Série 2: **Réduction des matrices carrées.** **2021/2022**

Analyse Numérique Matricielle

Filière: **Ingénierie des données**

S1-- ENSAH -- **F.MORADI**

Exercice 1 :

les matrices A suivantes sont -elles diagonalisables? Si oui déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que: $P^{-1}AP = D$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1- Vérifier que le polynôme $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est Annulateur de la matrice A.

2- En déduire les valeurs propres possibles de A.

3- Déterminer $Sp(A)$ le spectre de A et en déduire $\rho(A)$ le rayon spectral de A.

Exercice 3 :

Considérons la matrice $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1- Calculer X^2 et X^3.

2- En déduire le spectre de X.

3- La matrice X est -elle diagonalisable?

Exercice 4 :

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 13 & 5 & -2 \\ 5 & 13 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1 les matrices A et B sont -elles diagonalisables?

2- Calculer $det(B)$ et déduire une valeur propre pour B.

3- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés pour A et B.

Exercice 5 :

On dit qu'une matrice carrée $A\epsilon\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe un entier naturel p tel que:

$$A^p = 0$$

Le plus petit entier p vérifiant $A^p = 0$ est appelé indice de nilpotence.

Ce dernier est inférieur ou égal à la dimension de l'espace ($p \leq n$).

Les matrices suivantes sont -elles nilpotentes ? Si oui déterminer leurs indices de nilpotence.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 :
On appelle exponentielle de la matrice carrée A , notée par $exp(A)$, la formule suivante :

$$exp(A) = I + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{A^p}{p!}$$

1- Soient A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que: $AB = BA$. Montrer que:

$$exp(A + B) = exp(A) * exp(B)$$

2- Considérons les matrices: $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a- Calculer $exp(N)$ et $exp(D)$.

b- En déduire $exp\left(\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right)$.

3- Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} -\frac{23}{5} & \frac{36}{5} \\ \frac{36}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

a- Montrer que : $Sp(A) = \{5, -10\}$

b- Diagonaliser A et en déduire $exp(A)$

Exercice 7 :
Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes linéaires suivants en utilisant la méthode d'élimination de Gauss :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} 3x + 4z = 8 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - y + 3z = 5 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} 3\alpha + 4\gamma = -4 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = -4 \\ \alpha - \beta + 3\gamma = 1 \end{cases}$$

Exercice 8 :
Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ les systèmes linéaires suivants en utilisant la méthode d'élimination de Gauss :

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 10 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Exercice 9 :
Considérons dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

1- Résoudre le système en utilisant la méthode d'élimination de Gauss.

2- Posons : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Donner les matrices L_1 et L_2 correspondantes à la méthode de Gauss.

3- Calculer $detA$ et $P(\lambda)$ le polynôme caractéristique de A.

4- Montrer que 1 est une valeur propre de A.

5- Déterminer $Sp(A)$ le spectre de A.

6- En déduire $\rho(A)$ le rayon spectral de A.