Université Paris IX - Dauphine | **U.V. Informatique**
Master EMFi | **Année 2018/2019**

PROJET EXCEL : STRATEGIES ALEATOIRES DE COOPERATION

Commençons par le dilemme du prisonnier…

Le dilemme du prisonnier dont le principe apparaît ci-après est l'un des jeux les plus étudiés et les plus anciens de l'analyse économique. Par jeu, on entend ici un processus de décision à l'issue duquel les protagonistes calculent et obtiennent des gains (ou des pertes).

Supposons deux prisonniers, notés A et B, accusés tout les deux d'un délit avéré mais dont la peine qu'ils encourent (et qui n'a pas été prononcée) est directement fonction de la stratégie qu'ils adoptent. En effet, ces deux prisonniers, qui doivent bientôt comparaître, n'ont pas encore été interrogés et le seront prochainement.

S'ils avouent tout les deux leur forfait, ils seront condamnés à 5 ans de prison. S'ils nient tout les deux, ils n'encourent qu'une peine de 1 an de prison. Si l'un des deux avoue et l'autre non, celui qui a avoué sera à condamné 10 ans de prison et l'autre acquitté. Dans toute la littérature où ce jeu est analysé, on peut le résumer dans la matrice suivante :

		Stratégie du prisonnier B	
		Avoue	Nie
Stratégie du prisonnier A	Avoue	(5 ; 5)	(0 ; 10)
	Nie	(10 ; 0)	(1 ; 1)

Dans une telle matrice, les « gains » étant évalué en années de prison, il est intéressant de les minimiser. Il est clair que la stratégie optimale collective est de nier puisqu'ils encourent chacun une peine légère. Mais chaque prisonnier est interrogé séparément de son comparse et ignore si l'autre va avouer ! Si la stratégie optimale est la coopération, l'incertitude sur la décision du complice va les pousser à la délation, pensant que l'autre, en avouant souhaite être acquitté. Ainsi, ils avoueront tous les deux (pensant que l'autre avoue) et sont *in fine* condamnés à 5 ans de prison ! Cet exemple illustre le paradoxe qui veut que la stratégie dominante ne soit pas nécessairement celle adoptée par les deux joueurs.

Extension à une population toute entière

Dans tout processus où les joueurs ont le choix entre la coopération est la défection, l'attitude qu'ils adoptent dépend évidemment du prix de la trahison ! Quel intérêt ont-ils à coopérer ou à trahir ? Dans la suite du texte, on qualifiera de *coopératif* un joueur qui accepte de collaborer avec son rival et de *défectionnaire* (celui qui trahi) celui qui est plutôt enclin à la trahison. Représentons les gains associés à cette stratégie dans la matrice suivante :

		Stratégie du joueur B	
		Coopératif	Défectionnaire
Stratégie du joueur A	Coopératif	(R ; R)	(S ; T)
	Défectionnaire	(T ; S)	(P ; P)

• Si les deux joueurs adoptent un comportement coopératif, ils gagent chacun R points.

• Si l'un des joueurs fait défection tandis que l'autre coopère, alors le traître empochent T points (la plus grosse prime) dans que le trahi n'a que S points (la plus faible).

• Si les deux joueurs se trahissent mutuellement, alors ils gagnent chacun P points.

Il est clair que la trahison se doit d'être payée à son juste prix ($T > R$) car sans prime à la trahison, le comportement coopératif serait toujours la stratégie dominante. Maintenant pour que le paradoxe observé ci-dessus dans le cas des deux prisonniers, on doit avoir la relation suivante :

$\boxed{T > R > P \geq S}$

Dans ces conditions, il est clair que, pour une rencontre donnée, la stratégie optimale est la défection systématique. En effet, quel que soit le choix de l'adversaire, la prime reçue par le défectionnaire est supérieure à celui qu'il aurait empochée s'il avait choisi de coopérer. Le paradoxe est le suivant : si les joueurs appliquent ce raisonnement, tous deux font défection et gagnent P, c'est-à-dire moins que s'ils avaient choisi la coopération mutuelle qui leur aurait rapporté R à chacun. Pour plus de réalisme, on va adapter ce jeu à une population entière dont chaque individu adopte toujours la même attitude extrême et opposée : systématiquement coopératif ou bien systématiquement défectionnaire. L'intérêt d'une telle simulation consistera justement à observer les luttes territoriales de ces deux groupes.

Il est parfaitement possible de disposer une telle population sur un terrain de combat composé de cases carrées et d'étudier le système résultant d'une telle confrontation. Ainsi, on fait les hypothèses suivantes :

• Il faut partir d'un état initial soit parfaitement défini (les coopératifs d'un coté et les défectionnaires de l'autre par exemple, mais c'est loin d'être le cas le plus intéressant…) soit complètement aléatoire (mais en définissant préalablement la proportion de coopératifs et de défectionnaires).

• A chaque tour (itération), l'attribution des cases est remise en cause en fonction du score (gain) réalisé par le propriétaire actuel de la case et par ses voisins immédiats. Celui est obtient le meilleur score (qu'il soit coopératif ou défectionnaire) en devient le nouveau propriétaire. Par exemple, si une case est occupée par un coopérateur à une certaine itération et que le meilleur score ait été réalisé contre lui par un de ses voisins défectionnaires, alors la case devient la propriété de la fraction des défectionnaires. A chaque tour, le score de chaque case est bien entendu remis à 0.

• Le comportement du système va dépendre des détails de la règle permettant d'arbitrer les rencontres individuelles. Il faut donc préciser les valeurs exactes des gains obtenus (c'est-à-dire les scores T, R, P et S). Pour donner au système une richesse géométrique plus grande, on considère un voisinage de 8 cases, seule manière de prendre en compte non seulement les rencontres avec les cases qui touchent la case considérée par leur coté mais aussi celles qui la touchent par leur coin. Enfin, il faut aussi considérer la rencontre de l'individu avec lui-même. En effet, on supposera que la case n'est pas occupée par un membre unique mais par plusieurs individus d'une même faction qui peuvent s'épauler (tous coopérateurs) ou bien se faire mutuellement défection (tous défectionnaires). Le gain de la case considérée est ainsi, à chaque tour, la somme des neuf gains obtenus en jouant contre tous ses voisins… et contre lui-même.

• Pour simplifier le paramétrage du modèle, on va normer le gain de la coopération mutuelle à 1 ($R = 1$), tandis que la défection mutuelle ainsi que la coopération trahie n'apportent rien ($S = P = 0$). Il ne reste donc plus qu'un paramètre variable, la prime T accordée à la trahison et c'est précisément ce paramètre qui va déterminer le comportement du système à partir de conditions initiales aléatoires : si T est faible, alors la trahison ne sera pas rentable et les défectionnaires sont peu favorisée (les coopérateurs envahissent tout le territoire), dans le cas contraire (T élevée) alors l'individualisme triomphe et les coopérateurs disparaissent de cet univers impitoyable.

Les comportements intéressants

Pour bien comprendre le caractère crucial du paramètre T, on va étudier deux situations dans deux matrices initiales :

0	0	0	0	0	0
0	T	2T	2T	T	0
0	2T	4	4	2T	0
0	2T	4	4	2T	0
0	T	2T	2T	T	0
0	0	0	0	0	0

9	9	9	9	9	9
9	8	7	7	8	9
9	7	5T	5T	7	9
9	7	5T	5T	7	9
9	8	7	7	8	9
9	9	9	9	9	9

Deux les deux matrices présentées ci-dessus, les coopérateurs sont représentés sur fond blanc tandis que les défectionnaires correspondantes aux cellules grisées. Si on admet qu'un coopérateur exclusivement entouré de coopérateur ne craint rien (il reste à son état précédent) et qu'il défectionnaire entouré de défectionnaires ne change pas non plus, il est clair que le gain de l'espace se joue aux points de friction entre les deux populations.

• La matrice de gauche illustre le cas de l'îlot de coopérateurs cerné par les défectionnaires (matrice de gauche) : selon que les « traîtres » touchent les « paisibles » par un coté ou bien un angle, ils gagnent 2T ou T points. Pour que les défectionnaires étendent leur territoire, il faut que 2T > 4 soit T > 2. Dans le cas contraire, les coopérateurs envahissent leurs cases.

• Dans la matrice de droite (îlot de défectionnaires cerné par les coopérateurs), on remarque que les défectionnaires disparaîtront si 5T < 8 soit T < 1,6. Ils envahiront tous leurs voisins si les 5T > 9 soit T > 1,8. reste à savoir ce qui se passera si 1,6 < T < 1,8…

On peut tenter d'en inférer les règles suivantes :

• Si T < 2, un carré de coopérateurs croît dans un océan de défectionnaires.
• Si T >1,8, un carré de défectionnaires croît dans un océan de coopérateurs.
• Si 1,6 < T < 1,8, un carré de défectionnaires, isolé dans un océan de coopérateurs reste stable indéfiniment.

On observe donc 4 types de comportements distincts selon la valeur de T, prime à la trahison :
• Si T < 1,6, les défectionnaires disparaissent rapidement.
• Si T > 2, ce sont tous les coopérateurs qui s'éteignent ;
• Si 1,6 < T < 1,8, on a un régime presque stationnaire où les défectionnaires sont très minoritaires. Lorsqu'on part de conditions initiales aléatoires (coopérateurs et défectionnaires distribués au hasard selon une proportion fixée à l'avance, le système évolue vers une structure formée de larges zones de coopérateurs séparés par des filaments de défectionnaires. Par la suite, il n'y a presque plus d'évolution.

Le dilemme du prisonnier présenté au début de se document est surtout intéressant lorsque 1,8 < T < 2. On a alors la situation paradoxale suivante : chaque faction envahit la zone de l'autre ! On obtient donc un système changeant, chaotique où des vagues de coopérateurs et de défectionnaires se succèdent et s'entremêlent sans cesse.

Selon la nature de répartition initiale retenue (qui alors n'est plus du tout aléatoire), on peut alors obtenir des figures géométriques très surprenantes (tapisserie, mosaïque, kaléidoscope,…). On voit même apparaître des « planeurs », blocs de coopérateurs qui se translatent d'un bord à l'autre de la matrice sans gagner un pouce de territoire ! Mais l'apparition de ces figures dépend quand même des conditions initiales.

Travail à faire

• D'abord bien comprendre d'énoncé. Le texte ci-dessus nécessite plusieurs lectures et il ne sera peut-être pas inutile de se documenter avec la bibliographie ci-dessous.

• Bâtir un projet en VBA pour Excel permettant de simuler ce jeu. Pour une bonne visibilité, la matrice de simulation doit être carrée, de taille minimale égale à 20 (20 lignes * 20 colonnes). On peut aller jusqu'à une matrice de taille 50 mais alors le temps de calcul des gains sera bien plus élevé et il ne faudra pas oublier de dimensionner les lignes et les colonnes de façons à ce que tout le jeu soit visible. Pas de problème pour les cas extrêmes de la matrice (bords et coins) : on considérera que la matrice est « périodique » : la colonne de droite de la dernière colonne sera considérée comme étant la première et, symétriquement, la colonne de gauche de la première colonne sera considérée comme étant la dernière. Idem pour les lignes.

• Le paramétrage du système se fera de façon interactive au moyen de boîte(s) de dialogue personnalisée(s). L'utilisateur rentrera la proportion initiale de coopérateurs et de défectionnaires (l'état initial étant engendré aléatoirement) ainsi que la valeur du paramètre T. Pour l'affichage de la matrice de la population, prendre soin d'effacer le quadrillage et d'affecter des couleurs distinctes aux deux factions. On pourra même (mais c'est facultatif) affecter des couleurs différentes aux cases qui ont changé de statut entre deux itérations.

• La suite dépend de votre envie et de votre ardeur à la tâche : il est possible, en jouant sur les contrôles, l'interactivité et les ressources du logiciel d'obtenir un résultat final plus spectaculaire : chargement d'une matrice initiale spécifique « toute prête » (plutôt que aléatoire), détection automatique (avec arrêt du programme) des états périodiques ou stationnaires. Affichage des résultats à chaque itérations avec invite pour arrêter/continuer le jeu ou encore jeu « en roue libre » jusqu'à ce qu'on arrête… Bref, tous les coups sont permis pourvu que cela marche mieux qu'une solution « rustique ». Mais retenez que la programmation ne s'improvise pas, que le langage VBA est très bavard et qu'une procédure s'exécute d'autant plus vite que son code a été optimisé préalablement… Prudence donc, et prenez bien le temps de comprendre l'énoncé avant de vous lancer dans la frappe.

Le projet correspondant à cet énoncé est à rendre pour le **dimanche 13 janvier 2019 à 0h00**, dernier délai. Pour travailler, les étudiant(e)s se réunissent par groupe de deux et… coopèrent ! A part égale, s'entend…
A l'issue, un rapport d'environ 5 pages devra être remis (format Word), il rassemblera les résultats obtenus ainsi que les travaux informatiques (ne joindre que les portions de code et les copies d'écran de boîte de dialogue les plus pertinentes.

Bibliographie

• Les étudiant(e)s déjà initié(e)s à l'informatique auront reconnus dans ce processus un jeu de la catégorie des *automates cellulaires*, dont fait partie le célèbre *jeu de la vie* qui est un peu voisin dans son principe. De nombreuses variantes de ce jeu sont présentes dans les ouvrages informatiques.

• Il existe une abondante bibliographie en matière de théorie de jeux (avec de nombreux ouvrages disponibles en bibliothèque). Il n'y a rien de tel pour comprendre des notions comme : stratégie dominante, jeux coopératifs et non-coopératifs, équilibre de COURNOT-NASH…

• Ce sujet est basé sur un article dont voici les références :
« Le dilemme du prisonnier ». *Science et Vie Micro*, janvier 1993 et février 1993.
Lui-même écrit à partir d'un autre article, autrement plus ardu :
« Evolutionary Games and Spatial Chaos ». M. Nowak & R. May (1992). *Nature*, vol. 359,p. 826-829.

Un grand merci à mon ancien professeur M. Thoraillier qui nous avait confié le même sujet !