ENSA d'Al-Hoceima — Année 2021/2022
ID-1, Première Année, — Semestre 1
Statistique Inférentielle, — TD1

Solution de la Série N^{o}1 : Espace de probabilité et probabilité conditionnelle

Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires qui peuvent prendre chacune les valeurs 1 et 0, les probabilités respectives des couples de valeurs de X et Y étant données par le tableau ci-dessous :

Y \ X	1	0
1	p	$\frac{1}{2}-p$
0	$\frac{1}{3}-p$	$\frac{1}{6}+p$

où p est un nombre réel.

1. Dans quel intervalle doit se trouver le nombre p pour que ces données soient acceptables ?.
2. Calculer les probabilités des valeurs de X et Y.
3. Calculer les espérances mathématiques et les écarts-types de X et Y.
4. Calculer p de façon que les variables aléatoires X et Y soient indépendantes.

Solution :

1. Les valeurs du tableau sont des nombres probabilistes, alors les données sont acceptables si

$$\begin{cases} 0 \le p \le 1 \\ 0 \le \frac{1}{2}-p \le 1 \\ 0 \le \frac{1}{3}-p \le 1 \\ 0 \le \frac{1}{6}+p \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le p \le 1 \\ -\frac{1}{2} \le p \le \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \le p \le \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \le p \le \frac{5}{6} \end{cases}$$

   donc les données sont acceptable si et seulement si $p \in [-\frac{1}{2};\frac{1}{2}] \cap [-\frac{2}{3};\frac{1}{3}] \cap [-\frac{1}{6};\frac{5}{6}] \cap [0;1]$; d'où $p \in [0;\frac{1}{3}]$.

2. Soit Ω l'univers, soit $X : \Omega \to \{0;1\}$ et $Y : \Omega \to \{0;1\}$ deux variables aléatoires, alors calculons $P([X=0])$, $P([X=1])$, $P([Y=0])$ et $P([Y=1])$; pour cela on a

$$\Omega = [X=0] \cup [X=1] \quad \text{et} \quad \Omega = [Y=0] \cup [Y=1]$$

   avec $[X=0] \cap [X=1] = \emptyset$ et $[Y=0] \cap [Y=1] = \emptyset$. On a

$$\begin{aligned} [X=0] &= [X=0] \cap \Omega = [X=0] \cap ([Y=0] \cup [Y=1]) \\ &= = ([X=0] \cap [Y=0]) \cup ([X=0] \cap [Y=1]) \\ &= [(X,Y)=(0,0)] \cup [(X,Y)=(0,1)] \end{aligned}$$

   comme $[(X,Y)=(0,0)] \cap [(X,Y)=(0,1)] = \emptyset$, alors

$$P([X=0]) = P([(X,Y)=(0,0)]) + P([(X,Y)=(0,1)]) = \frac{1}{6} + p + \frac{1}{2} - p = \frac{4}{6}$$

   d'où $P([X=0]) = \frac{2}{3}$. De la même façon, on a

$$\begin{aligned} [X=1] &= [X=1] \cap \Omega = [X=1] \cap ([Y=0] \cup [Y=1]) \\ &= ([X=1] \cap [Y=0]) \cup ([X=1] \cap [Y=1]) \\ &= [(X,Y)=(1,0)] \cup [(X,Y)=(1,1)] \end{aligned}$$

comme $[(X,Y)=(1,0)]\cap[(X,Y)=(1,1)]=\emptyset$, alors

$$P([X=1])=P([(X,Y)=(1,0)])+P([(X,Y)=(1,1)])=\frac{1}{3}-p+p$$

d'où $P([X=1])=\frac{1}{3}$. De la même façon, on a

$$\begin{array}{rcl}[Y=0] & = & [Y=0]\cap\Omega=[Y=0]\cap([X=0]\cup[X=1]) \\ & = & =([Y=0]\cap[X=0])\cup([Y=0]\cap[X=1]) \\ & = & [(X,Y)=(0,0)]\cup[(X,Y)=(1,0)]\end{array}$$

comme $[(X,Y)=(0,0)]\cap[(X,Y)=(1,0)]=\emptyset$, alors

$$P([Y=0])=P([(X,Y)=(0,0)])+P([(X,Y)=(1,0)])=\frac{1}{6}+p+\frac{1}{3}-p$$

d'où $P([Y=0])=\frac{1}{2}$. De la même façon, on a

$$\begin{array}{rcl}[Y=1] & = & [Y=1]\cap\Omega=[Y=1]\cap([X=0]\cup[X=1]) \\ & = & =([Y=1]\cap[X=0])\cup([Y=1]\cap[X=1]) \\ & = & [(X,Y)=(0,1)]\cup[(X,Y)=(1,1)]\end{array}$$

comme $[(X,Y)=(0,1)]\cap[(X,Y)=(1,1)]=\emptyset$, alors

$$P([Y=1])=P([(X,Y)=(0,1)])+P([(X,Y)=(1,1)])=\frac{1}{2}-p+p$$

d'où $P([Y=1])=\frac{1}{2}$.

3. Calculons les espérances mathématiques et les écarts-types de X et Y :

$$\mathbb{E}(X)=1*P([X=1])+0*P([X=0])=P([X=1])=\frac{1}{3},$$

$$\mathbb{E}(Y)=1*P([Y=1])+0*P([Y=0])=P([Y=1])=\frac{1}{2},$$

d'après la propriété de Hygens, on a la variance $\sigma^2(X)=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2$ alors

$$\sigma^2(X)=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

d'où l'écart-type de X est $\sigma(X)=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot$ De même, on a

$$\sigma^2(Y)=\mathbb{E}(Y^2)-(\mathbb{E}(Y))^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

d'où l'écart-type de Y est $\sigma(Y)=\frac{1}{2}\cdot$

4. Calculons p tel que les variables aléatoires X et Y soient indépendantes : X et Y soient indépendantes si et seulement si

$$P([X=k]\cap[Y=\ell])=P([X=k])*P([Y=\ell]),\quad\forall(k,\ell)\in J_X\times J_Y$$

où $J_X=J_Y=\{0;1\}$.

– Pour $k=\ell=1$, on a

$$p=P([(X,Y)=(1,1)])=P([X=1]\cap[Y=1])=P([X=1])*P([Y=1])=\frac{1}{3}*\frac{1}{2}$$

donc $p=\frac{1}{6}\cdot$

– Pour $k=\ell=0$, on a

$$\frac{1}{6}+p=P([(X,Y)=(0,0)])=P([X=0]\cap[Y=0])=P([X=0])*P([Y=0])=\frac{2}{3}*\frac{1}{2}$$

donc $p=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$, soit $p=\frac{1}{6}$.

– On peut de la même manière discuter les cas ($k=0$ et $\ell=1$), puis ($k=1$ et $\ell=0$) et on trouvera toujours $p=\frac{1}{6}$.

□

Exercice 2

On considère deux urnes C_1 et C_2 contenant des boules rouges et des boules blanches. Dans l'urne C_1, la probabilité de tirer une boule rouge est 0.9 ; dans l'urne C_2, elle est 0.2.
On choisit au hasard (c'est-à-dire avec des probabilités égales) une urne, et on en tire une boule. On constate que la boule tirée est rouge ;
*Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne C_1 ?

Solution : On note par
E l'ensemble des tirages possibles,
C_1 l'ensemble des tirages de l'urne C_1
C_2 l'ensemble des tirages de l'urne C_2
alors $E=C_1\cup C_2$ une boule est tirée de l'urne C_1 ou de l'urne C_2
$C_1\cap C_2=\emptyset$ aucune boule n'est tirée des deux urnes à la fois. On désigne par A l'ensemble des tirages donnant une boule rouge, alors on a les données suivantes :
$P_{C_1}(A)=0.9$ est la probabilité de tirer une boule rouge de C_1,
$P_{C_2}(A)=0.2$ est la probabilité de tirer une boule rouge de C_2,
$P(C_1)=P(c_2)=0.5$

1. La probabilité pour que la boule rouge provienne de l'urne C_1 est $P_A(C_1)$: D'après la formule de Bayes on a

$$P_A(C_1)=\frac{P(C_1)*P_{C_1}(A)}{P(C_1)*P_{C_1}(A)+P(C_2)*P_{C_2}(A)}=\frac{0.5*0.9}{0.5*0.9+0.5*0.2}=\frac{9}{11}.$$

2. La probabilité pour que la boule rouge provienne de l'urne C_2 est $P_A(C_2)$: D'après la formule de Bayes on a

$$P_A(C_2)=\frac{P(C_2)*P_{C_2}(A)}{P(C_1)*P_{C_1}(A)+P(C_2)*P_{C_2}(A)}=\frac{0.5*0.2}{0.5*0.9+0.5*0.2}=\frac{2}{11}.$$

Remarque : on peut remarquer que

$$P_A(C_1)+P_A(C_2)=\frac{9}{11}+\frac{2}{11}=1$$

□

Exercice 3

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.

1. Démontrer que $P_B(A)=\frac{P(A)-P(\overline{B})P_{\overline{B}}(A)}{P(B)}$.
2. Une population peut être atteinte par deux maladies A et B. Une étude statistique révèle que :
   – la probabilité pour une personne d'être atteinte par A est 0.2, celle d'être atteinte par B est 0.3 ;
   – la probabilité pour une personne n'étant pas atteinte par B de l'être par A est 0.1.

   (a) Calculer la probabilité pour une personne atteinte par B de l'être aussi par A.

   (b) Les maladies A et B frappent-elles indépendamment les individus de la population ?

Solution : Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.

1. Montrons que $P_B(A) = \frac{P(A)-P(\overline{B})P_{\overline{B}}(A)}{P(B)}$: on a

$$A = \Omega \cap A = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

avec $(A \cap B)$ et $(A \cap \bar{B})$ sont 2 événements disjoints ; alors

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \\ &= P_B(A)\, P(B) + P_{\bar{B}}(A)\, P(\bar{B}) \end{aligned}$$

d'où $P(A) - P_{\bar{B}}(A)\, P(\bar{B}) = P_B(A)\, P(B)$,
finalement

$$P_B(A) = \frac{P(A) - P_{\bar{B}}(A)\, P(\bar{B})}{P(B)}.$$

2. Soit $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$, $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.7$ et $P_{\bar{B}}(A) = 0.1$

   (a) La probabilité pour une personne atteinte par B de l'être aussi par A est $P_B(A)$

   $$P_B(A) = \frac{P(A) - P_{\bar{B}}(A)\, P(\bar{B})}{P(B)} = \frac{0.2 - 0.7 \times 0.1}{0.3} = \frac{13}{30}$$

   (b) On a $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = 0.3 \times \frac{13}{30} = \frac{13}{100} = 0.13$ et $P(A) \times P(B) = 0.2 \times 0.3 = 0.06$,
   comme $0.06 \neq 0.13$ alors $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$; ce qui prouve que Les maladies A et B ne frappent pas indépendamment les individus de la population.

$\square$

Exercice 4

Une personne I_0 transmet à une personne I_1 un message qui se résume à **oui** ou **non** ; I_1 transmet le message à I_2 qui le transmet à I_2 qui le transmet à I_3, et ainsi de suite jusqu'à I_{r+1} (les personnes $I_0, I_1, \ldots, I_{r+1}$ sont toutes différentes).
On admet que les probabilités que la personne I_n $(n = 1, 2, \ldots, r)$ transmette le message reçu de I_{n-1} ou le message opposé sont p et $q = 1-p$; on désigne par $\phi(n)$ la probabilité que I_n transmette le message exact (transmis par I_0).

1. Établir une relation de récurrence entre $\phi(n)$ et $\phi(n-1)$.
2. Étudier la suite $u_n = \phi(n)$.
3. Calculer la valeur numérique de $u_{10} = \phi(10)$ si $p = 0.9$.
4. Pour $p = 0.7$.
   (a) Donner un tableau montrant les calculs de valeurs de u_n pour $n = 0, 1, \ldots, 10$.
   (b) On considère la fonction $x \in [0, +\infty[\to \phi(x)$. Calculer $\phi(0)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x)$, que peut-on déduire ?
   (c) Dans un même repère $(O; i, j)$, tracer la courbe (C) de la fonction $x \mapsto \phi(x)$, ainsi que les valeurs de la suite $(u_n)_{0 \leq n \leq 10}$ par une couleur différente. (*Choisir l'échelle convenable*)
5. Conclure.

Solution :

1. La relation de récurrence entre $\phi(n)$ et $\phi(n-1)$: on a $I_0 = I_{n-1} \cup \overline{I_{n-1}}$, alors

$$I_n = I_0 \cap I_n = (I_n \cap I_{n-1}) \cup (I_n \cap \overline{I_{n-1}})$$

donc

$$\begin{aligned} P(I_n) &= P(I_n \cap I_{n-1}) + P(I_n \cap \overline{I_{n-1}}) \\ &= P(I_{n-1})\, P_{I_{n-1}}(I_n) + P(\overline{I_{n-1}})\, P_{\overline{I_{n-1}}}(I_n) \end{aligned}$$

donc $\phi(n) = \phi(n-1)\, P_{I_{n-1}}(I_n) + (1-\phi(n-1))\, P_{\overline{I_{n-1}}}(I_n)$,
or $P_{I_{n-1}}(I_n) = p$ et $P_{\overline{I_{n-1}}}(I_n) = 1-p$, alors

$$\phi(n) = \phi(n-1)\, p + (1-\phi(n-1))\,(1-p)$$

d'où la relation de récurrence suivante : $\phi(n) = q + (p-q)\phi(n-1)$.

2. Soit la suite $u_n = \phi(n)$, alors $u_n = q + (p-q)u_{n-1}$.
Si la suie $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers x, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n-1} = x$, donc $x = q + (p-q)x$ soit $x = \frac{1}{2}$; on pose $w_n = u_n - \frac{1}{2}$, alors

$$\begin{aligned}
u_n - \frac{1}{2} &= q + (p-q)u_{n-1} - \frac{1}{2} \\
&= q - \frac{1}{2} + (1-2q)u_{n-1} \\
&= 1 - p - \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2} - 1 + p\right) u_{n-1} \\
&= \frac{1}{2} - p + 2\left(p - \frac{1}{2}\right) u_{n-1} \\
&= \left(p - \frac{1}{2}\right)(2u_{n-1} - 1) \\
&= 2\left(p - \frac{1}{2}\right)\left(u_{n-1} - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

donc $w_n(2p-1)w_{n-1}$ pour tout $n \geq 0$; on pose $\mathrm{r} = 2p-1$, alors la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison r et donc la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $-1 < \mathrm{r} < 1$.
Or $0 < p < 1$ alors $0 \leq 2p \leq 2$, donc $-1 \leq 2p - 1 \leq 1$, d'où $-1 < \mathrm{r} < 1$ ce qui prouve que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$, ceci car $w_n = (2p-1)^n w_0$ avec $w_0 = u_0 - \frac{1}{2} = P(I_0) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

3. La valeur numérique de $u_{10} = \phi(10)$ si $p = 0.9$:
on a $w_n = (2p-1)^n w_0$, alors $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n$; donc $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2\times 0.9 - 1)^n$ pour $p = 0.9$, soit pour $n = 10$, on obtient

$$u_{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1.8-1)^{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}0.8^{10} = 0.5537.$$

4. On prend $p = 0.7$.
   (a) Le tableau de calcul de valeurs de u_n pour $n = 0, 1, \ldots, 10$: on a $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n$

Table 1 – Les variables aléatoires X et Y

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	0.7	0.58	0.532	0.5128	0.5051	0.502	0.5008	0.5003	0.5001	0.5001

   (b) On considère la fonction $x \in [0, +\infty[\to \phi(x)$, la fonction $\phi(x) = 0.5 + 0.5 * e^{x\ln(0.4)}$, alors $\phi(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = 0.5$; on en déduit qu'à l'infini les deux messages **oui** et **non** ont la même probabilité d'être transmis.
   (c) Pour la courbe (C) de la fonction $x \mapsto \phi(x)$ et les valeurs de la suite $(u_n)_{0\leq n\leq 10}$ par une couleur différente, voir la Figure 1.

5. Conclusion : La probabilité que le message transmis soit correct ne dépasse plus 0.5.

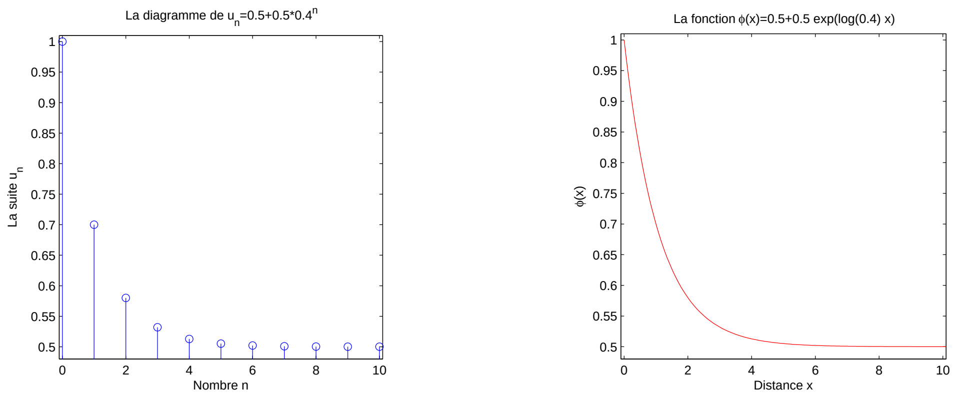

FIGURE 1 – Les courbes de $\phi(x) = 0.5 + 0.5 * e^{x \ln(0.4)}$

$\square$

Exercice 5

Un circuit électronique est composé de 10 blocs identiques en série ; chacun de ces blocs peut être formé d'un élément unique ou de deux éléments identiques en parallèle (il suffit alors qu'un des deux éléments fonctinne pour que le bloc fonctionne). On admet que chaque élément a une probabilité égale à 0.02 de tomber en panne pendant les 5000 premières heures de fonctionnement et que les pannes des divers éléments sont des événements indépendants.
Calculer les probabilités P_1 et P_2 d'une panne du circuit pendant les 5000 premières heures de fonctionnement :

1. si chaque bloc est formé d'un seul élément.
2. si chaque bloc est formé de deux éléments.

Solution : Calculons les probabilités P_1 et P_2 d'une panne du circuit pendant les 5000 premières heures de fonctionnement : on désigne par A_i l'événement le $i^{\text{ème}}$ bloc fonctionne pendant 5000 heures.
Soit A l'événement le circuit tout entier fonctionne pendant 5000 heures ; $\overline{A}$ l'événement le circuit tombe en panne, c'est-à-dire que $\overline{A} = \complement_{\Omega}^{A}$ est le complémentaire de A dans l'univers Ω.
Le circuit fonctionne si chacun des blocs fonctionne, c'est-à-dire si chacun des événements A_i est réalisé :

$$A = \bigcap_{i=1}^{10} A_i$$

Par hypothèse, on sait que les événements A_i sont indépendants, alors

$$P(A) = \prod_{i=1}^{10} P(A_i) = p^{10}$$

où p désigne la valeur commune des probabilités $P(A_i)$ pour $1 \leq i \leq 10$.

1. si chaque bloc est formé d'un seul élément, alors $p = 1 - 0.02 = 0.98$; donc $P(A) = 0.98^{10} = 0.817$
d'où $P_1 = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.817 = 0.183$.
2. si chaque bloc est formé de deux éléments en parallèle, alors un bloc tombe en panne si chacun des 2 éléments tombe en panne ; la probabilité d'une panne pour un bloc est $P(A_i) = 0.02^2$; alors dans ces conditions on a $p = 1 - 0.02^2 = 0.9996$; donc $P(A) = 0.9996^{10} = 0.9961$
d'où $P_1 = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.9961 = 0.0.0039$.

Remarque : On notera combien le second montage a accru la sécurité de fonctionnement (la fiablité) du matériel ; mais le coût de fabrication est plus considérable. On choisira l'une ou l'autre des solutions en fonction des conditions d'emploi du matériel. $\square$

Exercice 6

On considère une pièce de monaie non truquée, on tire au pile ou face cette pièce de monaie plusieurs fois successives jusqu'à obtenir la face de la pièce. Soit A_i l'événement d'obtenir la face de la pièce au tirage i-ième et A l'événement d'obtenir la face de la pièce au k-ième tirage.

1. Montrer qu'on peut définir les tirages par une variable aléatoire X à déterminer. Quels sont les atomes de ce tirage ?
2. Exprimer les événements A_k et $\bar{A}_k$ en fonction de la variable aléatoire X, puis déterminer les probabilité $P(A_k)$ et $P(\bar{A}_k)$.
3. Exprimer l'événement A en fonction des A_i et A_k, puis calculer la probabilité $p_k = P(A)$.
4. Soit B l'événement d'obtenir la face de la pièce au k-ième tirage au maximum possible. Exprimer B en fonction des événements A_k, puis calculer $q_k = P(B)$.
5. Calculer les limites $\lim\limits_{k\to+\infty} p_k$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} q_k$. Que peut-on en déduire ?

Solution :

1. On peut définir les tirages par une variable aléatoire X_k définie par $X_k : \Omega \to \{0;1\}$ avec $[X_k = 0]$ est l'événement d'obtenir la pile et $[X_k = 1]$ est l'événement d'obtenir la face et où $k \in \mathbb{N}^*$ est le numéro du tirage. Les atomes de ce tirage sont les événements $[X = 0]$ et $[X = 1]$ car si on a ω et ω' deux éventualités telles que $X(\omega) = X(\omega')$ alors ω et ω' seraient inséparables.
2. Soient A_i l'événement d'obtenir la face de la pièce au tirage i-ième et A_k l'événement d'obtenir la face de la pièce k-ième tirage, alors

$$A_k = [X_k = 1] \quad \text{et} \quad \bar{A}_k = \overline{[X_k = 1]} = [X_k = 0]$$

   Les probabilité $P(A_k) = P(\bar{A}_k) = \frac{1}{2}$.
3. L'événement $A = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$. Les événements sont indépendants, alors la probabilité $p_k = P(A)$ est

$$\begin{aligned} p_k = P(A) &= P(\bar{A}_1) \times P(\bar{A}_2) \times \ldots \times P(\overline{A_{k-1}}) \times P(A_k) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}_{k \text{ fois}} \end{aligned}$$

   d'où $p_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.
4. On considère B l'événement d'obtenir la face de la pièce au k-ième tirage au maximum possible, alors il s'agit d'obtenir la face en premier tirage où en deuxième tirage où ... où k-ième tirage ; donc $B = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k-1} \cup A_k$. on a

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k-1} \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) = \sum_{i=1}^{k} = p_i = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

   donc

$$q_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

   d'où $q_k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2^k - 1}{2^k}$.

5. Les limites $\lim\limits_{k\to+\infty} p_k = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} q_k = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = 1$. On en déduit alors que lorsque k est grand l'événement A devient impossible et l'événement B devient sûr.

$\square$

Exercice 7

On admet que les pièces fabriquées par une machine sont le résultat d'épreuves indépendantes et que chacune de ces pièces a la probabilité q d'être défectueuse. Si on associe à la $i^{\text{ème}}$ pièce une variable D_i égale à 1 si la pièce est défectueuse et à 0 sinon, la traduction mathématique de l'hypothèse est l'indépendance des variables D_i. Soit A_i l'événement $[D_i = 0]$.

1. Soit E_r l'événement "les $r-1$ premières pièces sont correctes et la $r^{\text{ème}}$ est défectueuse"
   (a) Expliciter l'événement E_r, puis déterminer sa probabilité.
   (b) On note $E = \bigcup\limits_r E_r$. Déterminer la probabilité de E, puis celle de son complémentaire.
   (c) Que peut-on déduire de ce dernier résultat ?
2. On note par F_{rs} l'événement "les $r-1$ premières pièces sont correctes, la $r^{\text{ème}}$défectueuse , les $s-1$ suivantes correctes et la $(r+s)^{\text{ème}}$ défecteuese".
   (a) Expliciter l'événement F_{rs}.
   (b) Calculer la probabilité de F_{rs}.
3. On désigne par X et Y les variables aléatoires dont les valeurs sont respectivement les rangs de la première et la deuxième pièce déectueuse.
   (a) X et Y sont-elles des variables aléatoires discrètes où continues ? *Justifier.*
   (b) Calculer les probabilité $P([X = r])$, $P([X = r] \cap [Y = s])$ et $P([Y = s])$.
   (c) Montrer que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.
   (d) Calculer $P_{[X=r]}([Y = s])$ et $P_{[Y=s]}([X = r])$. Que peut-on déduire de ces résultats ?
4. (a) Calculer les espérances $E(X)$ et $E(X(X-1))$.
   (b) Rappeler la définition de la variance de la varaible aléatoire X, puis rappeler et montrer la propriété de Hygens.
   (c) En déduire la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.
5. Soit la variable Z rang de la $k^{\text{ème}}$ pièce défectueuse. L'événement $[Z = r]$ est réalisé s'il y a $k-1$ pièces défectueuses dans les $r-1$ premières (événement B) et si la $r^{\text{ème}}$ pièce est défectueuse (événement $\overline{A_r}$).
   (a) Vérifier que le nombre de pièces défectueuses dans un lot de $r-1$ est la somme des $r-1$ premières variables D_i et qu'il s'agit d'une variable binomiale de paramètres $r-1$ et q. Calculer la probabilité $P(B)$
   (b) Expliciter l'événement $[Z = r]$ en fonction de B et $\overline{A_r}$, puis calculer $P([Z = r])$.

Solution : Soit l'événément $A_i = [D_i = 0]$ et $\overline{A}_i = \overline{[D_i = 0]}$ le complémentaire de A_i.

1. On considère E_r l'événement "les $r-1$ premières pièces sont correctes et la $r^{\text{ème}}$ est défectueuse"
   (a) L'événement E_r est
   $$E_r = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{r-1} \cap \overline{A}_r$$
   Les événements A_i sont indépendants, alors la probabilité $P(E_r)$ est
   $$P(E_r) = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{r-1} \cap \overline{A}_r) = \underbrace{P(A_1).P(A_2)\ldots P(A_{r-1})}_{(r-1)\text{ fois}}.P(\overline{A}_r)$$
   où $P(A_i) = p$ et $P(\overline{A}_r) = 1 - P(A_r) = 1 - p = q$. D'où $P(E_r) = p^{r-1}(1-p) = p^{r-1}q$.

(b) Soit $E = \bigcup_r E_r$,

– comme les événements E_r sont deux à deux disjoints alors

$$P(E) = P\left(\bigcup_r E_r\right) = \sum_{r=1}^{+\infty} P(E_r) = \sum_{r=1}^{+\infty} p^{r-1}q = \sum_{\ell=0}^{+\infty} p^\ell q = \frac{q}{1-p} = \frac{1-p}{1-p} = 1$$

ceci car la série est une série géométrique convergente de terme général $u_\ell = p^\ell$.

– la probabilité du complémentaire $\overline{E}$ de E est $P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0$.

(c) On a $P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0$, alors l'événement $\overline{E}$ est impossible. Or l'événement E est réalisé si une pièce arbitraire de rang r est défectueuse et donc l'événement $\overline{E}$ est réalisé si aucune pièce n'est défectueuse. D'où la production de la machine comportera impérativement des pièces défectueuses.

2. Soit F_{rs} l'événement "les $r-1$ premières pièces sont correctes, la $r^{\text{ème}}$défectueuse , les $s-1$ suivantes correctes et la $(r+s)^{\text{ème}}$ défecteuse".

(a) L'événement $F_{rs} = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{r-1} \cap \overline{A}_r A_{r+1} \cap A_{r+2} \cap \ldots \cap A_{r+s-1} \cap \overline{A}_{r+s}$.

(b) La probabilité de F_{rs} se fait calculer de la même façon que celle de E_r, en effet,

$$\begin{aligned} P(F_{rs}) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{r-1} \cap \overline{A}_r A_{r+1} \cap A_{r+2} \cap \ldots \cap A_{r+s-1} \cap \overline{A}_{r+s}) \\ &= p^{r-1}q * p^{s-1}q \end{aligned}$$

d'où $P(F_{rs}) = p^{r+s-2}q^2$.

3. Soient X et Y les variables aléatoires dont les valeurs sont respectivement les rangs de la première et la deuxième pièce défectueuse.

(a) On a $X : \Omega \mapsto J_X = \mathbb{N}^*$ et $Y : \Omega \mapsto J_Y = \mathbb{N}^*$, alors les variables aléatoires discrètes puisque les rangs sont des entiers naturels et qui sont dans $\mathbb{N}^*$.

(b) Calculons les probabilité $P([X = r])$, $P([X = r] \cap [Y = s])$ et $P([Y = s])$: la variable X prend les valeurs entières ≥ 1 et $E_r = [X = r]$; donc

$$P([X = r]) = P(E_r) = p^{r-1}q.$$

La loi du couple (X, Y) est définie par $[(X, Y) = (r, s)] = [X = r] \cap [Y = s] = F_{rs}$, alors

$$P([X = r] \cap [Y = s]) = P(F_{rs}) = p^{r+s-2}q^2.$$

La loi de la variable Y provient du fait que l'événement $[Y = s]$ est la réunion des événements F_{rs} deux à deux disjoints :

$$P([Y = s]) = P\left(\bigcup_r F_{rs}\right) = \sum_{r=1}^{+\infty} p^{r+s-2}q^2 = \sum_{\ell=0}^{+\infty} p^{\ell+s-1}q^2 = p^{s-1}q^2 \sum_{\ell=0}^{+\infty} p^\ell$$

donc $P([Y = s]) = p^{s-1}q^2 \dfrac{1}{1-p}$; d'où $P([Y = s]) = p^{s-1}q$ car $q\dfrac{1}{1-p} = \dfrac{1-p}{1-p} = 1$.

(c) On remarque que X et Y ont les mêmes lois et pour tout r et s on a

$$P([X = r] \cap [Y = s]) = p^{r+s-2}q^2 = p^{r-1}qp^{s-1}q = P([X = r])P([Y = s])$$

d'où les variables X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.

(d) Calculons $P_{[X=r]}([Y = s])$ et $P_{[Y=s]}([X = r])$: il est possible d'étudier la loi conditionnelle de Y sachant $[X = r]$ et la loi conditionnelle de X sachant $[Y = s]$:

$$\begin{aligned} P_{[Y=s]}([X = r]) &= \frac{P([X = r] \cap [Y = s])}{P([Y = s])} = \frac{p^{r+s-2}q^2}{p^{s-1}q} = p^{r-1}q = P([X = r]) \\ P_{[X=r]}([Y = s]) &= \frac{P([X = r] \cap [Y = s])}{P([X = r])} = \frac{p^{r+s-2}q^2}{p^{r-1}q} = p^{s-1}q = P([Y = s]) \end{aligned}$$

ces derniers résultats montrent que la loi conditionnelle de X sachant $[Y = s]$ ne dépend pas de s, ceci implique la loi conditionnelle est identique à la loi à priori et que les deux variables aléatoires sont indépendantes.

4. (a) Calculons les espérances $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X(X-1))$: en effet,
   – l'espérance $\mathbb{E}(X)$ est la somme de la série :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{r=1}^{+\infty} rP([X=r]) = \sum_{r=1}^{+\infty} rp^{r-1}q = q\sum_{r=1}^{+\infty} rp^{r-1} = q\sum_{r=0}^{+\infty} \frac{dp^r}{dp}$$

   or la série $\sum_{r=0}^{+\infty} p^r$ converge vers $\frac{1}{1-p}$ dans son disque de convergence de centre l'origine et de rayon 1, alors

$$\mathbb{E}(X) = q\frac{d}{dp}\left(\sum_{r=0}^{+\infty} p^r\right) = q\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1-p}\right) = \frac{q}{(1-p)^2} = \frac{1-p}{(1-p)^2}$$

   d'où $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{1-p}\cdot$

   – l'espérance $\mathbb{E}(X(X-1))$ est la somme de la série :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{r=1}^{+\infty} r(r-1)P([X=r]) = \sum_{r=1}^{+\infty} r(r-1)p^{r-1}q \\ &= pq\sum_{r=1}^{+\infty} r(r-1)p^{r-2} = pq\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{d^2p^r}{dp^2}\end{aligned}$$

   or la série $\sum_{r=0}^{+\infty} p^r$ converge vers $\frac{1}{1-p}$ dans son disque de convergence de centre l'origine et de rayon 1, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X(X-1)) &= pq\frac{d^2}{dp^2}\left(\sum_{r=0}^{+\infty} p^r\right) \\ &= pq\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{1-p}\right) = \frac{2pq}{(1-p)^3} = \frac{2p(1-p)}{(1-p)^3}\end{aligned}$$

   d'où $\mathbb{E}(X(X-1)) = \frac{2p}{(1-p)^2}\cdot$

   (b) La définition de la variance de la varaible aléatoire X : On appelle **variance** (ou **indicateur de dispersion**) d'une variable aléatoire réelle X, la quantité $\sigma^2(X) := \mathrm{Var}(X)$ définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

   La propriété de Hygens : la variance $\sigma^2(X) := \mathrm{Var}(X)$ s'écrit encore sous la forme

$$\sigma^2(X) := \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

   (c) La variance et l'écart-type de la variable aléatoire X : on a déjà calculé $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{1-p}$ et $\mathbb{E}(X(X-1)) = \frac{2p}{(1-p)^2}$, alors $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = \frac{2p}{(1-p)^2} + \frac{1}{1-p}$; donc

$$\sigma^2(X) = \frac{2p}{(1-p)^2} + \frac{1}{1-p} - \frac{1}{(1-p)^2}$$

d'où $\sigma^2(X) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\cdot$

Et, l'écart-type $\sigma(X)$ est la racine carrée positive de la variance, soit $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{p}}{1-p}\cdot$

5. On considère la variable Z rang de la $k^{\text{ème}}$ pièce défectueuse.
L'événement $[Z = r]$ est réalisé s'il y a $k-1$ pièces défectueuses dans les $r-1$ premières (événement B) et si la $r^{\text{ème}}$ pièce est défectueuse (événement $\overline{A_r}$).
   (a) Le nombre de pièces défectueuses dans un lot de $r-1$ est la somme variables D_i pour $1 \leq i \leq r-1$, alors il s'agit d'une variable binomiale de paramètres $r-1$ et $1-p$, soit la probabilité $P(B)$:
$$P(B) = \mathcal{B}(r-1, 1-p) = \mathrm{C}_{r-1}^{k-1}(1-p)^{k-1}p^{r-k}$$
car il y a $k-1$ pièces défectueuses dans les $r-1$ premières pièces.
   (b) La variable aléatoire D_r est indépendante des $(r-1)$ premières variable ; l'événement A_r est donc indépendant de l'événement B et donc B et $\overline{A}_r$ sont indépendants :
$$P([Z = r]) = P(B \cap \overline{A}_r) = P(B)P(\overline{A}_r) = \mathrm{C}_{r-1}^{k-1}(1-p)^{k-1}p^{r-k}(1-p)$$
d'où $P([Z = r]) = \mathrm{C}_{r-1}^{k-1}(1-p)^k p^{r-k}$.

$\square$