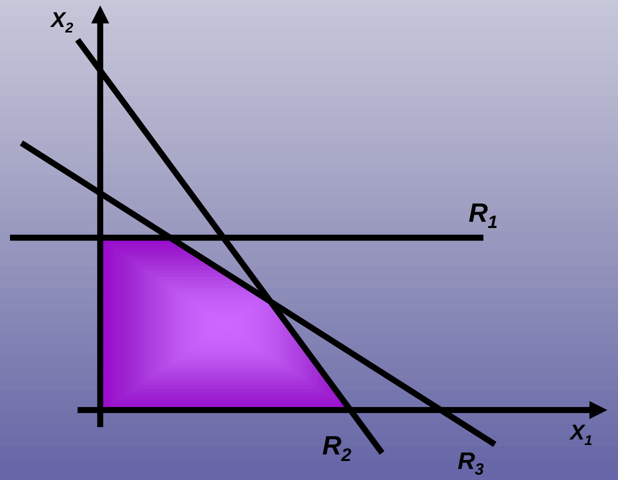
Universidad Autónoma de Tamaulipas
Facultad de Ingeniería “Arturo Narro Siller”
Investigación de Operaciones I

Programación Lineal



- ***Introducción.***
- ***Método gráfico***
- ***Método símplex***
- ***Aplicaciones***

Ing. José Gabriel González Turrubiates

"Los que mandan generalmente mueven las manos y dicen 'He considerado todas las alternativas'. Pero eso es casi siempre basura. Lo más probable es que no pudiesen estudiar todas las combinaciones."

George B. Dantzig , el creador de la programación lineal, en una entrevista publicada en The College Mathematical Journal, marzo de 1986.

Reflexión

Considere el problema de asignar 70 hombres a 70 empleos. Una “actividad” consiste en asignar el i-ésimo hombre al j-ésimo empleo. Las restricciones son dos: en primer lugar hay 70 hombres, cada uno de los cuales debe asignarse a un puesto, y en segundo lugar, cada uno de los 70 puestos existentes debe estar ocupado. El nivel de una actividad puede ser 1, lo cual indica que está siendo usada, o 0, lo cual significa que no. En consecuencia hay 2 x 70 = 140 restricciones y 70 x 70 = 4900 actividades con 4900 variables correspondientes de decisión uno-cero. Por desgracia también hay factorial de 70 permutaciones o formas de hacer las asignaciones. El problema consiste en comparar éste factorial de 70 formas y elegir la que sea la óptima o 'mejor' según algún criterio previamente establecido.

Introducción a la PL

Una de las técnicas más difundidas de la (IO) es la programación lineal (PL). El éxito de está herramienta se debe al hecho de que es muy flexible para describir un gran número de situaciones reales en áreas tales como: militar, industrial, agrícola, transporte, de la economía, de sistemas de salud, e incluso en las ciencias sociales y de la conducta. Un factor que ha ayudado a su amplio uso es la disponibilidad de programas de computadora muy eficientes para resolver problemas de grandes magnitudes de PL .

De hecho, la PL debería considerarse como una base importante del desarrollo de otras técnicas de la IO, incluidas la programación entera, la estocástica, la de flujo de redes y la cuadrática. Desde este punto de vista, el conocimiento de la PL es fundamental para implementar estas técnicas adicionales.

Por lo que resulta interesante saber que programación lineal y que no lo es, a continuación se mencionan algunas definiciones.

Definiciones de PL

"... trata la planeación de las actividades para obtener un resultado óptimo, esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada (según el modelo matemático) entre todas las alternativas de solución."

Frederick S. Hiller

"... es un problema de minimizar o maximizar una función lineal en la presencia de restricciones lineales del tipo dedesigualdad, igualdad o ambas."

Mokhtar S. Bazaraa

Definiciones de PL

Abarca los métodos de solución de una gran variedad de problemas de la siguiente naturaleza: se tiene alguna cantidad (tal como un costo o un tiempo) que tiene una función lineal de cierto número de variables lineales. Se requiere, a su vez, que estas variables satisfagan un sistema de igualdades y desigualdades lineales. Es necesario hallar valores no negativos de las variables que hagan máxima o mínima a la cantidad dada.

A. S. Basarov

Definiciones de PL

“... es una técnica matemática para encontrar los mejores usos de la organización. El adjetivo lineal se usa para describir la relación en dos o más variables, una relación que es directa y precisamente proporcional. El término programación se refiere al uso de ciertas técnicas matemáticas para obtener la mejor solución posible a un problema que involucra recursos limitados.”

Richad I. Levin

Supuestos y limitaciones de la PL

Supuestos

- *Proporcionalidad*
- *Aditividad*
- *Divisibilidad*

Limitaciones

- *Determinístico*
- *Estático*
- *No suboptimiza*

Modelo general de PL

Optimizar

Coeficientes objetivo

Variables de decisión

$$X_0 = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots + C_nX_n$$

Coeficientes tecnológicos

Coeficientes recurso

Sujeto a:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots\ldots + a_{1n}X_n (\leq, =, \geq) b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots\ldots + a_{2n}X_n (\leq, =, \geq) b_2$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots\ldots + a_{mn}X_n (\leq, =, \geq) b_m$$

$$X_{1,2,\ldots\ldots n} \geq 0$$

Condiciones técnicas o No negatividad

Transformaciones al modelo general de PL

Dado que el objetivo fundamental de la PL es el de optimizar una función lineal sujeta a una serie de restricciones lineales y variables no-negativas.

Dependiendo de la situación, resulta ventajoso efectuar ciertas manipulaciones al modelo general para expresarlo en formas equivalentes que sean más fáciles de comprender, solucionar o analizar. A continuación se presentan las transformaciones de mayor utilidad.

Transformaciones al modelo general de PL

1.- El objetivo puede cambiarse de maximización a minimización y viceversa.

La minimización de una función f(x), es matemáticamente equivalente a la maximización del negativo de tal función, -f(x); complementariamente, la maximización una función g(x), es matemáticamente equivalente a la minimización del negativo de la misma, -g(x). Por ejemplo,

$$Máx: X_0 = 8X_1 + 14X_2 - 5X_3$$

es matemáticamente equivalente a

$$Mín: X'_0 = - X_0 = -8X_1 -14X_2 +5X_3$$

Transformaciones al modelo general de PL

2.- El sentido de una desigualdad puede invertirse. Cuando una desigualdad se multiplica por (-1), su sentido puede invertirse. Si es "$\leq$" cambia a "$\geq$", si es "$\geq$" cambia a "$\leq$". Por ejemplo:

$$2X_1 + 9X_2 - 4X_3 \geq 9$$

al multiplicarla por (-1), se convierte en

$$-2X_1 - 9X_2 + 4X_3 \leq -9$$

Transformaciones al modelo general de PL

3.- Una ecuación puede transformarse a desigualdades. Esto se basa en el hecho de que toda ecuación puede reemplazarse por dos desigualdades en sentidos opuestos. Por ejemplo:

$$3X_1 + 5X_2 - 8X_3 = 10$$

es matemáticamente equivalente a las dos siguientes desigualdades

$$3X_1 + 5X_2 - 8X_3 \leq 10$$
$$3X_1 + 5X_2 - 8X_3 \geq 10$$

Transformaciones al modelo general de PL

4.- Cuando se tiene una desigualdad " $\leq$ ", puede transformarse a una ecuación, si se le suma al lado izquierdo una nueva variable, no-negativa, llamada variable de faltante dado que solamente tomará valores positivos cuando el lado izquierdo sea menor al lado derecho. Por ejemplo:

$$9X_1 + 7X_2 - 3X_3 \leq 5$$

puede reemplazarse por

$$9X_1 + 7X_2 - 3X_3 + s_4 = 5 \text{ , } s_4 \geq 0$$

Es práctica común considerar como cero al coeficiente objetivo de la variable de faltante.

Transformaciones al modelo general de PL

5.- Una desigualdad " $\geq$ " puede cambiarse a ecuación, si se le resta al lado izquierdo una nueva variable no-negativa, llamada variable de sobrante; tal nombre obedece a que dicha variable tomará un valor positivo, sólo cuando el lado izquierdo sea mayor que el derecho. Por ejemplo,

$$-5X_1 + 7X_2 - 2X_3 \geq 15$$

puede reordenarse como

$$-5X_1 + 7X_2 - 2X_3 - S_4 = 15 \text{ , } S_4 \geq 0$$

También es usual asignar un valor de cero al coeficiente objetivo de la variable de sobrante.

Transformaciones al modelo general de PL

6.- Una variable irrestricta en signo puede redefinirse en función de variables no-negativas. El modelo general de la PL presentado considera a todas las variables como no-negativas. En ciertos problemas se involucran variables irrestrictas en signo, es decir que pueden tomar valores positivos, negativos o cero; generalmente dichas variables están asociadas a temperaturas, saldos financieros, niveles de inventario, etc. Cuando en un problema se presenten variables irrestrictas, también llamadas variables libres, deben substituirse por la diferencia de dos variables no negativas. Por ejemplo, si la variable X_7 es irrestricta, entonces puede reemplazarse por

$$X_7 = X_7^+ - X_7^- \quad , \quad X_7^+ \text{ y } X_7^- \geq 0$$

Formatos Canónico y Estándar

1.- El formato Canónico

Un modelo de PL está en formato canónico si todas las variables son no-negativas y todas las restricciones son del tipo " $\leq$ " para un objeto de maximización, o si todas las restricciones son del tipo " $\geq$ " para un objetivo de minimización. Este formato es de gran utilidad en el análisis del modelo de PL.

2.- El formato Estándar

Un modelo de PL está en formato estándar si todas las variables son no-negativas y todas las restricciones son igualdades, tanto en maximización como minimización. Este formato será siempre en la solución de problemas de PL. A continuación se presentan los modelos generales de PL planteados mediante los formatos canónicos y estándar.

Transformaciones al modelo general de PL

Formato Canónico

Caso de minimización	Caso de maximización
Minimizar $X_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$	*Maximizar* $X_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$
Sujeto a:	*Sujeto a:*
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i$
$X_j \geq 0$	$X_j \geq 0$
$\forall \quad j = 1,2,\ldots,m$	$\forall \quad j = 1,2,\ldots,m$

Transformaciones al modelo general de PL

Formato Estándar

Caso de minimización

Minimizar

$$X_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i$$

$$X_j \geq 0$$

$$\forall \quad j = 1,2,\ldots,m$$

Caso de maximización

Maximizar

$$X_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i$$

$$X_j \geq 0$$

$$\forall \quad j = 1,2,\ldots,m$$

Aplicaciones de los formatos

Ejemplo 1

Formato Libre

Máx.

$$X_0 = 15X_1 + 28X_2 - 17X_3$$

Sujeto a:

$$2X_1 + 4X_2 - 3X_3 \geq 150$$

$$4X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 220$$

$$5X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 80$$

$$X_{1,\,2,\,3} \geq 0$$

a) Cambie la función objetivo del modelo de PL que está en formato libre (FL).

b) Exprese el modelo de PL que está en formato libre (FL) a formato canónico (FC).

c) Exprese el modelo de PL que está en formato libre (FL) a formato estándar (FE).

Aplicaciones de los formatos

a) Cambie la función objetivo del modelo de PL que está en formato libre (FL).

Transformación ❶

Máx.

$X_0 = 15X_1 + 28X_2 - 17X_3$

Máx.

$(-1)\ X_0 = 15X_1 + 28X_2 - 17X_3\ (-1)$

Mín.

$-X_0 = -15X_1 - 28X_2 + 17X_3$

Mín.

$-X_0 = -15X_1 - 28X_2 + 17X_3$

Sujeto a:

$2X_1 + 4X_2 - 3X_3 \geq 150$

$4X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 220$

$5X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 80$

$X_{1,2,3} \geq 0$

Aplicaciones de los formatos

b) Exprese el modelo de PL que está en formato libre (FL) a formato canónico (FC).

<u>Formato Canónico</u>

Máx.

$X_0 = 15X_1 + 28X_2 - 17X_3$

Sujeto a:

$- 2X_1 - 4X_2 + 3X_3 \leq - 150$

$4X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 220$

$- 4X_1 - 2X_2 - 4X_3 \leq - 220$

$5X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 80$

$X_{1, 2, 3} \geq 0$

Transformación ❷

$(-1)\ 2X_1 + 4X_2 - 3X_3 \geq 150\ (-1)$

$\boxed{- 2X_1 - 4X_2 + 3X_3 \leq - 150}$

Transformación ❸

$4X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 220$

Sustituir por:

$4X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 220$

$4X_1 + 2X_2 + 4X_3 \geq 220$

Se aplica la ❷ transformación a la segunda desigualdad

$(-1)\ 4X_1 + 2X_2 + 4X_3 \geq 220\ (-1)$

$\boxed{- 4X_1 - 2X_2 - 4X_3 \leq - 220}$

Aplicaciones de los formatos

c) Exprese el modelo de PL que está en formato libre (FL) a formato estándar (FE).

Formato Estándar

Máx.

$$X_0 = 15X_1 + 28X_2 - 17X_3$$

Sujeto a:

$$2X_1 + 4X_2 - 3X_3 - S_1 = 150$$

$$4X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 220$$

$$5X_1 + 3X_2 + 2X_3 + s_3 = 80$$

$$X_{1,2,3} \geq 0$$

$$S_1 \geq 0$$

$$s_3 \geq 0$$

Transformación ❺

$$2X_1 + 4X_2 - 3X_3 \geq 150$$

$$2X_1 + 4X_2 - 3X_3 - S_1 = 150$$

Transformación ❹

$$5X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 80$$

$$5X_1 + 3X_2 + 2X_3 + s_3 = 80$$

Aplicaciones de los formatos

Ejemplo 2

Formato Libre

Mín.

$$X_0 = 21X_1 - 18X_2 + 28X_3$$

Sujeto a:

$$-2X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 350$$

$$6X_1 + 4X_2 + 2X_3 \geq 220$$

$$5X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 180$$

$$X_{1,2,3} \geq 0$$

a) Cambie la función objetivo del modelo de PL que está en formato libre (FL).

b) Exprese el modelo de PL que está en formato libre (FL) a formato canónico (FC).

c) Exprese el modelo de PL que está en formato libre (FL) a formato estándar (FE).

Aplicaciones de los formatos

a) Cambie la función objetivo del modelo de PL que está en formato libre (FL).

Transformación ❶

Mín.

$X_0 = 21X_1 - 18X_2 + 28X_3$

Mín.

(-1) $X_0 = 21X_1 - 18X_2 + 28X_3$ (-1)

Máx.

$-X_0 = -21X_1 + 18X_2 - 28X_3$

Mín.

$X_0 = 21X_1 - 18X_2 + 28X_3$

Sujeto a:

$-2X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 350$

$6X_1 + 4X_2 + 2X_3 \geq 220$

$5X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 180$

$X_{1,\,2,\,3} \geq 0$

Aplicaciones de los formatos

b) Exprese el modelo de PL que está en formato libre (FL) a formato canónico (FC).

Formato Canónico

Mín.

$$X_0 = 21X_1 - 18X_2 + 28X_3$$

Sujeto a:

$$2X_1 - 4X_2 - 3X_3 \geq -350$$

$$6X_1 + 4X_2 + 2X_3 \geq 220$$

$$5X_1 + 2X_2 + 3X_3 \geq 180$$

$$-5X_1 - 2X_2 - 3X_3 \geq -180$$

$$X_{1,2,3} \geq 0$$

Transformación ❷

$$(-1)\ -2X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 350\ (-1)$$

$$\boxed{2X_1 - 4X_2 - 3X_3 \geq -350}$$

Transformación ❸

$$5X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 180$$

Sustituir por:

$$5X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 180$$

$$5X_1 + 2X_2 + 3X_3 \geq 180$$

Aplicar la transformación ❷ en la segunda desigualdad

$$(-1)\ 4X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 180\ (-1)$$

$$\boxed{-4X_1 - 2X_2 - 4X_3 \geq -180}$$

Aplicaciones de los formatos

c) Exprese el modelo de PL que está en formato libre (FL) a formato estándar (FE).

Formato Estándar

Máx.

$$X_0 = 21X_1 - 18X_2 + 28X_3$$

Sujeto a:

$$-2X_1 + 4X_2 + 3X_3 + s_1 = 350$$

$$5X_1 + 3X_2 + 2X_3 - S_2 = 220$$

$$5X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 180$$

$$X_{1,\,2,\,3} \geq 0$$

$$s_1 \geq 0$$

$$S_2 \geq 0$$

Transformación 4

$$-2X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 350$$

$$-2X_1 + 4X_2 - 3X_3 + s_1 = 350$$

Transformación 5

$$6X_1 + 4X_2 + 2X_3 \geq 220$$

$$6X_1 + 4X_2 + 2X_3 - S_2 = 220$$

Aplicaciones de los formatos

Ejemplo 3

Formato Libre

Mín.

$$X_0 = 11X_1 - 32X_2 + 42X_3$$

Sujeto a:

$$4X_1 + 2X_2 + X_3 = 190$$

$$4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \geq 90$$

$$6X_1 + 5X_2 + 3X_3 \geq 180$$

$$X_{1,\ 3} \geq 0$$

$$X_2 = \text{irrestricta}$$

a) Cambie la función objetivo del modelo de PL que está en formato libre (FL).

b) Exprese el modelo de PL que está en formato libre (FL) a formato canónico (FC).

c) Exprese el modelo de PL que está en formato libre (FL) a formato estándar (FE).

Aplicaciones de los formatos

Ejemplo 3

Formato Libre

Mín.

$$X_0 = 11X_1 - 32X_2 + 42X_3$$

Sujeto a:

$$4X_1 + 2X_2 + X_3 = 190$$

$$4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \geq 90$$

$$6X_1 + 5X_2 + 3X_3 \geq 180$$

$$X_{1,\ 3} \geq 0$$

$$X_2 = \text{irrestricta}$$

Sustituir $X_2 = X_4^+ - X_5^-$

Mín.

$$X_0 = 11X_1 - 32(X_4^+ - X_5^-) + 42X_3$$

$$X_0 = 11X_1 - 32(X_4^+ - X_5^-) + 42X_3$$

Sujeto a:

$$4X_1 + 2X_4^+ - 2X_5^- + X_3 = 190$$

$$4X_1 + 2X_4^+ - 2X_5^- + 3X_3 \geq 90$$

$$6X_1 + 5X_4^+ - 5X_5^- + 3X_3 \geq 180$$

$$X_{1,\ 3} \geq 0$$

$$X_4^+, X_5^- \geq 0$$

Aplicaciones de los formatos

a) Cambie la función objetivo del modelo de PL que está en formato libre (FL).

Transformación ➊

Mín.

$$X_0 = 11X_1 - 32X_4^+ - 32X_5^- + 28X_3$$

Mín.

$$(-1)\ X_0 = 11X_1 - 32X_4^+ - 32X_5^- + 28X_3\ (-1)$$

Máx.

$$-X_0 = -11X_1 + 32X_4^+ + 32X_5^- - 28X_3$$

Mín.

$$X_0 = 11X_1 - 32(X_4^+ - X_5^-) + 42X_3$$

Sujeto a:

$$4X_1 + 2X_4^+ - 2X_5^- + X_3 = 190$$

$$4X_1 + 2X_4^+ - 2X_5^- + 3X_3 \geq 90$$

$$6X_1 + 5X_4^+ - 5X_5^- + 3X_3 \geq 180$$

$$X_{1,\ 3} \geq 0$$

$$X_4^+, X_5^- \geq 0$$

Aplicaciones de los formatos

b) Exprese el modelo de PL que está en formato libre (FL) a formato canónico (FC).

Formato Canónico

Mín.

$$X_0 = 11X_1 + 32X_4^+ - 32x_5^- + 28X_3$$

Sujeto a:

$$- 4X_1 - 2X_4^+ + 2X_5^- - X_3 \geq - 190$$

$$4X_1 + 2X_4^+ + 2X_5^- + X_3 \geq 190$$

$$4X_1 + 2X_4^+ - 2X_5^- + 3X_3 \geq 90$$

$$- 6X_1 - 5X_4^+ + 5X_5^- - 3X_3 \geq - 180$$

$$X_{1, 2, 3} \geq 0$$

Transformación ❸

$$4X_1 + 2X_4^+ - 2X_5^- + X_3 = 190$$

Sustituir por:

$$4X_1 + 2X_4^+ - 2X_5^- + X_3 \leq 190$$

$$4X_1 + 2X_4^+ - 2X_5^- + X_3 \geq 190$$

Aplicar la transformación ❷ en la primera desigualdad

$$(-1) \quad 4X_1 + 2X_4^+ - 2X_5^- + X_3 \leq 190 \quad (-1)$$

$$\boxed{- 4X_1 - 2X_4^+ + 2X_5^- - X_3 \geq - 190}$$

Transformación ❷

$$(-1) \quad 6X_1 + 5X_4^+ - 5X_5^- + 3X_3 \leq 180 \quad (-1)$$

$$\boxed{- 6X_1 - 5X_4^+ + 5X_5^- - 3X_3 \geq - 180}$$

Aplicaciones de los formatos

c) Exprese el modelo de PL que está en formato libre (FL) a formato estándar (FE).

Formato Estándar

Mín.

$$X_0 = 11X_1 + 32X_4^+ - 32x_5^- + 28X_3$$

Sujeto a:

$$4X_1 + 2X_4^+ - 2X_5^- + X_3 = 190$$

$$4X_1 + 2X_4^+ - 2X_5^- + 3X_3 - S_2 = 90$$

$$6X_1 + 5X_4^+ - 5X_5^- + 3X_3 + s_3 = 180$$

$$X_{1,\,2,\,3} \geq 0$$

$$s_3 \geq 0$$

$$S_2 \geq 0$$

Transformación 4

$$-2X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 350$$

$$-2X_1 + 4X_2 - 3X_3 + s_1 = 350$$

Transformación 5

$$6X_1 + 4X_2 + 2X_3 \geq 220$$

$$6X_1 + 4X_2 + 2X_3 - S_2 = 220$$

Métodos de solución

Construcción de modelos de PL

Ejemplo 1.

Una planta puede fabricar cualquier combinación de cinco productos diferentes. La fabricación de cada producto requiere cierto tiempo en tres máquinas diferentes, como se indica en la siguiente tabla. Todas las cifras están expresadas en minutos por libra de producto.

	TIEMPO-MÁQUINA (min/lb)		
PRODUCTO	1	2	3
A	12	8	5
B	7	9	10
C	8	4	7
D	10		3
E	7	11	2

Cada máquina está disponible durante 128 horas por semana. Los productos A, B, C, D y E son muy competitivos y pueden venderse cualquier cantidad que se produzca a precios por libra de $5, $4, $5, $4 y $4, respectivamente. Los costos variables de mano de obra son $4 por hora para las máquinas 1 y 2 y $3 por hora en la máquina 3. Los costos de material son $2 por cada libra de los productos A y C, y $1 por cada libra de los productos B, D y E. Lo que se desea es maximizar las ganancias de la compañía.

Formule el modelo de programación lineal correspondiente.

Utilidad = PV-[(CM)+(CVMOm$_1$)+(CVMOm$_2$)+(CVMOm$_3$)]

Donde:

PV = Precio de venta

CM = Costo del material.

CVMOm$_1$ = Costo variable de mano de obra en la máquina 1.

CVMOm$_2$ = Costo variable de mano de obra en la máquina 2.

CVMOm$_3$ = Costo variable de mano de obra en la máquina 3.

Cálculo de costos variables de mano de obra en la máquina 1.

Producto A.

1 hora = $4

÷

60 minutos = $4

×

= 12 minutos = X

X = $ 0.80/lb

Producto B.

1 hora = $4

÷

60 minutos = $4

×

= 7 minutos = X

X = $ 0.47/lb

Producto C.

1 hora = $4

÷

60 minutos = $4

×

= 8 minutos = X

X = $ 0.53/lb

Solución:

Resumen de información relevante:

	Producto				
	A	B	C	D	E
Precio venta ($/lb)	$ 5.00	$ 4.00	$ 5.00	$ 4.00	$ 4.00
Costo de Material ($/lb)	$ 2.00	$ 1.00	$ 2.00	$ 1.00	$ 1.00
Costo variable M.O ($/lb) Maq.1	$ 0.80	$ 0.47	$ 0.53	$ 0.67	$ 0.47
Costo variable M.O ($/lb) Maq.2	$ 0.53	$ 0.60	$ 0.27	$ -	$ 0.73
Costo variable M.O ($/lb) Maq.3	$ 0.25	$ 0.50	$ 0.35	$ 0.15	$ 0.10
Utilidad ($/lb)	$ 1.42	$ 1.43	$ 1.85	$ 2.18	$ 1.70

Resumen de información relevante:

Máquinas	Tiempo máquina minutos por libra por producto					Minutos disponibles por semana
1	12	7	8	10	7	7680
2	8	9	4		11	7680
3	5	10	7	3	2	7680

Formulación:

Variable de decisión:

X_i = Libras del producto i a fabricar por semana.
$\forall$ i = 1, 2, 3, 4 y 5

Objetivo:

X_0 = Utilidad /semana

Restricciones:

Tiempo disponible por semana $\left\{ \begin{array}{l} \text{Máquina 1} \\ \text{Máquina 2} \\ \text{Máquina 3} \end{array} \right.$

Condiciones técnicas.

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

Modelo Matemático de Programación Lineal:

Máx: Utilidad

$$X_0 = 1.42X_1 + 1.43X_2 + 1.85X_3 + 2.18X_4 + 1.70X_5$$

$$\left[\frac{\$}{\text{Semana}}\right] = \left[\frac{\$}{\cancel{\text{Libra}}}\right]\left[\frac{\cancel{\text{Libras}}}{\text{Semana}}\right]$$

Sujeto a:

$$\left[\frac{\text{minutos}}{\cancel{\text{Libra}}}\right]\left[\frac{\cancel{\text{Libras}}}{\text{Semana}}\right] = \left[\frac{\text{minutos}}{\text{Semana}}\right]$$

$$12X_1 + 7X_2 + 8X_3 + 10X_4 + 7X_5 \leq 7680 \quad \textit{Máquina 1}$$

$$8X_1 + 9X_2 + 4X_3 + 11X_5 \leq 7680 \quad \textit{Máquina 2}$$

$$5X_1 + 10X_2 + 7X_3 + 3X_4 + 2X_5 \leq 7680 \quad \textit{Máquina 3}$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

Construcción de modelos de PL

Ejemplo 2.

La Compañía Par es un pequeño fabricante de equipo y suministros para golf. El distribuidor de Par cree que existe un mercado tanto para una bolsa de golf de precio moderado, denominada modelo estándar, como para una bolsa de precio elevado, denominada modelo de lujo. El distribuidor está tan confiado en el que, si Par puede hacer las bolsas a un precio competitivo, el distribuidor comprará todas las bolsas que Par pueda fabricar durante los siguientes tres meses. Un análisis cuidadoso de los requerimientos de tiempo de producción para las cuatro operaciones de manufactura y la estimación hecha por el departamento de contabilidad de la contribución a la ganancia por bolsa.

	Tiempo de producción (horas/bolsa)				
Producto	**Corte y teñido**	**Costura**	**Terminado**	**Inspección y empaque**	**Ganancia por bolsa**
Estándar	**7/10**	**1/2**	**1**	**1/10**	**$ 10**
De lujo	**1**	**5/6**	**2/3**	**1/4**	**$ 9**

El director de manufactura estima que dispondrán de 630 horas de tiempo de corte y teñido, 600 horas de tiempo de costura, 708 horas de tiempo de terminado y 135 horas de tiempo de inspección y empaque para la producción de bolsas de golf durante los siguientes tres meses.

a) Si la compañía desea maximizar la contribución a la ganancia total, ¿Cuántas bolsas de cada modelo debería fabricar?

b) ¿Cuántas horas de tiempo de producción se programaran para cada operación?

c) ¿Cuántas horas de tiempo de ocio se tendrán en cada operación?

Formulación:

Variable de decisión:

X_i = *Número de bolsas de modelo i a fabricar por trimestre*
$\forall\ i = 1, 2$

Objetivo:

X_0 = *Ganancia/trimestre*

Restricciones:

Tiempo disponible por trimestre

- *Corte y teñido*
- *Corte*
- *Terminado*
- *Inspección y empaque*

Condiciones técnicas.

$X_1, X_2 \geq 0$

Modelo Matemático de Programación Lineal:

Máx: Ganancia

$$X_0 = 1.42X_1 + 1.43X_2$$

$$\left[\frac{\$}{\text{Trimestre}}\right] = \left[\frac{\$}{\cancel{\text{Bolsa}}}\right]\left[\frac{\cancel{\text{Bolsa}}}{\text{Trimestre}}\right]$$

Sujeto a:

$$\left[\frac{\text{Hora}}{\cancel{\text{Bolsa}}}\right]\left[\frac{\cancel{\text{Bolsas}}}{\text{Semana}}\right] = \left[\frac{\text{Horas}}{\text{Semana}}\right]$$

$$7/10X_1 + X_2 \leq 630 \quad \text{Corte y teñido}$$

$$1/2X_1 + 5/6X_2 \leq 600 \quad \text{Costura}$$

$$X_1 + 2/3X_2 \leq 708 \quad \text{Terminado}$$

$$1/10X_1 + 1/4X_2 \leq 135 \quad \text{Inspección y empaque}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Construcción de modelos de PL

Ejemplo 3.

Tom's produce varios productos alimenticios mexicanos y los vende a Western Foods, cadena de tiendas de abarrotes localizada en Texas y Nuevo México. Tom's fabrica dos salsa: Western Foods Salsa y México City Salsa. Esencialmente, ambos productos son mezclas de tomates enteros, 30% de salsa de tomate y 20% de pasta de tomate. La México City Salsa, tiene una consistencia más espesa y troceda. Cada tarro de salsa producida pesa 10 onzas. Para el período de producción actual, Tom's puede adquirir hasta 280 libras de tomates enteros, 130 libras de salsa de tomate y 100 libras de pasta de tomate; el precio por libra de estos ingredientes es de $0.96, $0.64 y $0.56, respectivamente. El costo de las especias y de los demás ingredientes es de aproximadamente $0.10 por recipiente. Tom's compra tarros de vidrio vacíos a $0.02 cada uno, y los costos de etiquetado y llenado se estiman en $0.03 por cada tarro de salsa producido. El contrato de Tom's con Western Foods resulta en ingresos por ventas de $1.64 por cada tarro de Western Foods Salsa y de $1.93 por cada tarro de México City Salsa.

Solución:

Resumen de información relevante:

	Onzas/recipiente		
Salsa	Tomates enteros	Salsa de tomate	Pasta de tomate
Wastern Foods Salsa	5	3	2
Mexico City Salsa	5	3	2
Disponibilidad Mat. Prima (lb)	280	130	100
Costo por libra	$ 0.96	$ 0.64	$ 0.56
Costo por onza ocupada	$ 0.30	$ 0.12	$ 0.07

Resumen de información relevante:

Salsa	costo especias ($/recip)	Costo de tarros vacíos	Etiquetado ($/recip)	Precio venta($/recip)	Utilidad
Wastern Foods Salsa	$ 0.10	$ 0.02	$ 0.03	$ 1.64	$ 1.00
Mexico City Salsa	$ 0.10	$ 0.02	$ 0.03	$ 1.93	$ 1.29

Utilidad = PV-[(CMPte)+(CMPst)+(CMPpt)+(Ce)+(Ct)+(Cet)]

Donde:

PV = Precio de venta

CMPte = Costo de la materia prima (tomates enteros)

CMPst = Costo de la materia prima (salsa de tomate)

CMPpt = Costo de la materia prima (pasta de tomate)

Ce = Costo de las especias

Ct = Costo del tarro

Cet = Costo del etiquetado.

Formulación:

Variable de decisión:

X_1 = Número de recipientes a producir de Western Foods Salsa por periodo.
X_2 = Número de recipientes a producir México City Salsa por periodo

Objetivo:

X_0 = Utilidad /periodo

Restricciones:

Materia Prima
- Tomates enteros
- Salsa de tomate
- Pasta de Tomate

Condiciones técnicas.

$X_1, X_2 \geq 0$

Modelo Matemático de Programación Lineal:

Máx: Utilidad

$$X_0 = X_1 + 1.29X_2$$

$$\left[\frac{\$}{\text{Periodo}}\right] = \left[\frac{\$}{\cancel{\text{Recipiente}}}\right]\left[\frac{\cancel{\text{Recipiente}}}{\text{Periodo}}\right]$$

Sujeto a:

$$\left[\frac{\text{onzas}}{\cancel{\text{recipiente}}}\right]\left[\frac{\cancel{\text{recipiente}}}{\text{periodo}}\right] = \left[\frac{\text{onzas}}{\text{periodo}}\right]$$

$5X_1 + 5X_2 \leq 4480$ *Tomates enteros*

$3X_1 + 3X_2 \leq 2080$ *Salsa de tomate*

$2X_1 + 2X_2 \leq 1600$ *Pasta de tomate*

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Construcción de modelos de PL

Ejemplo 3.

Hexxon Oil Company tiene seis consultores de petróleo, tres de los cuales están actualmente en los E. U., dos en Rusia y uno en Nigeria. Arabia Saudita ha solicitado dos consultores durante una semana a una tarifa de $4200 cada uno. Venezuela ha solicitado dos consultores durante una semana a una tarifa de $4000 cada uno. Indonesia ha solicitado tres consultores tres consultores durante una semana a una tarifa semanal de $4000 cada uno. Los gastos semanales por consultor son de $1400 en Arabia Saudita, $1000 en Venezuela y $700 en Indonesia. La tabla siguiente muestra las tarifas de viaje redondo (en dólares) para enviar por avión a los consultores:

Desde	Hacia		
	Arabia Saudita	Venezuela	Indonesia
Estados Unidos	1800	800	2000
Rusia	1600	1800	1700
Nigeria	1300	1200	1500

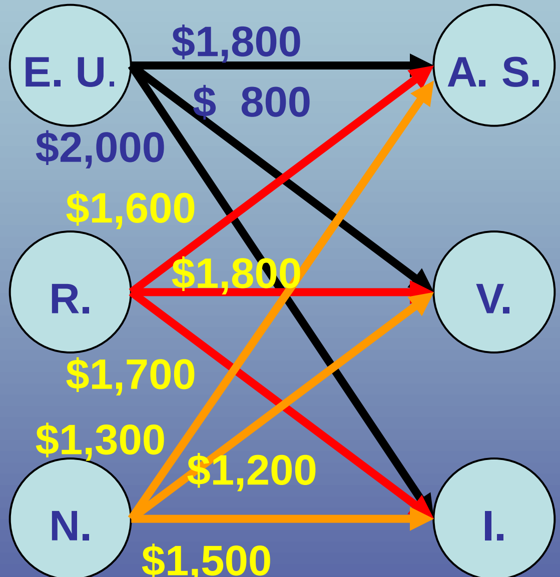
¿Cómo asignaría los consultores para obtener la mejor ganancia?

Formule un modelo de Programación Lineal

Solución:

Resumen de información

Cantidad de consultores ofertados	*País origen*	Viaje redondo en avión	*País destino*	Cantidad de consultores demandados	Tarifa	Gastos semanales
3	E. U.		A. S.	2	$4,200	$1,400
2	R.		V.	2	$4,000	$1,000
1	N.		I.	3	$4,000	$ 700
6				7		



Oferta ≠ Demanda

Formulación:

Variable de decisión:

X_{ij} = Número de consultores en el país i enviados al país j.
i = 1, 2 y 3   y   j = 1, 2 y 3   (EU, R y N) (AS, V e I)

Objetivo:

X_0 = Utilidad

Utilidad = Tarifa – (Gastos + Viaje redondo en avión)

Restricciones:

Oferta { *Estados Unidos*, *Rusia*, *Nigeria* }

Demanda { *Arabia Saudita*, *Venezuela*, *Indonesia* }

Condiciones técnicas.

$X_{ij} \geq 0$

$\forall i = 1, 2, 3$

$\forall j = 1, 2, 3$

Modelo matemático de PL:

Maximizar utilidad

$U_{11} = 4200 - (1400 + 1800)$

$X_0 = 1000X_{11} + 2200X_{12} + 1300X_{13} + 1200X_{21} + 1200X_{22} + 1600X_{23} +$

$1500X_{31} + 1800X_{32} + 1800X_{33}$

$U_{12} = 4000 - (1000 + 800)$

$U_{13} = 4000 - (700 + 2000)$

Sujeto a:

$X_{11} + X_{12} + X_{13}$			$= 3$	*Consultores en EU*
	$X_{21} + X_{22} + X_{23}$		$= 2$	*Consultores en R.*
		$X_{31} + X_{32} + X_{33}$	$= 1$	*Consultores en N.*
X_{11}	$+ X_{21}$	$+ X_{31}$	≤ 2	*Consultores a enviar AS*
X_{12}	$+ X_{22}$	$+ X_{32}$	≤ 2	*Consultores a enviar V*
X_{13}	$+ X_{23}$	$+ X_{33}$	≤ 3	*Consultores a enviar I*

$\forall i = 1, 2, 3$

$X_{ij} \geq 0$

$\forall j = 1, 2, 3$

Construcción de modelos de PL

Ejemplo 4.

El grupo industrial Antar, S. A., analiza la posibilidad de orientar su inversión hacia otros sectores en donde se encuentra operando actualmente. El presupuesto disponible para inversiones de esta naturaleza se ha fijado en 100,000,000 de pesos. Tomando en cuenta las áreas de inversión actuales, el director de finanzas ha recomendado que las nuevas inversiones se realicen en la industria petrolera y siderúrgica, así como en Certificados de la Tesorería General del Estado (CETES). Especialmente, ha identificado siete oportunidades de inversión, así como las tasas de rendimiento esperadas de las mismas. Esta información se expone a continuación.

Opciones de inversión	*Tasa de rendimiento (%)*
Petróleo y derivados, S. A.	*25*
Industria Petrolera, S. A.	*33*
Petróleos del Norte, S. A.	*20*
Aceros Monclova, S. A	*35*
Siderúrgica Nacional, S. A.	*23*
Hierro y Acero, S. A.	*27*
CETES	*30*

El consejo de administración a impuesto, por su parte, la siguiente estrategia de inversión:

- *No se debe destinar más del 50% del total de la inversión a una industria en particular.*
- *La inversión CETES debe equivaler por lo menos al 25% del total invertido en siderúrgica.*
- *La inversión en Industria Petrolera, S. A., la cual resulta ser la de mayor rendimiento, aunque también de mayor riesgo, no puede exceder al 50% del total a invertir en el sector petrolero.*
- *El total a invertir en siderúrgica debe ser por lo menos igual al invertido en petróleo.*

¿Qué recomendaciones (cantidad y opciones de inversión) pueden hacerse con respecto a este portafolio?

Solución:

Variable de decisión:

X_1 = Cantidad ($) a invertir en Petróleo y Derivados, S. A.
X_2 = Cantidad ($) a invertir en Industria Petrolera, S. A.
X_3 = Cantidad ($) a invertir en Petróleos del Norte, S. A.
X_4 = Cantidad ($) a invertir en Aceros de Monclova, S. A.
X_5 = Cantidad ($) a invertir en Siderúrgica Nacional, S. A.
X_6 = Cantidad ($) a invertir en Hierro y Acero, S. A.
X_7 = Cantidad ($) a invertir en CETES, S. A.

Objetivo:

X_0 = Tasa de rendimiento total

Restricciones:

Presupuestal.

Administrativas

- ***Máxima inversión por industrial***
- ***Mínima inversión en CETES***
- ***Máxima inversión en Industria Petrolera, S. A.***
- ***Inversiones en industria siderúrgica y petrolera.***

Condiciones técnicas.

$X_i \geq 0 \qquad \forall\, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

Modelo matemático de PL:

Maximizar

$$X_0 = 0.25X_1 + 0.33X_2 + 0.20X_3 + 0.35X_4 + 0.23X_5 + 0.27X_6 + 0.30X_7$$

Sujeto a:

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 \leq 100{,}000{,}000$ *Presupuesto*

Máxima inversión por industria.

$X_1 + X_2 + X_3 \leq 50{,}000{,}000$ *Petrolera*

$X_4 + X_5 + X_6 \leq 50{,}000{,}000$ *Siderúrgica*

Mínima inversión en CETES

$$X_7 \leq 0.25(X_4 + X_5 + X_6)$$

$$\boxed{- 0.25X_4 - 0.25X_5 - 0.25X_6 + X_7 \leq 0}$$

Máxima inversión en Industria Petrolera

$$X_2 \leq 0.50(X_1 + X_2 + X_3)$$

$$\boxed{-0.50X_1 + 0.50X_2 - 0.50X_3 \leq 0}$$

Inversiones en industria petrolera y siderúrgica

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq X_4 + X_5 + X_6$$

$$\boxed{X_1 + X_2 + X_3 - X_4 - X_5 - X_6 \leq 0}$$

Condiciones técnicas.

$$X_i \geq 0 \qquad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Resumen del modelo:

Maximizar

$$X_0 = 0.25X_1 + 0.33X_2 + 0.20X_3 + 0.35X_4 + 0.23X_5 + 0.27X_6 + 0.30X_7$$

Sujeto a:

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 \leq 100{,}000{,}000$	*Presupuesto*
$X_1 + X_2 + X_3 \leq 50{,}000{,}000$	*Petrolera*
$X_4 + X_5 + X_6 \leq 50{,}000{,}000$	*Siderúrgica*
$-0.25X_4 - 0.25X_5 - 0.25X_6 + X_7 \leq 0$	*Mínima inversión en CETES*
$-0.50X_1 + 0.50X_2 - 0.50X_3 \leq 0$	*Máxima inversión en Industria Petrolera*
$X_1 + X_2 + X_3 - X_4 - X_5 - X_6 \leq 0$	*Inversiones en industria petrolera y siderúrgica*

$$X_i \geq 0 \qquad \forall\, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Construcción de modelos de PL

Ejemplo 5.

La principal sucursal de un Banco requiere de 8 a 15 cajeros de servicio, dependiendo de la hora del día, como se indica en la tabla 1. Los cajeros de tiempo completo trabajan 8 horas consecutivas a $15 la hora, comenzando con a las 8 A. M. Los cajeros de tiempo parcial trabajan 4 horas consecutivas a $8 la hora, comenzando a las 8 A. M., 10 A. M. o 12 del mediodía. Las regulaciones sindicales requieren que a toda hora al menos 60% de los cajeros sean de tiempo completo. Como gerente del personal, haga una recomendación respecto al número de empleados de tiempo completo y de tiempo parcial requeridos a lo largo del día para minimizar el costo diario total.

Requerimientos de cajeros del Banco.

Periodo	Número mínimo de cajeros
8 – 10 A.M.	8
10 – 12 Mediodía	10
12 – 2 P.M.	15
2 – 4 P.M.	12

Construir el modelo de PL correspondiente

Solución:

Variables de decisión:

X_1 = Número de cajeros de tiempo completo a contratar por día.
Y_i = Número de cajeros de tiempo parcial i a contratar por día.
i = 1, 2, 3. (hora de entrada 8, 10 y 12 del mediodía)

Objetivo:

X_0 = Costo total diario

C_t = Salario cajeros TC + salario cajeros TP

Restricciones:

Requerimientos por periodo
- ***8 – 10 am***
- ***10 -12 del mediodía***
- ***12 – 2 pm***
- ***2 – 4 pm***

Política sindical para turno completo

- *8 – 10 am*
- *10 -12 del mediodía*
- *12 – 2 pm*
- *2 – 4 pm*

Condiciones técnicas.

$X_1 \geq 0$

Enteras

$Y_i \geq 0 \qquad \forall i = 1, 2, 3$

Modelo matemático de PL:

Minimizar

$$X_0 = 120X_1 + 32Y_1 + 32Y_2 + 32Y_3$$

$$\left[\frac{\$}{\text{día}}\right] = \left[\frac{\$}{\cancel{\text{cajero}}}\right]\left[\frac{\cancel{\text{cajeros}}}{\text{día}}\right]$$

Sujeto a:

Requerimiento de cajeros por periodo

$X_1 + Y_1 = 8$ *Periodo de 8 – 10 a.m.*

$$\left[\frac{\text{cajeros}}{\text{día TC}}\right]\left[\frac{\text{cajeros}}{\text{día TP}}\right] = \left[\frac{\text{cajeros}}{\text{día}}\right]$$

$X_1 + Y_1 + Y_2 = 10$ *Periodo de 10 – 12 del mediodía*

$X_1 + Y_2 + Y_3 = 15$ *Periodo de 12 – 2 p.m.*

$X_1 + Y_3 = 12$ *Periodo de 12 – 2 p.m.*

Política sindical para turno completo

Y sabemos que una proporción es

$$P(x) = \frac{X_1}{X_1 + X_2 + ... + X_n}$$

$$X_1 + Y_1 = 1$$

$$\frac{X_1}{X_1 + Y_1} \geq 0.60$$

$$X_1 \geq 0.60\,(X_1 + Y_1)$$

$$X_1 \geq 0.60X_1 + 0.60Y_1$$

$$X_1 - 0.60X_1 - 0.60Y_1 \geq 0$$

$$\boxed{0.40X_1 - 0.60Y_1 \geq 0}$$

Periodo de 8 – 10 a.m.

$0.4X_1 - 0.60Y_1 - 0.60Y_2 \geq 0$ Periodo de 10 – 12 del mediodía

$0.4X_1 - 0.60Y_2 - 0.60Y_3 \geq 0$ Periodo de 12 – 2 p.m.

$0.4X_1 - 0.60Y_3 \geq 0$ Periodo de 12 – 2 p.m.

$X_1 \geq 0$

Enteras

$Y_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3$

Resumen del modelo:

Minimizar

$$X_0 = 120X_1 + 32Y_1 + 32Y_2 + 32Y_3$$

Sujeto a:

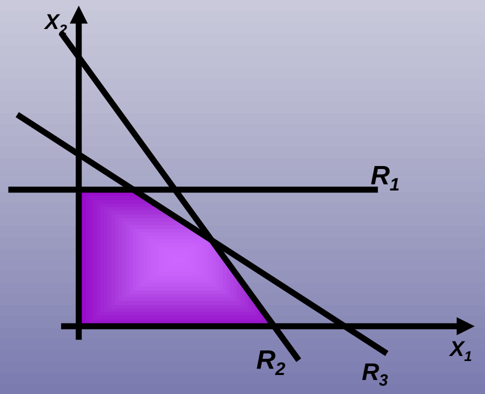
$X_1 + Y_1$	$= 8$	Periodo de 8 – 10 a.m.
$X_1 + Y_1 + Y_2$	$= 10$	Periodo de 10 – 12 del mediodía
$X_1 + Y_2 + Y_3$	$= 15$	Periodo de 12 – 2 p.m.
$X_1 + Y_3$	$= 12$	Periodo de 12 – 2 p.m.
$0.40X_1 - 0.60Y_1$	≥ 0	Periodo de 8 – 10 a.m.
$0.4X_1 - 0.60Y_1 - 0.60Y_2$	≥ 0	Periodo de 10 – 12 del mediodía
$0.4X_1 - 0.60Y_2 - 0.60Y_3$	≥ 0	Periodo de 12 – 2 p.m.
$0.4X_1 - 0.60Y_3$	≥ 0	Periodo de 12 – 2 p.m.

$X_1 \geq 0$

$Y_i \geq 0 \qquad \forall i = 1, 2, 3$

Enteras

Método Gráfico



- Solución óptima única
- Solución óptima múltiple
- Solución ilimitada
- Solución infactible

Ing. José Gabriel González Turrubiates

Ejemplo 1

Burroughs Garment Company fabrica camisas para caballero y blusas para dama para Walmark Discount Stores. Walmark aceptará toda la producción que le proporcione Burroughs. El proceso de producción incluye corte, costura y empacado. Burroughs emplea a 25 trabajadores en el departamento de corte, a 35 en el departamento de costura y a 5 en el departamento de empacado. La fabrica trabaja un turno de 8 horas, sólo 5 días a la semana. La tabla siguiente proporciona los requerimientos de tiempo y las utilidades por unidad para las dos prendas:

Prenda	Minutos por unidad			Utilidad por unidad ($)
	Corte	Costura	Empacado	
Camisas	20	70	12	2.50
Blusas	60	60	4	3.20

1.- Construir el modelo de PL.

2.- Solucionar el modelo con el método gráfico.

Solución:

Variables de decisión:

X_1 = Número de camisas a fabricar por semana.
X_2 = Número de blusas a fabricar por semana.

Objetivo:

X_0 = Utilidad por semana

Restricciones:

Tiempo disponible por departamento a la semana {
- ***Departamento corte***
- ***Departamento costura***
- ***Departamento empaque***

Condiciones técnicas.

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Modelo matemático de PL:

Maximizar

$$X_0 = 2.50X_1 + 3.20X_2$$

$$\left[\frac{\$}{\text{semana}}\right] = \left[\frac{\$}{\cancel{\text{camisa}}}\right]\left[\frac{\cancel{\text{camisas}}}{\text{semana}}\right] + \left[\frac{\$}{\cancel{\text{blusas}}}\right]\left[\frac{\cancel{\text{blusas}}}{\text{semana}}\right]$$

Sujeto a:

Cálculo del tiempo disponible por semana

$$25\left[\cancel{\text{obreros}}\right]\ 8\left[\frac{\text{horas}}{\cancel{\text{día}}\text{-}\cancel{\text{obrero}}}\right]\ 5\left[\frac{\cancel{\text{días}}}{\text{semana}}\right] = 1000\left[\frac{\text{horas}}{\text{semana}}\right]$$

Departamento corte

$$35\left[\cancel{\text{obreros}}\right]\ 8\left[\frac{\text{horas}}{\cancel{\text{día}}\text{-}\cancel{\text{obrero}}}\right]\ 5\left[\frac{\cancel{\text{días}}}{\text{semana}}\right] = 1400\left[\frac{\text{horas}}{\text{semana}}\right]$$

Departamento costura

$$5\left[\cancel{\text{obreros}}\right]\ 8\left[\frac{\text{horas}}{\cancel{\text{día}}\text{-}\cancel{\text{obrero}}}\right]\ 5\left[\frac{\cancel{\text{días}}}{\text{semana}}\right] = 200\left[\frac{\text{horas}}{\text{semana}}\right]$$

Departamento empaque

$20X_1 + 60X_2 \leq (1000)(60)$ **Departamento corte**

$$\left[\frac{\text{minutos}}{\cancel{\text{camisa}}}\right]\left[\frac{\cancel{\text{camisas}}}{\text{semana}}\right] + \left[\frac{\text{minutos}}{\cancel{\text{blusas}}}\right]\left[\frac{\cancel{\text{blusas}}}{\text{semana}}\right] = \left[\frac{\cancel{\text{horas}}}{\text{semana}}\right]\left[\frac{\text{minutos}}{\cancel{\text{hora}}}\right]$$

$70X_1 + 60X_2 \leq (1400)(60)$ **Departamento costura**

$12X_1 + 4X_2 \leq (200)(60)$ **Departamento empaque**

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Resumen del modelo:

Maximizar

$X_0 = 2.50X_1 + 3.20X_2$

Sujeto a:

$20X_1 + 60X_2 \leq 60,000$ *Departamento corte*

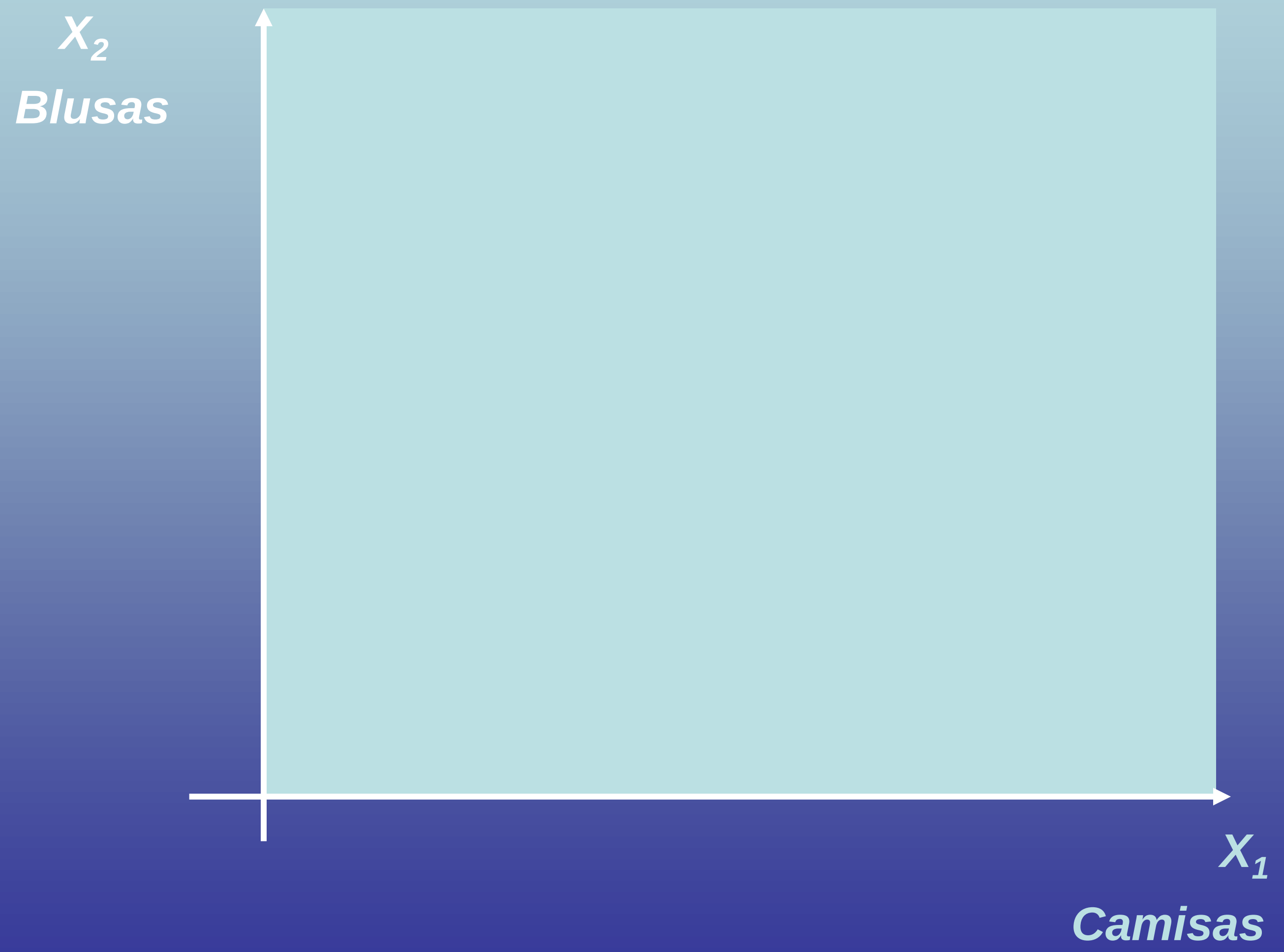
$70X_1 + 60X_2 \leq 84,000$ *Departamento costura*

$12X_1 + 4X_2 \leq 12,000$ *Departamento empaque*

$X_1, X_2 \geq 0$

Método Gráfico:

Paso 1. Representar las variables de decisión en un eje coordenado XY. (Condiciones técnicas)

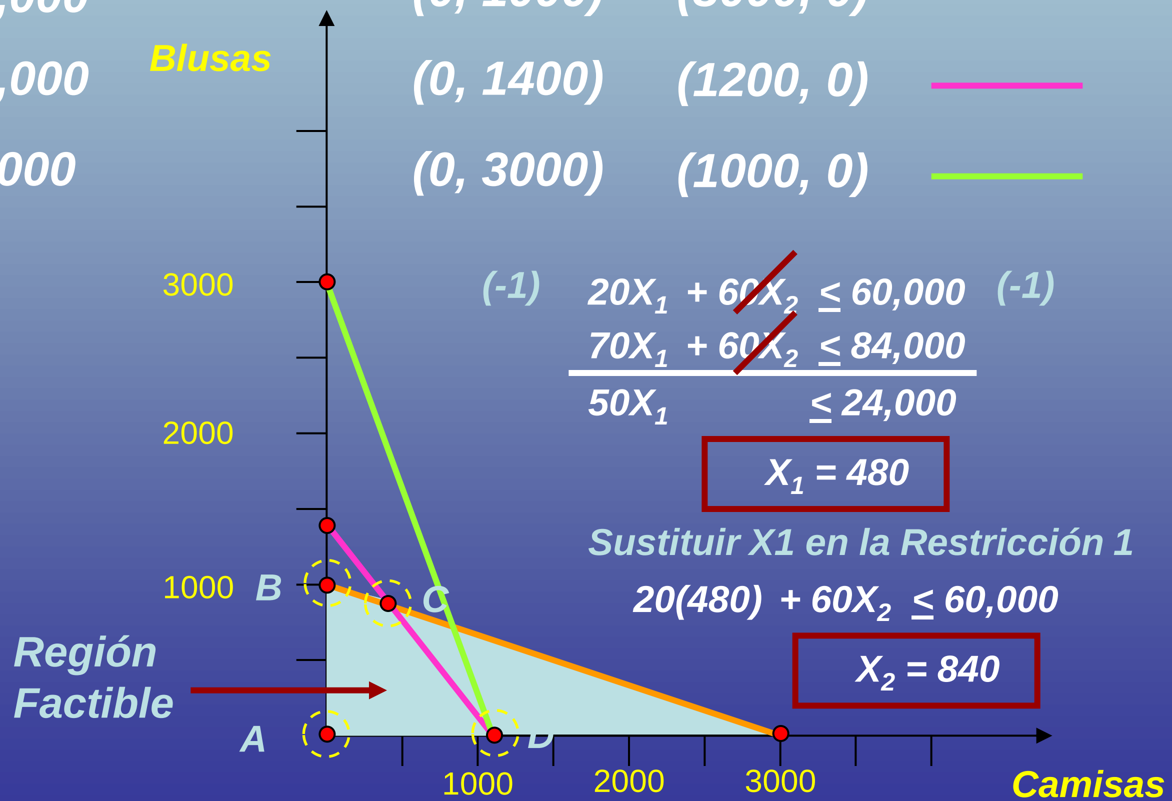


Método Gráfico:

Paso 2. Calcular las coordenadas de intersección los ejes para cada restricción y representarlas en el primer cuadrante.

Intersección con los ejes

	(X_1, X_2)	(X_1, X_2)
$20X_1 + 60X_2 \leq 60,000$	(0, 1000)	(3000, 0)
$70X_1 + 60X_2 \leq 84,000$	(0, 1400)	(1200, 0)
$12X_1 + 4X_2 \leq 12,000$	(0, 3000)	(1000, 0)



(-1) $20X_1 + \cancel{60X_2} \leq 60,000$ (-1)

$70X_1 + \cancel{60X_2} \leq 84,000$

$50X_1 \leq 24,000$

$\boxed{X_1 = 480}$

Sustituir X1 en la Restricción 1

$20(480) + 60X_2 \leq 60,000$

$\boxed{X_2 = 840}$

Método Gráfico:

Paso 3. Calcular las alternativas de solución (cada vértice de la región factible)

	Alternativas			
	A	***B***	***C***	***D***
Utilidad X_0 =	0	\$3,200	\$3,888	\$2,500
Camisas X_1 =	0	0	480	1,000
Blusas X_2 =	0	1,000	840	0

Esta es la solución óptima

Método Gráfico:

Paso 4. Calcular las variables de holgura para cada restricción de la solución óptima.

Primero se transforman a igualdades todas las restricciones.

$$20X_1 + 60X_2 + s_1 = 60{,}000$$

$$70X_1 + 60X_2 + s_2 = 84{,}000$$

$$12X_1 + 4X_2 + s_3 = 12{,}000$$

Segundo se sustituyen los valores obtenidos para X1 y X2 de la solución óptima y se despeja la variable de holgura de cada restricción.

$$20X_1 + 60X_2 + s_1 = 60{,}000$$

Departamento corte

$$20(480) + 60(840) + s_1 = 60{,}000$$

$$9600 + 50400 + s_1 = 60{,}000$$

$$60000 + s_1 = 60{,}000$$

$$\boxed{s_1 = 0}$$

$70X_1 + 60X_2 + s_2 = 84{,}000$ Departamento costura

$70(480) + 60(840) + s_2 = 84{,}000$

$33{,}600 + 50{,}400 + s_2 = 84{,}000$

$84{,}000 + s_2 = 84{,}000$

$$\boxed{s_2 = 0}$$

$12X_1 + 4X_2 + s_3 = 12{,}000$ Departamento empaque

$12(480) + 4(840) + s_3 = 12{,}000$

$5{,}760 + 3{,}360 + s_3 = 12{,}000$

$9{,}120 + s_3 = 12{,}000$

$$\boxed{s_3 = 2{,}880}$$

Interpretación de los resultados del modelo.

Burroughs Garment Company, deberá fabricar 480 camisas y 840 blusas, con este plan de producción logrará obtener una utilidad de $3,888 por semana

Si Burroughs Garment Company lleva acabo este programa de producción consumirá las 1000 horas/semana que dispone en el departamento de corte. Así, como también, consumirá sus 1400 horas/semana del departamento de costura. Sin embargo, en el departamento de empacado de las 200 horas/semana disponibles solo utilizará 152 horas/semana, como consecuencia se tendrá un ocio de 48 horas/semana, lo que equivale a 1.2 obreros ociosos y solo trabajarían 3.8 obreros/semana en promedio.

Ejemplo 2

Solución óptima única

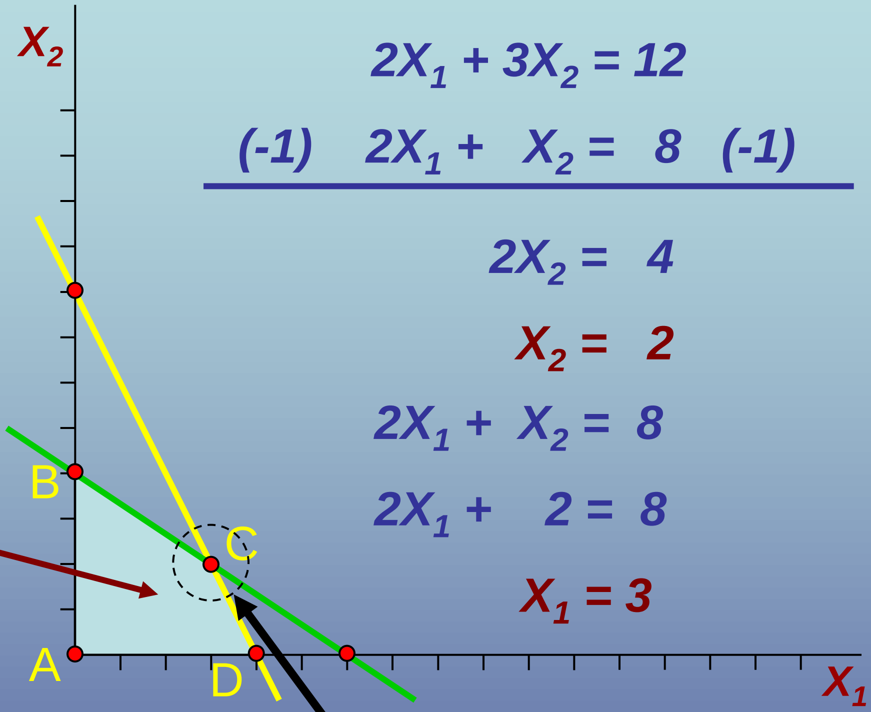
Máx.

$X_0 = 3X_1 + 4X_2$

Sujeto a:

	Coordenadas
$2X_1 + 3X_2 \leq 12$	(0, 4) (6, 0)
$2X_1 + X_2 \leq 8$	(0, 8) (4, 0)

$X_1, X_2 \geq 0$



Región Factible

$$2X_1 + 3X_2 = 12$$
$$(-1) \quad 2X_1 + X_2 = 8 \quad (-1)$$
$$2X_2 = 4$$
$$X_2 = 2$$
$$2X_1 + X_2 = 8$$
$$2X_1 + 2 = 8$$
$$X_1 = 3$$

Evaluación de vértices

	A	B	C	D
$X_0 =$	0	16	17	12
$X_1 =$	0	0	3	4
$X_2 =$	0	4	2	0
$s_1 =$	12	0	0	4
$s_2 =$	8	4	0	0

La solución óptima se presenta en el vértice C

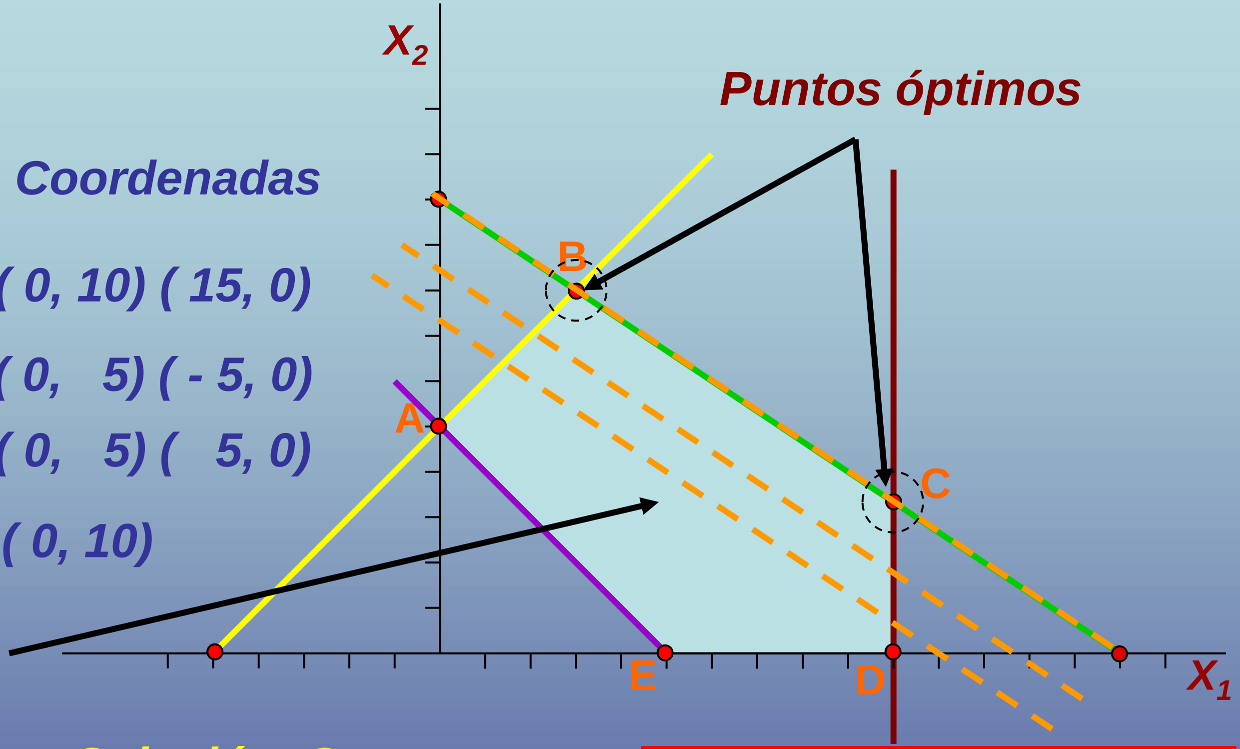
Ejemplo 3 **Solución óptima múltiple ó alternativa**

Máx.

$X_0 = 2X_1 + 3X_2$

Sujeto a:

	Coordenadas
$2X_1 + 3X_2 \leq 30$	(0, 10) (15, 0)
$-X_1 + X_2 \leq 5$	(0, 5) (- 5, 0)
$X_1 + X_2 \geq 5$	(0, 5) (5, 0)
$X_1 \leq 10$	(0, 10)
$X_1, X_2 \geq 0$	



Región factible

Solución B

$X_0 = 30$ $s_2 = 0$

$X_1 = 3$ $S_3 = 6$

$X_2 = 8$ $s_4 = 7$

$s_1 = 0$

Solución C

$X_0 = 30$ $s_2 = 35/3$

$X_1 = 10$ $S_3 = 25/3$

$X_2 = 10/3$ $s_4 = 0$

$s_1 = 0$

La pendiente de la función objetivo es igual a la pendiente de alguna de sus restricciones

$m_{X0} = m_{R1}$

$-2/3 = -2/3$

Ejemplo 4 — *Solución ilimitada ó No Acotada*

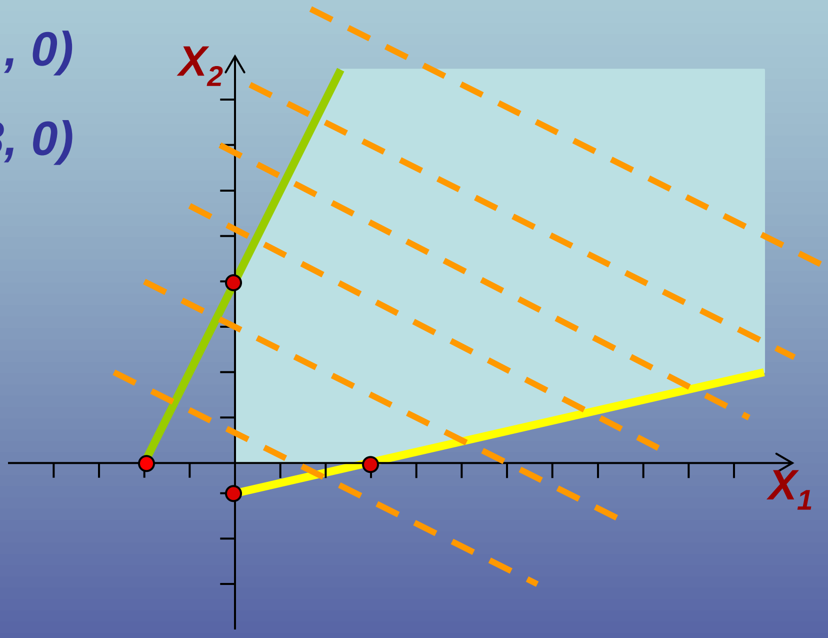
Máx.

$X_0 = X_1 + 2X_2$

Sujeto a:

Coordenadas

$-2X_1 + X_2 \leq 4$		(0, 4) (-2 , 0)
$X_1 - 3X_2 \leq 3$		(0, -1) (3, 0)
$X_1, X_2 \geq 0$		



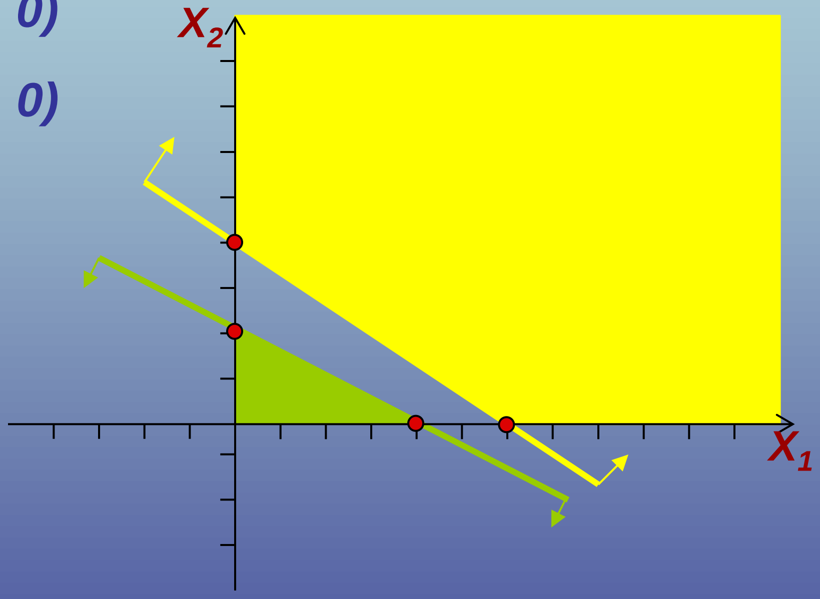
Ejemplo 5 — *Solución Infactible*

Máx.

$X_0 = X_1 + 2X_2$

Sujeto a:

	Coordenadas
$X_1 + 2X_2 \leq 4$	(0, 2) (4, 0)
$2X_1 + 3X_2 \leq 12$	(0, 4) (6, 0)
$X_1, X_2 \geq 0$	

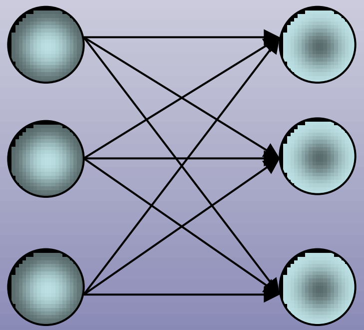


Universidad Autónoma de Tamaulipas

Facultad de Ingeniería "Arturo Narro Siller"

Investigación de Operaciones I

El problema de transporte



- *Introducción*
- *Método Esquina Noroeste*
- *Método de Aproximación de Vogel*

Ing. José Gabriel González Turrubiates

Introducción al problema de transporte

El problema de transporte, este consiste básicamente en transportar mercancías desde varios orígenes (como pueden ser, fábricas) a varios destinos (por ejemplo, almacenes y bodegas). Sin embargo, el modelo se pude aplicar también en situaciones prácticas como lo son el control de inventarios, la programación del empleo y la asignación de personal entre otros.

En sí el problema de transporte, es un programa lineal que puede ser resuelto a través del método símplex. Sin embargo, por la naturaleza especial de su estructura es posible el desarrollo de un procedimiento de solución, denominado técnica de transporte, el cual es más eficiente en términos de calculo.

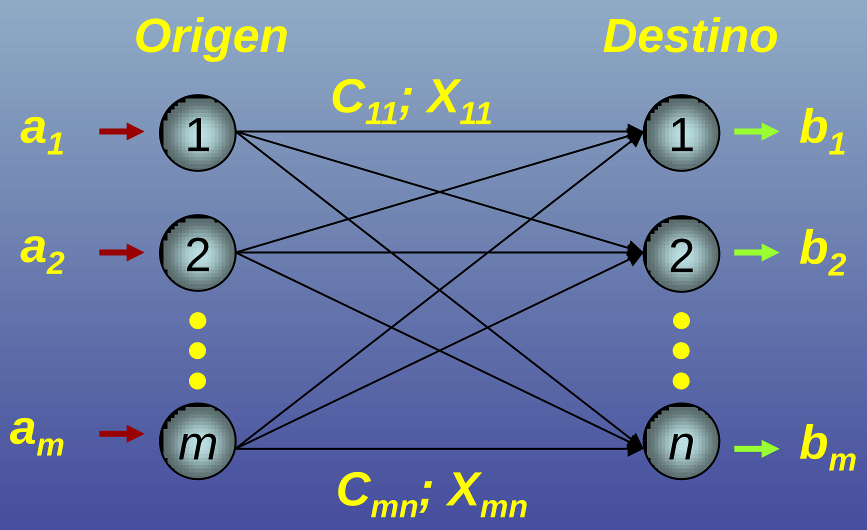
Definición y aplicación del modelo de transporte

El modelo de transporte busca determinar un curso de acción de transporte de una mercancía desde varias fuentes a varios destinos. Entre los datos que requiere el modelo están:

1. ***Nivel de oferta en cada fuente y la cantidad de demanda en cada destino.***
2. ***El costo de transporte unitario de la mercancía de cada origen a cada destino.***

Como sólo hay un tipo de mercancía, un destino puede recibir su demanda de una o más fuentes. El modelo tiene como objetivo determinar la cantidad que se enviará de cada origen a cada destino, de tal forma que minimice el costo de transporte total.

El modelo de transporte se puede representar como una red con m orígenes y n destinos. Un origen o un destino se representa por un nodo. El arco que une una fuente con un destino representa la ruta por la cual se transporta la mercancía. La cantidad de la oferta en el origen i a_i y la demanda en el destino j es b_j. El costo de transporte unitario entre el origen i y el destino j es C_{ij}.



Modelo general de PL para el problema de transporte

$$Minimizar$$

$$X_0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

$$Sujeto\ \ a:$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq b_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq a_i$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad \forall \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\forall \quad j = 1,2,\ldots,n$$

Este modelo implica que el total de la oferta debe ser cuando menos igual a la cantidad demandada.

Ejemplo 1

Empacadora la Moderna, S.A. de C.V., tiene actualmente tres plantas, distribuidas en Tamaulipas. Cada planta produce latas de chiles en escabeche, que son empacadas en cajas de cien latas de 102 g. Actualmente cuenta con tres centros de distribución para la zona norte de la república mexicana. Los costos de transporte por cada camión desde las plantas hasta los centros de distribución, se muestran en la tabla.

Planta	Centro de distribución		
	CD1	CD2	CD3
P1	$1250	$1380	$1000
P2	950	1230	840
P3	1520	1420	1360

Cada centro de distribución requiere 15, 20 y 18 camiones semanalmente. Por otro lado, se sabe que cada planta tiene disponibles 12, 25 y 16 respectivamente.

Se pide:

1. ***Construya el modelo de PL.***
2. ***Resuelva usando el paquete WinQSB. Anotando el número de iteraciones con que fue resuelto.***

Tabla Símplex de transporte

Variables de decisión

Coeficientes de costos

Suministro

1250 X_{11}	1380 X_{12}	1000 X_{13}	12
950 X_{21}	1230 X_{21}	840 X_{22}	25
1520 X_{31}	1420 X_{32}	1360 X_{33}	16
15	20	18	

Demanda

Método de Esquina Noroeste

Celdas básicas

1250 12	1380	1000	12
950 3	1230 20	840 2	25
1520	1420	1360 16	16
15	20	18	

Celdas No Básicas

X_0 = (12)(1250)+(3)(950)+(20)(1230)+(2)(840)+(16)(1360)

X_0 = 15000 + 2850 + 24600 + 1680 + 21760

X_0 = $65,890

$u_1 + v_1 = 1250$

$u_2 + v_1 = 950$

$u_2 + v_2 = 1230$

$u_2 + v_3 = 840$

$u_3 + v_3 = 840$

	$u_1 = 0$	$u_2 = 1530$	$u_3 = 1140$	
$v_1 = 1250$	1250 12	1380 -1400	1000 -1390	12
$v_2 = -300$	950 3	1230 20	840 2	25
$v_3 = 220$	1520 1300	1420 -330	1360 16	16
	15	20	18	

Cálculo de variables no básicas

$C_{ij}^* = C_{ij} - (u_i + v_j)$

$C_{12}^* = 1380 - (1250 + 1530)$

$C_{12}^* = -1400$

$C_{13}^* = 1000 - (1250 + 1140)$

$C_{12}^* = -1390$

Método de cruce de arroyo

	$u_1 = 0$	$u_2 = 1530$	$u_3 = 1140$	
$v_1 = 1250$	(-) 1250 12	(+) 1380 -1400	1000 -1390	12
$v_2 = -300$	(+) 950 3	(-) 1230 20	840 2	25
$v_3 = 220$	1520 1300	1420 -330	1360 16	16
	15	20	18	

Iteración No. 2

	$u_1 = 0$	$u_2 =$	$u_3 =$	
$v_1 =$	1250 -	1380 12	1000 -	12
$v_2 =$	950 15	1230 8	840 2	25
$v_3 =$	1520 0	1420 -	1360 16	16
	15	20	18	

$X_0 = (12)(1250)+(3)(950)+(20)(1230)+(2)(840)+(16)(1360)$

$X_0 = 15000 + 2850 + 24600 + 1680 + 21760$

$X_0 = \$65,890$