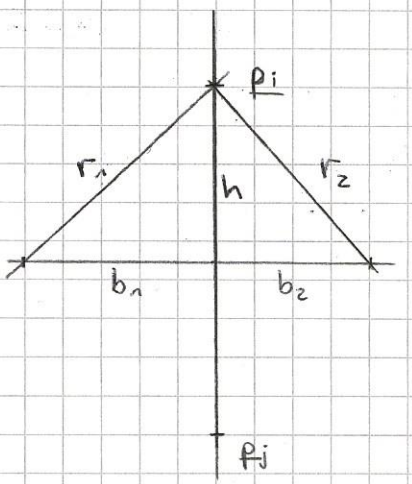

rotes Dreieck

$$h = \frac{\|p_i - p_j\|}{2}$$

$$d = 2h = \|p_i - p_j\|$$

Umkreisradius 1

$$r_1 = \frac{\|p_i - p_j\|}{2 \sin \alpha_{ij}}$$

Umkreisradius 2

$$r_2 = \frac{\|p_i - p_j\|}{2 \sin \beta_{ij}}$$

$$b_1 = \sqrt{r_1^2 - h^2} = \sqrt{\left(\frac{\|p_i - p_j\|}{2 \sin \alpha_{ij}}\right)^2 - \left(\frac{\|p_i - p_j\|}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d}{2 \sin \alpha_{ij}}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{d^2}{4 \sin^2 \alpha_{ij}} - \frac{d^2}{4}} = \sqrt{\frac{d^2 - \sin^2 \alpha_{ij} \cdot d^2}{4 \sin^2 \alpha_{ij}}}$$

$$= \sqrt{\frac{d^2 (1 - \sin^2 \alpha_{ij})}{4 \sin^2 \alpha_{ij}}} = \sqrt{\frac{d^2 \cos^2 \alpha_{ij}}{4 \sin \alpha_{ij}}} = \sqrt{\frac{d^2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha_{ij}}{\sin^2 \alpha_{ij}}}$$

$$= \frac{1}{2} d \cdot \frac{\cos \alpha_{ij}}{\sin \alpha_{ij}} = \underline{\underline{\frac{1}{2} d \cot \alpha_{ij}}}$$

$$b_2 = \sqrt{r_2^2 - h^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot d \cdot \cot \beta_{ij}}}$$

$$A = \frac{1}{2} (b_1 + b_2) h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} d \cot \alpha_{ij} + \frac{1}{2} d \cot \beta_{ij}\right) \cdot \frac{1}{2} d$$

$$= \frac{1}{8} \cdot d^2 \cdot (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{8} \cdot \|p_i - p_j\| \cdot (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})}}$$