ENSA d'Al-Hoceima	Année 2021/2022
ID-1, Première Année,	Semestre 1
Statistique Inférentielle,	TD4

Série N^{o}4 : Lois de probabilité, convergence en loi, Distributions, Fonction génératrice

Exercice 1

Soit f la densité de probabilité d'une v. a. X, et soit $0 \leq a < b$ deux réels positifs. On définit une v. a. $Y = X^2$.

1. Montrer que si $a < Y < b$ alors $-\sqrt{b} < X < -\sqrt{a}$ ou $\sqrt{a} < X < \sqrt{b}$.
2. En déduire que
$$P((a, b)) = \int_{-\sqrt{b}}^{-\sqrt{a}} f(t)dt + \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} f(t)dt.$$
3. Montrer que
$$P((a, b)) = \int_{a}^{b} [f(-\sqrt{y}) + f(\sqrt{y})] \frac{1}{2\sqrt{y}} dy.$$
4. Montrer que si $a < b \leq 0$ alors l'événement $[a < Y < b]$ est impossible. En déduire la densité de probabilité g de la v. a. Y.
5. Examiner le cas où X est une variable aléatoire normale réduite et centrée, puis le cas où X est une variable aléatoire normale non réduite.

Solution : Soit f la densité de probabilité d'une variable aléatoire X, et soit $0 \leq a < b$ deux réels positifs. On définit une variable aléatoire $Y = X^2$.

1. Montrons que si $a < Y < b$ alors $-\sqrt{b} < X < -\sqrt{a}$ ou $\sqrt{a} < X < \sqrt{b}$:
On a $a < Y < b \quad \Leftrightarrow \quad a < X^2 < b$, alors ($x^2 - a = (X - \sqrt{a})(X + \sqrt{a}) > 0$ et $X^2 - b = (X - \sqrt{b})(X + \sqrt{b}) < 0$), ce qui implique le tableau de signes suivant :

	$-\infty \to -\sqrt{b}$	$-\sqrt{b} \to -\sqrt{a}$	$-\sqrt{a} \to \sqrt{a}$	$\sqrt{a} \to \sqrt{b}$	$\sqrt{b} \to +\infty$
$X - \sqrt{a}$	-	-	-	+	+
$X + \sqrt{a}$	-	-	+	+	+
$(X - \sqrt{a})(X + \sqrt{a})$	+	+	-	+	+
$X - \sqrt{b}$	-	-	-	-	+
$X + \sqrt{b}$	-	+	+	+	+
$(X - \sqrt{b})(X + \sqrt{b})$	+	-	-	-	+
$(X^2 - b)(X^2 - a)$	+	-	+	-	+

le produit $(X^2 - b)(X^2 - a)$ est négatif lorsque $X \in \mathcal{D} =]-\sqrt{b}, -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}, \sqrt{b}[$, d'où le résultat.

2. Déduisons la relation $P((a, b)) = \int_{-\sqrt{b}}^{-\sqrt{a}} f(t)dt + \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} f(t)dt$:
D'après la question 1., on a $[a < Y < b] = [-\sqrt{b} < X < -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a} < X < \sqrt{b}]$, alors
$$P((a, b)) = P([a < Y < b]) = \int_{\mathcal{D}} f(t)dt = \int_{-\sqrt{b}}^{-\sqrt{a}} f(t)dt + \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} f(t)dt$$

3. Montrons que $P((a,b)) = \int_a^b (f(-\sqrt{y}) + f(\sqrt{y}))\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$:

   D'après la question 2. on a $P((a,b)) = I(a,b) + J(a,b)$ où

$$I(a,b) = \int_{-\sqrt{b}}^{-\sqrt{a}} f(t)dt \quad \text{et} \quad J(a,b) = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} f(t)dt$$

   – pour un changement de variables, on pose $t^2 = y$, alors sur $[-\sqrt{b}, -\sqrt{a}]$ on a $t = -\sqrt{y}$ et donc $dt = -\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$ et (pour $t = -\sqrt{b}$ on a $y = b$) et (pour $t = -\sqrt{a}$ on a $y = a$) ; donc

$$I(a,b) = -\int_b^a f(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \int_a^b f(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$$

   – de même, pour un changement de variables, on pose $t^2 = y$, alors sur $[\sqrt{a}, \sqrt{b}]$ on a $t = \sqrt{y}$ et donc $dt = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$ et (pour $t = \sqrt{b}$ on a $y = b$) et (pour $t = \sqrt{a}$ on a $y = a$) ; donc

$$I(a,b) = \int_b^a f(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$$

   donc $P((a,b)) = I(a,b) + J(a,b) = \int_a^b f(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}dy + \int_b^a f(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$, d'où

$$P((a,b)) = \int_a^b \left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right)\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$$

4. – Montrons que si $a < b \leq 0$ alors l'événement $[a < Y < b]$ est impossible :
   soit $a < b \leq 0$ et supposons que l'événement $[a < Y < b]$ est possible, alors $[a < Y < b] \neq \emptyset$, donc $[a < X^2 < b] \neq \emptyset$; ce qui montre que la variable X^2 est négative dans $\mathbb{R}$; ce qui est absurde car le carré d'une fonction réelle est toujours positif ; d'où l'hypothèse est fausse ; soit $[a < Y < b] = \emptyset$.

   – La densité de probabilité g de la variable aléatoire Y : soit g la densité de probabilité de la variable aléatoire Y. L'événement $[a < Y < b]$ est impossible, alors $P((a,b)) = 0$ pour tout a et b négatifs tels que $a < b \leq 0$, donc la densité de probabilité g est nulle sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ ceci d'une part et d'autre d'après la question 2., on a

$$P((a,b)) = \int_a^b \left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right)\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$$

   pour tous a et b strictement positifs tels que $0 < a < b$ et $P((a,b)) = \int_a^b g(y)dy$ alors

$$\int_a^b \left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right)\frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \int_a^b g(y)dy$$

   comme $\left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} \geq 0$ et $g(y) \geq 0$ alors

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right) \quad \text{pour tout } y \in]0, +\infty[$$

   finalement la densité g est définie par

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad y \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right) & \text{pour} \quad y \in]0, +\infty[\end{cases}$$

5. – Soit X est une variable aléatoire normale réduite et centrée, alors $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ est de moyenne $\mu = 0$ et de variance $\sigma^2 = 1$, donc la densité de probabilité de X est

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

pour tout $y \leq 0$ on a $g_{0,1}(y) = 0$ et pour $y > 0$ on a

$$\begin{aligned} g_{0,1}(y) = &= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp\left(-\frac{y}{2}\right) + \exp\left(-\frac{y}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\, y}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a

$$g_{0,1}(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad y \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\, y}} \exp\left(-\dfrac{y}{2}\right) & \text{pour} \quad y \in]0, +\infty[\end{cases}$$

– Soit X est une variable aléatoire normale non réduite, alors $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est de moyenne μ et de variance σ^2, donc la densité de probabilité de X est

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

pour tout $y \leq 0$ on a $g_{\mu,\sigma^2}(y) = 0$ et pour $y > 0$ on a

$$\begin{aligned} g_{\mu,\sigma^2}(y) = &= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \left[\exp\left(-\frac{(-\sqrt{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\sqrt{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\,\sigma\sqrt{2\pi\, y}} \exp\left(-\frac{y+\mu^2}{2\sigma^2}\right) \left[\exp\left(-\frac{\mu\sqrt{y}}{\sigma^2}\right) + \exp\left(\frac{\mu\sqrt{y}}{\sigma^2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\, y}} \exp\left(-\frac{y+\mu^2}{2\sigma^2}\right) \cosh\left(\frac{\mu\sqrt{y}}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

où cosh est la fonction cosinus hyperbolique ; d'où si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a

$$g_{\mu,\sigma^2}(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad y \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\, y}} \exp\left(-\dfrac{y+\mu^2}{2\sigma^2}\right) \cosh\left(\dfrac{\mu\sqrt{y}}{\sigma^2}\right) & \text{pour} \quad y \in]0, +\infty[\end{cases}$$

On peut remarquer que si on prend $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$ dans cette dernière expression de $g_{\mu,\sigma^2}(y)$, on trouvera bien l'expression de $g_{0,1}(y)$ pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ la loi normale réduite et centrée.

□

Exercice 2
Soit X une variable aléatoire, on appelle fonction caractéristique de X et on note φ_X de la variable aléatoire réelle définie par :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}tX}]$$

1. Montrer que si deux variables aléatoires ont même fonction caractéristique alors elles ont même loi.
2. Montrer que si X a une espérance μ et une variance σ^2 alors la fonction caractéristique de X admet comme développement de Taylor en 0 :

$$\varphi_X(t) = 1 + \mathrm{i}\mu t - \frac{(\mu^2+\sigma^2)t^2}{2} + \mathcal{O}(t^2).$$

3. Pour $\mu = 0$, calculer $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varphi_X(t) - \varphi_X(0)}{t^2}\cdot$ Que peut-on en déduire ?
4. Calculer la fonction caractéristique $\varphi_X(t)$ de la variable aléatoire X de loi normale réduite et centrée.

Solution : Soit X une variable aléatoire, la fonction caractéristique de X, notée φ_X, est définie par : $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}tX}]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

1. Soit X et Y deux variables aléatoires ayant la même fonction caractéristique, montrons qu'elles ont même loi : deux variables aléatoires ont la même loi si elles ont la même moyenne et la même variance. On discutera les deux cas **variables aléatoires discrètes** et **variables aléatoires continues**.
   i) Soit $X : \Omega \mapsto J_X$ et $Y : \Omega \mapsto J_Y$ deux variables aléatoires discrètes telles que $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ où $J_X = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ et $J_Y = \{y_\ell, \ell \in \mathbb{N}\}$, alors

   $$\mathbb{E}[e^{\mathrm{i}tX}] = \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}tY}] \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

   donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

   $$\varphi_X(t) = \sum_{k\geq 0} e^{\mathrm{i}tx_k} P([X = x_k]) = \sum_{\ell \geq 0} e^{\mathrm{i}ty_\ell} P([Y = y_\ell]) = \varphi_Y(t)$$

   – Si, pour $j \geq 1$, les moments $\mathbb{E}(X^j)$ et $\mathbb{E}(Y^j)$ sont finis, alors φ_X et φ_Y sont de classes $\mathcal{C}^j$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

   $$\varphi_X^{(j)}(t) = \sum_{k\geq 0} (\mathrm{i}x_k)^j e^{\mathrm{i}tx_k} P([X = x_k]) = \sum_{\ell\geq 0} (\mathrm{i}y_\ell)^j e^{\mathrm{i}ty_\ell} P([Y = y_\ell]) = \varphi_Y^{(j)}(t)$$

   en particulier pour $t = 0$ on a $(\varphi'_X(0) = \varphi'_Y(0)$ pour $j = 1)$ et $(\varphi''_X(0) = \varphi''_Y(0)$ pour $j = 2)$ soit

   $$\mathrm{i}\mathbb{E}(X) = \mathrm{i}\sum_{k\geq 0} x_k P([X = x_k]) = \mathrm{i}\sum_{\ell\geq 0} y_\ell P([Y = y_\ell]) = \mathrm{i}\mathbb{E}(Y)$$

   $$-\mathbb{E}(X^2) = -\sum_{k\geq 0} x_k^2 P([X = x_k]) = -\sum_{\ell\geq 0} y_\ell^2 P([Y = y_\ell]) = -\mathbb{E}(Y^2),$$

donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(y)$ et $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(y^2)$;
et d'après la propriété de Hygens, on a

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \quad \text{et} \quad \sigma^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(y))^2;$$

finalement on obtient $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(y)$ et $\sigma^2(X) = \sigma^2(Y)$, ce qui prouve que X et Y ont la même loi.

– Si, pour $j \geq 1$, les moments $\mathbb{E}(X^j)$ et $\mathbb{E}(Y^j)$ ne sont pas finis, $\mathbb{E}(X) = \infty$ et $\mathbb{E}(Y) = \infty$ soit les variances $\sigma^2(X)$ et $\sigma^2(Y)$ de X et Y, respectivement ne sont pas définies ; d'où X et Y ont la même loi ($\mathbb{E}(X) = \infty = \mathbb{E}(Y)$ et $\sigma^2(X) = \infty = \sigma^2(Y)$).

ii) Soit $X : \Omega \mapsto J_X$ et $Y : \Omega \mapsto J_Y$ deux variables aléatoires continues telles que $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ où J_X et J_Y sont des dommaines inclus dans $\mathbb{R}$, alors

$$\mathbb{E}[e^{\mathrm{i}tX}] = \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}tY}] \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et X et Y ont des densités de probabilités f et g respectivement ; donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathcal{D}} e^{\mathrm{i}tx} f(x)dx = \int_{\mathcal{D}'} e^{\mathrm{i}ty} g(y)dy = \varphi_Y(t)$$

où $\mathcal{D}$ est le domaine de définition de f et $\mathcal{D}'$ est le domaine de définition de g.

– Si, pour $j \geq 1$, les moments $\mathbb{E}(X^j)$ et $\mathbb{E}(Y^j)$ sont finis, alors φ_X et φ_Y sont de classes $\mathcal{C}^j$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi_X^{(j)}(t) = \int_{\mathcal{D}} (\mathrm{i}x)^j e^{\mathrm{i}tx} f(x)dx = \int_{\mathcal{D}'} (\mathrm{i}y)^j e^{\mathrm{i}ty} g(y)dy = \varphi_Y^{(j)}(t)$$

en particulier pour $t = 0$ on a ($\varphi'_X(0) = \varphi'_Y(0)$ pour $j = 1$) et ($\varphi''_X(0) = \varphi''_Y(0)$ pour $j = 2$) soit

$$\mathrm{i}\mathbb{E}(X) = \mathrm{i}\int_{\mathcal{D}} xf(x)dx = \mathrm{i}\int_{\mathcal{D}'} yg(y)dy = \mathrm{i}\mathbb{E}(Y)$$

$$-\mathbb{E}(X^2) = -\int_{\mathcal{D}} x^2 f(x)dx = -\int_{\mathcal{D}'} y^2 g(y)dy = -\mathbb{E}(Y^2),$$

donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(y)$ et $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(y^2)$;
et d'après la propriété de Hygens, on a

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \quad \text{et} \quad \sigma^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(y))^2;$$

finalement on obtient $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(y)$ et $\sigma^2(X) = \sigma^2(Y)$, ce qui prouve que X et Y ont la même loi.

– Si, pour $j \geq 1$, les moments $\mathbb{E}(X^j)$ et $\mathbb{E}(Y^j)$ ne sont pas finis, $\mathbb{E}(X) = \infty$ et $\mathbb{E}(Y) = \infty$ soit les variances $\sigma^2(X)$ et $\sigma^2(Y)$ de X et Y, respectivement ne sont pas définies ; d'où X et Y ont la même loi ($\mathbb{E}(X) = \infty = \mathbb{E}(Y)$ et $\sigma^2(X) = \infty = \sigma^2(Y)$).

2. Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique μ et de variance σ^2, montrons que la fonction caractéristique de X admet comme développement de Taylor en 0

$$\varphi_X(t) = 1 + \mathrm{i}\mu t - \frac{(\mu^2 + \sigma^2)t^2}{2} + \mathcal{O}(t^2)$$

L'espérance mathématique μ et la variance σ^2 existent si $\mathbb{E}(X) < \infty$ et $\mathbb{E}(X^2) < \infty$; dans ce cas φ_X est deux fois dérivables ; et on a φ_X est développable selon Taylor en 0 :

$$\varphi_X(t) = \varphi_X(0) + \varphi'_X(0)(t-0) + \frac{1}{2}\varphi''_X(0)(t-0)^2 + \mathcal{O}(t^2)$$

or $\varphi_X(0) = \mathbb{E}[1] = 1$, $\varphi'_X(0) = \mathrm{i}\mathbb{E}(X) = \mathrm{i}\mu$ et $\varphi''_X(0) = -\mathbb{E}(X^2)$, alors

$$\varphi_X(t) = 1 + \mu t - \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(X^2)t^2 + \mathcal{O}(t^2)$$

or d'après la propriété de Hygens, on a $\sigma^2 = \sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2$ alors $\mathbb{E}(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$, donc

$$\varphi_X(t) = 1 + \mu t - \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(X^2)t^2 + \mathcal{O}(t^2) = 1 + \mu t - \frac{\mu^2+\sigma^2}{2}\,t^2 + \mathcal{O}(t^2)$$

finalement le développement de Taylor de φ_X en 0 est $\varphi_X(t) = 1+\mu t - \dfrac{\mu^2+\sigma^2}{2}\,t^2 + \mathcal{O}(t^2)$.

3. Pour $\mu = 0$, calculons $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varphi_X(t) - \varphi_X(0)}{t^2}$: en effet, pour $\mu = 0$, on a le développement de Taylor de φ_X en 0 devient $\varphi_X(t) = 1 - \dfrac{\sigma^2}{2}\,t^2 + \mathcal{O}(t^2)$ où $\varphi_X(0) = 1$; donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi_X(t) - \varphi_X(0)}{t^2} = -\frac{\sigma^2}{2}.$$

On en déduit que si X était une variable aléatoire de moyenne nulle, alors sa variance serait déterminée par la formule

$$\lim_{t\to 0} \frac{2(\varphi_X(0) - \varphi_X(t))}{t^2} = \sigma^2.$$

4. Soit X la variable aléatoire de loi normale réduite et centrée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, calculons la fonction caractéristique $\varphi_X(t)$: soit f la densité de probabilité de X, on a

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Par définition, la fonction caractéristique $\varphi_X(t)$ est

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}tX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}tx} f(x)dx$$

donc

$$\varphi_X(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}tx} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

or $e^{\mathrm{i}tx} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \exp\left(\mathrm{i}tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \exp\left(-\dfrac{(x-(\mu-\mathrm{i}t\sigma^2))^2}{2\sigma^2} - \mathrm{i}t\mu - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)$, alors

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-(\mu-\mathrm{i}t\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\mathrm{i}t\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dx \\
&= \exp\left(-\mathrm{i}t\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-(\mu-\mathrm{i}t\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right) dx
\end{aligned}$$

par changement de variables, on pose $\xi = \dfrac{x-(\mu - \mathrm{i}t\sigma^2)}{\sigma}$, alors $d\xi = \dfrac{dx}{\sigma}$, donc

$$\varphi_X(t) = \exp\left(-\mathrm{i}t\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi}_{=1}$$

ceci car la fonction $\xi \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{\xi^2}{2}\right)$ est la densité de probabilité de la loi normale réduite et centrée $\mathcal{N}(0,1)$. Finalement, on obtient la fonction caractéristique $\varphi_X(t)$ de la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ et

$$\varphi_{(\mu,\sigma^2)}(t) = \exp\left(-\mathrm{i}t\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)(\cos(\mu t) + \mathrm{i}\sin(\mu t)).$$

En particulier, pour $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$, on obtient la fonction caractéristique de la loi normale réduite et centrée $\mathcal{N}(0,1)$

$$\varphi_{(0,1)}(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

$\square$

Exercice 3

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v. a. $Z = X + Y$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de la v. a. X sachant que la somme $S = X + Y$ a une valeur n donnée.

Solution : Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1. La loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X + Y$:
   On a $X : \Omega \mapsto X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \mapsto Y(\Omega) = \mathbb{N}$, alors $Z : \Omega \mapsto Z(\Omega) = \mathbb{N}$ puisque pour tout $\omega \in \Omega$, on a $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$ et $X(\omega) \in \mathbb{N}$ et $Y(\omega) \in \mathbb{N}$, ce qui entraine $Z(\omega) \in \mathbb{N}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ alors $n = k + (n-k)$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, n$, donc l'événement $[Z = n]$ est la réunion des événements 2 à 2 disjoints $([X = k] \cap [Y = n-k])_{0 \le k \le n}$ soit

   $$[Z = n] = \bigcup_{k=0}^{n} ([X = k] \cap [Y = n-k])$$

   ce qui implique

   $$P([Z = n]) = \sum_{k=0}^{n} P([X = k] \cap [Y = n-k])$$

   or les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors les événements $[X = k]$ et $[Y = n-k]$ sont indépendants, donc

   $$P([X = k] \cap [Y = n-k]) = P([X = k]).P([Y = n-k]) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}$$

on en déduit alors

$$P([Z=n]) = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda^k \mu^{n-k}$$

d'après la formule de Binôme, on a $(\lambda+\mu)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k \mu^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda^k \mu^{n-k}$, d'où

$$P([Z=n]) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$$

finalement, la variable aléatoire Z suit aussi la loi de Poisson de paramétre $\alpha = \lambda + \mu$ ou soit $Z \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$ est la loi de Poisson.

2. La loi conditionnelle de la variable aléatoire X sachant que la somme $Z = X + Y$ a une valeur n donnée : Déterminer la loi conditionnelle de la variable X est de calculer la probabilité conditionnelle

$$P_{[Z=n]}([X=k]) = \frac{P([Z=n] \cap [X=k])}{P([Z=n])} \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}$$

L'événement $[Z=n] \cap [X=k]$ peut être défini par $[Y=n-k] \cap [X=k]$, alors il vient

$$P([Z=n] \cap [X=k]) = P([Y=n-k] \cap [X=k])$$

et, on a

$$P([Y=n-k] \cap [X=k]) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad k > n \\ e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, & \text{si} \quad k < n. \end{cases}$$

ce qui montre que

$$P_{[Z=n]}([X=k]) = \frac{e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n} = C_n^k \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n}$$

ou encore

$$P_{[Z=n]}([X=k]) = C_n^k \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ est le nombre de combinaison k à k des n éléments de $\{0, 1, \dots, n\}$; ce qui prouve que la loi conditionnelle de X sachant $[Z=n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$ de paramètres n et $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

□

Exercice 4

Soient p et q deux nombres réels strictement positifs. On considère la fonction B définie par

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt.$$

1) Montrer que pour $p > 0$ et $q > 0$ on a : $B(p,q) = B(q,p)$.

2) Donner la définition de la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

3) Soit $k > 0$ et soit f la fonction à valeurs réelles donnée par l'expression suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \geq 0 \text{ ou } x \geq 1 \\ k\, x^{p-1}(1-x)^{q-1}, & \text{si} \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

Trouver k pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

4) Soit a un nombre réel strictement positif et soient Γ_a et Γ les deux fonctions données respectivement par :

$$\Gamma_a(p) = \int_0^a e^{-t} t^{p-1} dt \quad \text{et} \quad \Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt.$$

a) Calculer $\Gamma_a(p+1)$ en fonction de a, p et $\Gamma_a(p)$. En déduire que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

b) Montrer que $\Gamma(p+q+1) = (p+q)\Gamma(p+q)$.

5) On admet la relation Eulerienne suivante : $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

a) Trouver une relation entre $B(p+1,q)$ et $B(p,q)$.

b) Calculer la moyenne de la variable aléatoire X en fonction de $B(p,q)$, puis en fonction de p et q.

c) Calculer la variance et l'écart-type de la v.a. X.

6) Soit Y le vecteur aléatoire défini par $Y = (X\ ,\ X\ ,\ X)^T$
Déterminer la matrice de covariance du vecteur aléatoire Y.

Solution : Soient p et q deux nombres réels strictement positifs. On considère la fonction B définie par

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt.$$

1) Montrons que pour $p > 0$ et $q > 0$ on a : $B(p,q) = B(q,p)$:
Par un changement de variable, on pose $\xi = 1-t$, alors $d\xi = -dt$ et (pour $t = 1$ on $\xi = 0$) et (pour $t = 0$ on a $\xi = 1$), donc il vient

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = -\int_1^0 (1-\xi)^{p-1}\xi^{q-1} d\xi = \int_0^1 \xi^{q-1}(1-\xi)^{p-1} d\xi$$

d'où $B(p,q) = B(q,p)$ pour tous $p > 0$ et $q > 0$.

2) La définition de la densité de probabilité d'une variable aléatoire X : Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est dite densité de probablité dune variable aléatoire X si et seulement si

i) $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathcal{D}$,

ii) $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} f(t)dt = 1$.

3) Soit $k > 0$ et soit f la fonction à valeurs réelles donnée par l'expression suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \geq 0 \text{ ou } x \geq 1 \\ k\, x^{p-1}(1-x)^{q-1}, & \text{si} \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

la valeur de k pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X :

i) D'abord $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $k\ x^{p-1}(1-x)^{q-1} \geq 0$ pour tout $x \in]0,1[$; donc $k > 0$ car $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \geq 0$ pour tout $x \in]0,1[$.

ii) et $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$, alors $\int_{\mathbb{R}} k\ x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = 1$, donc $k \int_{\mathbb{R}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = 1$, soit

$$kB(p,q) = 1,$$

d'où si $k = \dfrac{1}{B(p,q)}$, alors pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

4) Soit a un nombre réel strictement positif et soient Γ_a et Γ les deux fonctions données respectivement par :

$$\Gamma_a(p) = \int_0^a e^{-t}t^{p-1}dt \quad \text{et} \quad \Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}dt.$$

a) – Calculons $\Gamma_a(p+1)$ en fonction de a, p et $\Gamma_a(p)$:
Pour a un nombre réel strictement positif, alors l'intégration par partie il vient

$$\Gamma_a(p+1) = \int_0^a e^{-t}t^{p}dt = [-t^p e^{-t}]_0^a + p\int_0^a e^{-t}t^{p-1}dt = -a^p e^{-a} + p\Gamma_a(p)$$

d'où $\Gamma_a(p+1) = -a^p e^{-a} + p\Gamma_a(p)$ pour tout $p > 0$ et $a > 0$.

– Déduisons la relation $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$:
Faisons tendre a vers $+\infty$, alors $\lim\limits_{a\to 0} a^p e^{-a} = 0$ et $\lim\limits_{a\to 0} p\Gamma_a(p) = p\Gamma(p)$, d'où on déduit la relation suivante $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

b) Montrons que $\Gamma(p+q+1) = (p+q)\Gamma(p+q)$:
On pose $\alpha = p+q$, alors d'après la question 4)-b), il vient $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, d'où

$$\Gamma(p+q+1) = (p+q)\Gamma(p+q), \quad \forall p,q > 0.$$

5) On admet la relation Eulerienne suivante : $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

a) La relation entre $B(p+1,q)$ et $B(p,q)$:
on a

$$B(p+1,q) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)} = \frac{p}{p+q}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

d'où $B(p+1,q) = \dfrac{p}{p+q}B(p,q)$ pout tous $p > 0$ et $q > 0$.

b) – la moyenne de la variable aléatoire X en fonction de $B(p,q)$:
Par définition, la moyenne est donnée par la formule $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \frac{1}{B(p,q)}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx = \frac{1}{B(p,q)}B(p+1,q)$$

d'où la moyenne $\mathbb{E}(X) = \dfrac{B(p+1,q)}{B(p,q)}$.

– la moyenne de la variable aléatoire X en fonction de p et q :
D'après la question 5)-a) on a $\dfrac{B(p+1,q)}{B(p,q)} = \dfrac{p}{p+q}$, donc

$$\mathbb{E}(X) = \frac{p}{p+q}\cdot$$

c) La variance et l'écart-type de la variable aléatoire X :
D'après la propriété de Hygens, on a

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt - \frac{p^2}{(p+q)^2},$$

donc

$$\begin{aligned}
\sigma^2(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\
&= \frac{1}{B(p,q)}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}dx - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\
&= \frac{B(p+2,q)}{B(p,q)}
\end{aligned}$$

or $B(p+2,q) = \dfrac{\Gamma(p+2)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+2)} = \dfrac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \dfrac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}B(p,q)$,
alors

$$\begin{aligned}
\sigma^2(X) &= \frac{B(p+2,q)}{B(p,q)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\
&= \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\
&= \frac{p}{(p+q)^2(p+q+1)}\left[(p+1)(p+q) - p(p+q+1)\right] \\
&= \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}
\end{aligned}$$

d'où $\sigma^2(X) = \dfrac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}\cdot$
L'écart-type est la racine carrée positive de la variance soit

$$\sigma(X) = \frac{1}{p+q}\sqrt{\frac{pq}{(p+q+1)}}\ .$$

6) Soit Y le vecteur aléatoire défini par $Y = (X\ ,\ X\ ,\ X)^T$, la matrice de covariance du vecteur aléatoire Y : par définition la matrice de covariance est $C_Y = \mathbb{E}((Y-\mathbb{E}(Y))(Y-\mathbb{E}(Y))^T)$ avec

$$\begin{aligned}
(Y-\mathbb{E}(Y))(Y-\mathbb{E}(Y))^T &= \begin{pmatrix} X-\mathbb{E}(X) \\ X-\mathbb{E}(X) \\ X-\mathbb{E}(X) \end{pmatrix}\Big(X-\mathbb{E}(X), X-\mathbb{E}(X), X-\mathbb{E}(X)\Big) \\
&= \begin{pmatrix} (X-\mathbb{E}(X))^2 & (X-\mathbb{E}(X))^2 & (X-\mathbb{E}(X))^2 \\ (X-\mathbb{E}(X))^2 & (X-\mathbb{E}(X))^2 & (X-\mathbb{E}(X))^2 \\ (X-\mathbb{E}(X))^2 & (X-\mathbb{E}(X))^2 & (X-\mathbb{E}(X))^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc

$$C_Y = \begin{pmatrix} \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) & \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) & \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) \\ \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) & \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) & \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) \\ \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) & \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) & \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) \end{pmatrix}$$

or $\sigma^2(X) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)$ alors

$$C_Y = \begin{pmatrix} \sigma^2(X) & \sigma^2(X) & \sigma^2(X) \\ \sigma^2(X) & \sigma^2(X) & \sigma^2(X) \\ \sigma^2(X) & \sigma^2(X) & \sigma^2(X) \end{pmatrix} = \sigma^2(X) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, la matrice de covariance C_Y du vecteur aléatoire Y est donnée par

$$C_Y = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall p, q > 0.$$

$\square$

Exercice 5

1) Soit a un nombre réel et X une variable aléatoire réelle de densité de probabilité f.
   (a) Montrer que $\{a\} = \bigcap_{n\geq 0} [a, a+\frac{1}{n}[$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_n \geq 0$ définie par $u_n = P([a, a+\frac{1}{n}[) = \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)dt$ est convergente, puis calculer sa limite.
   *Que peut-on en déduire ?
   (c) Montrer que si A est un ensemble fini ou dénombrable, alors $P(A) = 0$.
2) Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(2, 0.3)$.
   (a) Déterminer la fonction caractéristique ϕ_X de la variable aléatoire X
   (b) Déterminer la fonction génératrice g_X de la variable aléatoire X
   (c) Quelle est la relation entre ϕ_X et g_X ?
   (d) Calculer le coefficient d'asymétrie $\gamma_1(X)$ et le coefficient d'aplatissement $\gamma_2(X)$ de X.

Solution :

1. Soit a un nombre réel et X une variable aléatoire réelle de densité de probabilité f.
   (a) Montrons que $\{a\} = \bigcap_{n\geq 0} [a, a+\frac{1}{n}[$:
   – Soit $x \in \{a\}$, alors $x = a \in [a, a+\frac{1}{n}[$ pour tout $n \geq 0$; donc $x \in \bigcap_{n\geq 0} \left[a, a+\frac{1}{n}\right[$ soit

$$\{a\} \subset \bigcap_{n\geq 0} \left[a, a+\frac{1}{n}\right[$$

– Soit $x \in \displaystyle\bigcap_{n\geq 0}\left[a, a+\frac{1}{n}\right[$, alors $x \in \left[a, a+\frac{1}{n}\right[$ pour tout $n \geq 0$, donc

$$|x-a| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 0$$

donc pour $n \to +\infty$, on a $x = a$, soit $x \in \{a\}$; d'où $\displaystyle\bigcap_{n\geq 0}\left[a, a+\frac{1}{n}\right[\subset \{a\}$

finalement il vient $\{a\} = \displaystyle\bigcap_{n\geq 0}[a, a+\frac{1}{n}[$.

(b) – Montrons que la suite $(u_n)_n \geq 0$ définie par $u_n = P([a, a+\frac{1}{n}[) = \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)dt$ est convergente : on a $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 0$, alors $\left[a, a+\frac{1}{n+1}\right[\subset \left[a, a+\frac{1}{n}\right[$ pour tout $n \geq 0$; donc

$$u_{n+1} = \int_a^{a+\frac{1}{n+1}} f(t)dt \leq \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)dt = u_n$$

ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, ceci d'une part et d'autre part on a $u_n = \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)dt \geq 0$ pour tout $n \geq 0$ car $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathcal{D}_f$ puisqu'il s'agit d'une densité de probabilité ; d'où la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

– La limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$: on a $u_n = \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)dt = \int_{\mathcal{D}_f} f(t)\mathbb{1}_{[a,a+\frac{1}{n}[}(t)dt$; on pose $f_n(t) = f(t)\mathbb{1}_{[a,a+\frac{1}{n}[}(t)$, alors on a

$$|f_n(t)| \leq f(t), \quad \forall t \in \mathcal{D}_f, \quad \int_{\mathcal{D}_f} f(t)dt = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$$

d'après le théorème de la convergence dominée, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)dt = 0.$$

– Conclusion : on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,a+\frac{1}{n}[} f(t)dt = \int_{\{a\}} f(t)dt$$

d'où $P(\{a\}) = \int_{\{a\}} f(t)dt = 0$.

(c) Soit A est un ensemble fini ou dénombrable, alors

– si A est fini de cardinal p, alors $A = \{a_1, \ldots, a_p\} = \bigcup_{k=1}^p \{a_k\}$; donc

$$P(A) = \int_A f(t)dt = \int_{\bigcup_{k=1}^p \{a_k\}} f(t)dt = \sum_{k=1}^p \int_{\{a_k\}} f(t)dt = \sum_{k=1}^p P(\{a_k\}) = \sum_{k=1}^p 0 = 0$$

– si A est un ensemble dénombrable, alors $A = \{a_k,\ k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{k\geq 0}\{a_k\}$; donc

$$P(A) = \int_A f(t)dt = \int_{\bigcup_{k\geq 0} \{a_k\}} f(t)dt = \sum_{k\geq 0} \int_{\{a_k\}} f(t)dt = \sum_{k\geq 0} P(\{a_k\}) = \sum_{k\geq 0} 0 = 0$$

car il s'agit d'une série de terme général $p_k = P(\{a_k\})$ qui converge.

2. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(2, 0.3)$,
   – la fonction caractéristique ϕ_X de la variable aléatoire X :

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \sum_{k=0}^{2} \mathrm{C}_2^k 0.3^k (1-0.3)^{2-k} e^{\mathrm{i}kt} \\
&= \sum_{k=0}^{2} \mathrm{C}_2^k (0.3e^{\mathrm{i}t})^k (1-0.3)^{2-k} \\
&= (1-0.3+0.3e^{\mathrm{i}t})^2 \\
&= (0.7+0.3e^{\mathrm{i}t})^2
\end{aligned}$$

   d'où $\phi_X(t) = \frac{1}{100}(7+3e^{\mathrm{i}t})^2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   – la fonction génératrice g_X de la variable aléatoire X :

$$g_X(t) = \sum_{k=0}^{2} \mathrm{C}_2^k 0.3^k (1-0.3)^{2-k} t^k = \frac{1}{100}(7+3t)^2$$

   pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   – la relation entre ϕ_X et g_X : on a $\phi_X(t) = \frac{1}{100}(7+3e^{\mathrm{i}t})^2$ et $g_X(t) = \frac{1}{100}(7+3t)^2$, donc

$$\phi_X(t) = g_X(e^{\mathrm{i}t}), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

   – Étant donnée une variable aléatoire réelle X de moyenne μ et d'écart type σ, on définit
   son coefficient d'asymétrie $\gamma_1(X)$ par

$$\gamma_1(X) = \mathbb{E}\left(\frac{(X-\mu)^3}{\sigma^3}\right)$$

   et son coefficient d'aplatissement $\gamma_2(X)$ par

$$\gamma_2(X) = \mathbb{E}\left(\frac{(X-\mu)^4}{\sigma^4}\right)$$

   On considère le cas de X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(2, 0.3)$, alors on a la moyenne $\mathbb{E}(X) = 2*0.3 = 0.6$ et la variance $\sigma^2(X) = 2*0.3*0.7 = 0.42$; donc le coefficient coefficient d'asymétrie $\gamma_1(X)$ par

$$\gamma_1(X) = \mathbb{E}\left(\frac{(X-0.6)^3}{\sqrt{0.42}^3}\right) = \left(\frac{50}{21}\right)^{3/2} \mathbb{E}\left(\left(X-\frac{3}{5}\right)^3\right)$$

   or $\left(X-\frac{3}{5}\right)^3 = X^3 - 3*\frac{3}{5}X^2 + 3\frac{9}{25}X - \left(\frac{3}{5}\right)^3 = X^3 - \frac{9}{5}X^2 + \frac{27}{25}X - \frac{27}{125}$, alors

$$\begin{aligned}
\gamma_1(X) &= \left(\frac{50}{21}\right)^{3/2} \mathbb{E}\left(X^3 - \frac{9}{5}X^2 + \frac{27}{25}X - \frac{27}{125}\right) \\
&= \left(\frac{50}{21}\right)^{3/2} \left(\mathbb{E}\left(X^3\right) - \frac{9}{5}\mathbb{E}\left(X^2\right) + \frac{27}{25}\mathbb{E}\left(X\right) - \frac{27}{125}\right)
\end{aligned}$$

or $X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X^2 - 2X$ et $X^2 = X(X-1) + X$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \mathbb{E}\left(X(X-1)\right) + \mathbb{E}\left(X\right) \\
&= 0.42 + 0.36 \\
&= 0.78 \\
\mathbb{E}\left(X^3\right) &= \mathbb{E}\left(X(X-1)(X-2)\right) + 3\mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}\left(X\right) \\
&= 0 + 3 * (0.42 + 0.36) - 2 * 0.6 \\
&= 2.34 - 1.2 \\
&= 1.14
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\gamma_1(X) &= \left(\frac{50}{21}\right)^{3/2}\left(1.14 - \frac{9}{5} * 0.78 + \frac{27}{25} * 0.6 - \frac{27}{125}\right) \\
&= 753/1220
\end{aligned}$$

d'où $\gamma_1(X) = 753/1220 = 0.6172133998483669$. Et, le coefficient d'aplatissement $\gamma_2(X)$ par

$$\gamma_2(X) = \mathbb{E}\left(\frac{(X-\mu)^4}{\sigma^4}\right) = \left(\frac{50}{21}\right)^2 \mathbb{E}\left(\left(X - \frac{3}{5}\right)^4\right)$$

or $\left(X - \frac{3}{5}\right)^4 = X^4 - 4 * \frac{3}{5}X^3 + 6\frac{9}{25}X^2 - 4\frac{27}{125}X + \left(\frac{3}{5}\right)^4 = X^4 - \frac{12}{5}X^3 + \frac{54}{25}X^2 - \frac{108}{25}X - \frac{81}{625}$,

$$\begin{aligned}
\gamma_2(X) &= \left(\frac{50}{21}\right)^2 \mathbb{E}\left(X^4 - \frac{12}{5}X^3 + \frac{54}{25}X^2 - \frac{108}{125}X - \frac{81}{625}\right) \\
&= \left(\frac{50}{21}\right)^2 \left(\mathbb{E}\left(X^4\right) - \frac{12}{5}\mathbb{E}\left(X^3\right) + \frac{54}{25}\mathbb{E}\left(X^2\right) - \frac{108}{125}\mathbb{E}\left(X\right) - \frac{81}{625}\right)
\end{aligned}$$

or $X^4 = X(X-1)(X-2)(X-3) + 6X^3 - 11X^2 + 6X$, alors

$$\mathbb{E}\left(X^4\right) = 6\mathbb{E}\left(X^3\right) - 11\mathbb{E}\left(X^2\right) + 6\mathbb{E}\left(X\right) = 6 * 1.14 - 11 * 0.78 + 6 * 0.6 = 1.86$$

donc

$$\begin{aligned}
\gamma_2(X) &= \left(\frac{50}{21}\right)^2 \left(1.86 - \frac{12}{5} * 1.14 + \frac{54}{25} * 0.78 - \frac{108}{125} * 0.6 + \frac{81}{625}\right) \\
&= 50/21
\end{aligned}$$

d'où $\gamma_1(X) = 50/21 = 2.380952380952383$.

$\square$

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(2, 25)$.

1. Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction caractéristique ϕ_X de la variable aléatoire X.
3. Calculer le coefficient d'asymétrie $\gamma_1(X)$ et le coefficient d'aplatissement $\gamma_2(X)$ de X.

Solution : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(2, 25)$, .

1. X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(2, 25)$, alors $\mathbb{E}(X) = 2$ et $\sigma^2(X) = 25$, alors la densité de probabilité de X est définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{50}\right) dx.$$
2. La fonction caractéristique ϕ_X de la variable aléatoire X :
$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{50}\right) e^{\mathrm{i}tx} dx$$
par un changement de variables, on pose $\xi = \frac{x-2}{5}$, alors $x = 2 + 5\xi$ et $dx = 5d\xi$
$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) e^{\mathrm{i}t(2+5\xi)} d\xi \\
&= e^{2\mathrm{i}t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} + 5\mathrm{i}t\xi\right) d\xi \\
&= e^{2\mathrm{i}t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\xi^2 - 2 \times 5\mathrm{i}t\xi - 25t^2 + 25t^2\right)\right) d\xi \\
&= e^{2\mathrm{i}t} e^{-\frac{25}{2}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\xi - 5\mathrm{i}t\right)^2\right) d\xi
\end{aligned}$$
par un changement de variables, on pose $y = \xi - 5\mathrm{i}t$, alors $dy = d\xi$ et il vient
$$\phi_X(t) = e^{2\mathrm{i}t} e^{-\frac{25}{2}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$
d'où $\phi_X(t) = e^{-\frac{25}{2}t^2} \left(\cos(2t) + \mathrm{i}\sin(2t)\right)$
3. Étant donnée une variable aléatoire réelle X de moyenne μ et d'écart type σ, on définit
   – son coefficient d'asymétrie $\gamma_1(X)$ par
   $$\gamma_1(X) = \mathbb{E}\left(\frac{(X-\mu)^3}{\sigma^3}\right)$$
   alors pour $\mu = 2$ et $\sigma = 5$ il vient $\gamma_1(X) = \frac{1}{5^3}\mathbb{E}\left((X-2)^3\right)$
   or
   $$\mathbb{E}\left((X-2)^3\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} (x-2)^3 \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{50}\right) dx$$
   on pose $\xi = \frac{x-2}{5}$, alors $dx = 5d\xi$, $x = 2 + 5\xi$ et
   $$\mathbb{E}\left((X-2)^3\right) = 5^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^3 \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$$
   donc
   $$\gamma_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^3 \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$$
   en procédant par une intégration par partie, on obtient $\mathbb{E}\left((X-2)^3\right) = 0$, d'où $\gamma_1(X) = 0$.

– son coefficient d'aplatissement $\gamma_2(X)$ par

$$\gamma_2(X) = \mathbb{E}\left(\frac{(X-\mu)^4}{\sigma^4}\right)$$

alors pour $\mu = 2$ et $\sigma = 5$ il vient $\gamma_2(X) = \frac{1}{5^4}\mathbb{E}\left((X-2)^4\right)$
or

$$\mathbb{E}\left((X-2)^4\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}}(x-2)^4 \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{50}\right) dx$$

on pose $\xi = \frac{x-2}{5}$, alors $dx = 5d\xi$, $x = 2 + 5\xi$ et

$$\mathbb{E}\left((X-2)^4\right) = 5^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^4 \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$$

donc

$$\gamma_2(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^4 \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$$

par une intégration par partie, on obtient $\gamma_2(X) = 3$.

Remarque : pour toute variable aléatoire X de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on a

$$\gamma_1(X) = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_2(X) = 3.$$

□

Exercice 7

Soit (Ω, τ, P) un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire sur Ω qui suit la loi binomiale $B(n,p)$ de paramètres n et p ($n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$).
On rappelle que pour la loi binomiale $B(n,p)$:

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\} \quad \text{et} \quad P(X = k) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ \forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

1. La variable aléatoire de loi binomiale est-elle discrète ou continue ? (*Justifier*)
2. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de X.
3. Rappeler la définition de la fonction caractéristique ϕ d'une variable aléatoire :
   i) discrète.
   ii) continue.
4. Calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire binomiale X.
5. On pose $\psi(k) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.
   Pour $k = 0, \ldots, 5$, $p = 0.25$ et $n = 5$: faire un tableau de valeurs de ψ, puis tracer le graphique C_ψ.
6. Étudier le cas de la variable aléatoire qui suit la loi $B(1, 0.25)$.

Solution : Considérons (Ω, τ, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur Ω qui suit la loi binomiale $B(n,p)$ de paramètres n et p ($n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$). On rappelle que pour la loi binomiale $B(n,p)$: $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ et $P(X = k) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

1. La variable aléatoire de loi binomiale est discrète car $J_X = X(\Omega)$ est de cardinal fini $n+1$ soit $\mathrm{Card}(X(\Omega)) = n+1$.
2. La moyenne, la variance et l'écart-type de X : Par définition, la moyenne est donnée par l'expression

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} kP([X=k]) = \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

or $k\mathrm{C}_n^k = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^k(1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

par changement d'indice, on pose $\ell = k-1$, alors

$$\mathbb{E}(X) = np\sum_{\ell=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{\ell} p^{\ell}(1-p)^{n-1-\ell} = np(p+1-p)^{n-1}$$

d'où $\mathbb{E}(X) = np$.
D'après la propriété de Hygens, on a $\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ alors

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2$$

pour cela, il reste à calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$:

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P([X=k]) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

or $k(k-1)\mathrm{C}_n^k = n(n-1)\mathrm{C}_{n-2}^{k-2}$, alors

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\mathrm{C}_{n-2}^{k-2} p^k(1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_{n-2}^{k-2} p^{k-2}(1-p)^{n-k}$$

par changement d'indice, on pose $\ell = k-2$, alors

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = n(n-1)p^2\sum_{\ell=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-2}^{\ell} p^{\ell}(1-p)^{n-2-\ell} = n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2}$$

d'où $\mathbb{E}(X(X-1)) = n(n-1)p^2$, d'où $\sigma^2(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$.
Remarque : pour le cas particulier d'une variable aléatoire de Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1,p)$, on obtient

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \sigma^2(X) = p(1-p).$$

3. La définition de la fonction caractéristique ϕ_X d'une variable aléatoire : Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow X(\Omega)$ une variable aléatoire. On appelle **fonction caractéristique** de X, notée ϕ_X, toute fonction de variable réelle $t \in \mathbb{R}$ définie par

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{\mathrm{i}tX}).$$

Ainsi, on a les cas suivants :

i) Si X est une variable aléatoire discrète, alors $J_X = X(\Omega)$ est au plus dénombrable et donc
$$\phi_X(t) = \sum_{a \in J_X} e^{\mathrm{i}at} P([X = a]).$$

ii) Si X est une variable aléatoire continue, alors X admet une densité de probabilité f définie sur un domaine $\mathcal{D}$ et donc
$$\phi_X(t) = \int_{\mathcal{D}} e^{\mathrm{i}t\xi} f(\xi) d\xi.$$

4. La fonction caractéristique de la variable aléatoire binomiale X : il s'agit bien d'une variable aléatoire discrète alors
$$\phi_X(t) = \sum_{a \in J_X} e^{\mathrm{i}at} P([X = a]) = \sum_{k=0}^{n} e^{\mathrm{i}kt} \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (pe^{\mathrm{i}t})^k (1-p)^{n-k}$$
d'où $\phi_X(t) = (pe^{\mathrm{i}t} + 1 - p)^n$.

5. Posons $\psi(k) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Pour $k = 0, \ldots, 5$, $p = 0.25$ et $n = 5$:

k	0	1	2	3	4	5
$\psi(k)$	0.2373	0.3955	0.2637	0.0879	0.0146	9.7656e-04

ainsi, on obtient le graphique C_ψ de la fonction ψ :

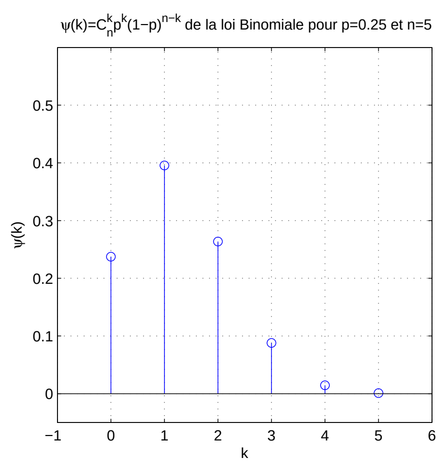

FIGURE 1 – Les courbes de $\psi(k) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k = 0, \ldots, 5$, $p = 0.25$ et $n = 5$

6. Soit X la variable aléatoire de loi Bernoulli $B(1, 0.25)$, alors $p = 0.25$, $n = 1$, $\psi(1) = 0.25$, $\psi(0) = 1 - 0.25 = 0.75$ et la fonction caractéristique est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par :
$$\phi_X(t) = 0.75 + 0.25e^{\mathrm{i}t}$$

$\square$