ENSA d'Al-Hoceima — Année 2021/2022
ID-1, Première Année, — Semestre 1
Statistique Inférentielle, — TD3

Solution de la Série N^{o}3 : Lois de probabilité usuelles : discrètes et continues

Exercice 1 *(Loi log-normale)*
On dit qu'une v.a. Z a une loi log-normale de paramètres μ et γ si la variable $\ln(Z)$ a une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\gamma)$ d'espérance μ et de variance γ.

1. Donner l'expression de la v.a. X en fonction de $\ln(Z)$, μ et γ.
2. Déterminer la densité de la variable Z.
3. déterminer l'espérance et la variance de la variable Z.

Solution : Soit Z une variable aléatoire qui suit une loi log-normale de paramètres μ et γ, alors la variable $\ln(Z)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\gamma)$ d'espérance μ et de variance γ ; on écrit $\ln(Z) \sim \mathcal{N}(\mu,\gamma)$.

1. Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors l'expression de X en fonction de $\ln(Z)$, μ et γ est
$$X = \frac{\ln(Z)-\mu}{\sqrt{\gamma}}$$
où soit $\ln(Z) = \mu + \sqrt{\gamma}\,X$.
2. La densité de la variable Z : soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors la densité de probabilité de X est
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$
Soit g la densité de probabilité de $\ln(Z)$, alors g serait définie sur $\mathcal{D} =]0,+\infty[$ et on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 = \int_0^{+\infty} g(z)dz \tag{1.1}$$
car f et g sont toutes deux des densités de probabilité.
Par un changement de variables, on pose $x = \frac{\ln(z)-\mu}{\sqrt{\gamma}}$, alors $z = e^{\mu+\sqrt{\gamma}\,x}$, alors $dz = \sqrt{\gamma}\,e^{\mu+\sqrt{\gamma}\,x}dx$, donc $dx = \frac{dz}{\sqrt{\gamma}\,z}$; et pour $x=-\infty$ on a $z=0$ et pour $x=+\infty$ on a $z=+\infty$, il vient
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{\ln(z)-\mu}{\sqrt{\gamma}}\right)\frac{dz}{\sqrt{\gamma}\,z} = 1 \tag{1.2}$$
d'après (1.1)-(1.2) on obtient
$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{\ln(z)-\mu}{\sqrt{\gamma}}\right)\frac{dz}{\sqrt{\gamma}\,z} = \int_0^{+\infty} g(z)dz$$

donc
$$f\left(\frac{\ln(z)-\mu}{\sqrt{\gamma}}\right)\frac{dz}{\sqrt{\gamma}\,z}=g(z)dz$$
car il s'agit d'intégrales généralisées de fonctions positives. D'où
$$g(z)=\frac{1}{\sqrt{\gamma}\,z}f\left(\frac{\ln(z)-\mu}{\sqrt{\gamma}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\gamma\pi}\,z}\exp\left(-\frac{(\ln(z)-\mu)^2}{2\gamma}\right)$$
finalement $g(z)=\frac{1}{\sqrt{2\gamma\pi}\,z}\exp\left(-\frac{(\ln(z)-\mu)^2}{2\gamma}\right)$ définie sur $\mathcal{D}=]0,+\infty[$.

3. – L'espérance mathématique de la variable aléatoire Z :
par définition $\mathbb{E}(Z)=\int_{\mathcal{D}} zg(z)dz$, alors
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \int_0^{+\infty} z\frac{1}{\sqrt{2\gamma\pi}\,z}\exp\left(-\frac{(\ln(z)-\mu)^2}{2\gamma}\right)dz\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\gamma\pi}}\exp\left(-\frac{(\ln(z)-\mu)^2}{2\gamma}\right)dz\end{aligned}$$
Par un changement de variables, on pose $x=\frac{\ln(z)-\mu}{\sqrt{\gamma}}$, alors $z=e^{\mu+\sqrt{\gamma}\,x}$, alors $dz=\sqrt{\gamma}\,e^{\mu+\sqrt{\gamma}\,x}dx$; et pour $z=0$ on a $x=-\infty$ et pour $z=+\infty$ on a $x=+\infty$, donc
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\gamma\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\sqrt{\gamma}\,e^{\mu+\sqrt{\gamma}\,x}dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}+\sqrt{\gamma}\,x\right)dx\end{aligned}$$
or $-\frac{x^2}{2}+\sqrt{\gamma}\,x=-\frac{1}{2}\left(x^2-2\sqrt{\gamma}\,x+\gamma-\gamma\right)=-\frac{1}{2}(x-\sqrt{\gamma})^2+\frac{\gamma}{2}$, alors
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\sqrt{\gamma})^2\right)e^{\gamma/2}\,dx\\ &= e^{\mu+\gamma/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\sqrt{\gamma})^2\right)dx\end{aligned}$$
encore une autre fois, on pose par changement de variables $t=x-\sqrt{\gamma}$, alors $dt=dx$ et pour $x=-\infty$ on a $t=-\infty$ et pour $x=+\infty$ on a $t=+\infty$, donc
$$\mathbb{E}(Z) = e^{\mu+\gamma/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt}_{=1}$$
car $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ est la densité de probabilité d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. D'où
$$\mathbb{E}(Z)=e^{\mu+\gamma/2}.$$

– La variance de la variable aléatoire Z :
D'après la propriété de Hygens, on a la variance $\sigma^2(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2$, alors

$$\sigma^2(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - e^{2\mu+\gamma}$$

donc il reste à calculer le terme $\mathbb{E}(Z^2)$. Par définition, on a

$$\mathbb{E}(Z^2) = \int_{\mathcal{D}} z^2 g(z) dz.$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z^2) &= \int_0^{+\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\gamma\pi}\, z} \exp\left(-\frac{(\ln(z)-\mu)^2}{2\gamma}\right) dz \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\gamma\pi}} z \exp\left(-\frac{(\ln(z)-\mu)^2}{2\gamma}\right) dz \end{aligned}$$

Par un changement de variables, on pose $x = \frac{\ln(z)-\mu}{\sqrt{\gamma}}$, alors $z = e^{\mu+\sqrt{\gamma}\,x}$, alors $dz = \sqrt{\gamma}\, e^{\mu+\sqrt{\gamma}\,x} dx$; et pour $z = 0$ on a $x = -\infty$ et pour $z = +\infty$ on a $x = +\infty$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\gamma\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \sqrt{\gamma}\, e^{2\mu+2\sqrt{\gamma}\,x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{2\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + 2\sqrt{\gamma}\,x\right) dx \end{aligned}$$

or $-\frac{x^2}{2} + 2\sqrt{\gamma}\,x = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 4\sqrt{\gamma}\,x + 4\gamma - 4\gamma\right) = -\frac{1}{2}(x-2\sqrt{\gamma})^2 + 2\gamma$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{2\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-2\sqrt{\gamma})^2\right) e^{2\gamma}\, dx \\ &= e^{2\mu+2\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-2\sqrt{\gamma})^2\right) dx \end{aligned}$$

encore une autre fois, on pose par changement de variables $t = x - 2\sqrt{\gamma}$, alors $dt = dx$ et pour $x = -\infty$ on a $t = -\infty$ et pour $x = +\infty$ on a $t = +\infty$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z^2) &= e^{2\mu+2\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt}_{=1} \\ &= e^{2\mu+2\gamma} \end{aligned}$$

d'où

$$\sigma^2(Z) = e^{2\mu+2\gamma} - e^{2\mu+\gamma} = e^{2\mu+2\gamma}(1 - e^{-\gamma})$$

– L'écart-type de la variable aléatoire Z : par définition l'écart-type $\sigma(Z)$ est la racine carrée positive de la variance, alors

$$\sigma(Z) = e^{\mu+\gamma}\sqrt{1 - e^{-\gamma}}.$$

$\square$

Exercice 2 *(Durée de vie d'un atome radioactif)*
On cherche ici à mettre en place une loi décrivant la désintégration des noyaux pour une substance radioactive donnée.
À partir de données expérimentales, on propose un modèle fondé sur les hypothèses suivantes :

i) la durée de vie d'un noyau est modélisée par une loi de probabilité P à densité continue f sur $\Omega = [0, +\infty[$ identique pour tous les noyaux ;

ii) la désintégration d'un noyau n'affecte pas celles des autres ;

iii) la probabilité conditionnelle pour un noyau, ayant existé jusqu'à l'instant t, de se désintégrer entre les instants t et $t+s$, ne dépend pas de son "âge" t : c'est pour cette raison que la loi de probabilité P est appellée **loi de durée de vie sans vieillissement**.

Soit (Ω, P) l'espace de probabilité. On considère les notations suivantes :
- Pour un intervalle $I \subset [0; +\infty[$, $P(I)$ représente la probabilité pour le noyau considéré de se désintégrer à un instant t élément de I.
- On définit la fonction F sur $[0; +\infty[$ par $F(t) = P([0;t]) = \int_0^t f(x)dx$.

1. Que représente la fonction F pour la variable aléatoire de densité de probabilité f ?
   *Montrer que F est défrivable, puis calculer sa dérivée.
2. Démontrer que, pour tous réels positifs a et b, on a :
$$P([a;b]) = F(b) - F(a) \quad \text{et} \quad P([a;+\infty[) = 1 - F(a).$$
3. (a) Comment s'interprète la probabilité conditionnelle $P_{[t;+\infty[}([t;t+s])$?
   *Justifier, pour tous t et s positifs, l'égalité :
$$P_{[t;+\infty[}([t;t+s]) = F(s).$$
   (b) En déduire, pour tous t et s positifs, les relations :
$$F(t+s) - F(t) = F(s)\,(1 - F(t)) \quad \text{et} \quad 1 - F(t+s) = (1 - F(t))\,(1 - F(s))$$
4. Soit G la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $G(t) = 1 - F(t)$.
   (a) Déterminer $G(0)$.
   (b) Justifier que G est dérivable et préciser sa fonction dérivée.
   (c) Démontrer, pour tous réels positifs t et s, la relation $G(t+s) = G(t)G(s)$.
   (d) En déduire l'existence d'un réel α tel que, pour tout réel positif t, $F(t) = 1 - e^{\alpha t}$.
5. (a) Préciser la limite de F en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour le signe de α ?
   (b) Démontrer que la densité f de loi de probabilité P est une fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \text{où } \lambda \text{ est un réel strisctement positif.}$$
6. Le nombre τ tel que $P([0;\tau]) = \frac{1}{2}$ s'appelle la demi-vie, ou période, de l'élément radioactif considéré.
   (a) Calculer τ en fonction de λ.

(b) Quelle est la probabilité pour qu'un noyau donné se désintègre entre les instants t et $t+s$ sachant qu'il n'est pas désintégré à l'instant t ?

7. La demi-vie τ et la constante de désintégration λ sont très variables d'un élément radioactif à l'autre.
   (a) Le "carbone 14" a une demi-vie de 5730 années ; calculer sa constante de désintégration annuelle.
   (b) La constante de désintégration annuelle de l'uranium 238 est de 1.54×10^{-10} environ.
   *Quelle demi-vie peut-on en déduire pour l'uranium 238 ?
   (c) La constante de désintégration par seconde du polonium 214 est de 1155.
   *Quelle demi-vie peut-on en déduire pour le polonium 214 ?
8. Écrire un bilan concernant les éléments radioactifs.

Solution : Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace de probabilité. On considère les notations suivantes :

- Pour un intervalle $I \subset [0; +\infty[$, $P(I)$ représente la probabilité pour le noyau considéré de se désintégrer à un instant t élément de I.
- On définit la fonction F sur $[0; +\infty[$ par $F(t) = P([0; t]) = \int_0^t f(x)dx$.

1. – La fonction F pour la variable aléatoire de densité de probabilité f :
   Soit X la variable aléatoire dont la densité de probabilité f, alors l'événement $[X < 0]$ est impossible soit $[X < 0] = X^{-1}(]-\infty, 0[) = \emptyset$, donc $P([X < 0]) = 0$, d'où

$$F(t) = P(]-\infty, 0[) + P([0,t]) = 0 + \int_0^t f(x)dx = \int_{-\infty}^t f(x)dx = P(]-\infty, t[)$$

   ce qui montre que F est la fonction de répartition de la variable aléatoire X décrivant la situation.

   – La dérivabilité de la fonction F et sa dérivée :
   Soit $h > 0$, on a

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} - f(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(x)dx - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(t)dx = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (f(x) - f(t))dx$$

   alors

$$\left|\frac{F(t+h) - F(t)}{h} - f(t)\right| \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} |f(x) - f(t)|\, dx \leq \frac{1}{h} \sup_{x\in[t,t+h]} |f(x) - f(t)| \int_t^{t+h} dx$$

   donc

$$\left|\frac{F(t+h) - F(t)}{h} - f(t)\right| \leq \sup_{x\in[t,t+h]} |f(x) - f(t)|$$

   or d'après l'hypothèse i) la densité f est continue sur $[0, +\infty[$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x > 0 \ : \quad |x - t| < \eta_\varepsilon \ \Rightarrow \ |f(x) - f(t)| < \varepsilon$$

   il suffit de prendre $\eta_\varepsilon = h$, alors $|x - t| \leq h = \eta_\varepsilon$; dans ce cas

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x > 0 \ : \quad |x - t| < \eta_\varepsilon \ \Rightarrow \ \sup_{x\in[t,t+h]} |f(x) - f(t)| < \varepsilon$$

ce qui prouve que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x > 0\ :\quad |x-t| < \eta_\varepsilon\ \Rightarrow\ \left|\frac{F(t+h)-F(t)}{h} - f(t)\right| < \varepsilon$$

d'où F est dérivable et $F'(x) = f(x)$ est la densité de probabilité.

2. Soit a et b deux réels positifs, montrons que $P([a;b]) = F(b) - F(a)$ et $P([a;+\infty[) = 1 - F(a)$.
   – on a $[0,+\infty[= [0,a] \cup]a,+\infty[$, alors

   $$1 = P([0,+\infty[) = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx = F(a) + P([a,+\infty[)$$

   ce qui montre que $P([a,+\infty[) = 1 - F(a)$.
   – De même, on a $[a,+\infty[= [a,b] \cup [b,+\infty[$, alors $P([a,+\infty[) = P([a,b]) + P([b,+\infty[)$, donc

   $$P([a,b]) = P([a,+\infty[) - P([b,+\infty[) = 1 - F(a) - (1 - F(b)) = F(b) - F(a)$$

   d'où le résultat.
3. (a) – Interprètation de la probabilité conditionnelle $P_{[t;+\infty[}([t;t+s])$: d'après l'hypothèse iii) $P_{[t;+\infty[}([t;t+s])$ est la probabilité conditionnelle pour un noyau, ayant existé jusqu'à l'instant t, de se désintégrer entre les instants t et $t+s$. Il s'agit de la probabilité conditionnelle pour un noyau, ne s'est pas désintégré entre l'instant 0 et l'instant t, de se désintégrer dans l'intervalle du temps $[t, t+s]$.
   – Pour tous t et s positifs, on a l'égalité $P_{[t;+\infty[}([t;t+s]) = F(s)$: en effet, d'après la même hypothèse iii) $P_{[t;+\infty[}([t;t+s])$ est la probabilité conditionnelle pour un noyau, ayant existé jusqu'à l'instant t, de se désintégrer entre les instants t et $t+s$, ne dépend pas de son "âge" t, alors t représente une période pour le noyau radioactif, et donc

   $$P_{[t;+\infty[}([t;t+s]) = P([t,t+s]) = \int_t^{t+s} f(x)dx = \int_0^s f(x)dx = F(s).$$

   (b) Soit t et s positifs, on a les relations suivantes :
   – D'après (a), on a

   $$P_{[t;+\infty[}([t;t+s]) = \frac{P([t;t+s])}{P([t;+\infty[)} = \frac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)} = F(s),$$

   donc $F(t+s) - F(t) = F(s)\,(1 - F(t))$.
   – On a $F(t+s) = F(t) + F(s)\,(1-F(t))$, alors

   $$1 - F(t+s) = 1 - F(t) - F(s)\,(1-F(t)) = (1-F(t)) - F(s)\,(1-F(t))$$

   d'où $1 - F(t+s) = (1-F(t))\,(1-F(s))$.
4. Soit G la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $G(t) = 1 - F(t)$.
   (a) Pour $t = 0$, on a $G(0) = 1 - F(0) = 1 - 0 = 1$.

(b) La fonction G est la somme de deux fonctions dérivables $t \mapsto 1$ et $t \mapsto F(t)$, alors G est dérivable et sa fonction dérivée $G'(t)$ est

$$G'(t) = -F'(t) = -f(t), \quad \forall t > 0.$$

(c) D'après la question $3-(b)$, pour tous réels positifs t et s, on a

$$1 - F(t+s) = (1 - F(t))\,(1 - F(s))\,,$$

comme $G(\xi) = 1 - F(\xi)$ pour $\xi \geq 0$, on obtient la relation $G(t+s) = G(t)G(s)$.

(d) d'après les questions $4-(a)$ et $4-(b)$, la fonction G possède les propriétés de la fonction exponentielle (soit $G(0) = 1$ et $G(t+s) = G(t)G(s)$ pour tous t et s positifs), donc il existe un réel α tel que $G(t) = e^{\alpha t}$, pour tout réel positif t, d'où il existe un réel α tel que $F(t) = 1 - e^{\alpha t}$ puisque $G(t) = 1 - F(t)$.

5. (a) – La limite de F en $+\infty$: on a $F(t) = P([0;t]) = \int_0^t f(x)dx$ pour tout $t \geq 0$, alors

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = \int_0^{+\infty} f(x)dx = P([0, +\infty[) = 1.$$

– Le signe de α : d'après la question $4-(d)$ on a $F(t) = 1 - G(t)$, alors

$$1 = \lim_{t \to +\infty} F(t) = \lim_{t \to +\infty} (1 - G(t)) = 1 - \lim_{t \to +\infty} G(t)$$

donc $\lim_{t \to +\infty} G(t) = 0$; soit $\lim_{t \to +\infty} e^{\alpha t} = 0$, d'où α est strictement négatif.

(b) Montrons que la densité f de loi de probabilité P est une fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \text{où } \lambda \text{ est un réel strisctement positif}$$

On a α est strictement négatif, alors il existe $\lambda > 0$ tel que $\alpha = -\lambda$, donc $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$; et comme $F'(t) = f(t)$ pour $t > 0$ alors

$$f(t) = (1 - e^{-\lambda t})' = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0$$

est la densité de probabilité recherchée.

6. Le nombre τ tel que $P([0;\tau]) = \frac{1}{2}$ s'appelle la demi-vie, ou période, de l'élément radioactif considéré.

(a) Calculons τ en fonction de λ : on a $P([0;\tau]) = \frac{1}{2}$ alors

$$\frac{1}{2} = P([0;\tau]) = \int_0^{\tau} \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^{\tau} = 1 - e^{-\lambda \tau}$$

donc $e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2}$; d'où $\lambda\tau = \ln(2)$; par suite $\tau = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$.

(b) La probabilité pour qu'un noyau donné se désintègre entre les instants t et $t+s$ sachant qu'il n'est pas désintégré à l'instant t : d'après la question $3-(b)$ on a

$$P_{[t;+\infty[}([t;t+s]) = F(s) = \int_0^s \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda s}.$$

Pour $s = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$ est la demi-vie, alors

$$P_{[t;+\infty[}([t;t+s]) = F(s) = \int_0^s \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda s} = \frac{1}{2}.$$

7. La demi-vie τ et la constante de désintégration λ sont très variables d'un élément radioactif à l'autre.
   (a) Le "carbone 14" a une demi-vie de 5730 années ; calculons la constante de désintégration annuelle du "carbone 14" : d'après la relation $\tau = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$, on a
   $$\lambda = \frac{\ln(2)}{\tau} = \frac{\ln(2)}{5730} ans^{-1} = 1.2097 \times 10^{-4} ans^{-1}.$$
   (b) La constante de désintégration annuelle de l'uranium 238 est de 1.54×10^{-10} environ, alors la demi-vie de l'uranium 238 est
   $$\tau = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \tau = \frac{\ln(2)}{1.54 \times 10^{-10}} = \frac{\ln(2)}{1.54} \times 10^{10} = 4,501 \times 10^{9}$$
   il s'agit d'une demi-vie d'environ 4501000000 années ; soit 4,5 milliard d'années ; ce qui veut dire que l'uranium 238 est un radioactif qui se désintègre très lentement.
   (c) La constante de désintégration par seconde du polonium 214 est de 1155, la demi-vie du polonium 214 est
   $$\tau = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \tau = \frac{\ln(2)}{1155} = 6.0013 \times 10^{-4}$$
   il s'agit d'une demi-vie d'environ 6.0013×10^{-4} seconde ; soit 6 millisecondes ; ce qui veut dire que le polonium 214 est un radioactif qui se désintègre très vite.
8. Dans cet exercice, nous avons étudié la loi de durée de vie sans vieillissement en décrivant la densité de probabilité exponentielle qui permet de calculer ensuite la demi-vie τ en fonction de la constante de désintégration λ des radioactifs ; ceci nous a conduit à faire une ananlyse entre trois éléments radioactifs qui sont résumés dans le tableau suivant :

	Constante λ	demi-vie τ	Analyse de désintégration
Carbone 14	1.2097×10^{-4} ans^{-1}	5730 années	lente
Uranium 238	1.54×10^{-10} ans^{-1}	4,5 milliard d'années	très lente
Polonium 214	1155 seconde^{-1}	6 millisecondes	très vite

$\square$

Exercice 3

Soit X la v.a. qui suit une loi normale de fonction de répartition Π définie par
$$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

1. Montrer que $\Pi(x) + \Pi(-x) = 1$.
2. Soit Y la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \gamma)$. Montrer que $X = \frac{(Y-\mu)}{\sqrt{\gamma}}$ est une variable aléatoire réduite.
3. Montrer que la fonction de densité f et la fonction de répartition F associées sont données par :
$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} e^{-(y-\mu)^2/2\gamma}, \quad F(y) = \Pi\left((y-\mu)/\gamma\right).$$

Solution : Soit X la v.a. qui suit une loi normale de fonction de répartition Π définie par

$$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

1. Montrons que $\Pi(x) + \Pi(-x) = 1$:
   Soit x un réel, on a
   $$\Pi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-t^2/2} dt$$
   par un changement de variable, on pose $\xi = -t$, alors $-d\xi = dt$, pour $t = -x$ on a $\xi = x$ et pour $t = -\infty$ on $\xi = +\infty$, donc
   $$\Pi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{x} e^{-\xi^2/2}(-d\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-\xi^2/2} d\xi$$
   ceci d'une part et d'autre part
   $$\begin{aligned} \Pi(x) + \Pi(-x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-t^2/2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-\xi^2/2} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt + \int_{x}^{+\infty} e^{-\xi^2/2} d\xi \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \end{aligned}$$
   or la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ est la densité de probabilité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 1$$
   d'où $\Pi(x) + \Pi(-x) = 1$.
2. Soit $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \gamma)$, montrons que $X = \frac{(Y-\mu)}{\sqrt{\gamma}}$ est une variable aléatoire réduite et centrée :
   - $X = \frac{(Y-\mu)}{\sqrt{\gamma}}$ est une variable aléatoire centrée, en effet,
     $$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\frac{(Y-\mu)}{\sqrt{\gamma}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \mathbb{E}(Y) - \frac{\mu}{\sqrt{\gamma}} \mathbb{E}(1)$$
     car $\mathbb{E}$ est linéaire ; donc
     $$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \mu - \frac{\mu}{\sqrt{\gamma}} 1 = \frac{\mu}{\sqrt{\gamma}} (1-1) = 0$$
     ceci puisque $\mathbb{E}(Y) = \mu$ et $\mathbb{E}(1) = 1$.
   - $X = \frac{(Y-\mu)}{\sqrt{\gamma}}$ est une variable aléatoire réduite ; en effet, la variance de X est
     $$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\left(\frac{(Y-\mu)}{\sqrt{\gamma}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}^2} \mathrm{Var}(Y)$$

ceci d'aprsè les propriétés de la variance ($\text{Var}(kX) = k^2\text{Var}(X)$ et $\text{Var}(X+k) = \text{Var}(X)$) ; et comme $\text{Var}\,(Y) = \gamma$, alors

$$\text{Var}\,(X) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}^2}\gamma = \frac{\gamma}{\gamma} = 1$$

3. Montrons que la fonction de densité f et la fonction de répartition F associées à la variable aléatoire Y sont données par :

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}}e^{-(y-\mu)^2/2\gamma}, \quad F(y) = \Pi\left((y-\mu)/\gamma\right).$$

– Soit f la densité de propbabilité de la variable aléatoire $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \gamma)$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy$$

par un changement de variable, on pose $x = \frac{(y-\mu)}{\sqrt{\gamma}}$ alors $dx = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}dy$ et donc il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\gamma}\right)\frac{1}{\sqrt{\gamma}}dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy$$

or les fonctions $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\gamma}}exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\gamma}\right)$ et $y \mapsto f(y)$ sont positives, alors

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\gamma}}\;exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\gamma}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

est la densité de probabilité de la variable aléatoire $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \gamma)$.

– La fonction de répartifion F de la variable aléatoire $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \gamma)$: par définition on a

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\gamma}}\;exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\gamma}\right)dt$$

par un changement de variable $x = \frac{t-\mu}{\sqrt{\gamma}}$, alors pour $t = y$ on a $x = \frac{y-\mu}{\sqrt{\gamma}}$ et $dt = \sqrt{\gamma}\,dx$; et donc

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\frac{y-\mu}{\sqrt{\gamma}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\gamma}}\;exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\sqrt{\gamma}\;dx = \int_{-\infty}^{\frac{y-\mu}{\sqrt{\gamma}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\;dx$$

d'où $F(y) = \Pi\left(\frac{y-\mu}{\sqrt{\gamma}}\right)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \gamma)$.

□

Exercice 4

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

1. Montrer que pour tout $k > 0$ alors

$$P(|X - E(X)| \geq k\sigma(X)) \leq \frac{1}{k^2}.$$

2. Soit X une variable aléatoire de Bernoulli. Une épreuve répétée de Bernoulli est donc un système
$$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$
de variables de Bernoulli indépendantes. L'évènement $[X = 1]$ est le succès de l'épreuve X, et l'évènement $[X = 0]$ est son échec.
La variable aléatoire $Z_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ peut alors être appelée "**compteur de succès**" et $Y_n = \frac{1}{n} Z_n$ peut être appelée "**fréquence de succès**"
   (a) Soit $d > 0$ et Y_n la fréquence de succès d'une épreuve répétée (n fois) de Bernoulli. Montrer que
   $$\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n - E(X)| \geq d) = 0.$$
   (b) **Application** : Commbien de coups de pile ou face suffit-il d'effectuer pour que la fréquence de succès soit comprise entre 0.45 et 0.55 avec une probabilité de 0.99 au moins ?

Solution : Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

1. Montrons que pour tout $k > 0$, alors $P(|X - E(X)| \geq k\sigma(X)) \leq \frac{1}{k^2}$:
Soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ou les x_i étant distincts. La variance de X est
$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 P([X = x_i])$$
Notons I l'ensemble des indices i tels que
$$|x_i - \mathbb{E}(X)| \geq k\sigma$$
et minorons σ^2
$$\sigma^2 \geq \sum_{i \in I} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 P([X = x_i]) \geq \sum_{i \in I} (k\sigma)^2 P([X = x_i])$$
or $\sum_{i \in I} P([X = x_i]) = P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq k\sigma)$; d'où
– Si $\sigma^2 \neq 0$ alors $\sigma^2 \geq k^2 \sigma^2 P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq k\sigma)$; donc
$$P\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}$$
– Si $\sigma^2 = 0$, alors l'inégalité est encore vraie, quoique sans intérêt.
Cette inégalité porte le nom de **Ingégalité de Bienaymé-Tchebychev**. Elle est sans intérêt si on choisit $k \leq 1$.
Remarque : En posant $k\sigma(X) = \gamma$; alors $k^2\sigma^2(X) = \gamma^2$; donc $\frac{1}{k^2} = \frac{\sigma^2(X)}{\gamma^2}$, d'où
$$P\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \gamma\right) \leq \frac{\sigma^2(X)}{\gamma^2}.$$

2. Soit X une variable aléatoire de Bernoulli. Une épreuve répétée de Bernoulli est donc un système
$$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$
de variables de Bernoulli indépendantes. L'évènement $[X = 1]$ est le succès de l'épreuve X, et l'évènement $[X = 0]$ est son échec.
La variable aléatoire $Z_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ peut alors être appelée "**compteur de succès**" et $Y_n = \frac{1}{n} Z_n$ peut être appelée "**fréquence de succès**"
   (a) Soit $d > 0$ et Y_n la fréquence de succès d'une épreuve répétée (n fois) de Bernoulli. Montrons que
$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - E(X)| \geq d) = 0.$$
Pour $d = k\sigma$ et $X = Y_n$, alors d'après l'Ingégalité de Bienaymé Tchebychev, on a
$$P\left(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| \geq d\right) \leq \frac{\sigma^2(Y_n)}{d^2}$$
or pour $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ la variable de Bernoulli, on a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y_n)$ et $\sigma^2(Y_n) = \frac{1}{n}\,\sigma^2(X)$, alors
$$P\left(|Y_n - \mathbb{E}(X)| \geq d\right) \leq \frac{\sigma^2(X)}{n\,d^2}$$
on pose $u_n = \frac{\sigma^2(X)}{nd^2}$, $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sigma^2(X)}{n\,d^2} = 0$; ce qui prouve que
$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - E(X)| \geq d) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma^2(X)}{n\,d^2} = 0.$$
Cette propriété s'appelle la loi des grands nombres.
Théorème (Loi des grands nombres) : Soit δ un réel strictement positif et Y_n la fréquence de succès d'une épreuve de Bernoulli répétée (n fois). La suite des probabilités pour que Y_n s'écarte de plus de δ de sa moyenne tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$:
$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - E(X)| \geq \delta) = 0.$$
En particulier, on a l'inégalité de la loi des grands nombres
$$P\left(|Y_n - \mathbb{E}(X)| \geq d\right) \leq \frac{\sigma^2(X)}{n\,d^2}$$
où $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ est la loi de Bernoulli et Y_n est la fréquence de succès.
   (b) **Application** : le nombre de coups de pile ou face à effectuer pour que la fréquence de succès soit comprise entre 0.45 et 0.55 avec une probabilité de 0.99 au moins : la moyenne $E(X) = \frac{1}{2}$ avec $d = 0,05$ car $\frac{1}{2}$ est le centre de l'intervale $[0,45; 0,55]$ avec un écart-type de $\sigma = 0,05$ (soit l'intervale $[\mathbb{E}(X) - \sigma, \mathbb{E}(X) + \sigma] = [0,5 - 0,05; 0,5 + 0,05]$) ; dans ce cas on a $|Y_n - \frac{1}{2}| \geq 0,05$; d'après la loi des grands nombres on a
$$P\left(\left|Y_n - \frac{1}{2}\right| \geq 0,05\right) \leq \frac{\frac{1}{2^2}}{n\,(0,05)^2}.$$

On veut que cette probabilité soit au plus de $\frac{1}{100} = 1 - 0,99 = 1 - \frac{99}{100}$, pour cela il suffit que

$$\frac{\frac{1}{2^2}}{n\,0,05^2} \leq \frac{1}{100}$$

d'où $n \geq 10000$; finalement il suffit au minimum $n_0 = 10000$ de coups de pile ou face à effectuer pour que la fréquence de succès soit comprise entre 0.45 et 0.55 avec une probabilité de 0.99 au moins.

$\square$