GUIA PROGRAMACION LINEAL - DUAL

2 0 2 4

INGENIERIA EN SISTEMAS DE INFORMACION

UTN – F.R. Resistencia

Asignatura: Investigación Operativa

Nivel: Cuarto año – Primer cuatrimestre

Docente/s:

Comisión unica

Patricia Correa

Jorge Ariel Vera

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RESISTENCIA

www.frre.utn.edu.ar

Tel 0362-4432928

French 414 (3500) Resistencia – Chaco

-

PROBLEMA DUAL

1. Planteo del dual de un problema.
2. Significado de todas las variables del problema dual.
3. Resolución del problema dual.
4. Correspondencia entre la tabla óptima del directo y la tabla óptima del dual.
5. Construcción de la tabla óptima del dual, a partir de la tabla óptima del directo.

Ejercicio 1:
Plantear el problema dual correspondiente

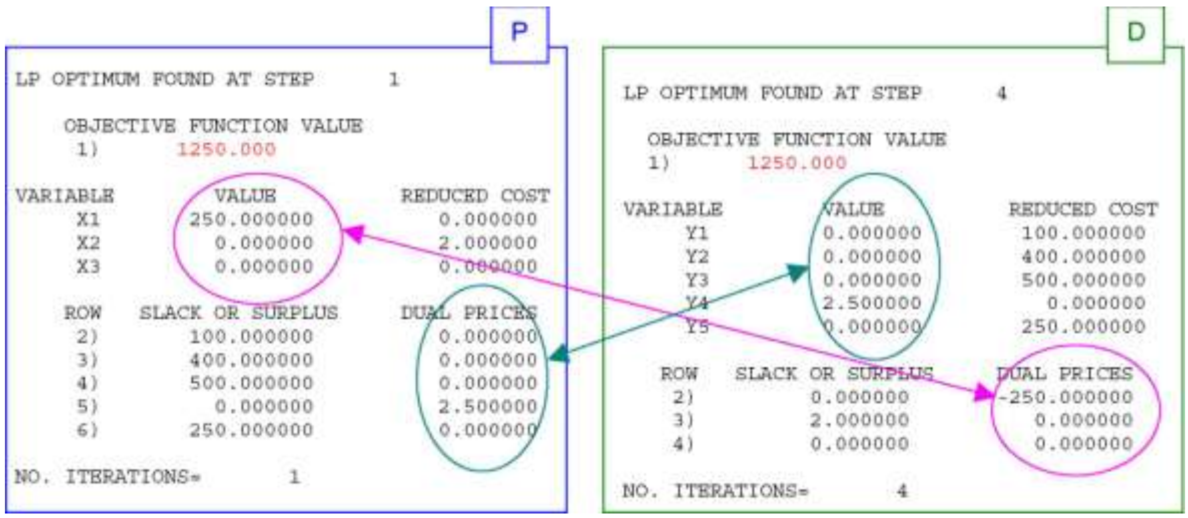
$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad\; & \leq 3 \\ x_2 & \leq 6 \\ 6x_1 + 6x_2 & \leq 36 \end{aligned}$$

si tuviere

$6x_1 + 6x_2 \geq 36$ multiplicar (-1) $-6x_1 - 6x_2 \leq 36$

$z = 8x_1 + 3x_2 \rightarrow MAX$

Primal	Dual
• Real X1	y1 real
• Real X2	y2 real
• Slack X3	y3 real
• Slack X4	y4 slack
• Slack X5	y5 slack



Poiasina:
se lleva al modelo ideal de max o min

$x1$	$\leq$	3	y1
$x2$	$\leq$	6	y2
$6x1 + 6x2$	$\leq$	36	y3

z = 8 x1 + 3 x2 --- > MAX

Dual

G = 3 y1 + 6 y2 + 36 y3--- > Min

y1 + 0y2 +6y3 >= 8
0y1+y2 + 6y3 >= 3

Por Taha
ampliar modelo

x1 +x3	=	3	y1
x2 + x4	=	6	y2
6x1 + 6x2 + x5	=	36	y3

Xi >= 0

z = 8 x1 + 3 x2 + 0 x3 + 0 x4 + 0x5--- > MAX

Ampliar el modelo

G = 3 y1 + 6 y2 + 36 y3--- > Min

y1 + 0y2 +6y3 >= 8
0y1+y2 + 6y3 >= 3

y1 >= 0
y2 >=0
y3 >= 0

yi son irrestrictos

me queda por intersección que yi >= 0

1.1.)
$z = 5\,x_1 + 12\,x_2 + 4\,x_3$--- > MAX

$x_1 + 2\,x_2 + x_3$	$\leq$	10
$2x_1 - x_2 + 3x_3$	$=$	8
x_1, x_2, x_3	$\geq$	0

1.2.)
$z = 15\,x_1 + 12\,x_2$ --- > MIN

$x_1 + 2\,x_2$	$\geq$	3
$2x_1 - 4x_2$	$\leq$	5
x_1, x_2	$\geq$	0

1.3.)
$z = 5\,x_1 + 6\,x_2$ --- > MAX

$x_1 + 2\,x_2$	$=$	5
$-x_1 + 5x_2$	$\geq$	3
$4x_1 + 7x_2$	$\leq$	8
X_1, x_2	$\geq$	0

1.4.)
$z = 6\,x_1 + 3\,x_2 + x_3$--- > MAX

$6x_1 - 3\,x_2 + x_3$	$\geq$	2
$3x_1 + 4x_2 + x_3$	$\geq$	5
x_1, x_2, x_3	$\geq$	0

1.5.)
$z = 15\,x_1 + 12\,x_2$ --- > MAX

$x_1 + 2\,x_2$	$\geq$	3
$2x_1 - 4x_2$	$\leq$	5
$3x_1 + x_2$	$=$	4
x_1, x_2	$\geq$	0

1.6.)
$z = 6\,x_1 + 3\,x_2 + x_3$--- > MIN

$6x_1 - 3x_2 + x_3$	$\geq$	2
$3x_1 + 4x_2 + x_3$	$\geq$	5
x_1, x_2, x_3	$\geq$	0

Ej1.1:

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$	Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4$	
sujeta a	sujeta a	
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$	$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$	y_1
$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$	$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8$	y_2
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Problema dual

$$\text{Minimizar } w = 10y_1 + 8y_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geq 5 \\ 2y_1 - y_2 &\geq 12 \\ y_1 + 3y_2 &\geq 4 \\ \left.\begin{aligned} y_1 + 0y_2 &\geq 0 \\ y_1, y_2 \text{ sin restricción} \end{aligned}\right\} &\Rightarrow (y_1 \geq 0,\ y_2 \text{ sin restricción}) \end{aligned}$$

Ej1.2:

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2$	Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4$	
sujeta a	sujeta a	
$x_1 + 2x_2 \geq 3$	$x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 = 3$	y_1
$2x_1 - 4x_2 \leq 5$	$2x_1 - 4x_2 + 0x_3 + x_4 = 5$	y_2
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Problema dual

$$\text{Maximizar } w = 3y_1 + 5y_2$$

sujeta a

$$y_1 + 2y_2 \leq 15$$
$$2y_1 - 4y_2 \leq 12$$
$$\left.\begin{array}{r} -y_1 \qquad \leq 0 \\ y_2 \leq 0 \\ y_1,\ y_2 \text{ sin restricción} \end{array}\right\} \Rightarrow (y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0)$$

Ej1.3:

Primal

Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$
sujeta a

$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$-x_1 + 5x_2 \geq 3$$
$$4x_1 + 7x_2 \leq 8$$

Xi ≥ 0

Problema dual

$$\text{Minimizar } z = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$$

sujeta a

$$\left.\begin{array}{r} y_1 - \quad y_2 + 4y_3 \geq \quad 5 \\ -y_1 + \quad y_2 - 4y_3 \geq -5 \end{array}\right\} \Rightarrow (y_1 - y_2 + 4y_3 = 5)$$
$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6$$
$$\left.\begin{array}{r} -y_2 \qquad \geq 0 \\ y_3 \quad \geq 0 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \text{ sin restricción} \end{array}\right\} \Rightarrow (y_1 \text{ sin restricción},\ y_2 \leq 0,\ y_3 \geq 0)$$

Ejercicio 2.
Plantear el Dual y determinar la solución dual óptimo por los dos métodos:

Método 1:
(Valores óptimos vbles. duales) = (vector renglón coeficientes obj. Original de las vbles básicas óptimas primales) x (Inversa primal óptima)

Método 2:
(Coef. Z-primal óptimo "Costo reducido" de cualquier vble xj) = (Lado izquierdo de la r j-esima restricc. Dual) - (Lado derecho de la j-esima restricc. Dual)

2.1) el ejercicio 1.1

$z = 5\,x_1 + 12\,x_2 + 4\,x_3$--- > MAX

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + x_3 &\le 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Primal	Dual
Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - MR$ sujeta a $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$; $2x_1 - x_2 + 3x_3 + R = 8$; $x_1, x_2, x_3, x_4, R \ge 0$	Minimizar $w = 10y_1 + 8y_2$ sujeta a $y_1 + 2y_2 \ge 5$; $2y_1 - y_2 \ge 12$; $y_1 + 3y_2 \ge 4$; $y_1 \ge 0$; $y_2 \ge -M (\Rightarrow y_2$ no restringida)

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	R	*Solución*
z	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M$	$\frac{274}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{26}{5}$

$$\begin{aligned}(\text{Coeficientes objetivo originales}) &= (\text{Coeficiente de } x_2, \text{ coeficiente de } x_1) \\ &= (12, 5)\end{aligned}$$

Así, los valores duales óptimos se calculan como sigue:

$$\begin{aligned}(y_1, y_2) &= \begin{pmatrix}\text{Coeficientes objetivo} \\ \text{originales de } x_2, x_1\end{pmatrix} \times (\text{Inversa óptima}) \\ &= (12, 5)\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix} \\ &= \left(\tfrac{29}{5}, -\tfrac{2}{5}\right)\end{aligned}$$

Variable de inicio x_4: $y_1 \ge 0$

Variable de inicio R: $y_2 \ge -M$

También, de acuerdo con la tabla óptima (tabla 4.3),

$$\text{Coeficiente } z \text{ de } x_4 = \frac{29}{5}$$

$$\text{Coeficiente } z \text{ de } R = -\frac{2}{5} + M$$

Entonces, de acuerdo con el método 2,

$$\frac{29}{5} = y_1 - 0 \quad \Rightarrow y_1 = \frac{29}{5}$$

$$-\frac{2}{5} + M = y_2 - (-M) \Rightarrow y_2 = -\frac{2}{5}$$

2.5) Se tiene el siguiente modelo de programación lineal:

$z = 5\ x_1 + 2\ x_2 + 3x_3$--- > MAX

$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \quad = \quad 30$
$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \quad \leq \quad 40$
$x_1, x_2, x_3 \quad \geq \quad 0$

La solución óptima produce la siguiente ecuación objetivo

$Z + 0\ x_1 + 23\ x_2 + 7x_3 + (5+M)\ x4 + 0X_5 = 150$

Donde las variables básicas de inicio son x_4 artificial y x_5 de holgura. Escriba el problema dual asociado y determine su solución óptima a partir de la ecuación de z óptima (Método 2).

Taha

Ejercicio 3.
Obtener directamente la tabla óptima del dual de:

3.1.)

x_2	≤ 3	y1
$4\ x_1 + 6\ x_2$	≤ 24	y2
$4\ x_1 - 6\ x_2$	≤ 12	y3

$z = 5\ x_1 + 5\ x_2$ --- > MAX

Dual
G = 3 y1 + 24 y2 + 12 y3 --> min

0y1 + 4 y2 + 4y3 >= 5
y1 + 6 y2 - 6 y3 >= 5

			x1	x2	x3	x4	x5
			5	5	0	0	0
C	X	B	A1	A2	A3	A4	A5
0	X_3	2	0	0	1	-0,08	0,08
5	X_2	1	0	1	0	0,08	-0,08
5	X_1	4,5	1	0	0	0,125	0,125
	Z(i)	27,5	0	0	0	1.041	0.208
			y4	y5	y1	y2	y3

			y1	y2	y3	y4	y5
			3	24	12	0	0
C	y	B	A1	A2	A3	A4	A5
24	Y2	1,041	0,08	1	0	-0,125	-0,08
12	Y3	0,208	-0,08	0	1	-0,125	0,08
	Z(i)	27,5	-2	0	0	-4,5	-1
			x3	x4	x5	x1	x2

--- valores transpuestos y cambiados de signo

3.2.)

$4 x_1 + 2 x_2$	≤ 8	y1
x_2	≤ 1	y2
$-2 x_1 + 2 x_2$	≤ 4	y3

$z = 3 x_1 + 4 x_2$ --- > MAX

Pasaje dual directo

G = 8y1 + 1y2 + 4y3 --> min

4y1 + 0y2 - 2y3 >= 3
2y1 + y2 + 2y3 >= 4

Optimo primal

			x1	x2	x3	x4	x5
			3	4	0	0	0
C	X	B	A1	A2	A3	A4	A5
3	X_1	1,5	1	0	0,25	-0,5	0
4	X_2	1	0	1	0	1	0
0	X_5	5	0	0	0,50	-3	1
	C(i)-Z(i)	8,5	0	0	0,75	2,5	0
			y4	y5	y1	y2	y3

Optimo Dual directo

			y1	y2	y3	y4	y5
			8	1	4	0	0
C	y	B	A1	A2	A3	A4	A5
8	Y1	0,75	1	0	-0,5	-0,25	0
1	Y2	2,5	0	1	3	0,5	-1
	C(i)-Z(i)	8,5	0	0	-5	-1,5	-1
			x3	x4	x5	x1	x2

Matriz inversa optima primal

0,25	-0,5	0
0	1	0
0,50	-3	1

Matriz inversa optima dual

-0,25	0
0,5	-1

3.4) Generar la tabla optima del simplex de los ejercicios anteriores a través de los cálculos de columnas de restricción y cálculo de renglón objetivo z.

Cálculo columna restricción (en cualquier iteración simplex):

(Columna de restricc. = (inversa en la iteración i) x (Columna original de restricción)
En iteración i)

Cálculo del renglón objetivo z (en cualquier iteración simplex):

(Coef. Vble xj en la ecuación = (Lado izquierdo de la restricc. - (Lado derecho de la restricc.
Primal de z(costo reducido)) Dual correspondiente) Dual correspondiente)

$z = 5\,x_1 + 12\,x_2 + 4\,x_3$--- > MAX

$$\begin{array}{lcl} x_1 + 2\,x_2 + x_3 & \leq & 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 8 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Columna de } x_1 \text{ en} \\ \text{iteración óptima}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Inversa en la} \\ \text{iteración óptima}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Columna de} \\ x_1 \text{ original}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 \\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$$

De manera parecida se calculan las siguientes columnas de restricción:

$$\begin{pmatrix}\text{Columna de } x_2 \text{ en} \\ \text{la iteración óptima}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2 \\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Columna de } x_3 \text{ en} \\ \text{la iteración óptima}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 \\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{5} \\ \frac{7}{5}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Columna de } x_4 \text{ en} \\ \text{la iteración óptima}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Column de } R \text{ en} \\ \text{la iteración óptima}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Columna de lado} \\ \text{derecho en la} \\ \text{iteración óptima}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2 \\ x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}10 \\ 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{12}{5} \\ \frac{26}{5}\end{pmatrix}$$

Calculo renglón objetivo y1, y2 se calcularon con los dos métodos anteriores (ej 2)

$$\text{Coeficiente de } x_1 \text{ en } z = y_1 + 2y_2 - 5 = \tfrac{29}{5} + 2 \times -\tfrac{2}{5} - 5 = 0$$

$$\text{Coeficiente de } x_2 \text{ en } z = 2y_1 - y_2 - 12 = 2 \times \tfrac{29}{5} - (-\tfrac{2}{5}) - 12 = 0$$

$$\text{Coeficiente de } x_3 \text{ en } z = y_1 + 3y_2 - 4 = \tfrac{29}{5} + 3 \times -\tfrac{2}{5} - 4 = \tfrac{3}{5}$$

$$\text{Coeficiente de } x_4 \text{ en } z = y_1 - 0 = \tfrac{29}{5} - 0 = \tfrac{29}{5}$$

$$\text{Coeficiente de } R \text{ en } z = y_2 - (-M) = -\tfrac{2}{5} - (-M) = -\tfrac{2}{5} + M$$

Ejercicio 4.

Las siguientes son tablas: **Primera y Óptima,** de un problema de P.L., resuelto por el **Método Simplex (primal).** Se pide:

4.1.) Plantear el problema directo y el dual en forma completa.
4.2.) Hallar la matriz inversa óptima del directo.
4.3.) Escribir en forma completa la tabla óptima del dual.
4.4.) Hallar la matriz inversa óptima del dual.

	x1	x2	x3	x4	x5
	1	1	0	0	0
B	A1	A2	A3	A4	A5
9 24 18	3 4 2	1 3 3	-1 0 0	0 1 0	0 0 1

3 4 4	1 0 0	0 0 1	0 1 0	1/2 7/6 -1/3	-1/2 -5/6 2/3
	0	0	0	1/6	1/6
	y4	y5	y1	y2	y3

4.1

llevar a la forma ideal primero

$z = x_1 + x_2$ --- > MAX

3 x1 + x2 >= 9 --> mult (-1) -3 x1 - x2 <= -9
4 x1 + 3 x2 <= 24
2x1 + 3x2 <= 18

reescribo

-3 x1 - x2 <= -9 y1
4 x1 + 3 x2 <= 24 y2
2x1 + 3x2 <= 18 y3

$z = x_1 + x_2$ --- > MAX

paso dual directo

G = -9 y1 + 24 y2 + 18 y3 --> min

-3y1 + 4y2 + 2y3 >= 1
-y1 + 3 y2 + 3y3 >= 1

4.2

0 1 0	1/2 7/6 -1/3	-1/2 -5/6 2/3

4.3

X1 X3 X2	3 4 4	1 0 0	0 0 1	0 1 0	1/2 7/6 -1/3	-1/2 -5/6 2/3
		0	0	0	1/6	1/6
		y4	y5	y1	y2	y3

		y1	y2	y3	y4	y5
		-9	24	18	0	0
Y2	1/6	-7/6	1	0	-1/2	1/3
Y3	1/6	5/6	0	1	1/2	-2/3
		-4	0	0	-3	-4
		x3	x4	x5	x1	x2

4.4

-1/2	1/3
1/2	-2/3

Ejercicio 5.
Dado el siguiente problema de P.L., se pide:

5.1.) Plantear el dual y representarlo gráficamente.
5.2.) Obtener la tabla óptima del problema dual.
5.3.) Señalar la Matriz Inversa Optima del dual.

$z = 3X_1 + X_2 \rightarrow \text{Max}$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$
$$-X_1 + X_2 \leq 1$$
$$X_i \geq 0$$

Ejercicio 6.

La siguiente, es la tabla óptima de un problema de P.L., resuelto por el **Método Simplex**

$z = 5 x_1 + 12 x_2 + 4 x_3$--- > MAX

$x_1 + 2 x_2 + x_3 \leq b1$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 = b2$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

			5	12	4	0	0
C	X	B	A1	A2	A3	A4	A5
12 5	X_2 X_1	12/5 26/5	0 1	1 0	a b	2/5 1/5	-1/5 2/5
	Z	274/5	0	0	c	29/5	-2/5+M

Se pide:

6.1.) Obtener los valores b1 y b2 del lado derecho.
6.2.) Obtener los valores a, b, c
6.3.) Obtener la solución dual óptima.

6.1 Obtener los valores b1 y b2 del lado derecho. (b1 = 10 y b2 = 8) se obtiene multiplicando la matriz inversa optima por los valores óptimos de la columna B

6.2 matriz inversa optima por columna de coeficientes originales de x3 (1, 3)

2/5 1/5	-1/5 2/5

			5	12	4	0	0
C	X	B	A1	A2	A3	A4	A5
12 5	X_2 X_1	12/5 26/5	0 1	1 0	-1/5 7/5	2/5 1/5	-1/5 2/5
	Z	274/5	0	0	3/5	29/5	-2/5

ANALISIS POSOPTIMAL

Cambios que afectan la factibilidad

1. Cambia el lado derecho de las restricciones
2. Se agrega al modelo una nueva restricción

Nota: En ambos casos se tiene no factibilidad cuando al menos un elemento del lado derecho en la tabla óptima se hace negativo; esto es una o más variables básicas actuales se vuelven negativas

Condición resultante de los cambios	Acción acordada
La solución actual queda óptima y factible	No es necesario acción alguna
La solución actual se vuelve no factible	Usar simplex dual para recuperar la factibilidad
La solución actual se vuelve no óptima	Usar simplex primal para recuperar la optimalidad
La solución actual se vuelve no óptima y no factible al mismo tiempo	Usar simples generalizado para obtener una nueva solución

Ejercicio 1.

En el problema planteado en el **ejercicio 5**.: se pide obtener las tablas óptimas para los siguientes casos:

$z = 3X_1 + X_2 \rightarrow \text{Max}$

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leq 4 \\ -X_1 + X_2 &\leq 1 \\ X_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Tabla optima

Tabla 2			3	1	0	0
Base	Cb	Solucion	x1	x2	x3	x4
x1	3	4	1	2	1	0
x4	0	5	0	3	1	1
Z		12	0	5	3	0

1.1.) Agregado de una nueva variable: x_5, cuyos insumos son: (1, 1) y su beneficio es: 5 $/unidad.

Agrego xn consume 1 y 1 en cada restricción y la utilidad es 5 $

$z = 3X_1 + X_2 + 5\,x_n \rightarrow \text{Max}$

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + x_n &\leq 4 \\ -X_1 + X_2 + x_n &\leq 1 \end{aligned}$$

Matriz inversa optima primal x columna nueva

$$\begin{array}{cc|c} & & 1 \\ & & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}$$

Tabla 2			3	1	0	0	5
Base	Cb	Solución	x1	x2	x3	x4	XN
x1	3	4	1	2	1	0	1
x4	0	5	0	3	1	1	2
Z		12	0	5	3	0	-2

Actualizo z en columna nueva
3 * 1 + 0*2 - 5 = -2

No es tabla optima. No cumple condición de parada. Hay que iterar el simplex.
Entra xn sale p4

Tabla optima nueva

Tabla 2			3	1	0	0	5
Base	Cb	Solución	x1	x2	x3	x4	XN
x1	3	3/2	1	1/2	1/2	-1/2	1
Xn	5	5/2	0	3/2	1/2	1/2	2
Z		17	0	5	3	0	0

1.2.) Ídem: 1.1.), pero con beneficio de 2 $/unidad.

Tabla 2			3	1	0	0	2
Base	Cb	Solución	x1	x2	x3	x4	XN
x1	3	4	1	2	1	0	1
x4	0	5	0	3	1	1	2
Z		12	0	5	3	0	1

Actualizo z en columna nueva
3 * 1 + 0*2 - 2 = 1
Optimo no varía sigue siendo optima la tabla

1.3.) Agregado de la restricción: $4X_1 + 3X_2 \geq 12$.

Multiplico por -1 para llevar al caso ideal de todas las Ri de menor igual (caso max)

$4X_1 + 3X_2 \geq 12 * (-1)$

$z = 3X_1 + X_2 \rightarrow Max$

$X_1 + 2X_2 \leq 4$ y1
$-X_1 + X_2 \leq 1$ y2

$-4X_1 - 3X_2 \leq -12$ y3

G = 4 y1 +y2 - 12 yn→ Min

y1 -y2 -4yn ≥ 3
2y1 +y2 -3yn ≥ 1

Se utiliza el mismo mecanismo de multiplicar la matriz inversa optima por la nueva columna pero esto ocurre en el Dual; por lo cual debemos pasar la tabla optima del primal al dual.

			X1	X2	X3	X4
Tabla 2			3	1	0	0
Base	**Cb**	**Solución**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
x1	3	4	1	2	1	0
x4	0	5	0	3	1	1
Z		12	0	5	3	0
			Y3	Y4	Y1	Y2

G = 4 y1 +y2 - 12 yn→ Min

y1 -y2 -4yn ≥ 3
2y1 +y2 -3yn ≥ 1

			Y1	Y2	Y3	Y4
Dual			4	1	0	0
Base	**Cb**	**Solución**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
Y4	0	5	0	-3	-2	1
Y1	4	3	1	-1	-1	0
Z		12	0	-5	-4	0
			X3	X4	X1	X2

La columna yn la completamos haciendo matriz inversa optima del dual por los valores de la nueva columna del pasaje inecuaciones primal al dual.

			Y1	Y2	Y3	Y4	yn
Dual			4	1	0	0	-12
Base	**Cb**	**Solucion**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**Yn**
Y4	0	5	0	-3	-2	1	
Y1	4	3	1	-1	-1	0	
Z		12	0	-5	-4	0	
			X3	X4	X1	X2	Xn

Nota: como en el dual se trata de minimizar se tiene en cuenta las Ri de ≥ y por ende el uso de variables artificiales, por lo cual se niega la matriz inversa óptima

$$\begin{matrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \quad X\ (-1)$$

$$\begin{array}{cc|c} & & -4 \\ & & -3 \\ \hline 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -4 \end{array}$$

			Y1	Y2	Y3	Y4	yn
Dual			4	1	0	0	-12
Base	**Cb**	**Solucion**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**Yn**
Y4	0	5	0	-3	-2	1	-5
Y1	4	3	1	-1	-1	0	-4
Z		12	0	-5	-4	0	-4
			X3	X4	X1	X2	Xn

Actualizo z en columna nueva
0 * -5 + 4*-4 - (-12) = -4

La solución no cambia (cumple condición de parada)--> sigue siendo optima

1.4.) Cambio de: términos independientes por: (4, 3).
Se cambian las disponibilidades (bi) lado derecho de las restricciones

Se multiplica la matriz inversa optima del primal por los nuevos valores de bi

$$z = 3X_1 + X_2 \rightarrow \text{Max}$$

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leq 4 \\ -X_1 + X_2 &\leq 1 \\ X_i &\geq 0 \end{aligned}$$

original

Tabla 2			3	1	0	0
Base	**Cb**	**Solución**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
P1	3	4	1	2	1	0
P4	0	5	0	3	1	1
Z		12	0	5	3	0

$$z = 3X_1 + X_2 \rightarrow \text{Max}$$

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leq 4 \\ -X_1 + X_2 &\leq 3 \\ X_i &\geq 0 \end{aligned}$$

		4
		3
1	0	4
1	1	7

Tabla 2			3	1	0	0
Base	**Cb**	**Solución**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
P1	3	4	1	2	1	0
P4	0	7	0	3	1	1
Z		12	0	5	3	0

No cambia la solución

1.5.) Cambio del funcional por: $z = X_1 + 5X_2$ (Max)

$$z = 3X_1 + 1X_2 \rightarrow \text{Max}$$

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leq 4 \\ -X_1 + X_2 &\leq 1 \\ X_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Tabla 2			1	5	0	0
Base	**Cb**	**Solucion**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
P1	1	4	1	2	1	0
P4	0	5	0	3	1	1
Z		4	0	-3	1	0

Actualizo z coeficiente columna sumando y restando al final coeficiente de z.
ej columna p2 : 1* 2 + 0*3 - 5 = -3

No es tabla optima. No cumple condición de parada. Hay que iterar el simplex.
Entra x2 sale p4

Tabla optima por simplex

Tabla 2			1	5	0	0
Base	**Cb**	**Solución**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
P1	1	2/3	1	0	1/3	-2/3
P2	5	5/3	0	1	1/3	1/3
Z		9	0	0	2	1

Ejercicio 2.
Interpretar la solución óptima.
Fresh Dairy Farms tiene dos máquinas distintas para procesar leche pura y producir leche descremada, mantequilla o queso. La cantidad de tiempo requerido en cada máquina para producir cada unidad de producto resultante y las ganancias netas se proporcionan en la siguiente tabla:

	LECHE DESCREMADA	**MANTEQUILLA**	**QUESO**
Máquina 1	0.2 min/gal	0.5 min/lb	1.5 min/lb
Máquina 2	0.3 min/gal	0.7 min/lb	1.2 min/lb
Ganancia neta	$0.22/gal	$0.38/lb	$0.72/lb

Suponiendo que se dispone de 8 horas en cada máquina diariamente, como gerente del departamento de producción, formule un modelo para determinar un plan de producción diaria que maximice las ganancias corporativas netas y produzca un mínimo de 300 galones de leche descremada, 200 libras de mantequilla y 100 libras de queso.

Planteo
X1= cantidad de leche descremada; X2= cantidad de mantequilla; X3= cantidad de queso
Z = 0.22 * X1 + 0.38 * X2 + 0.72 * X3 → MAX
Restricciones de producción:
X1>= 300 producción mínima de leche
X2>=200 producción mínima de mantequilla
X3>=100 producción mínima de queso
X1*0.2 + X2*0.5 + X3*1.5 <=480 producción diaria en máquina 1 (minutos)

X1*0.3 + X2*0.7 + X3*1.2 <=480 producción diaria en máquina 2

Tabla óptima del simplex:

Ck	Xk	Solución (B)	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
0	X4	433,333	0	0	0	1	2,333	4	0	3,333
0,38	X2	200	0	1	0	0	-1	0	0	0
0,72	X3	100	0	0	1	0	0	-1	0	0
0	X7	83,333	0	0	0	0	0,033	0,7	1	0,667
0,22	X1	733,333	1	0	0	0	2,333	4	0	3,333
	Z	309,333	0	0	0	0	0,133	0,16	0	0,733

a) Interprete el valor de cada una de las variables que aparece en la tabla óptima.
b) En qué valores se podría modificar el coeficiente de X_2 tal que la solución no cambie y en cuánto podría variar el valor de la función objetivo?
c) ¿Cuál es el valor marginal del tiempo de producción en la maquina 2?
d) Intervalo de factibilidad de los elementos del lado derecho (D1)

A - se debe producir 737,33 galones de leche, 200 libras de mantequilla y 100 litros de queso, y se espera ganar 309, 333

Se informa que se producen en exceso 433,333 galones de leche y exactamente el mínimo de mantequilla y queso.

No sobra tiempo en la maquina 2 y si en la maquina 1 de 83,33 min

B- cambio 0,38 por C2

Infiere solo en la columna x5

Ck	Xk	Solución (B)	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
			0,22	**~~0,38~~**	**0,72**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	X4	433,333	0	0	0	1	2,333	4	0	3,333
~~0,38~~	X2	200	0	1	0	0	-1	0	0	0
0,72	X3	100	0	0	1	0	0	-1	0	0
0	X7	83,333	0	0	0	0	0,033	0,7	1	0,667
0,22	X1	733,333	1	0	0	0	2,333	4	0	3,333
	Z	309,333	0	0	0	0	0,133	0,16	0	0,733

En x5

0 x 2,333 + C2 *- 1 + 0,72 x 0 + 0 x 0,033 + 0,22 * 2,333 - 0 ≥ 0

C2 *- 1 + 0,22 * 2,333 ≥ 0

despejo

C2 ≤ 0, 486

el precio de venta de la mantequilla puede subir hasta 0,486 y la estructura de la solución no cambia

Para el caso X1 afectaría las columnas x5, x6 y x8 (interceptar los tres rangos para determinar el intervalo). **Hacer**

C - Se ocupa todo el tiempo de M2. si se consigue mas recursos por cada minuto extra aumenta 0,7333 mi beneficio (valor de cambio en Z)

D-

Ck	Xk	Solución (B)	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
0	X4	433,333	0	0	0	1	2,333	4	0	3,333
~~0,38~~	X2	200	0	1	0	0	-1	0	0	0
0,72	X3	100	0	0	1	0	0	-1	0	0
0	X7	83,333	0	0	0	0	0,033	0,7	1	0,667
0,22	X1	733,333	1	0	0	0	2,333	4	0	3,333
	Z	309,333	0	0	0	0	0,133	0,16	0	0,733

en las Ri de ≥ se niega la columna correspondiente a la matriz inversa optima

1	2,333	4	0	3,333
0	-1	0	0	0
0	0	-1	0	0
0	0,033	0,7	1	0,667
0	2,333	4	0	3,333

≥0 por ser de Max

300+D1
200
100
480
480

-1	-2,33	-4	0	3,33	-300 -D1 - 466,66 - 400 + 0 + 1599,84≥0
0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	
0	-0,033	-0,7	1	-0,66	
0	-2,33	-4	0	3,33	

-D1 ≥ -433,18 --> D1 ≤433,18 (cuanto más puede variar)

Por ende D1 ≤300 + 433,38

Ejercicio 3.

Dado el siguiente problema, con su planteo y su tabla del simplex, explicar e interpretar la misma en los términos correspondientes.

En una explotación agraria de 100 hectáreas se desean realizar diferentes labores como son: cultivar dos tipos de cereal (trigo y cebada), plantar dos tipos de frutales (perales y manzanos), y reforestar, para lo cual se plantarán pinos y sauces. Los beneficios que se obtienen por cada hectárea cultivada de trigo y cebada son respectivamente 3 y 2.5 pesos; así mismo, por cada hectárea de perales se obtienen 3.5 pesos y por cada hectárea de manzanos, 4 pesos. Por otro lado, se obtiene una subvención por la reforestación y se otorgan 5 pesos por cada hectárea de pinos y 4.5 pesos por cada hectárea de sauces. Las normas de la explotación obligan a utilizar al menos el 40% del total de la tierra en el cultivo de los cereales, y como máximo un 35% de la tierra en cualquiera de las otras dos labores, frutales o reforestación.

Calcular cómo ha de repartirse la tierra para obtener un máximo beneficio.

Planteo:

Definimos las variables originales como:

x1= hectáreas cultivadas de trigo.
x2= hectáreas cultivadas de cebada.
x3= hectáreas plantadas de perales.
x4= hectáreas plantadas de manzanos.
x5= hectáreas plantadas de pinos.
x6 = hectáreas plantadas de sauces.

La función a maximizar, beneficio obtenido, será:

$Z = 3\,x1 + 2.5\,x2 + 3.5\,x3 + 4\,x4 + 5\,x5 + 4.5\,x6 \rightarrow$ Maximizar

Las restricciones del problema se formulan como:

$x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 <= 100$ (máximo de hectáreas)

$x1 + x2 \geq 0.40\,(x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6)$ (normas de la explotación)

$x3 + x4 \leq 0.35\,(x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6)$ (normas de la explotación)

$x5 + x6 \leq 0.35\,(x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6)$ (normas de la explotación)

$x1, x2, x3, x4, x5, x6 \geq 0$

			~~3~~	2.5	3.5	4	5	4.5	0	0	0	0
Ck	Xk	B	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10
4	X4	25	0	0	1	1	0	0	1/4	1/5	0	-1/20
5	X5	35	0	0	0	0	1	1	7/20	0	0	1/20
0	X9	10	0	0	0	0	0	0	2	-4	1	1
3 C1	X1	40	1	1	0	0	0	0	2/5	1/5	0	0
		395	0	0,5	0,5	0	0	0,5	3,95	0,2	0	0,5

a) Interprete el valor de cada una de las variables que aparece en la tabla óptima.
b) En qué valores se podría modificar el coeficiente de X_1 tal que la solución no cambie y en cuánto podría variar el valor de la función objetivo?
c) Porque no se debe cultivar cebada, que se debería dar para que sea conveniente su cultivo?
d) ¿Qué significa que X7 es igual a 3,95?
e) Si las normas de explotación se pueden variar cual sería la que resultaría más benéfica?

A- Interpretación coloquial al cliente sin variables ni nada técnico.

B- C1 incide en las columnas x2, x7, x8

en x2: $C1 - 2{,}5 \geq 0 \dashrightarrow C1 \geq 2{,}5$

en x7: $4 * 1/4 + 5 * 7/20 + 0 + C1 * 2/5 - 0 \geq 0$ $C1 \leq 4$

en x8: $4 * 1/5 + 0 + 0 + C1 * 1/5 - 0 \geq 0 \dashrightarrow C1 \geq 0$

Despejando y haciendo la intersección tengo: $2{,}5 \leq C1 \leq 4$

C- la columna que referencia la cebada (x2) tiene costo de oportunidad de 0,5; esto quiere decir que por cada hectárea que cultive de cebada disminuye en 0,5 mi beneficio.

Cuando el beneficio de la cebada (x2) sea mayor a 2,5 + 0,5 conviene cultivar.

D- En la columna x7 el valor 3,95 es el valor marginal del recurso de hectáreas disponibles para cultivar. El recurso está saturado, es decir se cultivan todas las hectáreas disponibles. Por cada hectárea de mas que se consiga aumentaría en 3,95 mi beneficio (esto es así dentro de los intervalos de factibilidad).

e - Conviene variar norma de explotación reforestación porque es la que tiene valor marginal mayor.

Ejercicio 4.

Dada la tabla óptima asociada al problema de programación lineal responda:

MAX $Z=10X1 + 9X2$

s.a.

$(7/10)X1+ 2X2 \leq 630$ (tiempo de corte)

$0.5X1 + (5/6)X2 \leq 600$ (tiempo de secado)

$X1 + (2/3)X2 \leq 708$ (tiempo remates)

$(1/10)X1 + 0.25X2 \leq 135$ (tiempo inspección)

$XI \geq 0$

			10	9	0	0	0	0
Xk	Ck	B	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X2	9	252	0	1	30/16	0	-21/16	0
X4	0	120	0	0	-15/16	1	5/32	0
X1	10	540	1	0	-20/16	0	30/16	0
X6	0	18	0	0	-11/32	0	9/64	1
Zj		7668	10	9	35/8	0	111/16	0

e) En qué valores se podría modificar el coeficiente de X2 tal que la solución no cambie y en cuánto podría variar el valor de la función objetivo?
f) ¿Cuál es el valor marginal del tiempo destinado a secado?
g) Si se estableció que a remates se van a agregar 7 horas adicionales, ¿cuál es el valor para la función objetivo?
h) ¿Qué significa que X6=18?
i) Si se dispone de dinero para aumentar 10 horas-hombre, ¿en cuál tipo de tiempo invertiría Ud. Y cuál sería el efecto en la función objetivo, considerando esta tabla óptima?

Ejercicio 5.

Una fábrica de ropa produce tres líneas de trajes: jeans, franela y amasado. La ropa es vendida en lotes de 100 trajes. Cada lote pasa a través de tres procesos: corte, cosido y empaque. La planta dispone de 16 cortadores, 41 máquinas de coser y 20 empacadores. Los requerimientos para producir un lote de 100 trajes de cada línea y las utilidades asociadas se presenta a continuación:

Requerimientos de producción y utilidad	Jeans	Franelas	Amasados
Cortadores [personas/lote]	4	2	1
Máquinas de coser [máquinas/lote]	1	2	2
Empacadores [personas/lote]	1	1	1
Utilidad [US$/lote]	400	200	300

Definiendo las variables de decisión X1, X2 y X3, que representan la cantidad de lotes de jeans, de franela y amasados a fabricar, respectivamente, se ha formulado el siguiente modelo de programación lineal:

MAX Z=400X1 + 200X2 + 300X3

s.a.

4X1+ 2X2 + X3 $\leq$ 16

X1 + 2X2 + 2X3 $\leq$ 41

X1 + X2 + X3 $\leq$ 20

X1, X2, X3 $\geq$ 0

			10	9	0	0	0	0
Xk	Ck	B	**X1**	**X2**	**X3**	**S1**	**S2**	**S3**
X3	300	16	4	2	1	1	0	0
S2	0	9	-7	-2	0	-2	1	0
S3	0	4	-3	-1	0	-1	0	1
Zj		4800	800	400	0	300	0	0

a) Interprete el valor de cada una de las variables que aparece en la tabla óptima.

b) ¿Es posible despedir cortadores o empacadores manteniendo el nivel de producción? ¿Cuántos?

c) La utilidad por lote de jeans puede ser aumentada a US$500 o en US$850, ¿cuál debe ser la actitud de la empresa? ¿Cómo cambia la solución óptima?

d) La empresa puede contratar cortadores adicionales a un precio de US$280 cada uno. ¿Cuánta mano de obra a este precio estaría dispuesto a contratar la empresa? ¿Cómo cambia la solución óptima?

e) Suponga que un cambio en la tecnología de fabricación requiere agregar un proceso de lavado. Los requerimientos de lavado para producir lotes de 100 unidades de cada tipo de traje y la disponibilidad máxima de lavado se detallan a continuación.

Requerimientos de lavado	Jeans	Franelas	Amasados	Disp. máxima
Lavadores [personas/lote]	3	3	2	40 personas

A partir del programa óptimo obtenido, ¿cuál es la nueva solución óptima?

Observación: todas las preguntas deben ser respondidas con respecto al problema original. Justifique cada una de sus respuestas.