaciones lineales. Con frecuencia se requiere habilidad y creatividad para crear el modelo de una situación mediante un conjunto de ecuaciones lineales. Una vez que el modelo ha sido formulado, es posible utilizar alguno de los programas de computadora disponibles para hallar la solución óptima.
- Aunque es cierto que con el análisis gráfico solamente pueden resolverse problemas sencillos de programación lineal, esta técnica proporciona conocimientos valiosos acerca del proceso mediante el cual se genera la solución óptima para problemas complejos.
- Además de encontrar la combinación óptima de las variables de decisión, el análisis de la solución permite determinar el precio sombra, la sensibilidad del coeficiente y la información sobre rangos. Los precios sombra son el valor de los recursos adicionales. La sensibilidad del coeficiente indica las penalizaciones asociadas a las soluciones no óptimas. La determinación de rangos describe el grado en el cual los coeficientes pueden cambiar sin invalidar la solución, o bien, la cantidad de un recurso que es posible adquirir sin que se modifique el valor de su precio sombra.

### Términos clave

- |   |  |                                  |
|---|--|----------------------------------|
| certidumbre 638                           | no negatividad 638                     | rango de optimización 651        |
| excedentes 648                            | parámetro 638                          | región factible 638              |
| función objetivo 637                      | precio sombra 654                      | restricción obligatoria 648      |
| holgura 648                               | problema de la mezcla de productos 639 | restricciones 638                |
| linealidad 638                            | programación lineal 637                | sensibilidad del coeficiente 652 |
| método gráfico de programación lineal 641 | punto vértice 645                      | variables de decisión 638        |
| método simplex 655                        | rango de factibilidad 654              |                                  |

### Preguntas para discusión

1. Una compañía desea aplicar la programación lineal para planificar su producción, pero se ha percatado de que el costo del despido de trabajadores no es lineal. En realidad, dicho costo puede calcularse en forma aproximada por medio de la siguiente ecuación:

$$\text{Costo de despido} = \$4000F^{1.25}$$

donde  $F$  es el número de trabajadores despedidos durante un mes. ¿De qué manera se podría modificar esta relación para que fuera posible elaborar una formulación y un modelo de esta situación utilizando un programa lineal?

2. Un problema particular de maximización por medio de la programación lineal tiene las siguientes restricciones "menores que" o "iguales a": (1) materias primas, (2) horas de mano de obra y (3) espacio de almacenamiento. La solución óptima está localizada en la intersección de las restricciones correspondientes a materias primas y horas de mano de obra, por lo cual dichas restricciones son obligatorias. La gerencia está considerando si será conveniente autorizar las horas extra. ¿Qué información útil le podría proporcionar la solución de programación lineal a la dirección, como ayuda para tomar esta decisión? Supongamos que de pronto quedará disponible un almacén

cuyas tasas de alquiler fueran sumamente bajas. ¿Qué datos necesitaría la dirección para decidir si es conveniente

## Problemas

Algun software de programación lineal es indispensable para resolver los problemas 7 a 19.

1. The Really Big Shoe es un fabricante de calzado deportivo para jugadores de baloncesto y fútbol. El gerente de marketing, Ed Sullivan, tiene que decidir la mejor forma de gastar los recursos destinados a publicidad. Cada uno de los equipos de fútbol patrocinados requiere 120 pares de zapatos. Cada equipo de baloncesto requiere 32 pares de zapatos. Los entrenadores de fútbol reciben \$300,000 por concepto de patrocinio para calzado, y los entrenadores de baloncesto reciben \$1,000,000 para ese mismo propósito. El presupuesto de Sullivan para promociones totaliza \$30,000,000. The Really Big Shoe dispone de una reserva limitada (4 litros, o sea, 4000 centímetros cúbicos) de *flubber*, un compuesto raro y costoso que se utiliza en la fabricación del calzado atlético de promoción. Cada par de zapatos para baloncesto requiere 3 cc de *flubber* y cada par de zapatos para fútbol requiere 1 cc. Sullivan desea patrocinar el mayor número de equipos de baloncesto y de fútbol que sus recursos le permitan.

- Formule un conjunto de ecuaciones lineales para describir la función objetivo y las restricciones.
- Utilice el análisis gráfico para encontrar la solución visual.
- ¿Cuál es el número máximo de cada tipo de equipo que The Really Big Shoe será capaz de patrocinar?

2. Un estudiante de administración de empresas en el Nowledge College necesita completar un total de 65 cursos para obtener su licenciatura. El número de cursos de administración tendrá que ser mayor que o igual a 23. El número de cursos ajenos a la administración deberá ser mayor que o igual a 20. El curso de administración promedio requiere un libro de texto que cuesta \$60 e implica 120 horas de estudio. Los cursos ajenos a la administración requieren un libro de texto que cuesta \$24 e implican 200 horas de estudio. El estudiante dispone de un presupuesto de \$3000 para libros.

- Formule un conjunto de ecuaciones lineales para describir la función objetivo y las restricciones.
- Utilice el análisis gráfico para encontrar la solución visual.
- ¿Con qué combinación de cursos de administración y otros ajenos a ésta se minimizaría el número total de horas de estudio?

3. En el problema 2, suponga que el objetivo fuera minimizar el costo de los libros y que el tiempo total de estudio del alumno se limitara a 12,600 horas.

- Aplique el análisis gráfico para determinar la combinación de cursos que permite minimizar el costo total por concepto de libros.
  - Identifique las variables de holgura o de excedentes.
4. Mile-High Microbrewery fabrica una cerveza clara y una oscura. Mile-High dispone de una reserva limitada de cebada, tiene una capacidad de embotellamiento limitada y

alquilar o no ese almacén? ¿En qué forma le podría resultar útil la programación lineal?

un mercado también limitado para su cerveza clara. Las ganancias son de \$0.20 por cada botella de cerveza clara y \$0.50 por cada botella de cerveza oscura.

- La siguiente tabla muestra la disponibilidad de recursos para elaborar productos en la Mile-High Microbrewery. Aplique el método gráfico de programación lineal para maximizar las ganancias. ¿Cuántas botellas de cada producto deberán fabricarse cada mes?

Recurso	Producto		Disponibilidad de recursos (por mes)
	Cerveza clara ( $x_1$ )	Cerveza oscura ( $x_2$ )	
Cebada	0.1 g	0.6 gramo	2000 g/mes
Embotellado	1 botella	1 botella	6000 botellas/mes
Mercado	1 botella		4000 botellas/mes

- Identifique cualquier restricción indicando si corresponde a holgura o excedentes.
- Encuentre el rango de optimización para  $c_2$ , es decir, la ganancia por botella de cerveza oscura.
- Beth Richards afirma que el patrocinio de eventos deportivos incrementaría la demanda de la cerveza ligera de Mile-High. ¿Cuál sería el valor de incrementar la demanda de la cerveza clara?
- Jorge Gallegos piensa que la restricción correspondiente al embotellamiento podría atenuarse subcontratando capacidad adicional de embotellado. ¿En qué medida se incrementaría la función objetivo de la planta Mile-High si la capacidad de embotellamiento se incrementara en una botella por mes? ¿Un incremento en el número total de las horas de operación se traduciría en una producción mayor de cerveza clara, de cerveza oscura o de ambas?
- ¿Cuál es el límite superior del rango de factibilidad correspondiente a la capacidad de embotellamiento?
- El gerente de la planta de producción de un fabricante de tubos de plástico tiene la opción de utilizar dos rutas diferentes para la fabricación de un tipo de tubo de plástico en particular. La ruta 1 utiliza la máquina extrusora A y la ruta 2 utiliza la extrusora B. Ambas rutas requieren el mismo proceso de fusión. La siguiente tabla muestra los requisitos y las capacidades de tiempo para estos procesos.

Proceso	Requisitos de tiempo (h/100 pies)		Capacidad (h)
	Ruta 1	Ruta 2	
Fusión	1	1	45
Extrusora A	3	0	90
Extrusora B	0	1	160

Cada 100 pies de tubo procesado en la ruta 1 utilizan 5 libras de materias primas, mientras que cada 100 pies de

tubo producidos en la ruta 2 utilizan solamente 4 libras. Esta diferencia es el resultado de las diversas tasas de desperdicio de cada una de las máquinas de extrusión. En consecuencia, la ganancia correspondiente a 100 pies de tubo procesados en la ruta 1 es de \$60 y en la ruta 2 es de \$80. Hay en total 200 libras de materias primas disponibles.

- Formule un conjunto de ecuaciones lineales para describir la función objetivo y las restricciones.
- Aplique el análisis gráfico para encontrar la solución visual.
- ¿Cuál es el valor de la ganancia máxima?
- Utilice la sensibilidad del coeficiente para determinar el valor de  $c_1$ , es decir, la ganancia por unidad procesada en la ruta 1, que sea capaz de hacer que  $x_1$  forme parte de la solución (haciendo  $x_1$  mayor que 0).
- Un fabricante de colorantes para telas puede utilizar dos rutas de procesamiento diferentes para elaborar un tipo particular de colorante. La ruta 1 utiliza la prensa secadora A y la ruta 2 usa la prensa secadora B. Ambas rutas requieren la utilización de la misma tina de mezclado para revolver los ingredientes químicos del colorante antes del secado. La siguiente tabla muestra los requisitos y capacidades de tiempo correspondientes a estos procesos.

Requisitos de tiempo (h/kg)

Proceso	Ruta 1	Ruta 2	Capacidad (h)
Mezclado	2	2	54
Secador A	6	0	120
Secador B	0	8	180

Cada kilogramo de colorante procesado en la ruta 1 requiere 20 litros de productos químicos, en tanto que cada kilogramo de tinte procesado en la ruta 2 utiliza solamente 15 litros. La diferencia se debe a las distintas tasas de rendimiento de las prensas secadoras. Por consiguiente, la ganancia por cada kilogramo procesado utilizando la ruta 1 es de \$50 y utilizando la ruta 2 es de \$65. Se dispone de 450 litros de ingredientes químicos en total.

- Formule las restricciones y la función objetivo para maximizar las ganancias.
- Aplique el método gráfico de programación lineal para encontrar la solución óptima.
- Identifique cualesquier restricciones que correspondan a holgura o excedentes.
- ¿Cuál es el valor de una hora adicional del tiempo de mezclado? ¿Cuál es el límite superior del rango dentro del cual es válido el precio sombra?
- La empresa Trim-Look Company fabrica varias líneas de faldas, vestidos y chaquetas deportivas. Recientemente, una consultora sugirió que la compañía evaluará de nuevo su línea South Islander y asignará sus recursos a productos capaces de maximizar la contribución a las ganancias y a los gastos generales. Cada producto requiere la misma tela de poliéster y tiene que pasar por los departamentos de corte y de costura. Los siguientes datos fueron recopilados para este estudio.

Producto	Tiempo de procesamiento (h)		
	Corte	Costura	Material (yd)
Falda	1	1	1
Vestido	3	4	1
Chaqueta deportiva	4	6	4

El departamento de corte dispone de 100 horas de capacidad, el de costura tiene 180 horas de capacidad y se cuenta con 60 yardas de material. Cada falda contribuye con \$5 a las ganancias y a los gastos generales; cada vestido, con \$17; y cada chaqueta deportiva, con \$30.

- Especifique la función objetivo y las restricciones para este problema.
- Utilice algún programa de computadora para resolver el problema.
- Reflexione más a fondo acerca del problema 7.
- ¿Cuánto estaría usted dispuesto a pagar por una hora extra de tiempo para la operación de corte? ¿Y por una hora extra para la operación de costura? ¿Y por una yarda adicional de material? Explique su respuesta para cada pregunta.
- Determine el rango de valores del lado derecho dentro del cual el precio sombra sería válido para la restricción del corte y para la restricción del material.
- Polly Astaire fabrica ropa fina para hombres altos y corpulentos. Hace unos cuantos años, esta empresa incursionó en el mercado de ropa deportiva con su línea Sunset de *shorts*, *pants* y camisas. La gerencia desea fabricar la cantidad adecuada de cada producto para maximizar las ganancias. La ruta de fabricación de cada tipo de prenda pasa por dos departamentos, A y B. Presentamos a continuación los datos pertinentes para cada producto.

Producto	Tiempo de procesamiento (h)		
	Departamento A	Departamento B	Material (yd)
Camisa	2	1	2
Shorts	2	3	1
Pants	3	4	4

El departamento A tiene 120 horas de capacidad, el departamento B tiene 160 horas de capacidad y se dispone de 90 yardas de material. Cada camisa contribuye con \$10 a las ganancias y los gastos generales; cada par de *shorts*, con \$10; y cada par de *pants*, con \$23.

- Especifique la función objetivo y las restricciones correspondientes a este problema.
- Utilice un programa de computadora para resolver el problema.
- ¿Cuánto debería estar dispuesta a pagar la empresa Astaire por una hora adicional de capacidad en el departamento A? ¿Y por una hora adicional de capacidad en el departamento B? ¿Dentro de qué rango de valores de la derecha resultan válidos estos precios sombra?

10. La Butterfield Company produce diversos cuchillos para cacería. Cada cuchillo es fabricado por cuatro máquinas. Presentamos a continuación los tiempos de procesamiento requeridos; las capacidades de las máquinas (en horas) son: 1500 para la máquina 1, 1400 para la máquina 2, 1600 para la máquina 3 y 1500 para la máquina 4.

Cuchillo	Tiempo de procesamiento (h)			
	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3	Máquina 4
A	0.05	0.10	0.15	0.05
B	0.15	0.10	0.05	0.05
C	0.20	0.05	0.10	0.20
D	0.15	0.10	0.10	0.10
E	0.05	0.10	0.10	0.05

Cada producto contiene una cantidad diferente de dos materias primas básicas. La materia prima 1 cuesta \$0.50 por onza y la materia prima 2 cuesta \$1.50 por onza. Las cantidades disponibles son: 75,000 onzas de la materia prima 1 y 100,000 onzas de la materia prima 2.

Cuchillo	Requisitos (oz/unidad)		Precio de venta (\$/unidad)
	Materia prima 1	Materia prima 2	
A	4	2	15.00
B	6	8	25.50
C	1	3	14.00
D	2	5	19.50
E	6	10	27.00

- a. Si el objetivo consiste en maximizar las ganancias, especifique usted la función objetivo y las restricciones correspondientes a este problema. Suponga que los costos de mano de obra son insignificantes.  
 b. Resuelva el problema con un programa de computadora, aplicando el método simplex.

11. La Nutmeg Corporation elabora cinco productos diferentes a base de nueces simples y mezcladas: el paquete de almendras, el paquete de nueces, el paquete para gastrónomos, el paquete fantasía y el paquete económico. Cada producto (individual o en mezcla) se vende en una lata de una libra. La empresa compra almendras a razón de \$0.80 por libra, nueces a \$0.60 por libra y cacahuates a \$0.35 por libra. Los cacahuates se emplean para completar todas las mezclas y la compañía tiene una reserva ilimitada de ellos. El suministro de almendras y nueces es limitado. La compañía puede comprar hasta 3000 libras de almendras y 2000 libras de nueces. Presentamos a continuación los requisitos de recursos y los pronósticos de demanda para el producto. Utilice algún programa de computadora para resolver este problema.

Producto	Requisitos mínimos (%)		Demanda (latas)
	Almendras	Nueces	
Almendras	100	—	1250
Nueces	—	100	750
Gastrónomos	45	45	1000
Fantasía	30	30	500
Económico	20	20	1500

- a. ¿Con qué mezcla se logra minimizar el costo que implica satisfacer la demanda de los cinco productos?  
 b. Si sólo se dispusiera de 2000 libras de cacahuates, ¿qué impacto tendría ese hecho sobre la mezcla de productos?  
 c. Si el paquete para gastrónomos requiriera 50% de almendras y 50% de nueces, ¿qué efecto tendría ese hecho sobre la mezcla de productos?  
 d. Si la demanda del paquete fantasía se duplicara, ¿qué efecto tendría ese hecho sobre la mezcla de productos?  
 12. Un problema que preocupa con frecuencia a los administradores de industrias procesadoras es la cuestión de las mezclas. Consideremos la tarea a la que deberá enfrentarse Lisa Rankin, gerente de compras de una compañía fabricante de aditivos especiales. Ella tiene que determinar la cantidad apropiada de cada una de las materias primas que necesitará comprar para la elaboración de un producto determinado. Cada galón de producto terminado deberá tener un punto de combustión de 220°F cuando menos. Además, el contenido gamma de ese producto (el cual ocasiona una contaminación de hidrocarburos) no puede ser mayor del 6% del volumen, y el contenido zeta del producto (un agente para limpiar las partes móviles del interior de los motores) deberá constituir por lo menos el 12% en volumen. Hay tres materias primas disponibles. Cada una de ellas tiene especificaciones diferentes en términos de las siguientes características:

Característica	Materias primas		
	A	B	C
Punto de combustión (°F)	200	180	280
Contenido gamma (%)	4	3	10
Contenido zeta (%)	20	10	8

La materia prima A cuesta \$0.60 por galón y las materias primas B y C cuestan \$0.40 y \$0.50 por galón, respectivamente. La gerente de compras se ha propuesto minimizar el costo de las materias primas por cada galón de producto. Utilice la programación lineal para encontrar la proporción óptima de cada materia prima en un galón del producto terminado. *Sugerencia:* Exprese las variables de decisión en términos de fracciones de galón; la suma de todas esas fracciones deberá ser igual a 1.00.

13. Una pequeña empresa del ramo metal mecánico fabrica tres tipos básicos de componentes para que los utilicen otras compañías. Cada componente es procesado en tres máquinas. Presentamos a continuación los tiempos de procesamiento; las capacidades totales (en horas) son: 1600 para la máquina 1, 1400 para la máquina 2 y 1500 para la máquina 3.

Componente	Tiempo de procesamiento (h)		
	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
A	0.25	0.10	0.05
B	0.20	0.15	0.10
C	0.10	0.05	0.15

Cada componente contiene una cantidad diferente de dos materias primas básicas. La materia prima 1 cuesta \$0.20 por onza y la materia prima 2 cuesta \$0.35 por onza. La empresa dispone de 200,000 onzas de la materia prima 1 y de 85,000 onzas de la materia prima 2.

Componente	Requisito (oz/unidad)		Precio de venta (\$/unidad)
	Materia prima 1	Materia prima 2	
A	32	12	40
B	26	16	28
C	19	9	24

- a. Supongamos que la compañía debe fabricar por lo menos 1200 unidades del componente B, que los costos de la mano de obra son insignificantes y que el objetivo es maximizar las ganancias. Especifique la función objetivo y las restricciones correspondientes a este problema.
- b. Utilice algún programa de computadora para resolver el problema.

14. Presentamos ahora un modelo de programación lineal para analizar la mezcla de productos de Maxine's Hat Company, una compañía que fabrica sombreros en tres estilos:

$$\text{Maximice: } \$7x_1 + \$5x_2 + \$2x_3 = Z$$

Sujeto a:  $3x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 150$  (tiempo de máquina A)  
 $5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 100$  (tiempo de máquina B)  
 $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 160$  (tiempo de máquina C)  
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ y también } x_3 \geq 0$

El listado impreso de computadora que aparece a continuación muestra la solución óptima para el problema. Considere usted cada una de las siguientes declaraciones en forma independiente y responda si es verdadera o falsa. Explique cada una de sus respuestas.

- a. Si el precio del sombrero 3 se incrementara a \$2.50, éste formaría parte de la mezcla de productos óptima.
- b. La capacidad de la máquina C puede reducirse a 65 horas sin que las ganancias resulten afectadas.
- c. Si la máquina A tuviera una capacidad de 170 horas, no habría ningún cambio en la producción total.

### Programación lineal Maximización

#### Solución

Rótulo de la variable	Valor de la variable	Coeficiente original	Sensibilidad del coeficiente
X1	3.1250	7	0
X2	28.1250	5	0
X3	0	2	0.7500
Rótulo de la restricción	Valor original del lado derecho	Holgura o excedentes	Precio sombra
C1	150	0	0.2500
C2	100	0	0.2500
C3	160	100.6250	1.2500
Valor de la función objetivo:	162.5000		0

#### Análisis de sensibilidad Coeficientes de la función objetivo

Rótulo de la variable	Límite inferior	Coeficiente original	Límite superior
X1	5.2857	7	8.3333
X2	4.2000	5	11.6667
X3	Sin límite	2	2.7500

Valores del lado derecho			
Rótulo de la restricción	Límite inferior	Valor original	Límite superior
C1	60	150	166.6667
C2	90	100	250.0000
C3	59.3750	160	Sin límite

15. La Washington Chemical Company fabrica productos químicos y solventes para la industria de adhesivos. El proceso de producción está dividido en varias "fábricas enfocadas", cada una de las cuales elabora un conjunto específico de productos. Ha llegado el momento de preparar el plan de producción para una de esas fábricas enfocadas. Esta fábrica en particular elabora cinco productos, los cuales tienen que pasar tanto por el reactor como por el separador. Cada producto requiere también cierta combinación de materias primas. Los datos de producción se presentan en la tabla H.1.

La Washington Chemical Company tiene vigente un contrato a largo plazo con un importante fabricante de adhesivos que requiere una producción anual de 3000 libras de ambos productos, el 3 y el 4. Estos productos podrían fabricarse en mayor cantidad porque existe demanda para ellos.

- Determine la cantidad de producción anual de cada producto que permita maximizar la contribución a las ganancias. Supongamos que la compañía puede vender todo lo que produzca.
- Especifique el tamaño del lote correspondiente a cada producto.

16. La Warwick Manufacturing Company fabrica palas para uso industrial y doméstico. Las ventas de las palas es estacional y los clientes de Warwick se niegan a tener un inventario de ellas durante los períodos en que las ventas son flojas. En otras palabras, los clientes desean minimizar su inventario, exigen la entrega de mercancía de acuerdo con sus programas y no aceptan órdenes atrasadas.

Warwick emplea trabajadores manuales no calificados, para los cuales es suficiente una capacitación muy elemental. La producción de 1000 palas cuesta \$3500 en tiempo regular y \$3700 en horas extra. Estas cantidades incluyen los materiales, que representan más del 85% del costo. Las horas extra están limitadas a la producción de 15,000 palas por trimestre. Además, la empresa puede recurrir a subcontratistas, al costo de \$4200 por cada millar de palas, pero el contrato laboral de Warwick restringe este tipo de producción a 5000 palas por trimestre.

El nivel actual de inventario es de 30,000 palas, y la dirección desea llegar al final del año con ese mismo nivel. El manejo de un inventario de 1000 palas cuesta \$280 por trimestre. El pronóstico de demanda anual más reciente muestra los siguientes datos:

Trimestre	Demanda
1	70,000
2	150,000
3	320,000
4	100,000
Totales	640,000

**TABLA H.1** *Datos de producción para la Washington Chemical*

Recurso	Producto					Total de recursos disponibles
	1	2	3	4	5	
Reactor (h/lb)	0.05	0.10	0.80	0.57	0.15	7,500 h*
Separador (h/lb)	0.20	0.02	0.20	0.09	0.30	7,500 h*
Materia prima 1 (lb)	0.20	0.50	0.10	0.40	0.18	10,000 lb
Materia prima 2 (lb)	—	0.70	—	0.50	—	6,000 lb
Materia prima 3 (lb)	0.10	0.20	0.40	—	—	7,000 lb
Contribución a las ganancias (\$/lb)	4.00	7.00	3.50	4.00	5.70	

\*El tiempo total disponible se ha ajustado para tomar en cuenta las operaciones de preparación. Los cinco productos tienen una secuencia prescrita, en virtud del costo que implican los cambios que deben realizarse para pasar de la producción de uno a otro secuencia. La compañía tiene un ciclo de 35 días (es decir, 10 cambios por año por producto). En consecuencia, el tiempo correspondiente a esos cambios se ha deducido del tiempo total disponible para estas máquinas.

Construya un modelo de programación lineal para determinar el *mejor plan*, en términos de capacidad de tiempo regular. Suponga usted lo siguiente:

- la empresa tiene ahora 30 trabajadores y la dirección desea seguir teniendo el mismo número de ellos en el trimestre 4,
- cada trabajador puede producir 4000 palas por trimestre, y
- el costo de contratar a un trabajador es de \$1000 y de despedir a un trabajador es de \$600.

17. La gerencia de Warwick Company (problema 16) desea ofrecer cambios de precios a sus clientes como un incentivo para que compren sus palas en forma anticipada con respecto a las temporadas tradicionales. El personal de ventas y marketing de Warwick estima que la demanda de palas resultante de los cambios de precios sería la siguiente:

Trimestre	Demanda	Demanda original
1	120,000	70,000
2	180,000	150,000
3	180,000	320,000
4	160,000	100,000
Totales	640,000	640,000

Calcule el plan de producción óptimo (con inclusión del plan de personal para la fuerza de trabajo) de acuerdo con el nuevo programa de demanda. Compárelo con el plan de producción óptimo, tal como fue determinado bajo el programa de demanda original. Evalúe los efectos potenciales de esta forma de administración de la demanda.

18. La empresa Briley Cosmetics fabrica productos para el cuidado de la piel. La gerente de operaciones trata de encontrar la estrategia de costo mínimo que le permita suministrar 10,000 cajas de crema facial, 5000 cajas de crema para el cuerpo y 15,000 cajas de champú, con miras a satisfacer la demanda del mercado nacional durante el próximo mes.

El proceso de manufactura está conformado por dos etapas e incluye dos tipos de materias primas. La capacidad de producción mensual de Briley (en el primer turno) es de 15,000 horas de mano de obra para la etapa 1 y de 10,000 horas de mano de obra para la etapa 2. Las tasas salariales por hora del primer turno son de \$8.50 en la etapa 1 y de \$9.25 en la etapa 2. Se dispone también de un segundo turno, con una reducción de 10% en la capacidad y un costo adicional del turno (por salario) de 10%. Las materias primas esenciales A y B se extraen de una mina de la localidad. La capacidad de la mina limita la disponibilidad de materias primas a 200,000 libras de A cada mes y 150,000 libras de B cada mes. El costo que paga Briley por la materia prima A es de \$1 por libra y el costo de la materia prima B es de \$1.50 por libra.

La instalación de Briley en el país no cuenta con la mano de obra ni con las materias primas que necesita

para atender la demanda proyectada para el mes entrante. Una compañía, constituida como empresa conjunta en el extranjero, dispone de una fuente adicional de esas materias primas esenciales y cuenta con una licencia que la autoriza a producir cosméticos Briley para mercados internacionales. Briley puede importar la crema facial y la crema para el cuerpo producidas por esta fuente, al costo de \$40 y \$55 por caja, respectivamente.

	Producto		
	Crema facial	Crema para cuerpo	Champú
Mano de obra (h/caja)			
Etapa 1	1.5	1.8	1.0
Etapa 2	0.8	1.0	0.5
Materias primas (lb/caja)			
A	5	8	3
B	7	4	9

- ¿Qué programa de producción óptimo permite minimizar los costos totales de producción sin que deje de satisfacerse la demanda proyectada?
  - ¿Cuál es el valor mínimo de la función objetivo?
  - ¿Cuál es el valor de una hora adicional de mano de obra en la etapa 1?, ¿y en la etapa 2?
  - ¿Cuál es el valor de una libra adicional de la materia prima A?, ¿y de la materia prima B?
  - ¿Dentro de qué rango es válido el precio sombra para la materia prima B?
  - Si la demanda de los tres productos disminuyera en 10% cada una, ¿qué efecto tendría esto sobre la solución óptima?
  - ¿Qué precio debería tener la crema corporal importada para que pudiera estar incluida en la solución?
19. El gerente de planificación de productos de Westlake Electronics desea determinar la mezcla óptima de productos de televisión para el próximo trimestre. Las capacidades de producción de las tres instalaciones manufactureras de esta empresa son las siguientes:

Instalación	Fabricación (h)	Ensamble (h)
1	10,000	50,000
2	15,000	60,000
3	5,000	35,000
Totales	30,000	145,000

Westlake puede producir tres tipos diferentes de televisores: portátiles (20 pulgadas), regulares (27 pulgadas) y el modelo "teatro en el hogar" (40 pulgadas). La ganancia bruta y los requisitos de producción correspondientes a cada tipo de televisor son los siguientes:

Televisor	Ganancia bruta	Fabricación (h/unidad)	Ensamble (h/unidad)
Portátil	\$75	3	9
Regular	\$125	4	12
Teatro en el hogar	\$200	7	16

- Con qué mezcla de productos se logra optimizar la ganancia bruta?
  - Cuál es el valor máximo de la función objetivo?
  - Cuál es el valor de una hora adicional de tiempo de fabricación en la instalación 1?
  - Si se requiriera que la compañía fabricara por lo menos 1500 televisores portátiles y 500 de teatro en el hogar, ¿qué efecto tendría esto sobre la solución óptima?
  - Si las capacidades de producción de las tres plantas se incrementaran en 10% (además de las restricciones de la parte d), ¿cuál sería el efecto de este hecho sobre la solución óptima?
  - Cómo cambiaría la mezcla de productos en la formulación original de la parte a si en los tres planes se exigiera el mismo grado de utilización de la capacidad?
20. La Bull Grin Company produce un suplemento nutritivo que forma parte de los alimentos de animales que fabrican diversas compañías. Las ventas son estacionales y los clientes de Bull Grin se niegan a acumular inventarios del suplemento durante los períodos en que las ventas son flojas. En otras palabras, los clientes desean minimizar sus inventarios, exigen que la mercancía se entregue de acuerdo con sus programas y no aceptan órdenes atrasadas.

Bull Grin emplea trabajadores manuales no calificados que requieren poca o ninguna capacitación. La producción de 1000 libras de suplemento cuesta \$810 si se realiza en tiempo regular y \$900 en horas extra. En estas sumas están incluidos los materiales, los cuales representan más del 80% del costo. El total de horas extra deberá limitarse a la producción de 30,000 libras por trimestre. Además, se puede obtener la ayuda de subcontratistas a razón de \$1100 por cada 1000 libras, pero en cada trimestre solamente es posible producir 10,000 libras de esta manera.

El nivel actual de inventario es de 40,000 libras, y la gerencia desea terminar el año con ese mismo nivel. El manejo de inventario de 1000 libras de suplemento alimenticio cuesta \$110 por trimestre. Presentamos a continuación el pronóstico anual más reciente.

Trimestre	Demanda (lb)
1	100,000
2	410,000
3	770,000
4	440,000
Total	1,720,000

La empresa tiene actualmente 180 trabajadores, y la gerencia desea continuar con ese mismo número en el trimestre 4. Cada trabajador es capaz de producir 2000 libras por trimestre, por lo cual la producción en tiempo regular cuesta \$1620 por trabajador. A los empleados ociosos se les tiene que pagar esa misma tasa. Contratar a un trabajador cuesta \$1000 y despedir a un trabajador cuesta \$600.

Formule usted la función objetivo y las restricciones apropiadas para describir este problema de planificación de producción, después que haya definido completamente las variables de decisión.

21. Inside Traders, Inc., invierte en diversos tipos de valores. La empresa cuenta con \$5 millones para invertir de inmediato y desea maximizar los intereses que produzca dicha inversión durante el año próximo. En la siguiente tabla se presentan cuatro posibilidades de inversión. Para estructurar mejor la cartera de inversión, la junta de directores ha especificado que por lo menos el 40% de la inversión deberá realizarse en bonos corporativos y acciones ordinarias. Además, no se deberá dedicar más del 20% de la inversión a bienes raíces.

Inversión	Interés que se espera obtener (%)
Bonos corporativos	8.5
Acciones ordinarias	9.0
Certificados en oro	10.0
Bienes raíces	13.0

Formule usted la función objetivo y las restricciones correspondientes a este problema de inversión de cartera una vez que haya definido cuidadosamente las variables de decisión.

22. NYNEX tiene un problema de programación. Los operarios trabajan horarios de ocho horas y pueden iniciar sus actividades a medianoche, a las 4 A.M., a las 8 A.M., a mediodía, a las cuatro P.M. o a las 8 P.M. El trabajo de los operarios se requiere para satisfacer el siguiente patrón de demanda. Formule un modelo de programación lineal para satisfacer los requisitos de demanda con el menor número posible de operarios.

Periodo de tiempo	Operarios requeridos
Medianoche a 4 A.M.	4
4 A.M. a 8 A.M.	6
8 A.M. a mediodía	90
Mediodía a 4 P.M.	85
4 P.M. a 8 P.M.	55
8 P.M. a medianoche	20