1. $E=\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2dt$ $E=\sum_{n=n_1}^{n_2}|x[n]|^2$ $P=\frac{E}{t_2-t_1}$ $P=\frac{E}{n_2-n_1+1}$

$E_\infty=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt$ $P_{period}=\frac{\int_T |x|^2 dt}{T}$

$E_\infty=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2=\sum_{-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2$

$P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt$ $P_\infty=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2$

2. ① Energy signal: $E_\infty<\infty \Rightarrow P_\infty=0$
② Power signal: $0<P_\infty<\infty \Rightarrow E_\infty=\infty$
③ Infinite energy & power signal: $E_\infty\to\infty$, $P_\infty\to\infty$

系统类型

Memoryless 输出只取决于当前输入 $y(t)=x(t)$

Memory $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ 累加器 $y[n]=x[n-1]$ 单位延时，$y(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$，积分器。

Invertible $x_1\neq x_2$ 时，$y_1\neq y_2$。多对一 ×，一一对应 V。
e.g. $y[n]=\sum_{-\infty}^{n}x[k]$ & $x[n]=y[n]-y[n-1]$. V
$y[n]=x^2[n]$ ×. $y[n]=\cos(x[n])$ ×.

Causality 输出只取决于当前/之前输入。(无未来)
All memoryless systems are causal.
e.g. $y(t)=\underset{input}{x(t)}\underset{other\ function}{\cos(t+1)}$ causal.

Stability 有界输入⇒有界输出 $|x(t)|<B\Rightarrow|y(t)|$ 有界

Time-invariance $x(t)\to y(t)$ 则 $x(t-t_0)\to y(t-t_0)$.
e.g. $y(t)=x(2t)$. 对于输入延时 t_0: $x(2t-t_0)$
对于输出延时 t_0: $x(2(t-t_0))$ ∴ 时变.

Linearity $x_1\to y_1$ $x_2\to y_2$ $\Rightarrow$ $x_1+x_2\to y_1+y_2$, $ax_1\to ay_1$
或 $ax_1+bx_2\to ay_1+by_2$. any complex.

E.g. $y[n]=x[n^2]$. 取3 0.1.4.9… 这些点,采样.
$x[n]\to x[n^2]$. $x[n-n_0]\to x[n^2-n_0]\neq y[n-n_0]$

LTI性质

Memoryless ⟺ $n\neq0$ 时，$h[n]=0$. 即 $h[n]=kS[n]$,
连续同理 $t\neq0$ 时，$h(t)=0$ $y[n]=kx[n]$.

Invertibility $h_0(t)*h_1(t)=\delta(t)$.

Causality ⟺ $n<0$, $h[n]=0$ / $t<0$, $h(t)=0$

Stability ⟺ $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|<\infty$ / $\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|d\tau<\infty$

卷积

公式 $x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$
$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

性质 ① $x[n-m]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k-m]h[n-k]$
$=\sum_{k'=-\infty}^{\infty}x[k']h[n-m-k']=x[n]*h[n-m]$
$x(t)*h(t-d)=x(t-d)*h(t)$

② $x[n]*\delta[n-d]=x[n-d]$. 延时系统的impulse response
$x[n]*\delta[n]=x[n]$

计算方法: 求$y[i]$,每次都从$x[i]$最左边开始,遵守$x[k]y[i-k]$的原则,顺着最近。
i的范围: 长度是$M+N-1$。移-移碰边界。

其他性质 $u(t)*u(t)=tu(t)$
$u(t-t_1)*u(t-t_2)=(t-t_1-t_2)u(t-t_1-t_2)$

Differential Equation

CT: $\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^ky(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^kx(t)}{dt^k}$

$y(t)=y_p(t)+y_h(t)$.

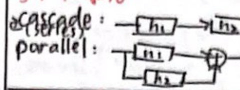
Initial reset: $x(t)=0$ for $t\le t_0$. 即
$y(t_0)=\frac{dy(t_0)}{dt}=\cdots=\frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}}=0$

DT: $\sum_{k=0}^{N}a_ky[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_kx[n-k]$.

$y[n]=\sum_{k=0}^{M}b_kx[n-k]-\sum_{k=1}^{N}a_ky[n-k]$.
(normalize a_0, compute $y[n]$ recursively).

Initial reset: $y[n]=0$ for $n\le-1$.
让你求 $\underset{impulse\ response}{h[n]}$ 的话,把 $x[n]=\delta[n]$ 代入即可. (加个$u[n]$)

多个LTI系统

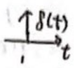

cascade (series): h_1*h_2
parallel: h_1+h_2

Unit Step Response (相对于impulse Response)

两个函数 ① $\delta[n]=\begin{cases}0, n\neq0\\1, n=0\end{cases}$ $u[n]=\begin{cases}0, n<0\\1, n\ge0\end{cases}$

$\delta[n]\xrightarrow{u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]}u[n]$ or $u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$
$\xleftarrow{\delta[n]=u[n]-u[n-1]}$

② $u(t)=\begin{cases}0, t<0\\1, t>0\end{cases}$ $\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$



$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$

采样性
① $x[n]\delta[n]=x[0]$, $x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]$
② $x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$
$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$

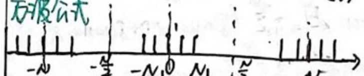
两个Response
① $x[n]=u[n]\Rightarrow y[n]=s[n]$.
$s[n]=u[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u[k]h[n-k]$
$=\sum_{k=0}^{\infty}h[n-k]$.
$\Rightarrow h[n]=s[n]-s[n-1]$

② $x(t)=u(t)\Rightarrow y(t)=s(t)$.
$s(t)=u(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)h(t-\tau)d\tau$
$=\int_{0}^{+\infty}h(t-\tau)d\tau$
$\Rightarrow h(t)=\frac{ds(t)}{dt}$.

DTFS

公式 $x[n]=\sum_{\langle N\rangle}a_ke^{jk\omega_0n}$ 以N为周期, $a_k=\frac{1}{N}\sum_{\langle N\rangle}x[m]e^{-jk\omega_0m}$

方波公式



When $k\neq0,\pm N,\pm2N$:
$a_k=\frac{1}{N}\frac{\sin((2N_1+1)\frac{k\pi}{N})}{\sin(\frac{k\pi}{N})}$
when $k=0,\pm N,\pm2N$:
$a_k=a_0=\frac{1}{N}\sum_{-N_1}^{N_1}1=\frac{2N_1+1}{N}$

常数公式
$a_k=\begin{cases}C, k=0,\pm N,\pm2N,\dots\\0, k\neq0,\pm N,\pm2N,\dots\end{cases}$

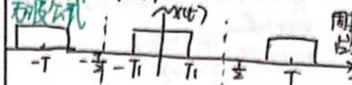
性质
① 线性
② 时移 $x[n-n_0]\xleftrightarrow{FS}a_ke^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0}$
③ 频移 $e^{jM\frac{2\pi}{N}n}x[n]\xleftrightarrow{FS}a_{k-M}$
④ 共轭 $x^*[n]\xleftrightarrow{FS}a_{-k}^*$
⑤ 时反 $x[-n]\xleftrightarrow{FS}a_{-k}$
⑥ 周期卷积 $\sum_{r=\langle N\rangle}x[r]y[n-r]\xleftrightarrow{FS}Na_kb_k$
⑦ 乘积 $x[n]y[n]\xleftrightarrow{FS}\sum_{l=\langle N\rangle}a_lb_{k-l}$
⑧ 一阶差分 $x[n]-x[n-1]\xleftrightarrow{FS}(1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}})a_k$
⑨ Parseval $\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}|x[n]|^2=\sum_{k=\langle N\rangle}|a_k|^2$

CTFS

Eigenfunction
CT: $x(t)=e^{st}$, $y(t)=e^{st}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}_{H(s)}$
DT: $x[n]=z^n$, $y[n]=z^n\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]z^{-k}}_{H(z)}$
Generally, $x(t)=\sum_ka_ke^{s_kt}$ / $x[n]=\sum_ka_kz_k^n$
$\Rightarrow y(t)=\sum_ka_kH(s_k)e^{s_kt}$
$\Rightarrow y[n]=\sum_ka_kH(z_k)z_k^n$
Fourier analysis: $s=j\omega$, $z=e^{j\omega}$ (周期/正弦信号)

公式 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_ke^{jk\omega_0t}$
$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau$
$a_0=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(\tau)d\tau$.

方波公式



周期$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$
占空比 $\frac{2T_1}{T}$ (duty cycle)

$a_k=\begin{cases}\frac{\sin(k\omega_0T_1)}{k\pi}, k\neq0\\\frac{2T_1}{T}, k=0\end{cases}$

常数公式
$a_k=\begin{cases}C, k=0\\0, k\neq0\end{cases}$

性质
① 线性 $\alpha x(t)+\beta y(t)\xleftrightarrow{FS}\alpha a_k+\beta b_k$
② 时移 $x(t-t_0)\xleftrightarrow{FS}e^{-jk\omega_0t_0}a_k$
③ 时反 $x(-t)\xleftrightarrow{FS}a_{-k}$
④ 时扩(缩) $x(\alpha t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_ke^{jk(\alpha\omega_0)t}$
$x(\alpha t)\xleftrightarrow{FS}a_k$
⑤ 乘积 $x(t)y(t)\xleftrightarrow{FS}h_k=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}a_lb_{k-l}$
⑥ 共轭 $x^*(t)\xleftrightarrow{FS}a_{-k}^*$
a. $x(t)$ real. $a_k^*=a_{-k}$
b. $x(t)$ real and even. a_k real and even
c. $x(t)$ real and odd. $a_k^*=a_{-k}=-a_k$
a_k odd and pure imaginary
⑧ 微分 $\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{FS}jk\omega_0a_k$
⑨ 积分 $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\xleftrightarrow{FS}\frac{a_k}{jk\omega_0}$
⑩ Parseval: $\frac{1}{T}\int_T|x(t)|^2dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2$
⑪ 频移: $e^{jM\omega_0t}x(t)\xleftrightarrow{FS}a_{k-M}$
⑫ 周期卷积 $\int_Tx(\tau)y(t-\tau)e^{-jk\omega_0t}d\tau\xleftrightarrow{FS}Ta_kb_k$

Even and odd decomposition
$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ke^{jk\omega_0t}$
$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(a_k\cos(k\omega_0t)+ja_k\sin(k\omega_0t))$
$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}((a_k+a_{-k})\cos k\omega_0t)$ ⇒even
$+\sum_{k=1}^{\infty}(j(a_k-a_{-k})\sin k\omega_0t)$ ⇒odd
∴ 偶函数: $a_k-a_{-k}=0\Rightarrow a_k$ 偶.
奇函数: $a_k+a_{-k}=0\Rightarrow a_k$ 奇.
$x(t)=x(-t)\Rightarrow a_0=0$
Even part of $x(t)$: $\frac{x(t)+x(-t)}{2}$
odd part: $\frac{x(t)-x(-t)}{2}$

CTFT

公式 $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$
$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

FT&FS $\tilde{x}(t)$ 周期为T,对应FS是a_k.
$x(t)$为一个周期内的$\tilde{x}(t)$,对应FT是$X(j\omega)$.
则 $a_k=\frac{1}{T}X(j\omega)|_{\omega=k\omega_0}$ ($\omega_0=\frac{2\pi}{T}$)

周期信号 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_ke^{jk\omega_0t}\xleftrightarrow{FT}X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)$

性质 ① 线性 $ax(t)+by(t)\xleftrightarrow{FT}aX(j\omega)+bY(j\omega)$
② 时移 $x(t-t_0)\xleftrightarrow{FT}e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
③ 频移 $e^{j\omega_0t}x(t)\xleftrightarrow{FT}X(j(\omega-\omega_0))$
④ 共轭 $x^*(t)\xleftrightarrow{FT}X^*(-j\omega)$
a. $x(t)$ 为实函数 $X(-j\omega)=X^*(j\omega)$
b. $x(t)$ 实.偶 $X(j\omega)$ 实.偶
c. $x(t)$ 实.奇 $X(j\omega)$ 纯虚,奇
$x_e(t)\xleftrightarrow{FT}Re\{X(j\omega)\}$, $x_o(t)\xleftrightarrow{FT}jIm\{X(j\omega)\}$
($x(t)$ real).

⑤时域微分 $\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FT} j\omega X(j\omega)$

⑥时域积分 $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$

⑦频域微分 $(-jt)x(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$

⑧频域积分 $-\frac{1}{jt}x(t)+\pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{FT} \int_{-\infty}^{\omega} X(j\Omega)d\Omega$

⑨尺度变换 $x(at) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$

$x(-t) \xleftrightarrow{FT} X(-j\omega)$

⑩卷积 $x_1(t)*x_2(t) \xleftrightarrow{FT} X_1(j\omega)X_2(j\omega)$

⑪乘积 $x_1(t)x_2(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi}[X_1(j\omega)*X_2(j\omega)]$

⑫对偶性 $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$，则 $X(jt) \xleftrightarrow{FT} 2\pi x(-\omega)$

即 $x(t)$ 当作 $2\pi x(\omega)$ 的逆FT，$X(jt)$，再把 t 变 ω，$\to X(j\omega)$

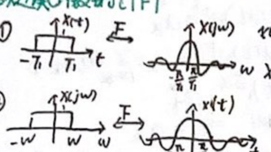
⑬Parseval $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{|X(j\omega)|^2}d\omega$ energy density spectrum

LTI的frequency response

$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k(j\omega)^k}$ $\quad H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\sum b_k s^k}{\sum a_k s^k}$

$\sum_{k=0}^{N} a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M} b_k\frac{d^k x(t)}{dt^k}$ （$\frac{d^0 y(t)}{dt^0}=y(t)$，0阶导是本身）

常见连续时间信号CTFT



① $x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & |t|>T_1\end{cases}$ $\quad X(j\omega)=\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}=2T_1\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$

② $X(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W\\ 0, & |\omega|>W\end{cases}$

$x(t)=\frac{\sin Wt}{\pi t}=\frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$

③ $x(t)=e^{-a|t|}, a>0 \quad X(j\omega)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$

④ $x(t)=\delta(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)=1$

⑤ $x(t)=1 \xleftrightarrow{F} X(j\omega)=2\pi\delta(\omega)$

⑥ $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

⑦ $\sin\omega_0 t \xleftrightarrow{F} \frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0)$

$\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{F} \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$

⑧ $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) \xleftrightarrow{F} \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$

⑨ $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a+j\omega} \qquad te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(a+j\omega)^2}$

DTFT

公式 $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$

$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$

$X(e^{j\omega})$ 以 2π 为周期

LTI的frequency response

eigen $e^{j\omega n} \longrightarrow \boxed{LTI} \xrightarrow{h[n]} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$

$y[n]=h[n]*x[n]=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}$

Frequency response：$H(e^{j\omega})$

性质

①线性：$ax[n]+by[n] \xleftrightarrow{FT} aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$

②时移：$x[n-n_0] \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$

③频移：$e^{j\omega_0 n}x[n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

④共轭：$x^*[n] \xleftrightarrow{FT} X^*(e^{-j\omega})$

a. $x[n]$ 为实，$X^*(e^{-j\omega})=X(e^{j\omega})$

b. $x[n]$ 实,偶，$X(e^{j\omega})$ 实,偶

c. $x[n]$ 实,奇，$X(e^{j\omega})$ 纯虚,奇

d. $x_e[n] \xleftrightarrow{FT} Re\{X(e^{j\omega})\}$ （$x[n]$ real）

$x_o[n] \xleftrightarrow{FT} j\,Im\{X(e^{j\omega})\}$

e. $x[n]$ complex

$Re\{x[n]\} \xleftrightarrow{FT} X_{cs}(e^{j\omega})=\frac{1}{2}\{X(e^{j\omega})+X^*(e^{-j\omega})\}$

$j\,Im\{x[n]\} \xleftrightarrow{FT} X_{ca}(e^{j\omega})=\frac{1}{2}\{X(e^{j\omega})-X^*(e^{-j\omega})\}$

$x_{cs}[n] \xleftrightarrow{FT} Re\{X(e^{j\omega})\}$

$x_{ca}[n] \xleftrightarrow{FT} j\,Im\{X(e^{j\omega})\}$

⑤时反 $x[-n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{-j\omega})$

⑥Time expansion $x_{(k)}[n]=\begin{cases}x\left[\frac{n}{k}\right], & n=\text{multiple of }k\\ 0, & n\neq\text{multiple of }k\end{cases} \xleftrightarrow{FT} X(e^{jk\omega})$

⑦时域差分 $x[n]-x[n-1] \xleftrightarrow{FT} (1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$

⑧时域积分 $\sum_{k=-\infty}^{n}x[k] \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$

⑨频域微分 $nx[n] \xleftrightarrow{FT} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

⑩乘积 $x[n]y[n] \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

⑪卷积 $x[n]*y[n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$

⑫共轭对称 for real signals：

$X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$

$Re\{X(e^{j\omega})\}=Re\{X(e^{-j\omega})\}$

$Im\{X(e^{j\omega})\}=-Im\{X(e^{-j\omega})\}$

$|X(e^{j\omega})|=|X(e^{-j\omega})|$，$\angle X(e^{j\omega})=-\angle X(e^{-j\omega})$

DTFT变换对

① $a^n u[n], |a|<1 \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

② $x[n]=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & |n|>N_1\end{cases} \xleftrightarrow{FT} \frac{\sin(\omega(N_1+\frac{1}{2}))}{\sin(\frac{\omega}{2})}$

③ $x[n]=\frac{\sin Wn}{\pi n} \xleftrightarrow{FT} X(\omega)=\begin{cases}1, & 0\le|\omega|\le W\\ 0, & W<|\omega|\le\pi\end{cases}$

$0<W<\pi$ $\quad =\frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ 以 2π 为周期

④ $\delta[n] \xleftrightarrow{FT} 1$

⑤ $\delta[n-n_0] \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega n_0}$

⑥ $u[n] \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega-2\pi k)$

⑧ $(n+1)a^n u[n], |a|<1 \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$

⑨ $\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}a^n u[n], |a|<1 \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^r}$

⑩ $1 \xleftrightarrow{FT} 2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi l)$ $\quad a_k=\begin{cases}1, & l=0,\pm N\ldots\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

⑪ $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN] \xleftrightarrow{FT} \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$ $\quad a_k=\frac{1}{N}$

⑫ $\cos\omega_0 n \xleftrightarrow{FT} \pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\{\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)\}$

$\sin\omega_0 n \xleftrightarrow{FT} \frac{\pi}{j}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\{\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)-\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)\}$

⑬ $e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$

表示周期信号

$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$

Parseval

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]h^*[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})d\omega$

$E_g=\sum_{-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]x^*[n]$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2d\omega$

Magnitude-phase representation

LTI $\quad$ Gain $\quad$ phase shift

$Y(j\omega)=|X(j\omega)||H(j\omega)|, \angle Y(j\omega)=\angle X(j\omega)+\angle H(j\omega)$

Linear phase system

$H(j\omega)=e^{-j\omega t_0}$. $|H(j\omega)|=1$

$\angle H(j\omega)=-\omega t_0$

$Y(j\omega)=X(j\omega)e^{-j\omega t_0} \Rightarrow y(t)=x(t-t_0)$

Non-Linear system

窄带信号 $x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

频率 ω_0 $\quad \angle H(j\omega)\simeq-\phi-\alpha\omega$. $\quad \omega=\omega_0$ 处的 group delay

$Y(j\omega)\simeq X(j\omega)|H(j\omega)|e^{-j\phi}e^{-j\alpha\omega}$

Group delay

$\tau(\omega)=-\frac{d}{d\omega}\{\angle H(j\omega)\}$

Bode Plots

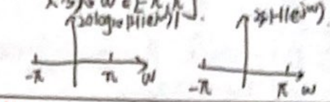
$\log|Y(j\omega)|=\log|H(j\omega)|+\log|X(j\omega)|$

单位 $20\log_{10}|H(j\omega)|$ decibels (dB)

DT的Bode图：

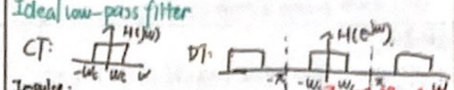
$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$

只考虑 $\omega\in[-\pi,\pi]$.



Filters

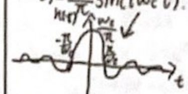
Ideal low-pass filter



CT: $\quad$ DT: $\quad$ 归一化的 ω 一般以标称单位

Impulse:

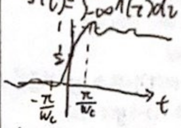
$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega_c t)$. $\quad h[n]=\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega_c n)$



$\omega_c\uparrow$，频带越宽，$h(t)$ 越窄，越来越趋近于 $\delta(t)$.

Step Response:

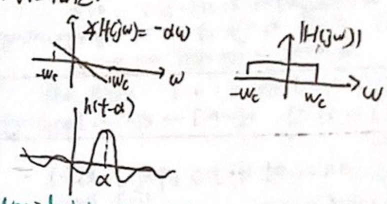
$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau \qquad s[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}h[m]$.



Rise time: $-\frac{\pi}{\omega_c}\sim\frac{\pi}{\omega_c}$.

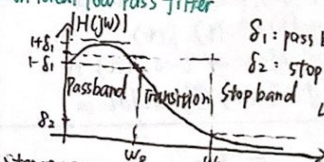
振荡

线性相位：



$\angle H(j\omega)=-\alpha\omega$ $\quad |H(j\omega)|$ $\quad h(t-\alpha)$

Non ideal low pass filter



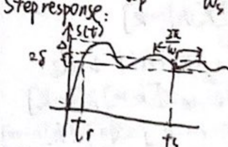
δ_1: pass band riple

δ_2: stop band riple

Passband $\quad$ Transition $\quad$ Stop band

Linear phase is desirable.

Step response:



Δ: overshoot

ω_r: ringing frequency

t_s: settling time

t_r: rise time

Butterworth, elliptic…

$(\omega_s-\omega_p)\uparrow$, $t_r\downarrow$. Trade-off.

First order and Second order system

电容电感

$V_L=L\frac{di_L(t)}{dt} \quad i_c=C\frac{dV_c(t)}{dt} \Rightarrow$ $V_L(s)=sLI_L(s)$

$V_c(s)=\frac{1}{sC}I_c(s)$

$V_R(s)=RI_R(s)$

First order system

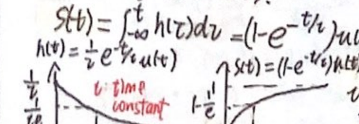
$\tau\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t) \qquad H(j\omega)=\frac{1}{j\omega\tau+1}=\frac{\frac{1}{\tau}}{j\omega+\frac{1}{\tau}}$

$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega+a}$ $(a>0)$

$\therefore h(t)=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$.

$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=(1-e^{-t/\tau})u(t)$

$h(t)=\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t) \qquad s(t)=(1-e^{-t/\tau})u(t)$



τ: time constant

$\tau\downarrow$，$h(t)$ 衰减越快，$s(t)$ 升高越快

$20\log_{10}|H(j\omega)|=-10\log_{10}((\omega\tau)^2+1)\simeq\begin{cases}0, & \omega\ll1/\tau\\ -20\log_{10}\omega-20\log_{10}\tau, & \omega\gg1/\tau\end{cases}$

$\omega=\frac{1}{\tau}$: break frequency

$\angle H(j\omega)=-\tan^{-1}(\omega\tau)\simeq\begin{cases}0, & \omega\le0.1/\tau\\ -\frac{\pi}{4}[\log_{10}(\omega\tau)+1], & 0.1/\tau\le\omega\le10/\tau\\ -\frac{\pi}{2}, & \omega\ge\frac{10}{\tau}\end{cases}$

$\omega=\frac{1}{\tau}$, $\angle H(j\omega)=-\frac{\pi}{4}$.

Math Box

1. $\cos(wt+\varphi)=\frac{1}{2}(e^{j(wt+\varphi)}+e^{-j(wt+\varphi)})$

$\sin(wt+\varphi)=\frac{1}{2j}(e^{j(wt+\varphi)}-e^{-j(wt+\varphi)})$

$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta \qquad \cos\pi n=(-1)^n$

2. $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, $S_\infty=\frac{a_1}{1-q}$ $(|q|<1)$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jwt}dw=2\pi\delta(t)$ numerator 分 denominator 母

4. $\mathrm{sinc}(\theta)=\frac{\sin\pi\theta}{\pi\theta}$, $\mathrm{sinc}(0)=0$

5. $\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(-(t-\tau))d\tau=x(t)*h(-t)$

6. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots$

7. 分部积分 $\int udv=uv-\int vdu$

Z Transform

Z变换对

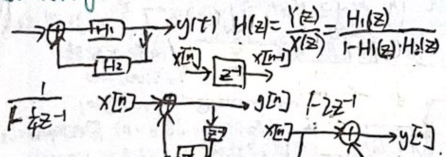
$\delta[n]$ | $\delta[n-m]$	1 | z^{-m}	all z | m>0 z≠0	m<0 z≠∞
$u[n]$ | $-u[-n-1]$	同, $(1-z^{-1})^{-1}$	$\|z\|>1$	$\|z\|<1$
$a^nu[n]$ | $-a^nu[-n-1]$	同, $(1-az^{-1})^{-1}$	$\|z\|>\|a\|$	$\|z\|<\|a\|$
$na^nu[n]$ | $-na^nu[-n-1]$	同, $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$	$\|z\|<\|a\|$
$\cos(w_0n)u[n]$	$\frac{1-\cos w_0\cdot z^{-1}}{1-2\cos w_0 z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$	
$\sin(w_0n)u[n]$	$\frac{\sin w_0\cdot z^{-1}}{1-2\cos w_0 z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$	
$r^n\cos(w_0n)u[n]$	$\frac{1-r\cos w_0\cdot z^{-1}}{1-2r\cos w_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>r$	
$r^n\sin(w_0n)u[n]$	$\frac{r\sin w_0 z^{-1}}{1-2r\cos w_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>r$	

微分方程

$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_kz^{-k}}$

$\sum_{k=0}^{N}a_ky[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_kx[n-k]$

Block Diagram



$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{H_1(z)}{1-H_1(z)\cdot H_2(z)}$

$\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$ $\quad 1-2z^{-1}$

$1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\dots$

$1-az^{-1})$ $\quad -az+1)$

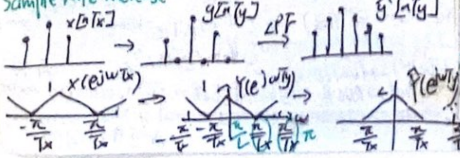
$\frac{1 a z^{-1}}{az^{-1}}$ $\quad 1-a^{-1}z$

$\frac{az^{-1}-a^2z^{-2}}{a^2z^{-2}}$ $\quad \frac{a^{-1}z}{a^{-1}z-a^{-2}z^2}$ $\quad a^{-2}z^2$

$x[n]=x_a(nT_s)=\cos(2\pi\frac{f_0}{f_s}n)=\cos(2\pi\frac{f_0+kf_s}{f_s}n)$

$f=f_0+kf_s$ 都可以 produce $x[n]$.

Sample rate increase



Sampling

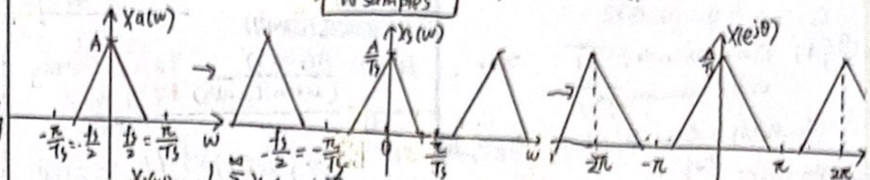
C/D conversion

$s_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)$ $\quad w_s=\frac{2\pi}{T_s}$: sampling frequency

$s_a(t)\xleftrightarrow{FT}S(w)=\frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(w-k\frac{2\pi}{T_s})$

$x_s(t)\xleftrightarrow{FT}X_s(w)=\frac{1}{2\pi}X_a(w)\cdot S_a(w)$

$x_a(t)\to\otimes\to x_s(t)=x_a(t)\cdot s_a(t)\to$ [convert pulses to samples] $\to x[n]=x_a(nT_s)$



$X_s(w)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(w-k\frac{2\pi}{T_s})$

$X(e^{j\theta})=X_s(w)|_{w=\frac{\theta}{T_s}}=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(\frac{\theta}{T_s}-k\frac{2\pi}{T_s})$

Sampling theorem

$x(t)$: $X(jw)=0$ for $|w|>w_m$. Then $x(t)$ is uniquely determined by its samples $x(nT)$, $n=0,\pm1,\pm2$

周期 if $w_s>2w_m$. ($w_s=\frac{2\pi}{T}$). ($f_s>2f_m$).

E.g. 方波的采样. 方波: 周期信号 ⇒ 谐波信号, 频谱延伸到无穷. $f=100Hz$, 占空比50%.

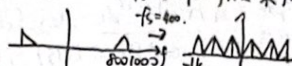
$x(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_ke^{jkw_0t}\approx\sum_{-N}^{N}a_ke^{jkw_0t}$ 考虑N次谐波, $f_s>2\cdot N\cdot f_0$

E.g. 带通信号的采样. $B=f_2-f_1$. 如果 $f_1>\frac{B}{2}$ 且 $f_2=kB$, $f_s=2B$ 为最小采样频率

若不满足. e.g. 700~900Hz. 近似处理.

$700-x=k(200+x) \Rightarrow k=3, x=25$.

$700\to 675$. $B=225$. $f_s=2B=450$. $f_2=225\times4=900$



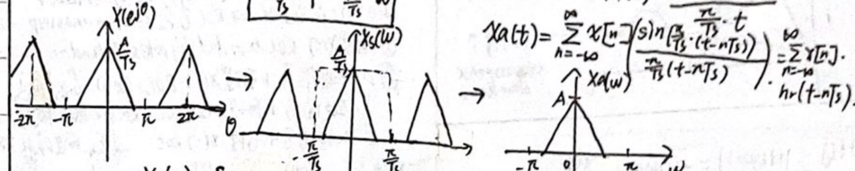
D/C conversion

$x[n]\to$ [convert samples to pulses] $\to x_s(t)\to$ [LPF $H_r(w)$] $\to x_a(t)$

$x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\delta(t-nT_s)$

$H_r(w)\xleftrightarrow{FT}h_r(t)=\frac{\sin(\frac{\pi}{T_s}\cdot t)}{\frac{\pi}{T_s}\cdot t}$

$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\frac{\sin(\frac{\pi}{T_s}(t-nT_s))}{\frac{\pi}{T_s}(t-nT_s)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\cdot h_r(t-nT_s)$.



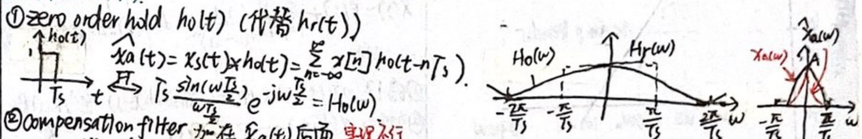
$X_a(w)=\begin{cases}T_s\cdot X(e^{j\theta})|_{\theta=wT_s}, & |w|\le\frac{\pi}{T_s}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}=H_r(w)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-jnwT_s}$

D/C conversion practice (No ideal LPF)

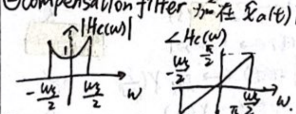
① zero order hold $h_0(t)$ (代替 $h_r(t)$)

$\hat{x}_a(t)=x_s(t)*h_0(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]h_0(t-nT_s)$.

$\xleftrightarrow{FT} T_s\frac{\sin(w\frac{T_s}{2})}{w\frac{T_s}{2}}e^{-jw\frac{T_s}{2}}=H_0(w)$



② Compensation filter 加在 $\hat{x}_a(t)$ 后面. 实现不了.



$H_c(w)=\begin{cases}\frac{wT_s/2}{\sin(wT_s/2)}e^{jwT_s/2}, & |w|\le\pi/T_s\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$ $\quad H_r(w)=H_0(w)H_c(w)=T_s$. $|w|\le\pi/T_s$

③ First order hold

零阶 一阶

$h_1(t)=\begin{cases}1+t/T_s, & -T_s\le t<0\\ 1-t/T_s, & 0\le t<T_s\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$ $\quad H_1(w)=\frac{1}{T_s}\left(\frac{\sin(wT_s/2)}{w/2}\right)^2$

Processing analog signal with discrete time filter

$x(t)\to$ [$H_a(w)$] $\to y_a(t)$

$x(t)\to$ [C/D] $\to x[n]\to$ [$H_d(e^{j\theta})$] $\to y[n]\to$ [D/C] $\to y(t)$

$y_a(t)=y(t)\Leftrightarrow H_a(w)=\begin{cases}H_d(e^{j\theta})|_{\theta=wT_s}, & |w|\le\frac{\pi}{T_s}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

Processing discrete-time signal with analog filter

$x[n]\to$ [$H_d(e^{j\theta})$] $\to y[n]$

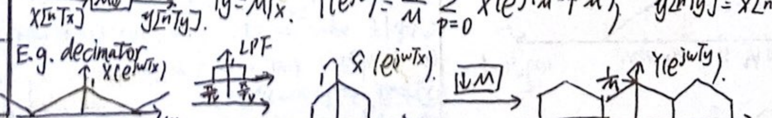
$x[n]\to$ [D/C] $\to x(t)\to$ [$H_a(w)$] $\to y(t)\to$ [C/D] $\to y[n]$ ($f_s=\frac{1}{T_s}$)

$y_a[n]=y[n]\Leftrightarrow H_d(e^{j\theta+2k\pi})=H_a(w)|_{w=\frac{\theta}{T_s}}$ for $|\theta|<\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$

Sample rate decrease

$x[nT_x]\to$ [$\downarrow M$] $\to y[nT_y]$. $T_y=MT_x$. $Y(e^{j\theta})=\frac{1}{M}\sum_{p=0}^{M-1}X(e^{j(\frac{\theta}{M}-p\frac{2\pi}{M})})$, $y[nT_y]=x[n(MT_x)]$

E.g. decimator



Sample rate increase

$x[nT_x]\to$ [$\uparrow L$] $\to y[nT_y]$ $\quad T_y=T_x/L$, $y[nT_y]=\begin{cases}x[nT_x/L], & n=0,\pm L,\dots\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$ $\quad Y(e^{j\theta})=X(e^{jL\theta})$

Second order CT system ω_n: un-damped natural f. ξ: damping ratio

$$\frac{d^2y(t)}{dt}+2\xi\omega_n\frac{dy(t)}{dt}+\omega_n^2y(t)=\omega_n^2x(t)$$

A. impulse

$$H(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\xi\omega_n(j\omega)+\omega_n^2}=\frac{M_1}{j\omega-c_1}-\frac{M_2}{j\omega-c_2}$$

c_1, c_2: 分母=0的两根.

① $\xi\neq1$. $c_1=-\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$

$c_2=-\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$

$M_1=M_2=M=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\Rightarrow h(t)=M(e^{c_1t}-e^{c_2t})u(t)$

critically damped

② $\xi=1$ $c_1=c_2=-\omega_n$ $H(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega+\omega_n)^2}$

$\Rightarrow h(t)=\omega_n^2te^{-\omega_nt}u(t)$

For case ①: $\xi\geq1$ no oscillation

a. $\xi\in(0,1)$. $h(t)=\frac{\omega_ne^{-\xi\omega_nt}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t)u(t)$ damped $(\sqrt{\xi^2-1}=j\sqrt{1-\xi^2})$

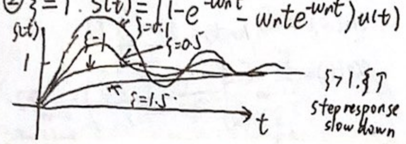
overdamped

b. $\xi>1$. $h(t)=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}(e^{c_1t}-e^{c_2t})u(t)$.

B. Step Response

① $\xi\neq1$. $s(t)=\{1+M[\frac{e^{c_1t}}{c_1}-\frac{e^{c_2t}}{c_2}]\}u(t)$

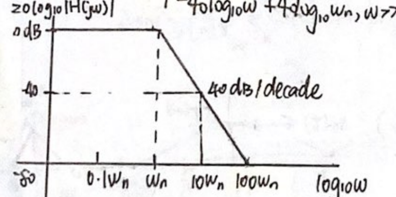
② $\xi=1$. $s(t)=(1-e^{-\omega_nt}-\omega_nte^{-\omega_nt})u(t)$



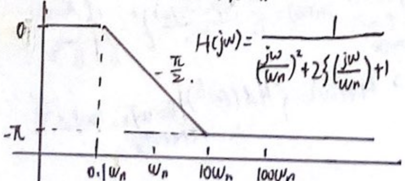
$\xi>1$, $\xi\uparrow$ step response slow down

Second-order CT system: Bote plot

$$20\log_{10}|H(j\omega)|\simeq\begin{cases}0, & \omega\ll\omega_n\\ -40\log_{10}\omega+40\log_{10}\omega_n, & \omega\gg\omega_n\end{cases}$$

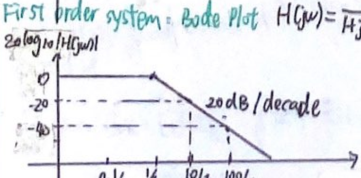


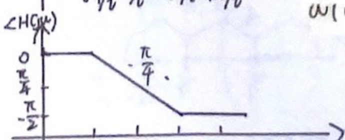
$$\angle H(j\omega)=\begin{cases}0, & \omega\leq0.1\omega_n\\ -\frac{\pi}{2}[\log_{10}(\frac{\omega}{\omega_n})+1], & 0.1\omega_n\leq\omega\leq10\omega_n\\ -\pi, & \omega\geq10\omega_n\end{cases}$$



$$H(j\omega)=\frac{1}{(\frac{j\omega}{\omega_n})^2+2\xi(\frac{j\omega}{\omega_n})+1}$$

First order system: Bode Plot $H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega\tau}$



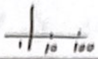


常数的Bode Plot $H(j\omega)=k$

if $k>0$. $k=|k|e^{j0}$, if $k<0$. $k=|k|e^{j\pi}$

$20\log_{10}|H(j\omega)|=20\log_{10}|k|$.

$\angle H_3(j\omega)=\begin{cases}0, & k>0\\ \pi, & k<0\end{cases}$



Bode Plot 做法 (已知图).

$$H(j\omega)=\frac{A(j\omega+\omega_1)^2}{(j\omega+\omega_2)(j\omega+\omega_3)}$$

先定 break frequency (和阶次). 再定上下. 再求A.

Laplace Transform

公式 $X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$. $s=\sigma+j\omega$.

单边LT: $X(s)=\int_{0^-}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$

LT&FT $X(s)=FT\{x(t)e^{-\sigma t}\}$

$X(s)|_{s=j\omega}=FT\{x(t)\}$

ROC region s for which $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)e^{-st}|dt$ 收敛

Property ① strip in s-plane ②不包括极点.

③ $x(t)$有限区间绝对可积, ROC包含整个splane

$\int_a^b|x(t)e^{-st}|dt=\int_a^b|x(t)|e^{-\sigma t}dt\leq M_{a,b,\sigma}\int_a^b|x(t)|dt$

④ 右边信号, $Re(s)=\sigma_0$在ROC $\Rightarrow$ ROC至少包含全部$Re(s)\geq\sigma_0$.

⑤ 左边信号, $Re(s)=\sigma_0\Rightarrow$ 至少 $Re(s)\leq\sigma_0$ ROC.

⑥ 双边, $x(t)=x_R(t)+x_L(t)$, $ROC=ROC_R\cap ROC_L$

$\Rightarrow$ ROC is a strip (有可能是ϕ)

$Re(s)=\sigma_0$ 在ROC $\Rightarrow$ ROC包含$Re(s)=\sigma_0$的strip.

⑦ 有理$X(s)$, ROC bounded by poles/extend to ∞.

⑧ a. 右边信号+有理$X(s)$ ROC: $Re(s)>$最右极点

b. 左边信号+有理$X(s)$ ROC: $Re(s)<$最左极点.

c. 双边信号+有理$X(s)$ ROC: 两连续极点.

Inverse LT $x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds$

Rational LT $X(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$, $Q(s)=\prod_{i=1}^{l}(s-s_i)^{p_i}$.

$X(s)=R(s)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{p_i}\frac{C_{i,k}}{(s-s_i)^k}$ $deg(R)=deg(P)-deg(Q)$

LT性质

①线性	$ax_1(t)+bx_2(t)\leftrightarrow aX_1(s)+bX_2(s)$	至少$R_1\cap R_2$
②时移	$x(t-t_0)\leftrightarrow e^{-st_0}X(s)$	R
③频移	$e^{s_0t}x(t)\leftrightarrow X(s-s_0)$	$R+Re(s_0)$
④时折(频折)	$x(at)\leftrightarrow\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{s}{a})$	aR
⑤时逆(频逆)	$x(-t)\leftrightarrow X(-s)$	$-R$
⑥共轭	$x^*(t)\leftrightarrow X^*(s^*)$ 实信号零极点成对存在	R
⑦时域卷积	$x_1(t)*x_2(t)\leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$	至少$R_1\cap R_2$
⑧时域微分	$\frac{dx(t)}{dt}\leftrightarrow sX(s)$	至少R
⑨频域微分	$-tx(t)\leftrightarrow\frac{dX(s)}{ds}$	R
⑩时域积分	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{1}{s}X(s)$	至少$R\cap\{Re(s)>0\}$

⑪初终值定理

a. 若$x(t)=0$ for $t<0$ 且 $x(t)$ has no impulses or higher-order singularities at $t=0$,

$x(0^+)=\lim_{t\to0^+}x(t)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$.

b. 若$x(t)=0$ for $t<0$ 且 $x(t)$ has a finite limit as $t\to\infty$, $\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to0}sX(s)$.

单边LT性质 (ROC总是右半平面, 忽略)

① 线性: same ② 频移: same ③ 时移 (在原点不允许)

④ 时折(频折): $x(at)\leftrightarrow\frac{1}{a}X(\frac{s}{a})$ $a>0$.

⑤ 共轭 $x^*(t)\leftrightarrow X^*(s^*)$

⑥ 时域卷积 ($x_1(t)=x_2(t)=0$ for $t<0$) $x_1*x_2\leftrightarrow X_1X_2$

⑦ 时域微分 $\frac{d}{dt}x(t)\leftrightarrow sX(s)-x(0^-)$

⑧ 频域微分 $-tx(t)\leftrightarrow\frac{d}{ds}X(s)$

⑨ 时域积分 $\int_{0^-}^{t}x(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{1}{s}X(s)$.

⑩ 初终值定理 same.

⑪ 时域微分: $\frac{d^n}{dt^n}x(t)\leftrightarrow s^nX(s)-\sum_{r=0}^{n-1}s^{n-r-1}x^{(r)}(0^-)$

⑫ 时域乘积: $x_1(t)x_2(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X_1(r)X_2(s-r)dr$

⑬ 时域积分: $\frac{1}{s}X(s)\leftrightarrow\int_{0^-}^{t}x(\tau)d\tau$

LT变换对

信号	LT	ROC
$\delta(t)/\delta(t-T)$	$1/e^{-sT}$	all s / all s
$u(t)/u_n(t)=\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$	$\frac{1}{s}/s^n$	$Re(s)>0$ / all s
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$Re(s)<0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}=s^{-n}$	$Re(s)>0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}=s^{-n}$	$Re(s)<0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re(s+a)>0$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re(s+a)<0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}=(s+a)^{-n}$	$Re(s+a)>0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}=(s+a)^{-n}$	$Re(s+a)<0$
$\cos(\omega_0t)u(t)$	$s/(s^2+\omega_0^2)$	$Re(s)>0$
$\sin(\omega_0t)u(t)$	$\omega_0/(s^2+\omega_0^2)$	$Re(s)>0$
$\cos(\omega_0t)e^{-at}u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$Re(s+a)>0$
$\sin(\omega_0t)e^{-at}u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$Re(s+a)>0$
$u_{-n}(t)=\underbrace{u(t)*\cdots u(t)}_{n个}$	s^{-n}	$Re(s)>0$

LTI & system function

① causal $\Rightarrow$ ROC是右半平面 causal+有理$H(s)\Leftrightarrow$ROC在最右极点右边

② stable $\Leftrightarrow$ ROC包括$j\omega$轴 ($Re\{s\}=0$)

③ 有理+causal+stable $\Leftrightarrow$ 所有极点都在左半平面.

Block Diagram

$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{H_1(s)}{1-H_1(s)H_2(s)}$ 乘: 加:

积分 $\rightarrow\boxed{\frac{1}{s}}\rightarrow$ 微分 $\rightarrow\boxed{s}\rightarrow$

双边: 求零状态.

单边: 求全响应 = $\boxed{\frac{X(s)}{啥}}$ + $\boxed{啥}$ 零状态 零输入

$\frac{1}{s+1}\frac{1}{s+2}$

Z Transform

公式 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$ 单边: $X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}$ (UZ) $z=re^{-j\omega}$

ZT&DTFT $X(z)=F\{x[n]r^{-n}\}$ $X(z)|_{z=e^{j\omega}}=FT\{x[n]\}$

ROC The set of z that $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]z^{-n}|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]r^{-n}|$ 收敛.

ROC性质 ①②同.

③有限区间, ROC全部z平面, $z=0/\infty$要单独验.

a. $N_2>0$. $X(0)=\infty$ b. $N_1<0$. $X(\infty)=\infty$

④右边. $|z|=r_0$在, $C<|z|<\infty$ ($N_1\geq0$包含∞)

⑤左边. $0<|z|<C$. ($N_2\leq0$, ROC包含$z=0$). ⑥双边 $C_1<|z|<C_2$

⑦同. ⑧同. a. 可能不包括∞. $N_1\geq0$包含∞. (causal).

b. 可能不包括0. $N_2\leq0$包含0. (anti causal).

Inverse ZT

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=r}X(z)z^{n-1}dz$$

Rational ZT

$$X(z)=\text{polynomial}(z^{-1})+\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{p_i}\frac{C_{i,k}}{(1-a_iz^{-1})^k}$$

ZT性质 ①线性✓ ②时移 $x[n-n_0]\leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$ R, 0/∞ 可能变

③ z域scaling $e^{j\omega_0n}x[n]\leftrightarrow X(e^{-j\omega_0}z)$ R.

$r_0^nx[n]\leftrightarrow X(r_0^{-1}z)$. r_0R.

$z_0^nx[n]\leftrightarrow X(z_0^{-1}z)$. $|z_0|R$.

④时逆 $x[-n]\leftrightarrow X(z^{-1})$ R^{-1} ⑤时扩 $x_{(k)}[n]=\begin{cases}x[r], & n=rk\\ 0, & n\neq rk\end{cases}$ $X(z^k)$ $R^{\frac{1}{k}}$

⑥共轭 $x^*[n]\leftrightarrow X^*(z^*)$. R. ⑦卷积同.

⑧一阶微分 $x[n]-x[n-1]\leftrightarrow(1-z^{-1})X(z)$. 至少$R$与$|z|>0$交集

⑨积分 $\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$. 至少$R$与$|z|>1$交集.

⑩ z域微分 $nx[n]\leftrightarrow-z\frac{dX(z)}{dz}$ R.

⑪ 初值定理: 若$x[n]=0$ for $n<0$, then $x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$.

单边ZT性质 (忽略ROC)

$x[n-1]\leftrightarrow\frac{1}{z}X(z)+x[-1]$ $x[n+1]\leftrightarrow zX(z)-zx[0]$

$x[n]-x[n-1]\leftrightarrow(1-z^{-1})X(z)-x[-1]$

$\sum_{k=0}^{n}x[k]\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$. 初值定理 $x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$.

$x[n-m]\leftrightarrow z^{-m}(X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x[k]z^{-k})=z^{-m}X(z)+\sum_{-m}^{-1}x[k]z^{-m-k}$.

$x[n+m]\leftrightarrow z^mX(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x[k]z^{-k+m}$

LTI & system function

frequency response ✓ $H(e^{j\omega})=H(z)|_{z=e^{j\omega}}$ ① causal $\Leftrightarrow$ 圆外, 包括∞

② causal+有理 $\Leftrightarrow$ a. 最外极点外 b. |numerator| $\leq$ |denominator| 阶数.

③ stable $\Leftrightarrow$ 包括$|z|=1$. ④ 有理+causal+stable $\Leftrightarrow$ 所有极点在单位圆内.