

## APUNTE COLOQUIO AM2 2020

Temas:

- 1. Definición de integral de línea**, tanto la expresión vectorial como diferencial). Deben saber cómo se deduce la expresión de la integral a partir de la partición de la curva.
- 2. Definición de integral doble, de superficie y de flujo** (idem que lo aclarado para el punto 1)
- 3. Definición de gradiente**, sus propiedades y su relación los conjuntos de nivel de un campo escalar y con las integrales de línea.
- 4. Campos vectoriales conservativos, sus propiedades** y su relación con las integrales de línea
- 5. Teoremas de Green, de Stokes, de la divergencia**
- 6. Ecuaciones diferenciales**, definición, tipos de soluciones, métodos de resolución de EDO de primero y segundo orden
- 7. Series de Fourier, definición.** Deben poder analizar el armónico principal, qué relación tiene con la señal, qué ocurre en los puntos de discontinuidad de la señal.

Sugerencia :

Ármense un apunte con todos los puntos que les mencioné y asegúrense de comprender cómo se deducen las integrales a partir de las particiones y de comprender el significado de las definiciones y propiedades que les mencioné. La bibliografía es la que trabajamos en la clase:

Larson, Stewart, Rabbufetti, Zill y los apuntes de Series de Fourier.

## Contenido

APUNTE COLOQUIO AM2 2020.....	1
Tema 1: Integral de Línea o Integral de Curva: .....	3
Tema 2: Definición de Integral Doble, de Superficie y de Flujo.....	9
Tema 3: Definición de gradiente, propiedades y relaciones con conjunto de nivel (Campo Escalar, Integrales de línea).....	20
Tema 4: CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS, propiedades y su relación con las integrales de línea .....	26
Tema 5: Teorema de Green, Stokes y de la Divergencia .....	37
TEMA 6: ECUACIONES DIFERENCIALES: Definición, Tipos de soluciones, Métodos de Resolución de EDO de 1er y 2do Orden.....	49
TEMA 7: SERIES DE FOURIER. Definición. Analizar el armónico principal. Relaciones con las señales. Puntos de discontinuidad de las Señales. ....	56

## Tema 1: Integral de Línea o Integral de Curva:

Conocimientos previos a explicar lo que es una integral de línea:

### 1. Curvas parametrizadas

A menudo nos interesaría ver una cierta gráfica como si fuese el rastro que deja un móvil que se desplaza por el plano. Esto lo podemos hacer mediante las llamadas curvas parametrizadas.

**Definición 1** Una curva parametrizada en el plano es un par de ecuaciones

$$C \equiv \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in [a, b]. \quad (1)$$

A  $t$  se le llama parámetro de la curva, y resulta útil pensar en el como en el tiempo.

Qué es una curva suave a trozos?

#### Curvas suaves a trozos (o por partes)

Una propiedad clásica de los campos gravitatorios (o gravitacionales) es que, sujeto a ciertas restricciones físicas, el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto que se mueve entre dos puntos en el campo es independiente de la trayectoria que siga el objeto. Una de las restricciones es que la trayectoria debe ser una curva suave a trozos (o por partes). Recuérdese que una curva plana  $C$  dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b$$

es suave si

$$\frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt}$$

son continuas en  $[a, b]$  y no simultáneamente 0 en  $(a, b)$ . Similarmente, una curva  $C$  en el espacio dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

es suave si

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dz}{dt}$$

son continuas en  $[a, b]$  y no simultáneamente 0 en  $(a, b)$ . Una curva  $C$  es suave a trozos (o por partes) si el intervalo  $[a, b]$  puede dividirse en un número finito de subintervalos, en cada uno de los cuales  $C$  es suave.

**Nota 3 [importante]** Si cambiamos la orientación de  $C$ , la integral (3) cambia de signo, ya que  $\int_{t_Q}^{t_P} = -\int_{t_P}^{t_Q}$ .

Fijémonos en que si la curva  $C$  pasara por alguno de estos puntos para más de un instante  $t$ , no sabríamos cual de esos instantes tomar para calcular la integral. Por eso, supondremos que las curvas parametrizadas con las que trabajaremos no tienen autointersecciones (se dice a veces que son curvas simples). Por ejemplo, una circunferencia

$$C \equiv \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi],$$

no tiene autointersecciones, pero la curva (que tiene la gráfica de un 8)

$$C \equiv \begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cot s \end{cases}, t \in [0, 2\pi],$$

tiene una autointersección en  $(x, y) = (0, 0)$  (pasa por este punto para los valores  $t = \frac{\pi}{2}$  y  $s = \frac{3\pi}{2}$ ).

**Como se representa una integral simple? Que es una integral Simple? En que cambia respecto a una de línea?**

### Integrales de línea

Hasta ahora, en el texto, se han estudiado varios tipos de integrales. En una integral simple

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{Se integra sobre el intervalo } [a, b].$$

se integró sobre el intervalo  $[a, b]$ . De manera similar, en las integrales dobles

$$\iint_R f(x, y) dA \quad \text{Se integra sobre la región } R.$$

se integró sobre la región  $R$  del plano. En esta sección se estudia un nuevo tipo de integral llamada integral de línea

$$\int_C f(x, y) ds \quad \text{Se integra sobre una curva } C.$$

en la que se integra sobre una curva  $C$  suave a trozos. (Esta terminología es un poco desafortunada; este tipo de integral quedaría mejor descrita como “integral de curva”.)

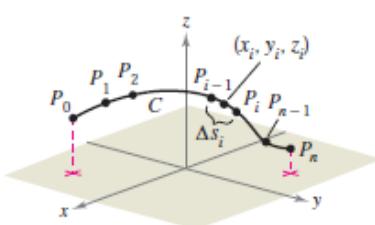
Para introducir el concepto de una integral de línea, considérese la masa de un cable de longitud finita, dado por una curva  $C$  en el espacio. La densidad (masa por unidad de longitud) del cable en el punto  $(x, y, z)$  está dada por  $f(x, y, z)$ . Divídase la curva  $C$  mediante los puntos

$$P_0, P_1, \dots, P_n$$

produciendo  $n$  subarcos, como se muestra en la figura 15.8. La longitud del  $i$ -ésimo subarco está dada por  $\Delta s_i$ . A continuación, se elige un punto  $(x_i, y_i, z_i)$  en cada subarco. Si la longitud de cada subarco es pequeña, la masa total del cable puede ser aproximada por la suma

$$\text{Masa de cable} \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i.$$

Si  $\|\Delta\|$  denota la longitud del subarco más largo y se hace que  $\|\Delta\|$  se aproxime a 0, parece razonable que el límite de esta suma se aproxime a la masa del cable. Esto lleva a la definición siguiente.



Partición de la curva  $C$

Figura 15.8

Luego de conocer todo lo anterior, definimos:

## A qué se llama, entonces, Integral de Línea o de Curva?

### DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE LÍNEA

Si  $f$  está definida en una región que contiene una curva suave  $C$  de longitud finita, entonces la **integral de línea de  $f$  a lo largo de  $C$**  está dada por

$$\int_C f(x, y) \, ds = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i \quad \text{Plano.}$$

o

$$\int_C f(x, y, z) \, ds = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i \quad \text{Espacio.}$$

siempre que este límite exista.

**Anotación:** para evaluar una integral de línea es útil convertirla en una integral definida. Puede demostrarse que si  $f$  es *continua*, el límite dado arriba existe y es el mismo para todas las parametrizaciones suaves de  $C$ .

Para evaluar una integral de línea sobre una curva plana  $C$  dada por  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ , se utiliza el hecho de que

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt.$$

Para una curva en el espacio hay una fórmula similar, como se indica en el teorema 15.4.

### Como se realiza la anotación anterior?

#### TEOREMA 15.4 EVALUACIÓN DE UNA INTEGRAL DE LÍNEA COMO INTEGRAL DEFINIDA

Sea  $f$  continua en una región que contiene una curva suave  $C$ . Si  $C$  está dada por  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ , donde  $a \leq t \leq b$ , entonces

$$\int_C f(x, y) \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt.$$

Si  $C$  está dada por  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ , donde  $a \leq t \leq b$ , entonces

$$\int_C f(x, y, z) \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \, dt.$$

Obsérvese que si  $f(x, y, z) = 1$ , la integral de línea proporciona la longitud de arco de la curva  $C$ , como se definió en la sección 12.5. Es decir,

$$\int_C 1 \, ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt = \text{longitud de arco de la curva } C.$$

Esto último que vemos acá representa en total concordancia lo que es la longitud de un arco de curva con lo que nosotros vemos ahora como integral de línea o de curva.

### Ejemplo

### EJEMPLO 3 Evaluación de una integral de línea sobre una trayectoria

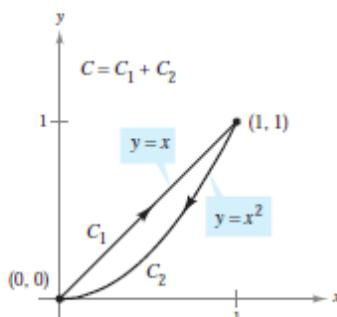


Figura 15.10

Evaluar  $\int_C x \, ds$ , donde  $C$  es la curva suave a trozos mostrada en la figura 15.10.

**Solución** Para empezar, se integra, en sentido ascendente sobre la recta  $y = x$ , usando la parametrización siguiente.

$$C_1: x = t, \quad y = t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

En esta curva,  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ , lo que implica que  $x'(t) = 1$  y  $y'(t) = 1$ . Por tanto,

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{2}$$

y se tiene

$$\int_{C_1} x \, ds = \int_0^1 t \sqrt{2} \, dt = \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A continuación, se integra, en sentido descendente, sobre la parábola  $y = x^2$ , usando la parametrización

$$C_2: x = 1 - t, \quad y = (1 - t)^2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

En esta curva,  $\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 - t)^2\mathbf{j}$ , lo cual implica que  $x'(t) = -1$  y  $y'(t) = -2(1 - t)$ . Por tanto,

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{1 + 4(1 - t)^2}$$

y se tiene

$$\begin{aligned} \int_{C_2} x \, ds &= \int_0^1 (1 - t) \sqrt{1 + 4(1 - t)^2} \, dt \\ &= -\frac{1}{8} \left[ \frac{2}{3} [1 + 4(1 - t)^2]^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\int_C x \, ds = \int_{C_1} x \, ds + \int_{C_2} x \, ds = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1) \approx 1.56.$$

En parametrizaciones dadas por  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ , es útil recordar la forma de  $ds$  como

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \, dt.$$

Esto se usa en el ejemplo 4.

#### a) Integrales de Línea de Campos Vectoriales:

### DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE LÍNEA DE UN CAMPO VECTORIAL

Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave  $C$  dada por  $\mathbf{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . La **integral de línea** de  $\mathbf{F}$  sobre  $C$  está dada por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt.$$

En integrales de línea de funciones vectoriales, la orientación de la curva  $C$  es importante. Si la orientación de la curva se invierte, el vector tangente unitario  $\mathbf{T}(t)$  cambia a  $-\mathbf{T}(t)$ , y se obtiene

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

b) **Integrales de Línea en forma diferencial:**

### Integrales de línea en forma diferencial

Otra forma normalmente utilizada de las integrales de línea se deduce de la notación de campo vectorial usada en la sección anterior. Si  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial de la forma  $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ , y  $C$  está dada por  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ , entonces  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  se escribe a menudo como  $M dx + N dy$ .

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= \int_a^b (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \cdot (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}) dt \\ &= \int_a^b \left( M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \int_C (M dx + N dy)\end{aligned}$$

Esta **forma diferencial** puede extenderse a tres variables. Los paréntesis se omiten a menudo, y se escribe:

$$\int_C M dx + N dy \quad \text{y} \quad \int_C M dx + N dy + P dz$$

Obsérvese cómo se usa esta notación diferencial en el ejemplo 8.

**EJEMPLO 9** Evaluación de una integral de línea en forma diferencial

Evaluar

$$\int_C y \, dx + x^2 \, dy$$

donde  $C$  es el arco parabólico dado por  $y = 4x - x^2$  desde  $(4, 0)$  a  $(1, 3)$ , como se muestra en la figura 15.18.

**Solución** En lugar de pasar al parámetro  $t$ , se puede simplemente conservar la variable  $x$  y escribir

$$y = 4x - x^2 \quad \Rightarrow \quad dy = (4 - 2x) \, dx.$$

Entonces, en la dirección de  $(4, 0)$  a  $(1, 3)$ , la integral de línea es

$$\begin{aligned} \int_C y \, dx + x^2 \, dy &= \int_4^1 [(4x - x^2) \, dx + x^2(4 - 2x) \, dx] \\ &= \int_4^1 (4x + 3x^2 - 2x^3) \, dx \\ &= \left[ 2x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2} \right]_4^1 = \frac{69}{2}. \end{aligned}$$

Ver el ejemplo 7.

**NOTA** La orientación de  $C$  afecta el valor de la forma diferencial de una integral de línea. Específicamente, si  $-C$  tiene orientación opuesta a  $C$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_{-C} M \, dx + N \, dy &= \\ - \int_C M \, dx + N \, dy. \end{aligned}$$

Por tanto, de las tres formas de la integral de línea presentadas en esta sección, la orientación de  $C$  no afecta a la forma  $\int_C f(x, y) \, ds$ , pero sí afecta a la forma vectorial y la forma diferencial. ■

## Tema 2: Definición de Integral Doble, de Superficie y de Flujo

### INTEGRAL DOBLE

#### Conocimientos previos:

14.2

## Integrales dobles y volumen

- Utilizar una integral doble para representar el volumen de una región sólida.
- Utilizar las propiedades de las integrales dobles.
- Evaluar una integral doble como una integral iterada.
- Hallar el valor promedio de una función sobre una región.

### Integrales dobles y volumen de una región sólida

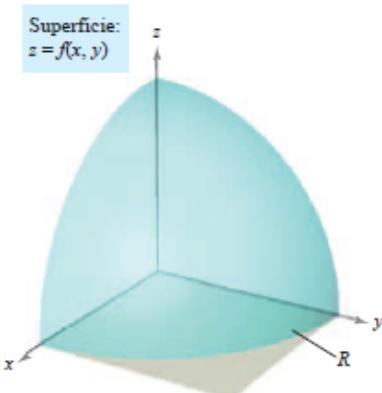


Figura 14.8

Se sabe que una integral definida sobre un *intervalo* utiliza un proceso de límite para asignar una medida a cantidades como el área, el volumen, la longitud de arco y la masa. En esta sección, se usará un proceso similar para definir la **integral doble** de una función de dos variables sobre una *región en el plano*.

Considérese una función continua  $f$  tal que  $f(x, y) \geq 0$  para todo  $(x, y)$  en una región  $R$  del plano  $xy$ . El objetivo es hallar el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie dada por

$$z = f(x, y) \quad \text{Superficie sobre el plano } xy.$$

y el plano  $xy$ , como se muestra en la figura 14.8. Para empezar se sobrepone una red o cuadrícula rectangular sobre la región, como se muestra en la figura 14.9. Los rectángulos que se encuentran completamente dentro de  $R$  forman una **partición interior**  $\Delta$ , cuya **norma**  $\|\Delta\|$  está definida como la longitud de la diagonal más larga de los  $n$  rectángulos. Después, se elige un punto  $(x_i, y_i)$  en cada rectángulo y se forma el prisma rectangular cuya altura es  $f(x_i, y_i)$ , como se muestra en la figura 14.10. Como el área del  $i$ -ésimo rectángulo es

$$\Delta A_i \quad \text{Área del rectángulo } i\text{-ésimo.}$$

se sigue que el volumen del prisma  $i$ -ésimo es

$$f(x_i, y_i) \Delta A_i \quad \text{Volumen del prisma } i\text{-ésimo.}$$

y el volumen de la región sólida se puede aproximar por la suma de Riemann de los volúmenes de todos los  $n$  prismas,

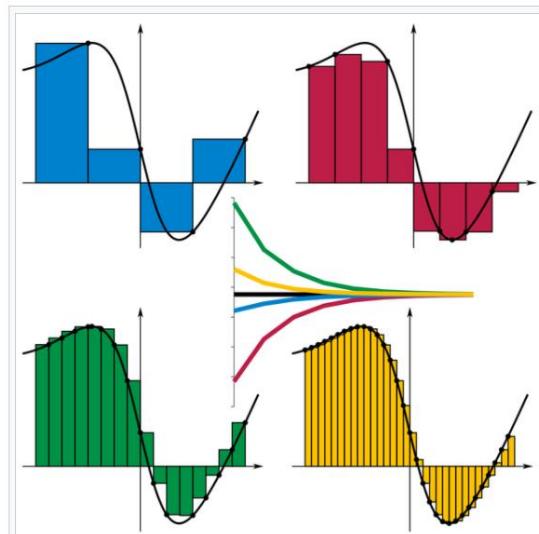
$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i \quad \text{Suma de Riemann.}$$

como se muestra en la figura 14.11. Esta aproximación se puede mejorar tomando redes o cuadrículas con rectángulos más y más pequeños, como se muestra en el ejemplo 1.

### Que es la suma de Riemann?

En matemáticas, la **Suma de Riemann** es un tipo de aproximación del valor de una integral mediante una suma finita. Se llama así en honor al matemático alemán del siglo xix, Bernhard Riemann.

**La suma** se calcula dividiendo la región en formas (rectángulos, trapezoides, parábolas o cúbicas) que juntas forman una región que es similar a la región que se está midiendo, luego calculando el área para cada una de estas formas y, finalmente, agregando todas estas pequeñas áreas juntas. Este enfoque se puede usar para encontrar una aproximación numérica para una integral definida incluso si el teorema fundamental del cálculo no facilita encontrar una solución de forma cerrada. 5 debido a que la **región rellenada por las formas pequeñas generalmente no es exactamente la misma forma que la región que se está midiendo**, la suma de Riemann será diferente del área que se está midiendo. Este error se puede reducir al dividir la región más finamente, utilizando formas cada vez más pequeñas. A medida que las formas se hacen cada vez más pequeñas, la suma se acerca a la integral de Riemann.



Cuatro de los métodos de suma de Riemann para aproximar el área bajo las curvas

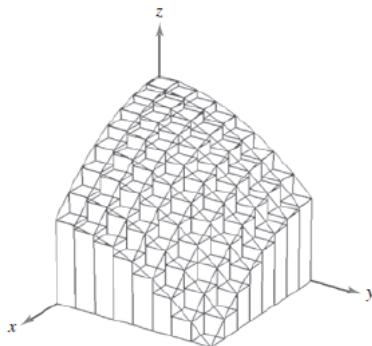


Figura 14.13

**TECNOLOGÍA** Algunas herramientas de graficación tridimensionales pueden representar figuras como la mostrada en la figura 14.12. La gráfica mostrada en la figura 14.13 se dibujó con una herramienta de graficación. En esta gráfica, obsérvese que cada uno de los prismas rectangulares está dentro de la región sólida.

En el ejemplo 1, hay que observar que, usando particiones más finas, se obtienen mejores aproximaciones al volumen. Esta observación sugiere que se podría obtener el volumen exacto tomando un límite. Es decir,

$$\text{Volumen} = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i.$$

El significado exacto de este límite es que el límite es igual a  $L$  si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que

$$\left| L - \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i \right| < \epsilon$$

para toda partición  $\Delta$  de la región plana  $R$  (que satisface  $\|\Delta\| < \delta$ ) y para toda elección posible de  $x_i$  y  $y_i$  en la región  $i$ -ésima.

El uso del límite de una suma de Riemann para definir un volumen es un caso especial del uso del límite para definir una **integral doble**. Sin embargo, el caso general no requiere que la función sea positiva o continua.

## 6. Justificación de la definición de integral de línea

A continuación, presentamos una justificación de por qué la definición de integral de línea para campos escalares es la que se ha dado. Esto no constituye una demostración (las definiciones no se demuestran), sólo es una ayuda para entender una construcción aparentemente tan complicada.

Recordemos muy brevemente la interpretación geométrica de la integral definida, que da lugar a su definición. Si queremos integrar  $y = F(x)$  cuando  $x \in [a, b]$ , dividimos el intervalo  $[a, b]$  en subintervalos de la forma  $[x_i, x_{i+1}]$  y sumamos las áreas rectangulares  $F(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ . Después, se toma el límite cuando el tamaño de los subintervalos  $[x_i, x_{i+1}]$  se hace tender a 0, es decir: si  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ , se toma  $\Delta x_i \rightarrow 0$ .

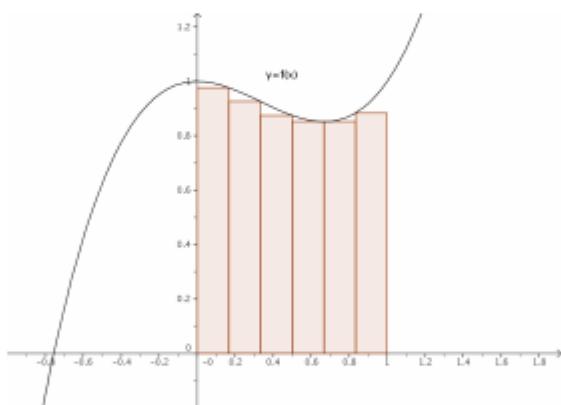


Figura 6: La integral de Riemann

Supongamos ahora que queremos integrar una función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , que está definida sobre el plano, a lo largo de una cierta curva  $y = y(x)$ . Es decir, queremos calcular la “suma infinita de todos los valores  $F(x, y)$  que toma la función  $F$  cuando los puntos  $(x, y)$  están sobre la curva  $y = y(x)$ ”. Este número es lo que se conoce como integral de línea de  $F$  a lo largo de  $y = y(x)$  y se representa por

$$\int_C F(s) ds,$$

donde  $C$  es una parametrización de la curva.

Una forma de construir este límite es la siguiente. Consideremos el arco  $P_i \widehat{P}_{i+1}$  y la aproximación a su longitud que nos da el teorema de Pitágoras:

$$\Delta s_i \simeq \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Entonces, cuando tomemos el límite  $\Delta x_i \rightarrow 0$ ,  $\Delta y_i \rightarrow 0$ , también será  $\Delta s_i \rightarrow 0$ . Con esto, el problema pasa de construir el límite cuando  $\Delta s_i \rightarrow 0$  a hacerlo cuando  $\Delta x_i \rightarrow 0$ ,  $\Delta y_i \rightarrow 0$ .

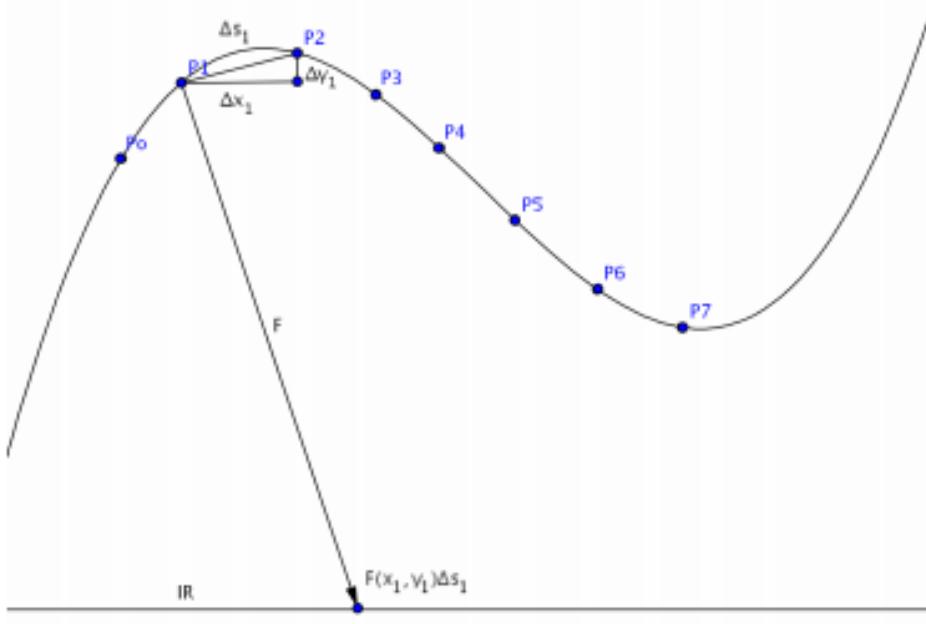


Figura 7: La integral de línea

Para ver cómo podemos definir este otro límite, supongamos que la curva  $y = y(x)$  a lo largo de la cual integraremos  $F$ , viene dada en forma paramétrica como

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}.$$

En tal caso, por la definición de derivada como límite de cocientes incrementales (o, para aquellos que sepan de qué se trata, por el teorema del valor medio), en un punto  $(x_0, y_0)$  será:

$$\Delta x_0 = x - x_0 = f(t) - f(t_0) \simeq f'(t_0)(t - t_0) = f'(t_0)\Delta t_0,$$

y, análogamente,

$$\Delta y_0 \simeq g'(t_0)\Delta t_0.$$

Sustituyendo en la expresión aproximada de  $\Delta s_i$ :

$$\Delta s_i \simeq \sqrt{f'(t_i)^2 + g'(t_i)^2} \cdot \Delta t_i,$$

donde  $t_i$  es el instante para el cual la curva pasa por  $(x_i, y_i)$ , es decir,

$$(x_i, y_i) = P_i = (f(t_i), g(t_i)).$$

Por tanto, tomar el límite cuando  $\Delta s_i \rightarrow 0$  equivale a tomar el límite  $\Delta t_i \rightarrow 0$ . Cuando hacemos esto, en realidad estamos calculando

$$\int_C F(s) ds = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_i F(x_i, y_i) \cdot \sqrt{f'(t_i)^2 + g'(t_i)^2} \cdot \Delta t_i,$$

o sea,

$$\int_C F(s) ds = \int_{t \in [a, b]} F(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt.$$

En definitiva: si queremos calcular la integral de línea del campo escalar  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a lo largo de la curva  $C(t) : (x = f(t), y = g(t))$ , entre los puntos  $P = (x_0, y_0) = (f(t_0), g(t_0))$  y  $Q = (x_1, y_1) = (f(t_1), g(t_1))$ , hemos de calcular la integral de una variable

$$\int_C F(s) ds = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt.$$

Entonces, **definición de integral doble**

### DEFINICIÓN DE INTEGRAL DOBLE

Si  $f$  está definida en una región cerrada y acotada  $R$  del plano  $xy$ , entonces la **integral doble de  $f$  sobre  $R$**  está dada por

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i$$

siempre que el límite exista. Si existe el límite, entonces  $f$  es **integrable** sobre  $R$ .

**NOTA** Una vez definidas las integrales dobles, se verá que una integral definida ocasionalmente se llama **integral simple**. ■

Para que la integral doble de  $f$  en la región  $R$  exista es suficiente que  $R$  pueda expresarse como la unión de un número finito de subregiones que no se sobrepongan (ver la figura 14.14) y que sean vertical u horizontalmente simples, y que  $f$  sea continua en la región  $R$ .

Una integral doble se puede usar para hallar el volumen de una región sólida que se encuentra entre el plano  $xy$  y la superficie dada por  $z = f(x, y)$ .

Como dato extra:

## VOLUMEN DE UNA REGIÓN SÓLIDA

Si  $f$  es integrable sobre una región plana  $R$  y  $f(x, y) \geq 0$  para todo  $(x, y)$  en  $R$ , entonces el volumen de la región sólida que se encuentra sobre  $R$  y bajo la gráfica de  $f$  se define como

$$V = \iint_R f(x, y) dA.$$

## INTEGRALES DE SUPERFICIE

### Conocimientos previos:

### Qué es una superficie y cómo se la define?

#### Integrales de superficie

El resto de este capítulo se ocupa principalmente de integrales de superficie. Primero se considerarán superficies dadas por  $z = g(x, y)$ . Más adelante, en esta sección, se considerarán superficies más generales dadas en forma paramétrica.

Sea  $S$  una superficie dada por  $z = g(x, y)$  y sea  $R$  su proyección sobre el plano  $xy$ , como se muestra en la figura 15.44. Supóngase que  $g, g_x$  y  $g_y$  son continuas en todos los puntos de  $R$  y que  $f$  está definida en  $S$ . Empleando el procedimiento usado para hallar el área de una superficie en la sección 14.5, se evalúa  $f$  en  $(x_i, y_i, z_i)$  y se forma la suma

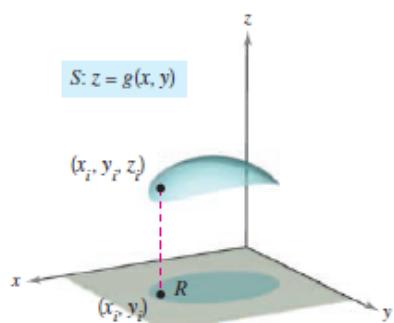
$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$$

donde  $\Delta S_i \approx \sqrt{1 + [g_x(x_i, y_i)]^2 + [g_y(x_i, y_i)]^2} \Delta A_i$ . Siempre que el límite de la suma anterior cuando  $\|\Delta\|$  tiende a 0 exista, la integral de superficie de  $f$  sobre  $S$  se define como

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i.$$

Esta integral se puede evaluar mediante una integral doble.

La función escalar  $f$  asigna un número a cada punto de  $S$   
Figura 15.44



### Cómo se evalúa una integral de superficie?

#### TEOREMA 15.10 EVALUACIÓN DE UNA INTEGRAL DE SUPERFICIE

Sea  $S$  una superficie cuya ecuación es  $z = g(x, y)$  y sea  $R$  su proyección sobre el plano  $xy$ . Si  $g, g_x$  y  $g_y$  son continuas en  $R$  y  $f$  es continua en  $S$ , entonces la integral de superficie de  $f$  sobre  $S$  es

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_R f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} dA.$$

Dato extra:

Se ha visto que si la función  $f$  definida sobre la superficie  $S$  es simplemente  $f(x, y, z) = 1$ , la integral de superficie da el *área de la superficie*  $S$ .

$$\text{Área de la superficie} = \iint_S 1 \, dS$$

Por otro lado, si  $S$  es una lámina de densidad variable y  $\rho(x, y, z)$  es la densidad en el punto  $(x, y, z)$ , entonces la *masa* de la lámina está dada por

$$\text{Masa de la lámina} = \iint_S \rho(x, y, z) \, dS.$$

### EJEMPLO I Evaluación de una integral de superficie

Evaluar la integral de superficie

$$\iint_S (y^2 + 2yz) \, dS$$

donde  $S$  es la porción del plano  $2x + y + 2z = 6$  que se encuentra en el primer octante.

**Solución** Para empezar se escribe  $S$  como

$$z = \frac{1}{2}(6 - 2x - y)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(6 - 2x - y).$$

Usando las derivadas parciales  $g_x(x, y) = -1$  y  $g_y(x, y) = -\frac{1}{2}$ , se puede escribir

$$\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Utilizando la figura 15.45 y el teorema 15.10, se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_S (y^2 + 2yz) \, dS &= \iint_R f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} \, dA \\ &= \iint_R \left[ y^2 + 2y\left(\frac{1}{2}\right)(6 - 2x - y) \right] \left(\frac{3}{2}\right) \, dA \\ &= 3 \int_0^3 \int_0^{2(3-x)} y(3 - x) \, dy \, dx \\ &= 6 \int_0^3 (3 - x)^3 \, dx \\ &= -\frac{3}{2}(3 - x)^4 \Big|_0^3 \\ &= \frac{243}{2}. \end{aligned}$$

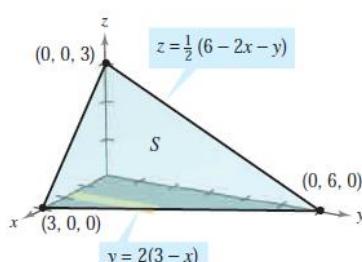


Figura 15.45

## DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA SUPERFICIE

Si  $f$  y sus primeras derivadas parciales son continuas en la región cerrada  $R$  en el plano  $xy$ , entonces el **área de la superficie**  $S$  dada por  $z = f(x, y)$  sobre  $R$  está dada por

$$\begin{aligned}\text{Área de la superficie} &= \iint_R dS \\ &= \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA.\end{aligned}$$

Para memorizar la integral doble para el área de una superficie, es útil notar su semejanza con la integral de la longitud del arco.

*Longitud sobre el eje x:*  $\int_a^b dx$

*Longitud de arco en el plano xy:*  $\int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

*Área en el plano xy:*  $\iint_R dA$

*Área de una superficie en el espacio:*  $\iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA$

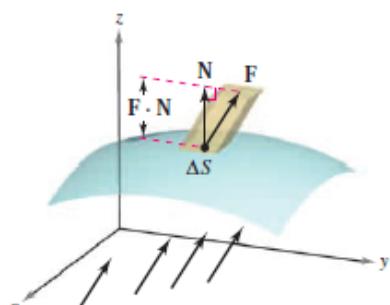
Igual que las integrales para la longitud de arco, las integrales para el área de una superficie son a menudo muy difíciles de calcular. Sin embargo, en el ejemplo siguiente se muestra un tipo que se evalúa con facilidad.

## INTEGRALES DE FLUJO

### Conocimientos previos:

### A qué hacemos referencia cuando hablamos sobre el flujo de algo?

#### Integrales de flujo



El campo de velocidad  $F$  indica la dirección de flujo del fluido

Figura 15.51

Una de las aplicaciones principales que emplean la forma vectorial de una integral de superficie se refiere al flujo de un fluido a través de una superficie  $S$ . Supóngase que una superficie orientada  $S$  se sumerge en un fluido que tiene un campo de velocidad continua  $F$ . Sea  $\Delta S$  el área de una pequeña porción de la superficie  $S$  sobre la cual  $F$  es casi constante. Entonces la cantidad de fluido que atraviesa esta región por unidad de tiempo se approxima mediante el volumen de la columna de altura  $F \cdot N$ , que se muestra en la figura 15.51. Es decir,

$$\Delta V = (\text{altura})(\text{área de la base}) = (F \cdot N)\Delta S.$$

Por consiguiente, el volumen del fluido que atraviesa la superficie  $S$  por unidad de tiempo (llamada el **flujo de  $F$  a través de  $S$** ) está dado por la integral de superficie de la definición siguiente.

Entonces, sabiendo eso, **definimos Integral de Flujo**

## DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE FLUJO

Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ , donde  $M, N$  y  $P$  tienen primeras derivadas parciales continuas sobre la superficie  $S$  orientada mediante un vector unitario normal  $\mathbf{N}$ . La integral de flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $S$  está dada por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

Vemos un poco del análisis Geométrico de esto:

Geométricamente, una integral de flujo es la integral de superficie sobre  $S$  de la *componente normal* de  $\mathbf{F}$ . Si  $\rho(x, y, z)$  es la densidad del fluido en  $(x, y, z)$ , la integral de flujo

$$\iint_S \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

representa la *masa* del fluido que fluye a través de  $S$  por unidad de tiempo.

Para evaluar una integral de flujo de una superficie dada por  $z = g(x, y)$ , se hace

$$G(x, y, z) = z - g(x, y).$$

Entonces,  $\mathbf{N} \, dS$  puede escribirse como sigue.

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \, dS &= \frac{\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|} \, dS \\ &= \frac{\nabla G(x, y, z)}{\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1}} \sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1} \, dA \\ &= \nabla G(x, y, z) \, dA \end{aligned}$$

### EJEMPLO 5 Usar una integral de flujo para hallar la tasa o ritmo del flujo de masa

Sea  $S$  la porción del paraboloides

$$z = g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$$

que se encuentra sobre el plano  $xy$ , orientado por medio de un vector unitario normal dirigido hacia arriba, como se muestra en la figura 15.52. Un fluido de densidad constante  $\rho$  fluye a través de la superficie  $S$  de acuerdo con el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xi + yj + zk.$$

Hallar la tasa o ritmo de flujo de masa a través de  $S$ .

**Solución** Se empieza por calcular las derivadas parciales de  $g$ .

$$g_x(x, y) = -2x$$

y

$$g_y(x, y) = -2y$$

La tasa o el ritmo de flujo de masa a través de la superficie  $S$  es

$$\begin{aligned} \iint_S \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \rho \iint_R \mathbf{F} \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}] dA \\ &= \rho \iint_R [xi + yj + (4 - x^2 - y^2)k] \cdot (2xi + 2yj + k) dA \\ &= \rho \iint_R [2x^2 + 2y^2 + (4 - x^2 - y^2)] dA \\ &= \rho \iint_R (4 + x^2 + y^2) dA \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 + r^2)r dr d\theta \quad \text{Coordenadas polares.} \\ &= \rho \int_0^{2\pi} 12 d\theta \\ &= 24\pi\rho. \end{aligned}$$

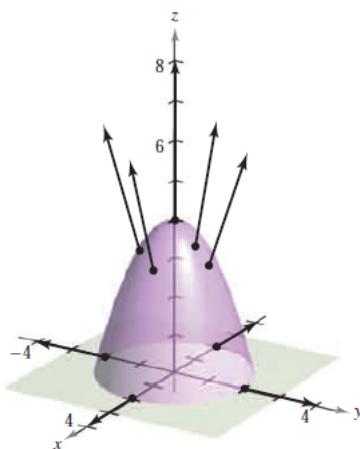


Figura 15.52

### Resumen de Integrales de Línea y de Superficie:

## Resumen de integrales de línea y de superficie

### Integrales de línea

$$\begin{aligned} ds &= \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \\ \int_C f(x, y, z) ds &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) ds \\ \int_C \mathbf{F} \cdot d\gamma &= \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \gamma'(t) dt \end{aligned}$$

Forma escalar.

Forma vectorial.

### Integrales de superficie [ $z = g(x, y)$ ]

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} dA \\ \int_S \int f(x, y, z) dS &= \int_R \int f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} dA \\ \int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \int_R \int \mathbf{F} \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}] dA \end{aligned}$$

Forma escalar.

Forma vectorial (normal hacia arriba).

### Integrales de superficie (forma paramétrica)

$$\begin{aligned} dS &= \|\gamma_u(u, v) \times \gamma_v(u, v)\| dA \\ \int_S \int f(x, y, z) dS &= \int_D \int f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) dS \\ \int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \int_D \int \mathbf{F} \cdot (\gamma_u \times \gamma_v) dA \end{aligned}$$

Forma escalar.

Forma vectorial.

## Tema 3: Definición de gradiente, propiedades y relaciones con conjunto de nivel (Campo Escalar, Integrales de línea)

### Conocimiento previo:

Integral de línea ya definimos y explicamos en los temas anteriores

### Qué es un Campo Escalar?

## Campo escalar

En matemáticas y física, un **campo escalar** representa la distribución espacial de una **magnitud escalar**, asociando un valor a cada punto del espacio. En matemáticas, el valor es un **número**; en física, una **magnitud física**. Los campos escalares se usan en física, por ejemplo, para indicar la distribución de la temperatura o la presión de un gas en el espacio.

Como expresión matemática, un campo escalar es una **función** de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Esto quiere decir que asocia cada punto de un **espacio vectorial** con un número o **escalar**  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Esta función también es conocida como **función de punto** o **función escalar**.

## Campo vectorial

En matemáticas, un **campo vectorial** representa la distribución espacial de una **magnitud vectorial**. Es una expresión de **cálculo vectorial** que asocia un **vector** a cada punto en el **espacio euclidiano**, de la forma  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Los campos vectoriales se utilizan en **física**, por ejemplo, para representar la velocidad y la dirección de un fluido en el espacio, o la intensidad y la dirección de **fuerzas** como la **gravitatoria** o la **fuerza electromagnética**.

Como expresión matemática rigurosa, los campos vectoriales se definen en **variedades** diferenciables como **secciones del fibrado tangente** de la variedad. Este es el tipo de tratamiento necesario para modelizar el **espacio-tiempo curvo** de la **teoría general de la relatividad** por ejemplo.

### Definición de derivada direccional:

**DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DIRECCIONAL**

Sea  $f$  una función de dos variables  $x$  y  $y$ , y sea  $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$  un vector unitario. Entonces la derivada **direccional de  $f$  en la dirección de  $\mathbf{u}$** , que se denota  $D_{\mathbf{u}} f$ , es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) - f(x, y)}{t}$$

siempre que este límite exista.

Calcular derivadas direccionales empleando esta definición es lo mismo que encontrar la derivada de una función de una variable empleando el proceso del límite (sección 2.1). Una fórmula “de trabajo” más simple para hallar derivadas direccionales emplea las derivadas parciales  $f_x$  y  $f_y$ .

**TEOREMA 13.9 DERIVADA DIRECCIONAL**

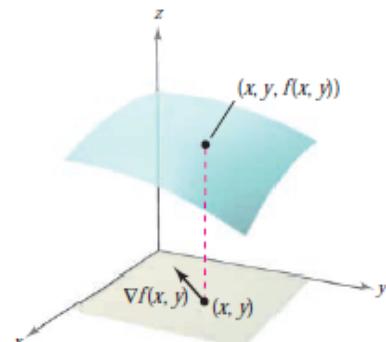
Si  $f$  es una función diferenciable de  $x$  y  $y$ , entonces la derivada direccional de  $f$  en la dirección del vector unitario  $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$  es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta.$$

## Que es el gradiente de una función?

En matemáticas, el '**gradiente**' es una generalización multivariable de la derivada. ... El **gradiente** es una **función** de valor vectorial, a diferencia de una derivada, que es una **función** de valor escalar. Al igual que la derivada, el **gradiente** representa la pendiente de la línea tangente a la gráfica de una **función**.

Definición de Gradiente:



El gradiente de  $f$  es un vector en el plano  $xy$   
Figura 13.48

### El gradiente de una función de dos variables

El **gradiente** de una función de dos variables es una función vectorial de dos variables. Esta función tiene múltiples aplicaciones importantes, algunas de las cuales se describen más adelante en esta misma sección.

#### DEFINICIÓN DE GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea  $z = f(x, y)$  una función de  $x$  y  $y$  tal que  $f_x$  y  $f_y$  existen. Entonces el **gradiente** de  $f$ , denotado por  $\nabla f(x, y)$ , es el vector

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}.$$

$\nabla f$  se lee como "nabla  $f$ ". Otra notación para el gradiente es **grad**  $f(x, y)$ . En la figura 13.48 hay que observar que para cada  $(x, y)$ , el gradiente  $\nabla f(x, y)$  es un vector en el plano (no un vector en el espacio).

**NOTA** El símbolo  $\nabla$  no tiene ningún valor. Es un operador de la misma manera que  $d/dx$  es un operador. Cuando  $\nabla$  opera sobre  $f(x, y)$ , produce el vector  $\nabla f(x, y)$ . ■

## PROPIEDADES DEL GRADIENTE

### Aplicaciones del gradiente

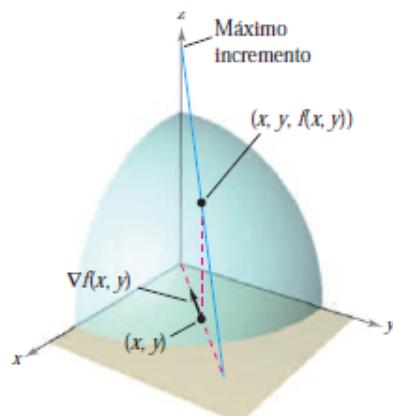
Se ha visto ya que hay muchas derivadas direccionales en un punto  $(x, y)$  de una superficie. En muchas aplicaciones, se desea saber en qué dirección moverse de manera que  $f(x, y)$  crezca más rápidamente. Esta dirección se llama la dirección de mayor ascenso, y viene dada por el gradiente, como se establece en el teorema siguiente.

#### TEOREMA 13.11 PROPIEDADES DEL GRADIENTE

Sea  $f$  diferenciable en el punto  $(x, y)$ .

- Si  $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ , entonces  $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = 0$  para todo  $\mathbf{u}$ .
- La dirección de **máximo** incremento de  $f$  está dada por  $\nabla f(x, y)$ . El valor máximo de  $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$  es  $\|\nabla f(x, y)\|$ .
- La dirección de **mínimo** incremento de  $f$  está dada por  $-\nabla f(x, y)$ . El valor mínimo de  $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$  es  $-\|\nabla f(x, y)\|$ .

## DEMOSTRACIÓN DE LA 1ER PROPIEDAD DE GRADIENTE



El gradiente de  $f$  es un vector en el plano  $xy$  que apunta en dirección del máximo incremento sobre la superficie dada por  $z = f(x, y)$

Figura 13.50

**DEMOSTRACIÓN** Si  $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ , entonces en cualquier dirección (con cualquier  $\mathbf{u}$ ), se tiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} \\ &= (0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) \cdot (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si  $\nabla f(x, y) \neq \mathbf{0}$ , sea  $\phi$  el ángulo entre  $\nabla f(x, y)$  y un vector unitario  $\mathbf{u}$ . Usando el producto escalar se puede aplicar el teorema 11.5 para concluir que

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} \\ &= \|\nabla f(x, y)\| \|\mathbf{u}\| \cos \phi \\ &= \|\nabla f(x, y)\| \cos \phi \end{aligned}$$

y se sigue que el valor máximo de  $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$  se presentará cuando  $\cos \phi = 1$ . Por tanto,  $\phi = 0$ , y el valor máximo de la derivada direccional se tiene cuando  $\mathbf{u}$  tiene la misma dirección que  $\nabla f(x, y)$ . Este valor máximo de  $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$  es precisamente

$$\|\nabla f(x, y)\| \cos \phi = \|\nabla f(x, y)\|.$$

De igual forma, el valor mínimo de  $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$  puede obtenerse haciendo  $\phi = \pi$  de manera que  $\mathbf{u}$  apunte en dirección opuesta a  $\nabla f(x, y)$ , como se muestra en la figura 13.50.

## Teorema 11.5

### Ángulo entre dos vectores

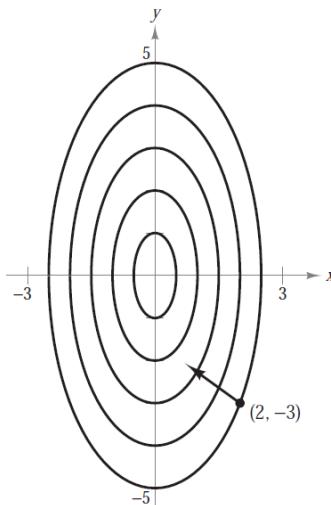
El **ángulo entre dos vectores distintos de cero** es el ángulo  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , entre sus respectivos vectores en posición canónica o estándar, como se muestra en la figura 11.24. El siguiente teorema muestra cómo encontrar este ángulo usando el producto escalar. (Observar que el ángulo entre el vector cero y otro vector no está definido aquí.)

#### TEOREMA 11.5 ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

Si  $\theta$  es el ángulo entre dos vectores distintos de cero  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , entonces

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Curvas de nivel:  
 $T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$



La dirección del máximo incremento de la temperatura en  $(2, -3)$  está dada por  
 $-16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

Figura 13.51

temperatura en el punto  $(x, y)$ , como se ilustra en el ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 5 Hallar la dirección de máximo incremento

La temperatura en grados Celsius en la superficie de una placa metálica es

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

donde  $x$  y  $y$  se miden en centímetros. ¿En qué dirección a partir de  $(2, -3)$  aumenta más rápido la temperatura? ¿Cuál es la tasa o ritmo de crecimiento?

**Solución** El gradiente es

$$\begin{aligned}\nabla T(x, y) &= T_x(x, y)\mathbf{i} + T_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= -8x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Se sigue que la dirección de máximo incremento está dada por

$$\nabla T(2, -3) = -16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$

como se muestra en la figura 13.51, y la tasa de incremento es

$$\begin{aligned}\|\nabla T(2, -3)\| &= \sqrt{256 + 36} \\ &= \sqrt{292} \\ &\approx 17.09^\circ \text{ por centímetro.}\end{aligned}$$

## RELACIÓN CON LAS CURVAS DE NIVEL

### TEOREMA 13.12 EL GRADIENTE ES NORMAL A LAS CURVAS DE NIVEL

Si  $f$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$  y  $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ , entonces  $\nabla f(x_0, y_0)$  es normal (ortogonal) a la curva de nivel que pasa por  $(x_0, y_0)$ .

Qué es un conjunto de nivel?

# Conjuntos de Nivel

El conjunto de puntos en el plano donde la función  $f(x,y)$  tiene un valor constante  $f(x,y)=c$  se llama curva de nivel de  $f$ .

- Si  $n=2$  a los conjuntos de nivel los llamaremos *curvas de nivel*.
- Si  $n=3$  a los conjuntos de nivel los llamaremos *superficies de nivel*.
- Si  $n>4$  a los conjuntos de nivel se los conoce como *hiperSuperficies de nivel*.

## Conjunto de nivel

Sea  $H$  un conjunto y  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar sobre  $H$ . El **conjunto de nivel**  $C_k$  para la función  $f$  es el subconjunto de puntos  $x$  en  $H$  para los cuales  $f(x) = k$ .

En símbolos:

$$C_k = \{x \in H \mid f(x) = k\}.$$

Un conjunto de nivel puede coincidir con el conjunto vacío.

- Si  $H = \mathbb{R}^2$  los conjuntos de nivel son en general curvas y se las llama **curvas de nivel**.
- Si  $H = \mathbb{R}^3$  los conjuntos de nivel suelen ser superficies y se les llama **superficies de nivel**.
- Para dimensiones mayores, no se cuenta con una representación gráfica de estos conjuntos.

### Relación entre el Gradiente y las curvas de Nivel:

#### Conjuntos de nivel y gradientes [ editar ]

Si el conjunto  $H$  coincide con  $\mathbb{R}^n$  y el campo escalar  $f$  es de clase  $C^1$  entonces los vectores gradiente del campo escalar son ortogonales a los conjuntos de nivel en el siguiente sentido: Sea  $C_k$  un conjunto de nivel y  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow C_k$  una curva diferenciable. Los vectores gradiente del campo  $f$  sobre la curva, son ortogonales a los vectores velocidad de la curva.

En efecto, para todo  $t$  en  $I$ ,

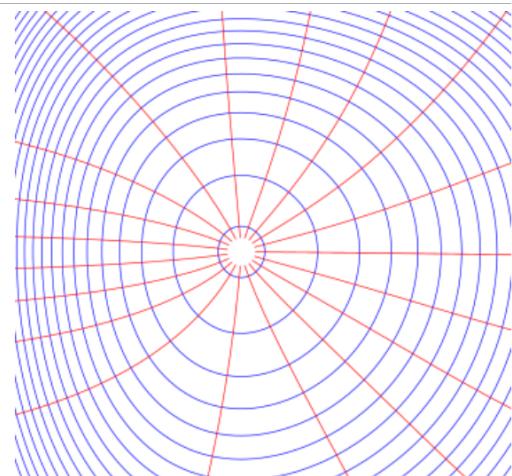
$$f(c(t)) = k.$$

Derivando respecto de  $t$  se obtiene (usando la derivada de una composición de funciones)

$$\nabla f(c(t)) \cdot c'(t) = 0$$

En particular, las **curvas integrales** asociadas al campo vectorial generado por el gradiente de  $f$  son "ortogonales" a los conjuntos de nivel asociadas a dicha función.

En física, estas curvas integrales se las suele llamar líneas de campo o líneas de fuerza, según el contexto.



## Tema 4: CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS, propiedades y su relación con las integrales de línea

Conocimientos previos:

[Que es un campo vectorial?](#)

### Campos vectoriales

En el capítulo 12 se estudiaron funciones vectoriales que asignan un vector a un *número real*. Se comprobó que las funciones vectoriales de números reales son útiles para representar curvas y movimientos a lo largo de una curva. En este capítulo se estudiarán otros dos tipos de funciones vectoriales que asignan un vector a un *punto en el plano* o a un *punto en el espacio*. Tales funciones se llaman **campos vectoriales (campos de vectores)**, y son útiles para representar varios tipos de **campos de fuerza** y **campos de velocidades**.

#### DEFINICIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL

Un **campo vectorial sobre una región plana  $R$**  es una función  $\mathbf{F}$  que asigna un vector  $\mathbf{F}(x, y)$  a cada punto en  $R$ .

Un **campo vectorial sobre una región sólida  $Q$  en el espacio** es una función  $\mathbf{F}$  que asigna un vector  $\mathbf{F}(x, y, z)$  a cada punto en  $Q$ .

**NOTA** Aunque un campo vectorial está constituido por infinitos vectores, se puede obtener una idea aproximada de su estructura dibujando varios vectores representativos  $\mathbf{F}(x, y)$ , cuyos puntos iniciales son  $(x, y)$ . ■

El *gradiente* es un ejemplo de un campo vectorial. Por ejemplo, si

$$f(x, y) = x^2y + 3xy^3$$

entonces el gradiente de  $f$

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= (2xy + 3y^3)\mathbf{i} + (x^2 + 9xy^2)\mathbf{j} \end{aligned} \quad \text{Campo vectorial en el plano.}$$

es un campo vectorial en el plano. Del capítulo 13, la interpretación gráfica de este campo es una familia de vectores cada uno de los cuales apunta en la dirección de máximo crecimiento a lo largo de la superficie dada por  $z = f(x, y)$ .

Entonces, Definimos un Campo Vectorial Conservativo:

**Campo conservativo**

Se dice que un campo vectorial  $\vec{F}(x,y,z)$  es conservativo si la circulación del campo a lo largo de una curva es independiente del camino, solo depende de los puntos inicial y final de la circulación.

Los campos conservativos se pueden expresar como gradiente de una función escalar, es decir existe una función escalar de punto  $V(x,y,z)$  que cumple:

$$\vec{F} = -\nabla V$$

por lo que el cálculo de la circulación se convierte en:

$$C_A^B = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B \nabla V \cdot d\vec{r} = - \int_A^B dV = V_A - V_B$$

La circulación de un campo conservativo por una línea cerrada es por tanto cero:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Si un campo vectorial es conservativo cumple además estas condiciones:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$



## Campos vectoriales conservativos

En la figura 15.5 todos los vectores parecen ser normales a la curva de nivel de la que emergen. Porque ésta es una propiedad de los gradientes, es natural preguntar si el campo vectorial dado por  $F(x, y) = 2xi + yj$  es el *gradiente* de alguna función diferenciable  $f$ . La respuesta es que algunos campos vectoriales, denominados campos vectoriales **conservativos**, pueden representarse como los gradientes de funciones diferenciables, mientras que algunos otros no pueden.

### DEFINICIÓN DE CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS

Un campo vectorial  $\mathbf{F}$  se llama **conservativo** si existe una función diferenciable  $f$  tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$ . La función  $f$  se llama **función potencial** para  $\mathbf{F}$ .

### CONOCIDO CRITERIO PARA DETERMINAR SI UN CAMPO ES CONSERVATIVO CON SU DEMOSTRACIÓN

El importante teorema siguiente da una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial *en el plano* sea conservativo.

### TEOREMA 15.1 CRITERIO PARA CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS EN EL PLANO

Sea  $M$  y  $N$  dos funciones con primeras derivadas parciales continuas en un disco abierto  $R$ . El campo vectorial dado por  $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$  es conservativo si y sólo si

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

**DEMOSTRACIÓN** Para mostrar que la condición dada es necesaria para que  $\mathbf{F}$  sea conservativo, suponer que existe una función potencial  $f$  tal que

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}.$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= M & \Rightarrow f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial M}{\partial y} \\ f_y(x, y) &= N & \Rightarrow f_{yx}(x, y) &= \frac{\partial N}{\partial x} \end{aligned}$$

y, por la equivalencia de derivadas parciales mixtas  $f_{xy}$  y  $f_{yx}$ , se puede concluir que  $\partial N / \partial x = \partial M / \partial y$  para todo  $(x, y)$  en  $R$ . Lo suficiente de la condición se muestra en la sección 15.4.

### TEOREMA 15.2 CRITERIO PARA CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS EN EL ESPACIO

Suponer que  $M$ ,  $N$  y  $P$  tienen primeras derivadas parciales continuas en una esfera abierta  $Q$  en el espacio. El campo vectorial dado por  $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$  es conservativo si y sólo si

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = 0.$$

Es decir,  $\mathbf{F}$  es conservativo si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

**NOTA** El teorema 15.1 es válido en dominios *simplemente conexos*. Una región plana  $R$  es simplemente conexa si cada curva cerrada simple en  $R$  encierra sólo puntos que están en  $R$ . Ver la figura 15.26 en la sección 15.4. ■

### 6.2.1 Campo vectorial conservativo y rotor

**Teorema 6.2.2 — Condición necesaria.** Sea  $\vec{F} = (P, Q, R)$  un campo vectorial en  $E \subset \mathbb{R}^3$ . Si  $\vec{F}$  es conservativo en  $E$ , entonces  $\vec{F}$  es irrotacional en  $E$ . Simbólicamente:

$$\text{Si } \vec{F} = \vec{\nabla}f, \text{ entonces } \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}.$$



La contrarrecíproca de este teorema es muy útil para determinar cuándo un campo vectorial no es conservativo. ¿Cómo?

El teorema anterior afirma que una condición necesaria para que un campo vectorial sea conservativo es que sea irrotacional. El siguiente teorema da condiciones suficientes.

**Teorema 6.2.3 — Condiciones suficientes.** Sea  $\vec{F} = (P, Q, R)$  un campo vectorial en  $E \subset \mathbb{R}^3$ . Si  $\vec{F}$  es irrotacional en  $E$  y además sus funciones componentes son de clase  $C^1$  en todo  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $\vec{F}$  es conservativo en  $\mathbb{R}^3$ .

### EJEMPLO 5 Prueba de campos vectoriales conservativos en el plano

Decidir si el campo vectorial dado por  $\mathbf{F}$  es conservativo.

a)  $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$       b)  $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

#### Solución

a) El campo vectorial dado por  $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$  no es conservativo porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2y] = x^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[xy] = y.$$

b) El campo vectorial dado por  $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  es conservativo porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[2x] = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[y] = 0.$$

#### PROPIEDADES CAMPOS CONSERVATIVOS

**Propiedades** [editar]

Dado un campo vectorial definido sobre una región **simplemente conexa** el campo es conservativo si cumple cualquiera de estas condiciones (de hecho puede demostrarse que si cumple una de ellas cumple las otras dos también):

1. Un campo es **conservativo** si, y sólo si, el trabajo que realiza la fuerza que genera el campo entre dos puntos no depende del camino que haya seguido el móvil entre esos dos puntos.

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

2. Un campo es **conservativo** si, y sólo si, el **rotacional** de ese **campo vectorial** en todos los puntos es cero.:

$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

3. Y más importante: un **campo de fuerzas** es **conservativo** si y sólo si podemos encontrar una **función escalar potencial** llamada de **energía potencial**, de la cual su **gradiente** sea esa fuerza. De tal modo que para esa fuerza el trabajo que realiza sobre un móvil entre dos puntos cualesquiera del **espacio** es igual a la variación de esa función escalar entre esos dos puntos, cambiada de signo.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \cdot V$$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B$$

Otra propiedad interesante es que las **curvas integrales** de un **campo vectorial** conservativo, llamadas **líneas de campo**, no pueden ser cerradas.

## TEOREMA 15.6 INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA Y CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS

Si  $\mathbf{F}$  es continuo en una región abierta y conexa, entonces la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

es independiente de la trayectoria si y sólo si  $\mathbf{F}$  es conservativo.

### 6.2.1 Campo vectorial conservativo y rotor

**Teorema 6.2.2 — Condición necesaria.** Sea  $\vec{F} = (P, Q, R)$  un campo vectorial en  $E \subset \mathbb{R}^3$ . Si  $\vec{F}$  es conservativo en  $E$ , entonces  $\vec{F}$  es irrotacional en  $E$ . Simbólicamente:

$$\text{Si } \vec{F} = \vec{\nabla} f, \quad \text{entonces} \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}.$$



La contrarrecíproca de este teorema es muy útil para determinar cuándo un campo vectorial no es conservativo. ¿Cómo?

El teorema anterior afirma que una condición necesaria para que un campo vectorial sea conservativo es que sea irrotacional. El siguiente teorema da condiciones suficientes.

**Teorema 6.2.3 — Condiciones suficientes.** Sea  $\vec{F} = (P, Q, R)$  un campo vectorial en  $E \subset \mathbb{R}^3$ . Si  $\vec{F}$  es irrotacional en  $E$  y además sus funciones componentes son de clase  $C^1$  en todo  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $\vec{F}$  es conservativo en  $\mathbb{R}^3$ .

### RELACION CON LAS INTEGRALES DE LINEA

## TEOREMA 15.5 TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS INTEGRALES DE LÍNEA

Sea  $C$  una curva suave a trozos contenida en una región abierta  $R$  y dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b.$$

Si  $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$  es conservativo en  $R$ , y  $M$  y  $N$  son continuas en  $R$ , entonces,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

donde  $f$  es una función potencial de  $\mathbf{F}$ . Es decir,  $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ .

### Teorema fundamental de las integrales de línea

También conocido como el teorema del gradiente, este resultado generaliza el teorema fundamental del cálculo a integrales de línea en campos vectoriales.

### Qué vamos a construir

- El teorema fundamental de las integrales de línea, también conocido como teorema del gradiente, establece que

$$\int_a^b \nabla \mathbf{f}(\vec{\mathbf{r}}(t)) \cdot \vec{\mathbf{r}}'(t) dt = \mathbf{f}(\vec{\mathbf{r}}(b)) - \mathbf{f}(\vec{\mathbf{r}}(a))$$

- La intuición detrás de esta fórmula es que cada lado representa el cambio en el valor de una función multivariante,  $\mathbf{f}$ , conforme caminas por una trayectoria parametrizada por  $\vec{\mathbf{r}}(t)$ .
- Esta fórmula implica que los campos gradientes son **independientes de la trayectoria**, es decir, que las integrales de línea sobre dos trayectorias que conectan los mismos puntos inicial y final son iguales.

## El teorema

Recuerda que el [teorema fundamental del cálculo](#) en una sola variable establece que

$$\int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a)$$

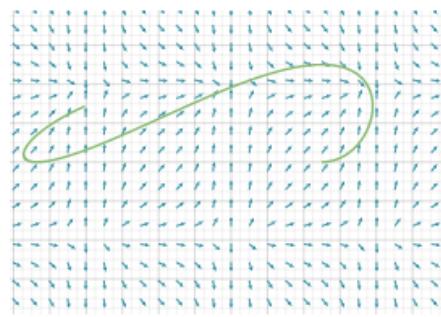
En un sentido, el teorema dice que la integración es lo opuesto de la diferenciación.

El teorema fundamental de las integrales de línea, también conocido como el teorema del gradiente, es una de muchas maneras de extender este teorema a dimensiones más altas. De alguna manera, establece que la [integración de línea en un campo vectorial](#) es lo opuesto a calcular [gradiente](#). El teorema establece que

$$\int_a^b \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)dt = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

Donde

- $f$  es alguna función escalar multivariable.
- $\nabla f$  es el gradiente de  $f$ .
- $\vec{r}(t)$  es una función vectorial que parametriza alguna trayectoria en el espacio de entradas de  $f$ .
- $\vec{r}(a)$  y  $\vec{r}(b)$  son los puntos inicial y final de la trayectoria.
- $\vec{r}'(t)$  es la derivada de  $\vec{r}(t)$ , que, como siempre, calculamos componente a componente.



También podrás ver este teorema escrito sin referencia a la parametrización  $\vec{r}(t)$  de la manera siguiente:

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(B) - f(A)$$

Donde  $C$  representa la trayectoria en el espacio, con  $A$  y  $B$  sus puntos inicial y final, respectivamente, y  $d\mathbf{s}$  un pequeño paso a lo largo de  $C$ .

En resumen, el teorema establece que la integral de línea del gradiente de una función  $f$  es igual al cambio total en el valor de  $f$  del principio al final de la trayectoria.

## Teorema fundamental de las integrales de línea

El estudio realizado en la sección anterior indica que en un campo gravitatorio el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto que se mueve entre dos puntos en el campo es independiente de la trayectoria seguida por el objeto. En esta sección se estudia una generalización importante de este resultado, a la que se le conoce como **teorema fundamental de las integrales de línea**.

Para empezar, se presenta un ejemplo en el que se evalúa la integral de línea de un *campo vectorial conservativo* por tres trayectorias diferentes.

### TEOREMA 15.5 TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS INTEGRALES DE LÍNEA

Sea  $C$  una curva suave a trozos contenida en una región abierta  $R$  y dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b.$$

Si  $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$  es conservativo en  $R$ , y  $M$  y  $N$  son continuas en  $R$ , entonces,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

donde  $f$  es una función potencial de  $\mathbf{F}$ . Es decir,  $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ .

El teorema fundamental de las integrales de línea establece que si el campo vectorial  $\mathbf{F}$  es conservativo, entonces la integral de línea entre dos puntos cualesquiera es simplemente la diferencia entre los valores de la función *potencial*  $f$  en estos puntos.

**NOTA** El teorema fundamental de las integrales de línea es similar al teorema fundamental de cálculo (sección 4.4) que establece que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

donde  $F'(x) = f(x)$ .



**DEMOSTRACIÓN** Esta demostración es sólo para una curva suave. Para curvas suaves a trozos (o por partes), el procedimiento se lleva a cabo por separado para cada trozo suave. Como  $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$ , se sigue que

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= \int_a^b \left[ f_x(x, y) \frac{dx}{dt} + f_y(x, y) \frac{dy}{dt} \right] dt\end{aligned}$$

y, por la regla de la cadena (teorema 13.6), se tiene

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \frac{d}{dt} [f(x(t), y(t))] dt \\ &= f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)).\end{aligned}$$

El último paso es una aplicación del teorema fundamental del cálculo.

En el espacio, el teorema fundamental de las integrales de línea adopta la forma siguiente. Sea  $C$  una curva suave a trozos contenida en una región abierta  $Q$  y dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

Si  $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$  es conservativo y  $M, N$  y  $P$  son continuas, entonces

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a))\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ .

El teorema fundamental de las integrales de línea establece que si el campo vectorial  $\mathbf{F}$  es conservativo, entonces la integral de línea entre dos puntos cualesquiera es simplemente la diferencia entre los valores de la función *potencial*  $f$  en estos puntos.

## Regla de la cadena para funciones de varias variables

El trabajo con diferenciales de la sección anterior proporciona las bases para la extensión de la regla de la cadena a funciones de dos variables. Hay dos casos: el primer caso cuando  $w$  es una función de  $x$  y  $y$ , donde  $x$  y  $y$  son funciones de una sola variable independiente  $t$ . (La demostración de este teorema se da en el apéndice A.)

### TEOREMA 13.6 REGLA DE LA CADENA: UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

Sea  $w = f(x, y)$ , donde  $f$  es una función derivable de  $x$  y  $y$ . Si  $x = g(t)$  y  $y = h(t)$ , donde  $g$  y  $h$  son funciones derivables de  $t$ , entonces  $w$  es una función diferenciable de  $t$ , y

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad \text{Ver figura 13.39.}$$

### TEOREMA 15.7 CONDICIONES EQUIVALENTES

Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$  con primeras derivadas parciales continuas en una región abierta conexa  $R$ , y sea  $C$  una curva suave a trozos en  $R$ . Las condiciones siguientes son equivalentes.

1.  $\mathbf{F}$  es conservativo. Es decir,  $\mathbf{F} = \nabla f$  para alguna función  $f$ .
2.  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  es independiente de la trayectoria.
3.  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  para toda curva *cerrada*  $C$  en  $R$ .

**NOTA** El teorema 15.7 proporciona varias opciones para calcular una integral de línea de un campo vectorial conservativo. Se puede usar una función potencial, o puede ser más conveniente elegir una trayectoria particularmente simple, como un segmento de recta. ■

## Tema 5: Teorema de Green, Stokes y de la Divergencia

### TEOREMA DE GREEN

El Teorema de Green relaciona una integral de línea a lo largo de una curva cerrada en el plano, con una integral doble sobre la región encerrada por dicha curva. Podemos pensarlo como un resultado similar al teorema fundamental del cálculo, para integrales dobles.

#### Teorema de Green

En esta sección se estudiará el **teorema de Green**, que recibe este nombre en honor del matemático inglés George Green (1793-1841). Este teorema establece que el valor de una integral doble sobre una región *simplemente conexa*  $R$  está determinado por el valor de una integral de línea a lo largo de la frontera de  $R$ .

Una curva  $C$  dada por  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ , donde  $a \leq t \leq b$ , es **simple** si no se corta a sí misma, es decir,  $\mathbf{r}(c) \neq \mathbf{r}(d)$  para todo  $c$  y  $d$  en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Una región plana  $R$  es **simplemente conexa** si cada curva cerrada simple en  $R$  encierra sólo puntos que están en  $R$  (ver la figura 15.26).

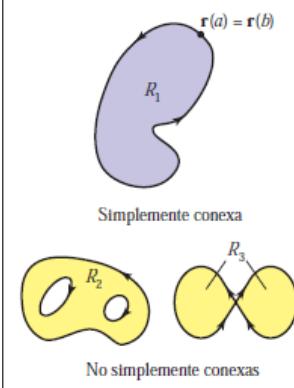


Figura 15.26

#### TEOREMA 15.8 TEOREMA DE GREEN

Sea  $R$  una región simplemente conexa cuya frontera es una curva  $C$  suave a trozos, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj (es decir,  $C$  se recorre *una vez* de manera que la región  $R$  siempre quede a la *izquierda*). Si  $M$  y  $N$  tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a  $R$ , entonces

$$\int_C M dx + N dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

**DEMOSTRACIÓN** Se da una demostración sólo para una región que es vertical y horizontalmente simple, como se muestra en la figura 15.27.

$$\begin{aligned} \int_C M dx &= \int_{C_1} M dx + \int_{C_2} M dx \\ &= \int_a^b M(x, f_1(x)) dx + \int_b^a M(x, f_2(x)) dx \\ &= \int_a^b [M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))] dx \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b M(x, y) \Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx \\ &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))] dx. \end{aligned}$$

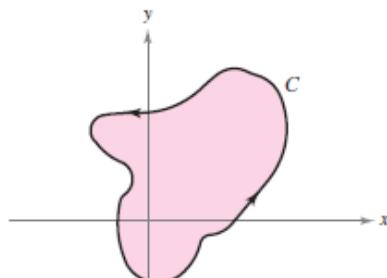
Por consiguiente,

$$\int_C M dx = - \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA.$$

De manera similar, se pueden usar  $g_1(y)$  y  $g_2(y)$  para demostrar que  $\int_C N dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA$ . Sumando las integrales  $\int_C M dx$  y  $\int_C N dy$ , se llega a la conclusión establecida en el teorema.

Este tipo de teoremas resulta muy útil porque, dados un campo vectorial y una curva cerrada simple sobre la cual hay que integrarlo, podemos elegir la posibilidad más simple entre integrar el campo directamente sobre la curva o bien integrar la diferencia de sus derivadas parciales cruzadas sobre en recinto que delimita la curva. Por otro lado, la relación así establecida entre la integral de línea sobre una curva y la integral doble sobre la región interior a ésta permite a veces obtener información sobre una función o su integral en un recinto a partir del comportamiento de la función sobre la frontera de dicho recinto.

### EJEMPLO 3 Teorema de Green y campos vectoriales conservativos



C es cerrada  
Figura 15.30

Evaluar la integral de línea

$$\int_C y^3 dx + 3xy^2 dy$$

donde  $C$  es la trayectoria mostrada en la figura 15.30.

**Solución** A partir de esta integral de línea,  $M = y^3$  y  $N = 3xy^2$ . Así que,  $\partial N / \partial x = 3y^2$  y  $\partial M / \partial y = 3y^2$ . Esto implica que el campo vectorial  $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$  es conservativo, y como  $C$  es cerrada, se concluye que

$$\int_C y^3 dx + 3xy^2 dy = 0.$$



## Rotacional de un campo vectorial

El teorema 15.1 tiene un análogo para campos vectoriales en el espacio. Antes de establecer ese resultado, se da la definición del **rotacional de un campo vectorial** en el espacio.

### DEFINICIÓN DEL ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL

El rotacional de  $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$  es

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}.\end{aligned}$$

**NOTA** Si  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ , entonces se dice que  $\mathbf{F}$  es un **campo irrotacional**. ■

La notación de producto vectorial usada para el rotacional proviene de ver el gradiente  $\nabla f$  como el resultado del **operador diferencial**  $\nabla$  que actúa sobre la función  $f$ . En este contexto, se utiliza la siguiente forma de determinante como ayuda mnemotécnica para recordar la fórmula para el rotacional.

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}\end{aligned}$$

### TEOREMA DE STOKES O Teorema del rotor

El Teorema de Stokes relaciona una integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada simple en el espacio, con cierta integral de superficie a través de una superficie que tiene dicha curva como frontera.

## Teorema de Stokes

Un segundo teorema, análogo al teorema de Green, pero con más dimensiones, es el teorema de Stokes, llamado así en honor al físico matemático inglés George Gabriel Stokes. Stokes formó parte de un grupo de físicos matemáticos ingleses conocido como la Escuela de Cambridge, entre los que se encontraban William Thomson (Lord Kelvin) y James Clerk Maxwell. Además de hacer contribuciones a la física, Stokes trabajó con series infinitas y con ecuaciones diferenciales, así como con los resultados de integración que se presentan en esta sección.

El teorema de Stokes establece la relación entre una integral de superficie sobre una superficie orientada  $S$  y una integral de línea a lo largo de una curva cerrada  $C$  en el espacio que forma la frontera o el borde de  $S$ , como se muestra en la figura 15.62. La dirección positiva a lo largo de  $C$  es la dirección en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al vector normal  $N$ . Es decir, si se imagina que se toma el vector normal  $N$  con la mano derecha, con el dedo pulgar apuntando en la dirección de  $N$ , los demás dedos apuntarán en la dirección positiva de  $C$ , como se muestra en la figura 15.63.

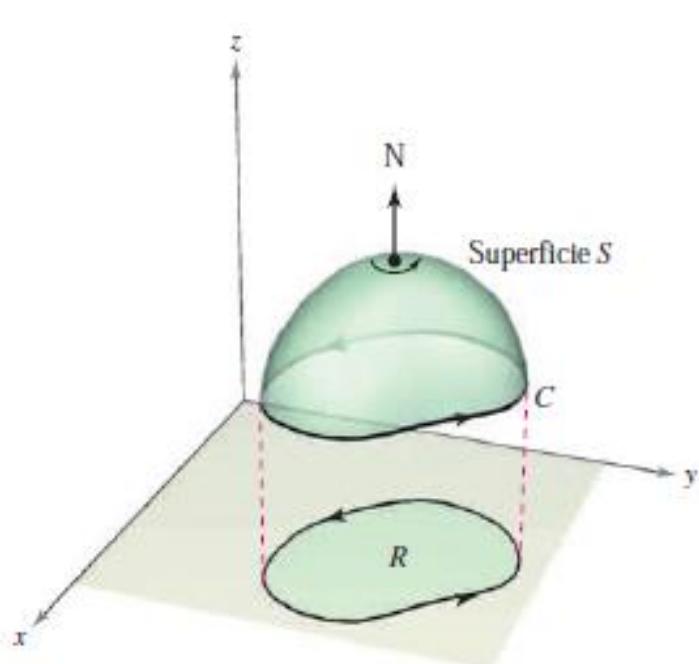
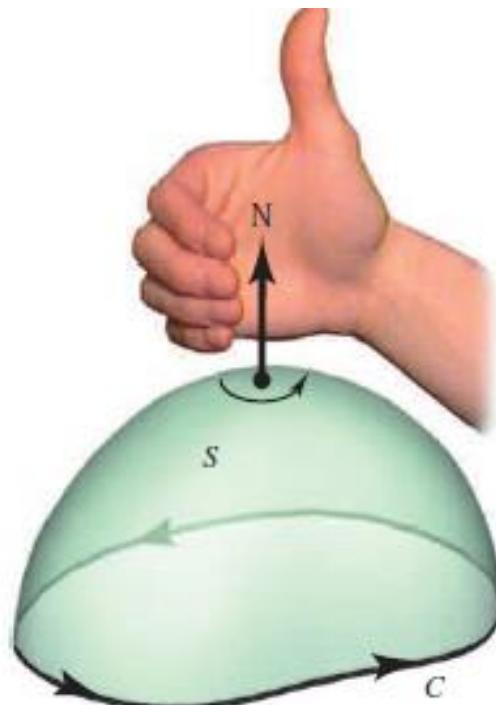


Figura 15.62



La dirección a lo largo de  $C$  es en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto a  $N$

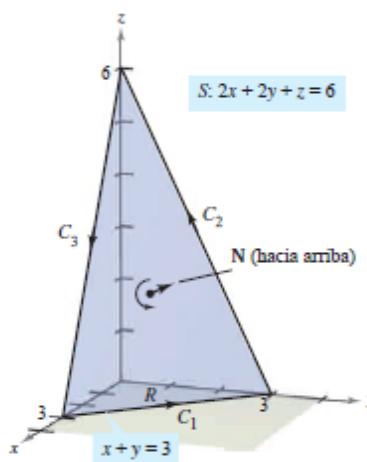
Figura 15.63

**TEOREMA 15.13 TEOREMA DE STOKES**

Sea  $S$  una superficie orientada con vector unitario normal  $\mathbf{N}$ , acotada por una curva cerrada simple, suave a trozos  $C$ , con orientación positiva. Si  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a  $S$  y a  $C$ , entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS.$$

**NOTA** La integral de línea puede escribirse en forma diferencial  $\int_C M dx + N dy + P dz$  o en forma vectorial  $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ . ■

**EJEMPLO 1** Aplicación del teorema de Stokes

Sea  $C$  el triángulo orientado situado en el plano  $2x + 2y + z = 6$ , como se muestra en la figura 15.64. Evaluar

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde  $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2 \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$ .

**Solución** Usando el teorema de Stokes, se empieza por hallar el rotacional de  $\mathbf{F}$ .

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$$

Considerando  $z = 6 - 2x - 2y = g(x, y)$ , se puede usar el teorema 15.11 para un vector normal dirigido hacia arriba para obtener

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS \\ &= \iint_R (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}) \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}] dA \\ &= \iint_R (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) dA \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (2y - 4) dx dy \\ &= \int_0^3 (-2y^2 + 10y - 12) dy \\ &= \left[ -\frac{2y^3}{3} + 5y^2 - 12y \right]_0^3 \\ &= -9. \end{aligned}$$

Figura 15.64

Trátese de evaluar la integral de línea del ejemplo 1 directamente, sin usar el teorema de Stokes. Una manera de hacerlo es considerar a  $C$  como la unión de  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , como sigue.

$$C_1: \mathbf{r}_1(t) = (3-t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3$$

$$C_2: \mathbf{r}_2(t) = (6-t)\mathbf{j} + (2t-6)\mathbf{k}, \quad 3 \leq t \leq 6$$

$$C_3: \mathbf{r}_3(t) = (t-6)\mathbf{i} + (18-2t)\mathbf{k}, \quad 6 \leq t \leq 9$$

El valor de la integral de la línea es

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_1'(t) dt + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_2'(t) dt + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_3'(t) dt \\ &= \int_0^3 t^2 dt + \int_3^6 (-2t+6) dt + \int_6^9 (-2t+12) dt \\ &= 9 - 9 - 9 \\ &= -9. \end{aligned}$$

## TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

### Divergencia de un campo vectorial

**NOTA** La divergencia puede verse como un tipo de derivadas de  $\mathbf{F}$  ya que, para campos de velocidades de partículas, mide el ritmo de flujo de partículas por unidad de volumen en un punto. En hidrodinámica (el estudio del movimiento de fluidos), un campo de velocidades de divergencia nula se llama **incompresible**. En el estudio de electricidad y magnetismo, un campo vectorial de divergencia nula se llama **el solenoideal**.

Se ha visto que el rotacional de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  es a su vez un campo vectorial. Otra función importante definida en un campo vectorial es la **divergencia**, que es una función escalar.

#### DEFINICIÓN DE DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL

La **divergencia** de  $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$  es

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}. \quad \text{Plano.}$$

La **divergencia** de  $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$  es

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}. \quad \text{Espacio.}$$

Si  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ , entonces se dice que  $\mathbf{F}$  es de **divergencia nula**.

La notación de producto escalar usada para la divergencia proviene de considerar  $\nabla$  como un **operador diferencial**, como sigue.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) &= \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{k} \right] \cdot (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}$$

Hay muchas propiedades importantes de la divergencia y el rotacional de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  (ver ejercicios 83 a 89). Se establece una de uso muy frecuente en el teorema 15.3. En el ejercicio 90 se pide demostrar este teorema.

#### TEOREMA 15.3 RELACIÓN ENTRE DIVERGENCIA Y ROTACIONAL

Si  $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$  es un campo vectorial y  $M, N$  y  $P$  tienen segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0.$$

## Teorema de la divergencia

Recordar que en la sección 15.4 se vio que una forma alternativa del teorema de Green es

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds &= \iint_R \left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA.\end{aligned}$$

De manera análoga, el **teorema de la divergencia** da la relación entre una integral triple sobre una región sólida  $Q$  y una integral de superficie sobre la superficie de  $Q$ . En el enunciado del teorema, la superficie  $S$  es **cerrada** en el sentido de que forma toda la frontera completa del sólido  $Q$ . Ejemplos de superficies cerradas surgen de las regiones limitadas o acotadas por esferas, elipsoides, cubos, tetraedros, o combinaciones de estas superficies. Se supone que  $Q$  es una región sólida sobre la cual se evalúa una integral triple, y que la superficie cerrada  $S$  está orientada mediante vectores normales unitarios dirigidos hacia el **exterior**, como se muestra en la figura 15.54. Con estas restricciones sobre  $S$  y  $Q$ , el teorema de la divergencia es como sigue.

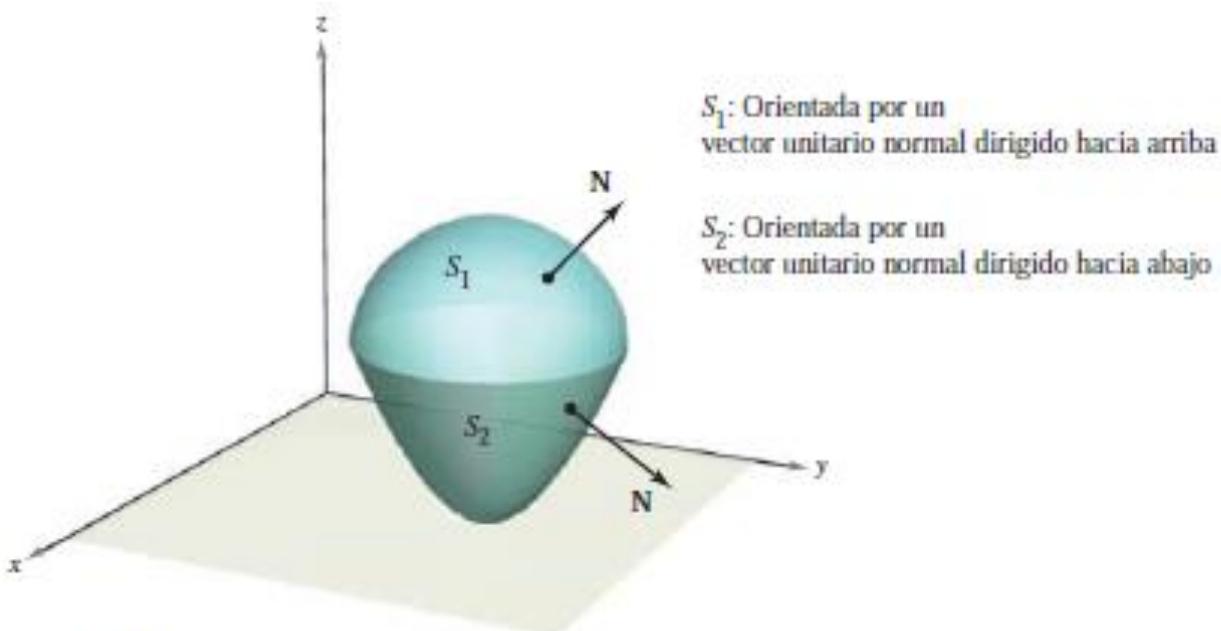


Figura 15.54

### TEOREMA 15.12 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Sea  $Q$  una región sólida limitada o acotada por una superficie cerrada  $S$  orientada por un vector unitario normal dirigido hacia el exterior de  $Q$ . Si  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en  $Q$ , entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} dV.$$

**NOTA** Como se indica arriba, al teorema de la divergencia a veces se le llama teorema de Gauss. También se le llama teorema de Ostrogradsky, en honor al matemático ruso Michel Ostrogradsky (1801-1861). ■

### DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA (LARGO)

**NOTA** Esta prueba se restringe a una región sólida *simple*. Es mejor dejar la prueba general para un curso de cálculo avanzado.

**DEMOSTRACIÓN** Si se hace  $\mathbf{F}(x, y, z) = Mi + Nj + Pk$ , el teorema toma la forma

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \iint_S (Mi \cdot \mathbf{N} + Nj \cdot \mathbf{N} + Pk \cdot \mathbf{N}) dS \\ &= \iiint_Q \left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dV. \end{aligned}$$

Esto se puede demostrar verificando que las tres ecuaciones siguientes son válidas.

$$\iint_S Mi \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_Q \frac{\partial M}{\partial x} dV$$

$$\iint_S Nj \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_Q \frac{\partial N}{\partial y} dV$$

$$\iint_S Pk \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} dV$$

Como las verificaciones de las tres ecuaciones son similares, sólo se verá la tercera. La demostración se restringe a una región sólida **simple**, con superficie superior

$$z = g_2(x, y) \quad \text{Superficie superior.}$$

y superficie inferior

$$z = g_1(x, y) \quad \text{Superficie inferior.}$$

cuyas proyecciones sobre el plano  $xy$  coinciden y forman la región  $R$ . Si  $Q$  tiene una superficie lateral como  $S_3$  en la figura 15.55, entonces un vector normal es horizontal, lo cual implica que  $Pk \cdot \mathbf{N} = 0$ . Por consiguiente, se tiene

$$\iint_S Pk \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{S_1} Pk \cdot \mathbf{N} dS + \iint_{S_2} Pk \cdot \mathbf{N} dS + 0.$$

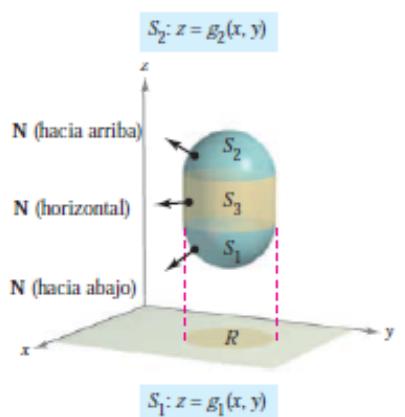


Figura 15.55

Sobre la superficie superior  $S_2$ , el vector normal dirigido hacia el exterior apunta hacia arriba, mientras que en la superficie inferior  $S_1$ , el vector normal dirigido hacia el exterior apunta hacia abajo. Por tanto, por el teorema 15.11, se tiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} Pk \cdot \mathbf{N} dS &= \iint_R P(x, y, g_1(x, y)) \mathbf{k} \cdot \left( \frac{\partial g_1}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k} \right) dA \\ &= - \iint_R P(x, y, g_1(x, y)) dA \\ \iint_{S_2} Pk \cdot \mathbf{N} dS &= \iint_R P(x, y, g_2(x, y)) \mathbf{k} \cdot \left( -\frac{\partial g_2}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g_2}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dA \\ &= \iint_R P(x, y, g_2(x, y)) dA \end{aligned}$$

Sumando estos resultados, se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_S Pk \cdot \mathbf{N} dS &= \iint_R [P(x, y, g_2(x, y)) - P(x, y, g_1(x, y))] dA \\ &= \iint_R \left[ \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} \frac{\partial P}{\partial z} dz \right] dA \\ &= \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} dV. \end{aligned}$$

## EJEMPLO

**EJEMPLO 3 Aplicación del teorema de la divergencia**

Sea  $Q$  el sólido limitado o acotado por el cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ , el plano  $x + z = 6$  y el plano  $xy$ , como se muestra en la figura 15.58. Hallar

$$\int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$$

donde  $S$  es la superficie de  $Q$  y

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + \operatorname{sen} z)\mathbf{i} + (xy + \cos z)\mathbf{j} + e^y\mathbf{k}.$$

**Solución** La evaluación directa de esta integral de superficie sería difícil. Sin embargo, por el teorema de la divergencia, se puede evaluar la integral como sigue.

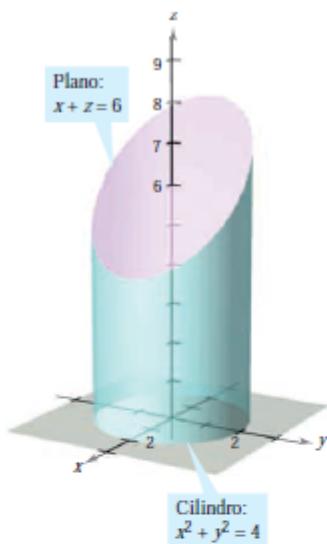


Figura 15.58

$$\begin{aligned}\int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} dV \\ &= \iiint_Q (2x + x + 0) dV \\ &= \iiint_Q 3x dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{6-r\cos\theta} (3r\cos\theta)r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (18r^2\cos\theta - 3r^3\cos^2\theta) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (48\cos\theta - 12\cos^2\theta) d\theta \\ &= \left[ 48\sin\theta - 6\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) \right]_0^{2\pi} \\ &= -12\pi\end{aligned}$$

Nótese que para evaluar la integral triple se emplearon coordenadas cilíndricas con  $x = r\cos\theta$  y  $dV = r dz dr d\theta$ .

## EJEMPLO 4 Calcular el flujo mediante el teorema de la divergencia

Sea  $Q$  la región limitada o acotada por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ . Hallar el flujo dirigido hacia afuera del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x^3\mathbf{i} + 2y^3\mathbf{j} + 2z^3\mathbf{k}$  a través de la esfera.

**Solución** Por el teorema de la divergencia, se tiene

$$\begin{aligned}
 \text{Flujo a través de } S &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} dV \\
 &= \iiint_Q 6(x^2 + y^2 + z^2) dV \\
 &= 6 \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin \phi d\theta d\phi d\rho \quad \text{Coordenadas esféricas.} \\
 &= 6 \int_0^2 \int_0^\pi 2\pi \rho^4 \sin \phi d\phi d\rho \\
 &= 12\pi \int_0^2 2\rho^4 d\rho \\
 &= 24\pi \left( \frac{32}{5} \right) \\
 &= \frac{768\pi}{5}.
 \end{aligned}$$

## RESUMEN DE FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN

### Resumen de fórmulas de integración

Teorema fundamental del cálculo:

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

Teorema fundamental de las integrales de línea:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

Teorema de Green:

$$\begin{aligned}
 \int_C M dx + N dy &= \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA \\
 \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds &= \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dA
 \end{aligned}$$

Teorema de divergencia:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

Teorema de Stokes:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS$$

## TEMA 6: ECUACIONES DIFERENCIALES: Definición, Tipos de soluciones, Métodos de Resolución de EDO de 1er y 2do Orden.

Una **ecuación diferencial** es una ecuación en la que intervienen derivadas de una o más funciones desconocidas. Dependiendo del número de variables independientes respecto de las que se deriva, las ecuaciones diferenciales se dividen en:

- **Ecuaciones diferenciales ordinarias:** aquellas que contienen derivadas respecto a una sola variable independiente.
- **Ecuaciones en derivadas parciales:** aquellas que contienen derivadas respecto a dos o más variables.

A la variable dependiente también se le llama función incógnita (desconocida). La resolución de ecuaciones diferenciales es un tipo de problema matemático que consiste en buscar una función que cumpla una determinada ecuación diferencial. Se puede llevar a cabo mediante un método específico para la ecuación diferencial en cuestión o mediante una transformada (como, por ejemplo, la transformada de Laplace).

### Orden de la ecuación

El orden de la derivada más alta en una ecuación diferencial se denomina **orden de la ecuación**.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dx} + 3y = 0 \quad \text{orden 2 por } \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y''' + y'' + y' + y = \operatorname{sen} 3x \quad \text{orden 3 por } y'''$$

$$(x + y)dx = (y - x)dy \quad \text{orden 1 por "dx" y "dy"}$$

$$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2 \quad \text{orden 2 por } y'$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 3 \frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x} \quad \text{orden 4 por } \frac{d^4y}{dx^4}$$

### Grado de la ecuación

Es la potencia de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación, siempre y cuando la ecuación esté en forma polinómica, de no ser así se considera que no tiene grado.

1)  $e^x \frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} x \frac{dy}{dx} = x$       2<sup>do</sup> orden      1<sup>er</sup> grado

2)  $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + xy = 0$       3<sup>er</sup> orden      2<sup>do</sup> grado

3)  $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} = \tan x$       3<sup>er</sup> orden      1<sup>er</sup> grado

4)  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$       1<sup>er</sup> orden      1<sup>er</sup> grado

### Ecuación diferencial lineal

Se dice que una ecuación es lineal si tiene la forma  $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$ , es decir:

- Ni la función ni sus derivadas están elevadas a ninguna potencia distinta de uno o cero.
- En cada coeficiente que aparece multiplicándolas sólo interviene la variable independiente.
- Una combinación lineal de sus soluciones es también solución de la ecuación.

Ejemplos:

- $y' = y$  es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden, tiene como soluciones  $y = f(x) = k \cdot e^x$ , con  $k$  un número real cualquiera.
- $y'' + y = 0$  es una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden, tiene como soluciones  $y = f(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$ , con  $a$  y  $b$  reales.
- $y'' - y = 0$  es una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden, tiene como soluciones  $a \cdot e^x + b \cdot 1/(e^x)$ , con  $a$  y  $b$  reales.

## SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

### Tipos de soluciones

Una solución de una ecuación diferencial es una función que al reemplazar a la función incógnita, en cada caso con las derivaciones correspondientes, verifica la ecuación, es decir, la convierte en una identidad. Hay tres tipos de soluciones:

1. **Solución general:** una solución de tipo genérico, expresada con una o más constantes.

### Solución general

Es un haz de curvas. Tiene un orden de infinitud de acuerdo a su cantidad de constantes (una constante corresponde a una familia simplemente infinita, dos constantes a una familia doblemente infinita, etc.). En caso de que la ecuación sea lineal, la solución general se logra como combinación lineal de las soluciones (tantas como el orden de la ecuación) de la ecuación homogénea (que resulta de hacer el término no dependiente de  $y(x)$  ni de sus derivadas igual a 0) más una solución particular de la ecuación completa.

1. **Solución particular:** Si fijando cualquier punto  $P(X_0, Y_0)$  por donde debe pasar necesariamente la solución de la ecuación diferencial, existe un único valor de C, y por lo tanto de la curva integral que satisface la ecuación, éste recibirá el nombre de solución particular de la ecuación en el punto  $P(X_0, Y_0)$ , que recibe el nombre de condición inicial.

### Solución particular

Es un caso particular de la solución general, en donde la constante (o constantes) recibe un valor específico.

1. **Solución singular:** una función que verifica la ecuación, pero que no se obtiene particularizando la solución general.

### Solución singular

Solución de la ecuación no consistente en una particular de la general

## ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Una ecuación diferencial de segundo orden es de la forma

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Si  $f(x) = 0$  se llama **Ecuación homogénea**, como por ejemplo

$$y'' + 3y' + 4y = 0$$

Si  $f(x) \neq 0$  se llama **Ecuación no homogénea**, como por ejemplo

$$y'' + 6y' + 5y = 2\sin x$$

## ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Una ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes constantes es de la forma:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

La ecuación característica o auxiliar es de la forma

$$am^2 + bm + c = 0$$

Como se observa la ecuación auxiliar es una ecuación cuadrática cuyas raíces se las puede determinar empleando la fórmula general

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- $m_1$  y  $m_2$  reales y distintas ( $b^2 - 4ac > 0$ ),
- $m_1$  y  $m_2$  reales e iguales ( $b^2 - 4ac = 0$ ), y
- $m_1$  y  $m_2$  números conjugados complejos ( $b^2 - 4ac < 0$ ).

Analicemos cada uno de estos casos.

**CASO I: RAÍCES REALES Y DISTINTAS** Bajo la suposición de que la ecuación auxiliar (3) tiene dos raíces reales desiguales  $m_1$  y  $m_2$ , encontramos dos soluciones,  $y_1 = e^{m_1 x}$  y  $y_2 = e^{m_2 x}$ . Vemos que estas funciones son linealmente independientes en  $(-\infty, \infty)$  y, por tanto, forman un conjunto fundamental. Se deduce que la solución general de (2) en este intervalo es

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}. \quad (4)$$

**CASO II: RAÍCES REALES REPETIDAS** Cuando  $m_1 = m_2$ , necesariamente se obtiene sólo una solución exponencial,  $y_1 = e^{m_1 x}$ . De la fórmula cuadrática se encuentra que  $m_1 = -b/2a$  puesto que la única forma en que se tiene que  $m_1 = m_2$  es tener  $b^2 - 4ac = 0$ . Tenemos de (5) en la sección 4.2 que una segunda solución de la ecuación es

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}} dx = e^{m_1 x} \int dx = x e^{m_1 x}. \quad (5)$$

En (5) hemos usado el hecho de que  $-b/a = 2m_1$ . La solución general es entonces

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}. \quad (6)$$

**CASO III: RAÍCES COMPLEJAS CONJUGADAS** Si  $m_1$  y  $m_2$  son complejas, entonces se puede escribir  $m_1 = \alpha + i\beta$  y  $m_2 = \alpha - i\beta$ , donde  $\alpha$  y  $\beta > 0$  son reales  $i^2 = -1$ . De manera formal, no hay diferencia entre este caso y el caso I y, por tanto,

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Sin embargo, en la práctica se prefiere trabajar con funciones reales en lugar de exponentiales complejas. Con este fin se usa la **fórmula de Euler**:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

donde  $\theta$  es cualquier número real.\* Se tiene de esta fórmula que

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x \quad \text{y} \quad e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x, \quad (7)$$

Por tanto es necesario recordar la solución de una ecuación cuadrática donde se pueden presentar tres casos.

**Primer caso: raíces reales y diferentes**

Discriminante positivo ( $b^2 - 4ac \geq 0$ ). Entonces  $m_1$  y  $m_2$  son raíces reales y diferentes. En este caso se dice que existen dos soluciones particulares o fundamentales

$$y_1 = C_1 e^{m_1 x}$$

$$y_2 = C_2 e^{m_2 x}$$

La solución General estaria dada por la combinación lineal de las soluciones fundamentales

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

### Ejemplo 1

Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 6y' - 7y = 0$$

Solución:

La ecuación característica o auxiliar es

$$m^2 + 6m - 7 = 0$$

Al resolver la ecuación auxiliar se tiene

$$(m + 7)(m - 1) = 0 \Rightarrow m_1 = -7 ; m_2 = 1$$

Luego las soluciones particulares son

$$y_1 = C_1 e^{m_1 x} \Rightarrow y_1 = C_1 e^{-7x}$$

$$y_2 = C_2 e^{m_2 x} \Rightarrow y_2 = C_2 e^x$$

Además, como estas dos soluciones son linealmente independientes, la solución general es

$$y = C_1 e^{-7x} + C_2 e^x$$

### Segundo Caso: Soluciones reales e iguales

Discriminante cero ( $b^2 - 4ac = 0$ ). Entonces  $m_1$  y  $m_2$  son raíces reales e iguales. En este caso la solución general es

$$y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}$$

**Ejemplo:**

Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

La ecuación característica o auxiliar es  $m^2 + 4m + 4 = 0$

Al resolver la ecuación auxiliar se tiene

$$(m + 2)(m + 2) = (m + 2)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = -2$$

Luego la solución general es

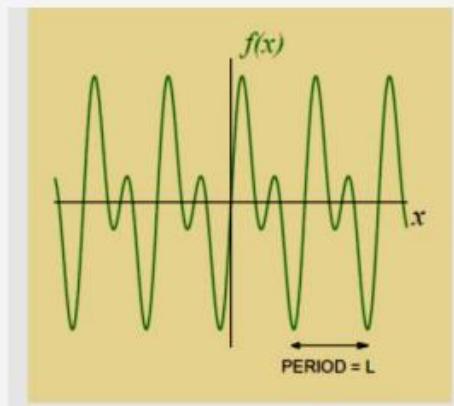
$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

## TEMA 7: SERIES DE FOURIER. Definición. Analizar el armónico principal.

### Relaciones con las señales. Puntos de discontinuidad de las Señales.

Cualquier función periódica  $f(x)$ , razonablemente adecuada, tiene una representación en series infinitas de términos trigonométricos. Estas series trigonométricas se conocen como ***series de Fourier***; son análogas a las ***series de Taylor*** en el siguiente sentido: ambos tipos de series proveen una manera de expresar funciones complicadas en términos de ciertas funciones elementales.

- **Definición.** Una función  $f(x)$  se dice **periódica** si existe un número  $L \neq 0$  (llamado **período**) tal que  $f(x + L) = f(x)$  para todo  $x \in (-\infty, \infty)$ .



- **Propiedades.**

- Si  $f(x)$  es una función periódica con período  $L$  y  $n \in \mathbb{Z}$ ; entonces  $f(x)$  también tiene período  $nL$ .
- Una función constante puede ser considerada una función periódica con período arbitrario; es decir, cualquier número real es un período posible.
- Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones periódicas con período  $L$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ ; entonces la combinación lineal  $af(x) + bg(x)$  y el producto  $f(x)g(x)$  también son funciones periódicas con período  $L$ .

- **Definición.** Sea  $f(x)$  una función seccionalmente continua en  $[-p, p]$ . La serie

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right),$$

donde los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  están definidos por

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx; \quad b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx;$$

es la ***serie de Fourier asociada a f(x)***. Los coeficientes se denominan **coeficientes de Fourier de f(x) con respecto al sistema trigonométrico**

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi x}{p}, \sin \frac{\pi x}{p}, \cos \frac{2\pi x}{p}, \sin \frac{2\pi x}{p}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{p}, \sin \frac{n\pi x}{p}, \dots \right\}.$$

El sistema trigonométrico tiene la siguiente **propiedad de ortogonalidad**: si  $\varphi_n(x)$  y  $\varphi_m(x)$  representan dos funciones cualesquiera de la familia,

$$\int_{-p}^p \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ p & m = n \neq 0 \\ \frac{p}{2} & m = n = 0 \end{cases}$$

► Observaciones.

- A diferencia de las series de Taylor, definidas solamente cuando la función es indefinidamente derivable, la única condición para que las series de Fourier estén definidas es que la función sea integrable sobre un intervalo. Recordemos que hay funciones integrables con infinitas discontinuidades. Es decir, el concepto de series de Fourier es mucho menos restrictivo que el de series de Taylor. Esta es una de las grandes ventajas de la teoría de Fourier: puede aplicarse a funciones muy generales.
- Si se cambiara el valor de una función en un número finito de puntos, esto no afectaría para nada a los coeficientes de Fourier de esa función porque estos se calculan por medio de integrales. Tampoco es importante que una función no esté definida en un conjunto finito de puntos porque esto no afecta su integrabilidad ni el valor de su integral.
- De acuerdo a su definición, el término constante  $a_0/2$  en la serie de Fourier de  $f(x)$  representa el valor promedio de  $f(x)$  en el intervalo  $[-p, p]$ .
- Como veremos más adelante, la hipótesis de periodicidad no es restrictiva para la aplicación de la teoría de Fourier.

En algunos textos, para homogeneizar la definición de los coeficientes es común ver expresada la serie de Fourier como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell} \cos(\ell x) + b_{\ell} \sin(\ell x)$$

con

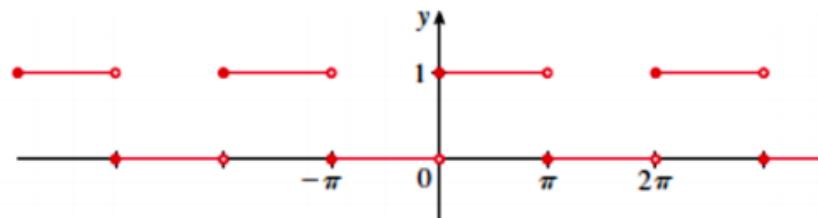
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_{\ell} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(\ell x) dx \\ b_{\ell} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(\ell x) dx \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.**

Encontrar la serie de Fourier asociada a la **función onda cuadrada** definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}; \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

De acuerdo a la definición,  $f(x)$  es periódica con período  $L = 2\pi$ .



Usando las fórmulas para calcular los coeficientes, se tiene

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n\pi} \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n\pi} \Big|_0^{\pi} = \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{2}{n\pi} & n \text{ impar} \end{cases}$$

Como un número impar puede escribirse de la forma  $2k + 1$ ; con  $k$  número entero, la serie de Fourier asociada a  $f(x)$  será

$$S(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x.$$

**Teorema (convergencia puntual de las series de Fourier).** Sea  $f(x)$  una función continua a trozos en  $[-p, p]$ , cuya derivada existe y es continua a trozos. Entonces, la serie de Fourier asociada a  $f(x)$  converge en cada punto  $x \in [-p, p]$  y su suma,

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right),$$

verifica las siguientes relaciones:

- $S(x_0) = f(x_0)$  si  $x_0 \in (-p, p)$  y  $f(x)$  es continua en el punto  $x_0$ ,
- $S(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$  si  $x_0 \in (-p, p)$  y  $f(x)$  es discontinua en el punto  $x_0$ ,
- $S(-p) = S(p) = \frac{f(-p^+) + f(p^-)}{2}$ .

Fuera del intervalo  $[-p, p]$ , la serie converge a la extensión periódica de la función  $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ .

► Observaciones.

- Las condiciones dadas en este teorema solo son suficientes para la convergencia de la serie de Fourier; de ninguna manera son necesarias. A fin de obtener una mejor comprensión del contenido del teorema, es útil considerar algunas clases de funciones que no satisfacen las condiciones asumidas. Entre las funciones que no son incluidas en el teorema están, principalmente, aquellas con discontinuidades infinitas en el intervalo  $[-L, L]$ , tales como  $1/x^2$  cuando  $x \rightarrow 0$  o  $\ln|x - L|$  cuando  $x \rightarrow L$ . También están excluidas las funciones que tienen un número infinito de discontinuidades en este intervalo acotado; sin embargo, tales funciones se encuentran raramente en las aplicaciones.
- A pesar de que cada término en la serie  $S(x)$  es diferenciable infinita veces, una serie de Fourier puede converger en una suma que no es diferenciable o incluso que no es continua.

**Ejemplo 3.**

Volvamos a la serie de Fourier asociada a la función onda cuadrada. Del Teorema de convergencia puntual, se tiene

- a) en un punto donde  $f(x)$  es continua; por ejemplo,  $x_0 = \pi/2$ ,

$$S(\pi/2) = f(\pi/2) = 1$$

- b) en  $x_0 = 0$ , donde  $f(x)$  tiene una discontinuidad tipo salto,

$$S(0) = \frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) = \frac{1}{2},$$

- c) en los puntos extremos  $x_0 = \pm\pi$ ,

$$S(\pm\pi) = \frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) \right) = \frac{1}{2}.$$

Como una aplicación curiosa, el Teorema de convergencia permite calcular sumas de series numéricas. En efecto, del resultado a) se deduce

$$S(\pi/2) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2k+1} \underbrace{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)}_{\text{Fórmula}} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Supongáse que  $f(x)$  y  $f'(x)$  son funciones seccionalmente continuas en  $[-p, p]$ .

► **Series de Cosenos.** Si  $f(x)$  es par, entonces

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right), \quad -p \leq x \leq p.$$

En efecto, por la definición de los coeficientes de Fourier, se tiene

$$f(x) \text{ es par} \rightarrow \begin{cases} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) & \text{es par} \\ f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) & \text{es impar} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_0 & = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx, \\ a_n & = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx, \\ b_n & = 0; \end{cases}$$

► **Series de Senos.** Si  $f(x)$  es impar, entonces

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n \geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right), \quad -p \leq x \leq p.$$

Nuevamente, por la definición de los coeficientes de Fourier, se tiene

$$f(x) \text{ es impar} \rightarrow \begin{cases} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) & \text{es impar} \\ f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) & \text{es par} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_0 & = 0, \\ a_n & = 0, \\ b_n & = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx. \end{cases}$$

#### Ejemplo 4.

Encontrar la serie de Fourier de la **función diente de sierra** definida por  $f(x) = x$ , para  $-L < x < L$ , y  $f(x+2L) = f(x)$ .

Dado que  $f(x)$  es una función impar, los coeficientes de Fourier serán

$$a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 \left( \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \frac{n\pi x}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \Big|_0^L = (-1)^{n+1} \frac{2L}{n\pi}.$$

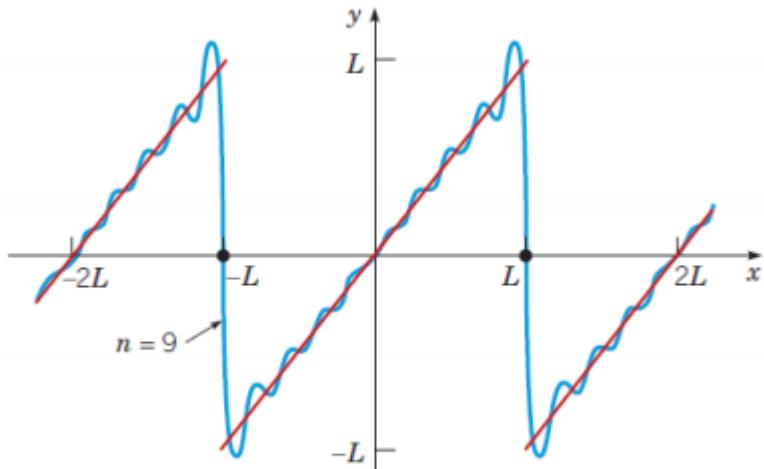
Luego, la serie de Fourier para  $f(x)$  es

$$S(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

Observemos que la función  $f(x)$  es discontinua en los puntos  $\pm L, \pm 3L, \dots$ . En esos puntos, se comprueba fácilmente que  $S(x)$  converge a la semisuma de los valores laterales de  $f(x)$ ; es decir, a cero, como lo determina el Teorema de convergencia puntual. Finalmente, se tiene

$$S(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

En la siguiente figura, se muestra la suma parcial correspondiente a  $n = 9$ . El fenómeno de Gibbs también está presente cerca de los puntos de discontinuidad.



★ ★ ★

## Análisis armónico

En matemáticas, el **análisis armónico** o **análisis de Fourier** estudia la representación de funciones o señales como superposición de ondas "básicas" o armónicos.

Investiga y generaliza las nociones de series de Fourier y transformadas de Fourier. A lo largo de los siglos XIX y XX se ha convertido en una materia enorme con aplicaciones en campos diversos como el procesamiento de señales, la espectroscopia, la mecánica cuántica o la neurociencia.

## Serie de Fourier

Las series de Fourier se utilizan para descomponer una función, señal u onda periódica como suma infinita o finita de funciones, señales u ondas armónicas o sinusoidales; es decir, una serie de Fourier es un tipo de serie trigonométrica.

## Transformada de Fourier

La transformada clásica de Fourier en  $\mathbb{R}^n$  aún es un área de investigación activa, sobre todo en la transformación de Fourier sobre objetos más generales, como las distribuciones temperadas. Por ejemplo, si imponemos algunos requerimientos sobre una distribución  $f$ , podemos intentar trasladarlos a términos de su transformada de Fourier. El Teorema de Paley-Wiener es un ejemplo de ello, que implica inmediatamente que si  $f$  es una distribución de soporte compacto (lo que incluye a las funciones de soporte compacto), entonces su transformada de Fourier no tiene nunca el soporte compacto. Esto es un tipo muy elemental de un principio de incertidumbre en términos del análisis armónico.

Las series de Fourier pueden ser estudiadas convenientemente en el contexto de los espacios de Hilbert, lo que nos da una conexión entre el análisis armónico y el análisis funcional.

### 3.1. Funciones Pares e Impares

Las series de Fourier son más sencillas de obtener si las funciones son pares o impares. En estos casos no será necesario calcular todos los términos.

- **Funciones Pares.** Si las funciones son pares, tendremos que

- $f(x) \cos(\ell x)$  será par
- $f(x) \sin(\ell x)$  será impar

En este caso, los  $b_\ell$  serán nulos, por lo que no será necesario calcularlos. Además,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx, \quad a_\ell = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(\ell x) dx$$

- **Funciones Impares.** Si las funciones son impares, tendremos que

- $f(x) \cos(\ell x)$  será impar
- $f(x) \sin(\ell x)$  será par

En este caso,  $a_0$  y los  $a_\ell$  serán nulos, por lo que no será necesario calcularlos. Además,

$$b_\ell = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(\ell x) dx$$

## 1.6. Variantes de la serie de Fourier

### 1.6.1. Cambio de periodo.

Hemos considerado funciones periódicas de periodo  $2\pi$ . Si el periodo es  $2\ell$ , la serie trigonométrica debe modificarse y tomarse de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{\pi k x}{\ell} + b_k \sin \frac{\pi k x}{\ell} \right).$$

Las fórmulas de los coeficientes también deben adaptarse convenientemente y quedan

$$a_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi k x}{\ell} dx, \quad b_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi k x}{\ell} dx.$$

### 1.6.2. Series de Fourier de senos y cosenos.

Dada una función en el intervalo  $(0, \pi)$ , se pueden definir muchas funciones en  $(-\pi, \pi)$  que coincidan con ella en  $(0, \pi)$ ; cada una de las extensiones tendrá una serie de Fourier propia. Pero algunas extensiones tienen especial interés.

Teniendo en cuenta la propiedad 4 de la sección 1.3, se puede elegir la extensión de manera que tengamos una función par y, en ese caso, la serie de Fourier sólo tiene cosenos. Se llama *serie de Fourier de cosenos* de la función original y sus coeficientes se calculan por la fórmula (1.6) (en la que sólo interviene la función dada en el intervalo original).

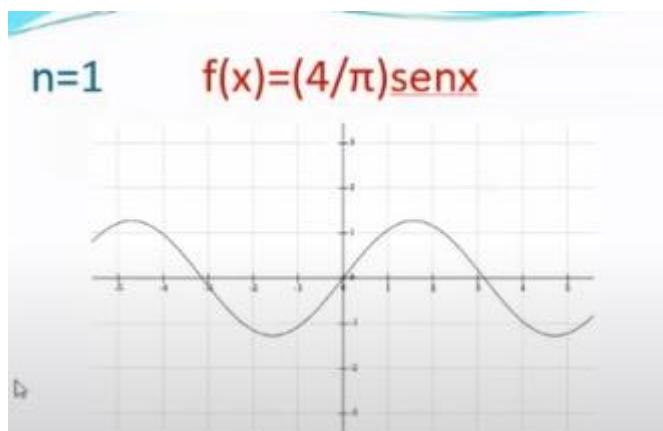
Del mismo modo, si elegimos una extensión impar, la serie que resulta es la *serie de Fourier de senos* de la función dada y sus coeficientes vienen determinados por (1.7).

Se pueden hacer construcciones semejantes a partir de cualquier intervalo.

### SOBRE EL ARMONICO PRINCIPAL QUE HABLAN EN CLASE

Y a la vibración fundamental de cada tono musical también se le llama primer **armónico** porque generalmente se acompaña de otras vibraciones menores divididas en 2, 3, 4, 5 o más partes iguales. ... En acústica y telecomunicaciones, un **armónico** de una onda es un componente sinusoidal de una señal.

En matemáticas, el análisis **armónico** o análisis de **Fourier** estudia la representación de funciones o señales como superposición de ondas "básicas" o **armónicos**. ... Investiga y generaliza las nociones de series de **Fourier** y transformadas de **Fourier**.



En la clase respecto de este grafico dice q para  $n= 1$

Tiene periodo  $2\pi$

Y dice para  $n= 1$  tenemos el armónico principal

[21:10, 28/11/2020] Jorge Hadad: creo q en realidad es

[21:10, 28/11/2020] Jorge Hadad: como el termino q no se anulaba en esa parte de lo de fourier

[21:11, 28/11/2020] Jorge Hadad: pq viste q se anulaba el seno el coseno

[21:11, 28/11/2020] Jorge Hadad: entonces la función en la q no se anula para N=1 va a constituir el armónico principal de la función

## Serie de Fourier en forma armónica y espectro.

### Definición y obtención

Serie de Fourier en forma armónica.- La forma armónica para una función  $f(x)$   $2p$ -periódica es

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nwx + \phi_n)$$

o bien

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nwx - \varphi_n)$$

donde  $w = \frac{\pi}{p}$  y

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}, \quad \varphi_n = \frac{\pi}{2} - \phi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$$

siendo  $a_n$  y  $b_n$  los coeficientes de la forma compleja.