№1

Условие:

Дайте определение объекта в λ-исчислении.

Ответ:

Объекты λ-исчисления, называемые также λ-термами, делятся на три типа:

- переменная x сама по себе есть терм;
- абстракция переменной x в терме t_1 - $\lambda x. t_1$;
- применение терма t_1 к терму t_2 - $t_1 t_2$.

Определение из “Типы в языках программирования” Пирса.

t ::=	*термы:*
x	*переменная*
λx. t	*абстракция*
t t	*применение*

№2

Условие:

A. Пусть $f(x) = x^2 + 2$, чему равно f?
B. Пусть $I(x) = x$, чему равно I?

Решение:

A. $f = \lambda x. x^2 + 2$;
B. $I = \lambda x. x$;

№3

Условие:

A. $z\ x\ y$;
B. $x\ x\ (y\ z)\ (x\ z)$;
C. $(x\ y\ (z\ x))\ z\ (x\ x)$.

Решение:

A. $((z\ x)\ y)$;
B. $(((x\ x)(y\ z))(x\ z))$;
C. $((((x\ y)\ (z\ x))\ z)\ (x\ x))$.

№4

Условие:

Опустите лишние скобки - $(x\ y\ (\ y\ z\ )\ z)\ (y\ ((y\ z)\ x\ x))\ x$

Решение:

$x\ y\ (y\ z)\ z\ (y\ (y\ z\ x\ x))\ x$

№5

Условие:

Запишите постулат β

Решение:

$(\lambda x. t_{12})\ t_2 \ \rightarrow\ [x\ \rightarrow\ t_2]\ t_{12}$ - “Типы в языках программирования” Пирса

№6

Условие:

Запишите постулат α

Решение:

Операция последовательного переименования переменных в терме. Термы, отличающиеся только именами связанных переменных, взаимозаменяемы во всех контекстах.

$\lambda x. M\ = [x \rightarrow y]\lambda y. M,$ при условии $y\ \notin\ FV(M)$;

№7
Условие:
Редуцируйте выражения:

A. $[x \to 2](2 + x)$
B. $(\lambda x. x)M$
C. $(\lambda x. y)M$
D. $(\lambda xyz. x(yz))(u\, y)\,(z\, x)$
E. $(\lambda x. N)M$ (*)
F. $(\lambda xy.\ xyx)M\, N$
G. $f(4)$, где $f(x) = x^2 + 2$
H. $g\, 3\, 4$, где $g = \lambda xy. x * 3 + \left(\left(\lambda x. 1 + x^3\right)y\right)$, здесь N и M – произвольные термы

Решение:

A. $[x \to 2](2 + x) \Rightarrow 2 + 2 \Rightarrow 4;$
B. $(\lambda x. x)M \Rightarrow [x \to M]x \Rightarrow M;$
C. $(\lambda x. y)M \Rightarrow [x \to M]\, y \Rightarrow y;$
D. $(\lambda xyz. x(yz))(u\, y)\,(z\, x) \Rightarrow (\lambda x. (\lambda y. (\lambda z. x(yz))))(\, uy)\,(zx) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\lambda y. (\lambda z. uy'(yz)))\,(zx) \Rightarrow \lambda z. uy'(z'xz)$
E. $(\lambda x. N)M \Rightarrow [x \to [x \to x']M]N$
F. $(\lambda xy.\ xyx)M\, N \Rightarrow (\lambda x. (\lambda y. (xyx)))MN \Rightarrow (\lambda y. [x \to x']My[x \to x']M)N$
$\Rightarrow [x \to x']M[y \to y']N[x \to x']M$
G. $(\lambda x. x^2 + 2)4 \Rightarrow [x \to 4](x^2 + 2) \Rightarrow 16 + 2 \Rightarrow 18$
H. $(\lambda xy. (x * 3 + (\lambda x. 1 + x^3)y))34 \Rightarrow (\lambda xy. (x * 3 + (1 + y^3))34$
$\Rightarrow (\lambda x. (\lambda y. (x * 3 + (1 + y^3))))34 \Rightarrow ([x \to 3](\lambda y. (x * 3 + (1 + y^3))))4$
$\Rightarrow (\lambda y. (3 * 3 + (1 + y^3)))4 \Rightarrow [y \to 4](9 + (1 + y^3)) \Rightarrow (9 + (1 + 4^3)) \Rightarrow (9 + 65) \Rightarrow 74$

№8
Условие:
Ответьте на вопрос:

A. Пусть $K\, x\, y = x$, чему равно K?
B. Пусть $S\, x\, y\, z = x\, z\, (y\, z)$, чему равно S?
C. Пусть $((\circ f)g)x = f(g(x))$, чему равно $\circ$?

Решение:

A. $K\, x\, y = x \Rightarrow ((Kx)y) = x \Rightarrow K$ $-$ комбинатор $K = \lambda fg. f$
B. $S\, x\, y\, z = x\, z\, (y\, z) \Rightarrow (((Sx)y)z) = x\, z\, (y\, z) \Rightarrow S$ $-$ комбинатор $S = \lambda fgh. fh(gh)$
C. $((\circ\ f)g)x = f(g(x)) \Rightarrow \circ$ $-$ комбинатор $B = \lambda zyh. z(yh)$

№9
Условие:

Определите множество свободных и множество связанных переменных ($FV(M)$ и $BV(M)$) для терма:

A. x
B. $\lambda x. x$
C. $\lambda x. y$
D. $\lambda x. x + y$
E. $(\lambda xy.\ x + y)x$
F. $((\lambda x. x + y)\, 4) * \left(\left(\lambda y. y^x - ((\lambda z. z)\, z)\right)2\right)$

Решение:

A. $FV(x) = \{x\}$, $BV(x) = \{\emptyset\}$
B. $FV(\lambda x. x) = \{\emptyset\}$, $BV(\lambda x. x) = \{x\}$
C. $FV(\lambda x. y) = \{y\}$, $BV(\lambda x. y) = \{x\}$
D. $FV(\lambda x. x + y) = \{y\}$, $BV(\lambda x. x + y) = \{x\}$
E. $FV((\lambda xy.\ x + y)x) = \{x\}$,
$BV((\lambda xy.\ x + y)x) = \{x, y\}$
F. $FV(((\lambda x.\ x + y)4)*((\lambda y. y^x - ((\lambda z. z)z))2)) = \{x, y, z\}$,

$BV(((\lambda x.\ x + y)4)*((\lambda y.y^x - ((\lambda z.z)z))2)) = \{x, y, z\}$

№10
Условие:

Определите функцию:

A. $FV(M)$, которая возвращает множество свободных переменных в терме M
B. $BV(M)$, которая возвращает множество связанных переменных в терме M
C. $V(M)$ – которая возвращает множество всех переменных в M

Решение:

A. $FV(x) = \{x\}$
$FV(\lambda x.t_1) = FV(t_1) \setminus \{x\}$
$FV(t_1t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$

B. $BV(x) = \{\emptyset\}$
$BV(\lambda x.t_1) = BV(t_1) \cup \{x\}$
$BV(t_1t_2) = BV(t_1) \cup BV(t_2)$

C. $V(x) = \{x\}$
$V(\lambda x.t_1) = V(t_1) \cup \{x\}$
$V(t_1t_2) = V(t_1) \cup V(t_2)$

№11
Условие:

Определите функцию подстановки $[x \to N]M$

Решение:

- $[x \to N]M = N$, если $M = x$
- $[x \to N]M = M$, если $M \neq x$, тогда получим α — эквивалентное выражение
- Если $M = \lambda y.t_1$, тогда $[x \to N]M = [x \to N]\lambda y.t_1 = \lambda y.t_1$ при условии, что $y = x$
- Если $M = \lambda y.t_1$, тогда $[x \to N]M = [x \to N]\lambda y.t_1 = \lambda y.[x \to N]t_1$ при условии, что $y \neq x$ и $y \notin FV(N)$
- Если $M = t_1t_2$, тогда $[x \to N]M = [x \to N]t_1t_2 = ([x \to N]t_1)([x \to N]t_2)$