ANALISIS DE SENSIBILIDAD

En PL, los parámetros (datos de entrada) del modelo pueden cambiar dentro de ciertos límites sin que cambie la solución óptima. Esto se conoce como **análisis de sensibilidad**

Luego veremos **el análisis post óptimo**, el cual tiene que ver con la determinación de la nueva solución óptima cuando se cambian ciertos datos de entrada.

La presentación explica las ideas básicas del análisis de sensibilidad por medio de la solución gráfica, y después se extienden al problema general de PL con base en los resultados que aparecen en la tabla simplex

Análisis de sensibilidad gráfica

Se considerarán dos casos para el análisis de sensibilidad:

1. La sensibilidad de la solución óptima a los cambios de la disponibilidad de los recursos (lado derecho de las restricciones).

2. La sensibilidad de la solución óptima a los cambios en la utilidad unitaria o el costo unitario (coeficientes de la función objetivo).

Caso 1: CAMBIOS EN EL LADO DERECHO

JOBCO fabrica dos productos en dos máquinas. Una unidad del producto 1 requiere 2 horas en la máquina 1, y 1 hora en la máquina 2. Una unidad del producto 2 requiere 1 hora en la máquina 1, y 3 horas en la máquina 2. Los ingresos por unidad de los productos 1 y 2 son de \$30 y \$20, respectivamente. El tiempo de procesamiento diario total disponible en cada máquina es de 8 horas

Si $x1$ y $x2$ son las cantidades diarias de unidades de los productos 1 y 2, respectivamente, el modelo de PL se da como

Maximizar $z = 30x1 + 20x2$

sujeto a

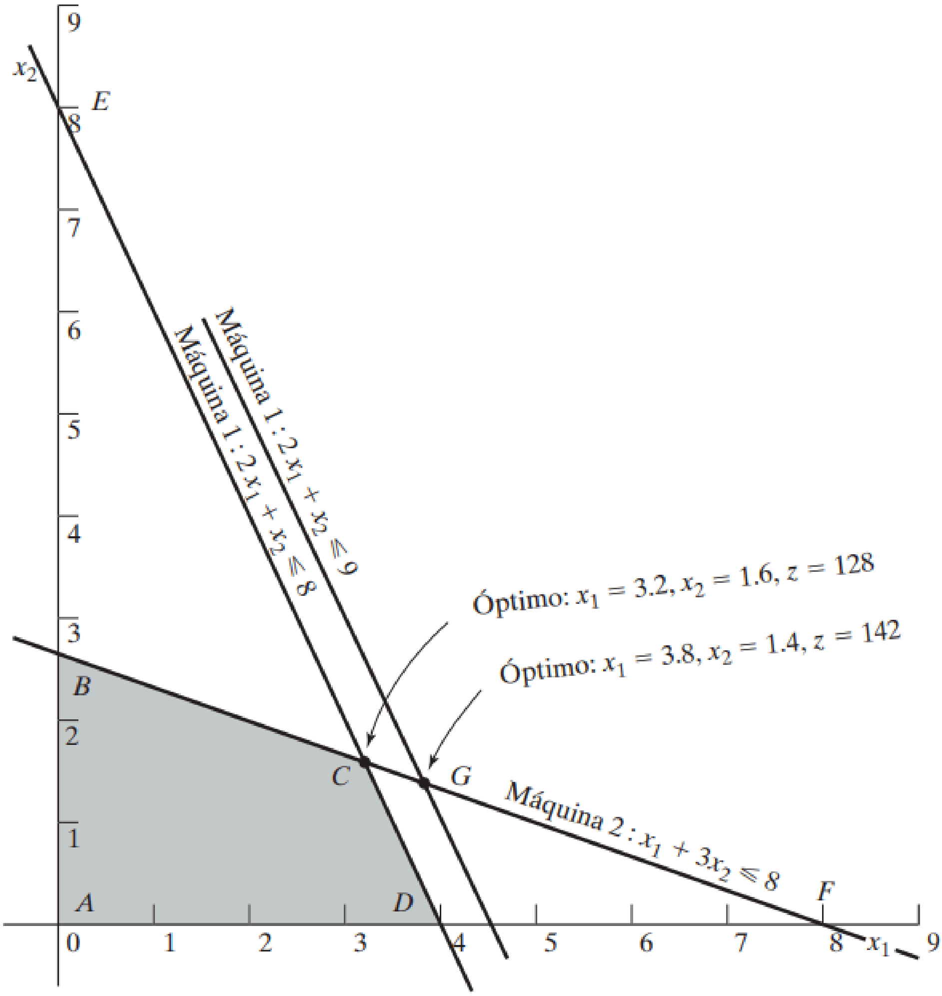
$2x1 + x2 <= 8$ (Máquina 1)

$x1 + 3x2 <= 8$ (Máquina 2)

$x1, x2 >= 0$

queremos saber: CUANTO PUEDE CAMBIAR EL LADO DERECHO, ES DECIR LA DISPONIBILIDAD DE RECURSOS SIN QUE ALTERE LAS VARIABLES X1 Y X2

Sensibilidad gráfica de la solución óptima a cambios en la disponibilidad de recursos (lado derecho de las restricciones)



La figura ilustra el cambio de la solución óptima cuando se cambia la capacidad de la máquina 1. Si la capacidad diaria se incrementa de 8 a 9 horas, el nuevo óptimo se moverá al punto G. La tasa de cambio en la z óptima a consecuencia del cambio de la capacidad de la máquina 1 de 8 a 9 horas se calcula como:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Tasa de cambio del ingreso}\\ \text{a consecuencia del incremento}\\ \text{de la capacidad de la máquina 1}\\ \text{en 1 hora (punto } C \text{ a punto } G\text{)}\end{array}\right) = \frac{z_G - z_C}{(\text{Cambio de la capacidad})} = \frac{142 - 128}{9 - 8} = \$14/\text{h}$$

La tasa calculada proporciona un vínculo directo entre los datos de entrada al modelo (recursos) y sus resultados (ingreso total). Se dice que un incremento unitario (reducción) en la capacidad de la máquina 1 aumentará (reducirá) el ingreso en $14.00. El nombre valor unitario de un recurso es una descripción apropiada de **la tasa de cambio de la función objetivo por cambio unitario de un recurso**. En la PL se utiliza el nombre abstracto **de precio dual (o sombra**. En la figura podemos ver que el precio dual de $14/h permanece válido para cambios (incrementos o reducciones) en la capacidad de la máquina 1 que mueven su restricción paralela a sí misma a cualquier punto sobre el segmento de línea BF. Calculamos las capacidades de la máquina 1 en los puntos B y F como sigue:

Capacidad mínima de la máquina 1 [en B=(0.267)] = 2 x 0 + 1 x 2.67 = 2.67 h

Capacidad máxima de la máquina 1 [en F = (8,0)] = 2 x 8 + 1 x 0 = 16 h

La conclusión es que el precio dual de $14/h permanece válido en el intervalo

2.67 h <= Capacidad de la máquina 1 <= 16 h

Los cambios fuera de este intervalo producen un precio dual diferente (valor por unidad).

1) PUNTO C Máquina 1

$$(-2)\quad x_1 + 3x_2 \le 8$$
$$2x_1 + x_2 \le 8$$
$$-5x_2 = -8$$
$$x_2 = \frac{8}{5}$$
$$\boxed{x_2 = 1{,}6}$$

$$x_1 + 3x_2 \le 8$$
$$(-3)\quad 2x_1 + x_2 = 8$$
$$x_1 = \frac{16}{5}$$
$$\boxed{x_1 = 3{,}2}$$

$$Z = 30x_1 + 20x_2$$
$$Z = 30 * 3{,}2 + 20 * 1{,}6$$
$$Z = 96 + 32$$
$$\boxed{Z_C = 128}$$

PUNTO G Máquina 1

$$(-2)\quad \cancel{x_1} + 3x_2 \le 8$$
$$\cancel{2x_1} + x_2 \le 9$$
$$-5x_2 = -7$$
$$x_2 = \frac{7}{5}$$
$$\boxed{x_2 = 1{,}4}$$

$$x_1 + \cancel{3x_2} \le 8$$
$$(-3)\quad 2x_1 + \cancel{x_2} \le 9$$
$$-5x_1 = -19$$
$$x_1 = \frac{-19}{-5}$$
$$\boxed{x_1 = 3{,}8}$$

$$Z = 30x_1 + 20x_2$$
$$Z = 30 * 38 + 20 * 1{,}4$$
$$Z = 114 + 28$$
$$\boxed{Z_G = 142}$$

$$\text{TASA CAMBIO} = \frac{Z_G - Z_C}{\text{CAMBIO CAPACIDAD}} = \frac{142 - 128}{9 - 8} = \$\, 14/h$$

Elaborando cálculos similares podemos verificar que el precio dual para la capacidad de la máquina 2 es de $2.00/h, y que no cambia cuando su capacidad se mantiene dentro del segmento de línea DE. Ahora,

Capacidad mínima de la máquina 2 [en D = (4,0)] = 1 x 4 + 3 x 0 = 4 h

Capacidad máxima de la máquina 2 [en E = (8,0)] = 1 x 0 + 3 x 8 = 24 h

Por lo tanto, el precio dual de $200/h para la máquina 2 no cambia dentro del intervalo

4 h <= Capacidad de la máquina 2 <= 24 h

Los límites calculados para las máquinas 1 y 2 se conocen como intervalos de factibilidad.

Los precios duales permiten tomar decisiones económicas sobre el problema de PL,

Caso 2: CAMBIOS EN LOS COEFICIENTES OBJETIVOS

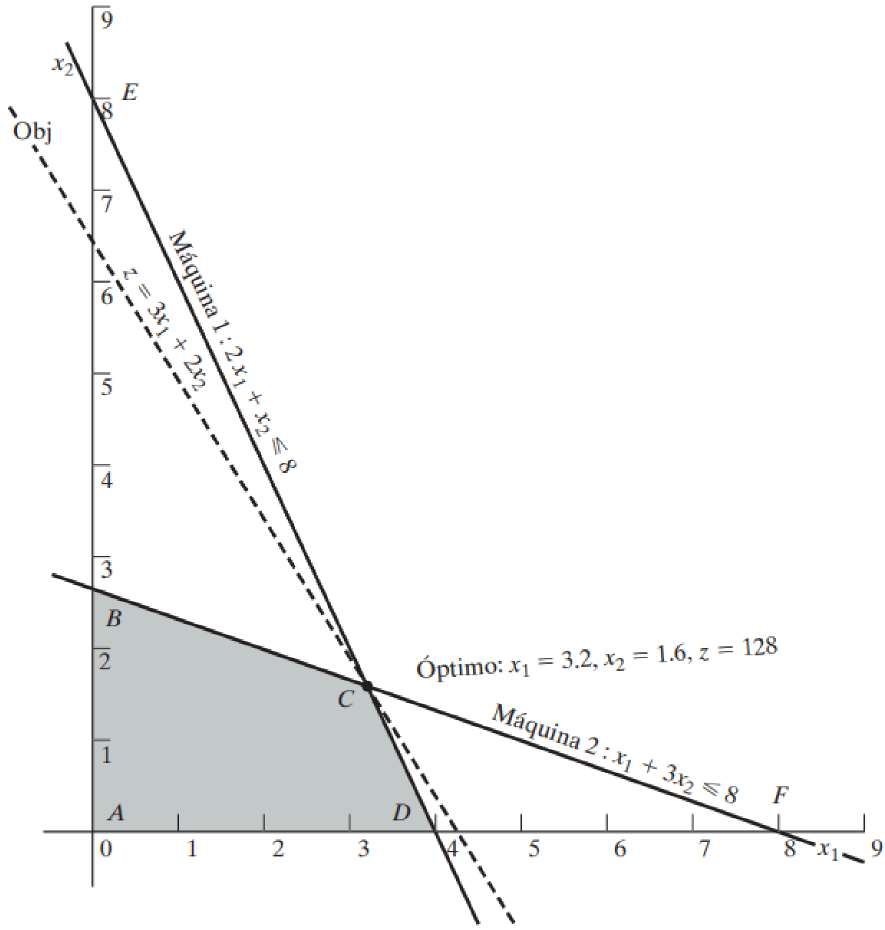


FIGURA 3.13

Sensibilidad gráfica de la solución óptima a cambios en las unidades de ingreso (coeficientes de la función objetivo)

La figura 3.13 muestra el espacio de soluciones gráficas del problema de JOBCO.

El óptimo ocurre en el punto C ($x1 = 3.2$, $x2 = 1.6$, $z = 128$). Los cambios en unidades de ingresos (es decir, los coeficientes de la función objetivo) modificarán la pendiente de z. Sin embargo, como puede verse en la figura, la solución óptima en el punto C no cambia en tanto la función objetivo quede entre las líneas BF y DE

¿Cómo podemos determinar los intervalos para los coeficientes de la función objetivo que mantendrán inalterable la función óptima en C? Primero, escribimos la función objetivo en el formato genera

Maximizar $z = c1x1 + c2x2$

Imagine ahora que la línea z está pivotada en C y que puede girar en el sentido de las manecillas del reloj, así como en el sentido contrario. La solución óptima permanecerá en el punto C en tanto $z = c1x1 + c2x2$ quede entre las dos líneas $x1 + 3x2 = 8$, y $2x1 + x2 = 8$. Esto significa que la relación puede variar entre y lo que resulta en el siguiente **intervalo de optimalidad o rango de optimización**

$$\frac{1}{3} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{2}{1} \text{ o } .333 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 2$$

$x1 + 3x2 = 8$

$3x2 = -1x1 +8$

$X2 = -1/3 \; x1 + 8/3$

$2x1 + x2 = 8.$

$X2 = -2x1 + 8$