1. Méthodes directes :

Soient $n\epsilon\mathbb{N}^*$, A une matrice carrée d'ordre n inversible à coefficients réels et b un vecteur à n composantes réelles.

On appelle méthode directe de résolution du système linéaire : $Ax = b$, toute méthode permettant d'obtenir la solution en un nombre fini d'opérations arithmétiques élémentaires sur des nombres réels (additions, soustractions, multiplications, divisions) et éventuellement l'extraction des racines carrées.

1.1. Résolution du système triangulaire :

Supposons que A est une matrice carrée triangulaire supérieure.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3}\dots & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & 0 & \ddots \ \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \ \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \ \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Comme A est une matrice inversible alors : $detA = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i} \neq 0$.

D'où, $a_{i,i} \neq 0 \quad \forall i\epsilon\{1, \dots, n\}$

En posant $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ et \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, le système $Ax = b$ s'écrit:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

On calcule d'abord x_n: d'après la dernière équation, on trouve : $x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$.

En remplaçant la valeur de x_n dans l' équation précédente, on aboutit à:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}} = \frac{b_{n-1}a_{n,n} - a_{n-1,n}b_n}{a_{n,n} * a_{n-1,n-1}}$$

Ainsi de suite, pour $i\epsilon\{1, \dots, n\}$, on trouve :

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j}{a_{i,i}}$$

Le coût de la résolution est mesuré en nombre d'opérations élémentaires appelé aussi coût de calcul.

Le calcul de x_i nécessite $2(n-i)+1$ opérations. On en déduit donc que le coût de calcul de x (de tous les x_i ; $i\epsilon\{1, \dots, n\}$) est :

$$\sum_{i=1}^{n} 2(n-i)+1 = 2n^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = 2n^2 - n(n+1) + n = n^2$$

1.2. Principe des méthodes directes :

Les résolutions directes consistent à transformer le système $Ax = b$ en le système $Rx = c$ où R est une matrice triangulaire supérieure.

On multiplie A par des matrices bien choisies, soit M le produit de ces matrices, de telle sorte que MA soit une matrice triangulaire supérieure.

On transforme alors le système $Ax = b$ en un nouveau système : $MAx = Mb = c$.

1.2.1. Elimination de Gauss :

1.2.1.1. Exemple :

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire suivant :

$$(S)^{(1)}: \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 & = 1 \quad (1) \\ x_1 + 2x_3 & = 1 \quad (2) \\ 2x_1 + 2x_2 & = -2 \quad (3) \end{cases}$$

On pose : $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Le principe de la méthode de Gauss consiste à :

1-1ére étape : éliminer x_1 des équations (2) et (3) à condition que x_1 se trouve dans l'équation (1) (sinon on permute l'équation (1) avec une autre équation)

On effectue alors la combinaison linéaire suivante : on remplace l'équation (2) par :

$$\text{équation } (2) - \frac{\text{équation } (1)}{a_{1,1}} * a_{2,1} = \text{équation } (2) - \frac{\text{équation } (1)}{4}$$

et l'équation (3) est remplacée par :

$$\text{équation } (3) - \frac{\text{équation } (1)}{a_{1,1}} * a_{3,1} = \text{équation } (3) - \frac{\text{équation } (1)}{4} * 2$$

Le système devient alors :

$$(S)^{(2)}:\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 & = 1 \quad (1) \\ 0x_1 - \frac{3}{4}x_2 + \frac{9}{4}x_3 & = \frac{3}{4} \quad (2) \\ 0x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 & = -\frac{5}{2} \quad (3) \end{cases}$$

2- 2ème étape : éliminer x_2 de l'équation (3). On a $a_{2,2}^{(2)} = -\frac{3}{4} \neq 0$, sinon (on permute l'équation (2) avec (3)).

L'équation (3) est donc remplacée par :

$$\text{é}quation\ (3) - \frac{\text{é}quation\ (2)}{a_{2,2}^{(2)}} * a_{3,2}^{(2)} = \text{é}quation\ (3) - \frac{\text{é}quation\ (2)}{-{}^{3}/_{4}} * \frac{1}{2}$$
$$= \text{é}quation\ (3) + \frac{2}{3}\text{é}quation\ (2)$$

D'où le système :

$$(S)^{(3)}:\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \quad (1) \\ 0x_1 - \frac{3}{4}x_2 + \frac{9}{4}x_3 = \frac{3}{4} \quad (2) \\ 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 = -2 \quad (3) \end{cases}$$

D'après la dernière équation, on trouve d'abord : $x_3 = -1$.

Puis, en remplaçant x_3 dans (2), on obtient :

$$-\frac{3}{4}x_2 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -4$$

Finalement, on aboutit à : $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

3- Formulation matricielle :

Posons : $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{2,1} & 1 & 0 \\ -l_{3,1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $avec\ \ l_{2,1} = \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} = \frac{1}{4}\ \ et\ \ l_{3,1} = \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} = \frac{2}{4}$.

Donc : $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans la première étape on a: $a_{i,j}^{(2)} = a_{i,j} - l_{i,1} * a_{1,j}$ et $b_i^{(2)} = b_i - l_{i,1} * b_1\ \ pour\ i \geq 2$

Par suite, $A^{(2)} = L_1 A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $b^{(2)} = L_1 b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \\ -5/2 \end{pmatrix}$ et le système $(S)^{(2)}$ est équivalent à : $A^{(2)}x = L_1 Ax = L_1 b = b^{(2)}$.

Posons : $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_{3,2} & 1 \end{pmatrix}$ $avec\ \ l_{3,2} = \frac{a_{3,2}{}^{(2)}}{a_{2,2}{}^{(2)}} = -\frac{2}{3}$. Donc : $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Dans la deuxième étape on a: $a_{i,j}^{(3)} = a_{i,j}^{(2)} - l_{i,2} * a_{2,j}{}^{(2)}$ et $b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - l_{i,2} * b_2{}^{(2)}$

Par suite, $A^{(3)} = L_2 A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $b^{(3)} = L_2 b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et le système $(S)^{(3)}$ est équivalent à : $A^{(3)}x = b^{(3)}$.

Remarque : $A^{(3)}$ est une matrice triangulaire supérieure.

1.2.1.2. Généralisation :

Etant donnée une matrice carrée inversible $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \epsilon \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un vecteur $b = (b_1, \dots, b_n)^T$.

Trouver $x = (x_1, \dots, x_n)^T \epsilon \mathbb{R}^n$ vérifiant : $Ax = b$.

On a :

$$Ax = b \Leftrightarrow (S)^{(1)} : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \quad (1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = b_2 \quad (2) \\ \vdots & = \ \vdots \quad (i) \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = b_n \quad (n) \end{cases}$$

1-1ére étape : éliminer x_1 des équations (i) pour tout $2 \le i \le n$.

On suppose que $a_{1,1} \neq 0$ (sinon on permute l'équation (1) avec une autre équation (k) tel que : $a_{k,1} \neq 0$. Ceci est possible car A est inversible.)

On effectue alors la combinaison linéaire suivante : on remplace l'équation (i) par :

$$\text{é}quation\ (i) - \frac{\text{é}quation\ (1)}{a_{1,1}} * a_{i,1}$$

L'équation (i) devient alors :

$$\left(a_{i,1} - \frac{a_{1,1}}{a_{1,1}} a_{i,1}\right)x_1 + \left(a_{i,2} - \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} a_{i,1}\right)x_2 + \cdots + \left(a_{i,n} - \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} a_{i,1}\right)x_n = b_i - \frac{b_1}{a_{1,1}} a_{i,1}$$

et le système devient :

$$(S)^{(2)}: \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \quad (1) \\ 0x_1 + a_{2,2}{}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2,n}{}^{(2)}x_n & = b_2{}^{(2)} \quad (2) \\ \vdots & = \vdots \quad (i) \\ 0x_1 + a_{n,2}{}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{n,n}{}^{(2)}x_n & = b_n{}^{(2)} \quad (n) \end{cases}$$

Avec : $a_{i,j}^{(2)} = a_{i,j} - l_{i,1} * a_{1,j}$, $l_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ et $b_i^{(2)} = b_i - l_{i,1} * b_1$ $pour\ i \geq 2$.

2- 2ème étape : éliminer x_2 des équations (i) $pour\ 3 \leq i \leq n$. On suppose que $a_{2,2}^{(2)} \neq 0$, sinon (on permute l'équation (2) avec une autre équation (k) tel que : $a_{k,2}^{(2)} \neq 0$).

On effectue la combinaison linéaire suivante entre l'équation (2) et l'équation (i) : l'équation (i) est remplacée par :

$$équation\ (i) - \frac{équation\ (2)}{a_{2,2}^{(2)}} * a_{i,2}^{(2)}$$

et le système devient :

$$(S)^{(3)}: \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \quad (1) \\ 0x_1 + a_{2,2}{}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2,n}{}^{(2)}x_n & = & b_2{}^{(2)} \quad (2) \\ 0x_1 + 0x_2 + a_{3,2}{}^{(3)}x_2 + \cdots + a_{3,n}{}^{(3)}x_n & = & b_3{}^{(3)} \quad (3) \\ \vdots & = & \vdots \quad (i) \\ 0x_1 + 0x_2 + a_{n,2}{}^{(3)}x_2 + \cdots + a_{n,n}{}^{(3)}x_n & = & b_n{}^{(3)} \quad (n) \end{cases}$$

Avec : $a_{i,j}^{(3)} = a_{i,j}{}^{(2)} - l_{i,2} * a_{2,j}$, $l_{i,2} = \frac{a_{i,2}{}^{(2)}}{a_{2,2}{}^{(2)}}$ et $b_i^{(3)} = b_i - l_{i,2} * b_2{}^{(2)}$ $pour\ i \geq 3$.

3- kème étape : éliminer x_k des équations (i) $pour\ k + 1 \leq i \leq n$.

On suppose que : $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$ et on effectue la combinaison linéaire suivante entre l'équation (k) et l'équation (i) $pour\ k + 1 \leq i \leq n$: l'équation (i) est remplacée par :

$$équation\ (i) - \frac{équation\ (k)}{a_{k,k}^{(k)}} * a_{i,k}^{(k)}$$

et le système devient :

$$(S)^{(k+1)}: \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,k}x_k + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 & (1) \\ 0x_1 + a_{2,2}{}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2,k}{}^{(2)}x_k + \cdots a_{2,n}{}^{(2)}x_n = b_2{}^{(2)} & (2) \\ \vdots & \\ 0x_1 + \cdots + \cdots + a_{k,k}^{(k)}x_k + \cdots + \cdots + a_{k,n}{}^{(k)}x_n = b_k{}^{(k)} & (k) \\ 0x_1 + \cdots + 0x_k + a_{k+1,k+1}^{(k+1)}x_k + \cdots + a_{k+1,n}{}^{(k+1)}x_n = b_{k+1}{}^{(k+1)} & (k+1) \\ \vdots & \\ 0x_1 + \cdots + 0x_k + a_{n,k+1}^{(k+1)}x_k + \cdots + a_{n,n}{}^{(k+1)}x_n = b_n{}^{(k+1)} & (n) \end{cases}$$

Avec : $a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}{}^{(k)} - l_{i,k} * a_{k,j}$, $l_{i,k} = \frac{a_{i,k}{}^{(k)}}{a_{k,k}{}^{(k)}}$

et $b_i^{(k+1)} = b_i{}^{(k)} - l_{i,k} * b_k{}^{(k)} \quad pour\ k+1 \le i \le n.$

4- (n-1) ème étape : éliminer x_{n-1} de la dernière équation : l'équation (n) est remplacée par :

$$\text{équation } (n) - \frac{\text{équation } (n-1)}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} * a_{n,n-1}^{(n-1)}$$

et le système devient :

$$(S)^{(n)}: \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,k}x_k + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 & (1) \\ 0x_1 + a_{2,2}{}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2,k}{}^{(2)}x_k + \cdots a_{2,n}{}^{(2)}x_n = b_2{}^{(2)} & (2) \\ \vdots & \\ 0x_1 + \cdots + \cdots + a_{k,k}^{(k)}x_k + \cdots + \cdots + a_{k,n}{}^{(k)}x_n = b_k{}^{(k)} & (k) \\ \vdots & \\ 0x_1 + \cdots + \cdots + a_{n-1,n-1}{}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}{}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}{}^{(n-1)} & (n-1) \\ 0x_1 + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + 0x_{n-1} + a_{n,n}{}^{(n)}x_n = b_n{}^{(n)} & (n) \end{cases}$$

Avec : $a_{n,n}{}^{(n)} = a_{n,n}{}^{(n-1)} - l_{n,n-1} * a_{n-1,n}{}^{(n-1)}$, $l_{n,n-1} = \frac{a_{n,n-1}{}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}{}^{(n-1)}}$

et $b_n^{(n)} = b_n{}^{(n-1)} - l_{n,n-1} * b_{n-1}{}^{(n-1)}$

Finalement, on trouve: $x_n = \frac{b_n{}^{(n)}}{a_{n,n}{}^{(n)}}$ puis x_{n-1} en remplaçant dans l'équation (n-1).

Ainsi de suite, on aboutit à la solution x du système $Ax = b$.

5- Formulation matricielle :

Posons :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -l_{2,1} & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -l_{n,1} & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad A^{(2)} = L_1 A$$

Donc le système $(S)^{(2)}$ est équivalent à : $A^{(2)}x = L_1Ax = L_1b = b^{(2)}$.

En posant :

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & -l_{3,2} & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -l_{n,2} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad A^{(3)} = L_2A^{(2)} = L_2L_1A$$

On obtient : $Ax = b \Leftrightarrow A^{(3)}x = L_2L_1Ax = L_2L_1b = L_2b^{(2)} = b^{(3)}$.

Ainsi de suite, pour la kème étape, on pose :

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \;\; \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & & \ddots & \vdots \;\; \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & -l_{k+1,k} & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -l_{n,k} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le système $(S)^{(k+1)}$ est équivalent à : $A^{(k+1)}x = L_k \dots L_2 L_1 A x = L_k \dots L_2 L_1 b = b^{(k+1)}$.

D'où, on obtient le système : $Ax = b \Leftrightarrow A^{(k+1)}x = b^{(k+1)}$.

Au bout de (n-1) étape, on pose :

$$L_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots\dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots \cdots & \dots\dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

et on aboutit au système : $Ax = b \Leftrightarrow A^{(n)}x = b^{(n)}$.

Avec $A^{(n)} = L_{n-1} \dots L_2 L_1 A$ est une matrice triangulaire supérieure et

$b^{(n)} = L_{n-1} \dots L_2 L_1 b$.

1.2.3. Factorisation LU d'une matrice :

Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible.

Dans la méthode de Gauss précédente, on a trouvé une matrice M telle que : MA soit une matrice triangulaire supérieure. On pose : $MA = R$.

Propriétés : (propriétés de la matrice M)

1- $M = L_{n-1} \dots L_2 L_1$ avec $L_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \;\; \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & & \ddots & \vdots \;\; \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & -l_{k+1,k} & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -l_{n,k} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2- La matrice M est inversible puisque : $detM = \prod_{k=1}^{n-1} detL_k = 1$.

3- La matrice M^{-1} est une matrice triangulaire inférieure et

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \vdots \\ l_{3,1} & \ddots & \ddots & \ddots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \ddots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & l_{k+1,k} & 1 & \ddots & \dots\dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & l_{k+2,k+1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n,1} & \dots & \dots & l_{n,k} & l_{n,k+1} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

De la relation : $MA = R$, on déduit que : $A = M^{-1}R$.

En posant $L = M^{-1} \quad et \quad U = R$, on trouve que : $A = LU$ avec L est une matrice triangulaire inférieure (Lower) et U est une matrice triangulaire supérieure (Upper).

Finalement, on a le théorème suivant :

Théorème 1 :

Si à chaque étape k de la méthode de Gauss on a le pivot $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$, alors il existe une matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U telles que : $A = LU$ qui s'appelle une factorisation LU de la matrice A avec $l_{i,i} = 1$.

D'une manière générale, on a le théorème suivant :

Théorème 2 :

Si A est une matrice inversible, alors il existe une matrice de permutation P telle que : $PA = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité $l_{i,i} = 1$ et U une matrice triangulaire supérieure.

Interprétation :

Pour résoudre un système régulier $Ax = b$ avec A inversible, on factorise la matrice PA (P est une matrice de permutation bien choisie) en un produit LU.

L étant une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité $l_{i,i} = 1$ et U une matrice triangulaire supérieure.

En suite, on résout les systèmes suivants :

$$\begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

1.2.3. Méthode de Householder:

La décomposition QR:

La décomposition QR consiste à factoriser une matrice A sous la forme: $A = QR$ ou Q est une matrice orthogonale $(QQ^T = I)$ et R une matrice triangulaire supérieure.

Ce type de décomposition est souvent utilisé pour une résolution rapide du système $Ax = b$ sans avoir à calculer l'inverse de A.

En effet, $Ax = b \iff QRx = b \iff Rx = Q^T b$.

On trouve un système triangulaire supérieure.

Il existe plusieurs méthodes pour réaliser cette décomposition. Par exemple, la méthode de Householder:

La méthode de Householder:

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j} \epsilon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), u_1$ la première colonne de A, $\alpha_1 = \|u_1\|$ (la norme euclidienne de u_1).

On définit les vecteurs: $v_1 = u_1 - \alpha_1 e_1$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \epsilon \mathbb{R}^n$, $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

et la matrice: $Q_1 = I_n - 2w_1{w_1}^T$ appelée la matrice de Householder.

Cette matrice est orthogonale et vérifie: $Q_1 u_1 = \alpha_1 e_1$:

En effet,

$$Q_1{Q_1}^T = (I_n - 2w_1{w_1}^T)(I_n - 2w_1{w_1}^T)^T = (I_n - 2w_1{w_1}^T)(I_n - 2w_1{w_1}^T)$$
$$= I_n - 4w_1{w_1}^T + 4w_1{w_1}^T * w_1{w_1}^T$$

Comme, ${w_1}^T w_1 = \|w_1\|^2 = 1$ alors : $Q_1{Q_1}^T = I_n$.

D'une autre part, on a:

$$Q_1 u_1 = u_1 - 2w_1{w_1}^T u_1 = u_1 - \frac{2}{\|v_1\|^2} v_1{v_1}^T u_1$$

Calculons $\|v_1\|^2$ et $v_1{v_1}^T u_1$:

On a: $\|v_1\|^2 = {v_1}^T v_1 = (u_1 - \alpha_1 e_1)^T(u_1 - \alpha_1 e_1) = ({u_1}^T - \alpha_1{e_1}^T)(u_1 - \alpha_1 e_1)$

$$= \|u_1\|^2 - 2\alpha_1 x + {\alpha_1}^2$$

avec $x = {u_1}^T e_1 = {e_1}^T u_1$ c'est la première composante de u_1.

Puisque, $\alpha_1 = \|u_1\|$, alors $\|v_1\|^2 = 2(\|u_1\|^2 - \alpha_1 x)$.

Pour $v_1{v_1}^T u_1$, on a:

$$v_1{v_1}^T u_1 = (u_1 - \alpha_1 e_1)(u_1 - \alpha_1 e_1)^T u_1 = (u_1 - \alpha_1 e_1)({u_1}^T - \alpha_1{e_1}^T)u_1$$
$$= (u_1 - \alpha_1 e_1)(\|u_1\|^2 - \alpha_1 x) = \frac{\|v_1\|^2}{2}(u_1 - \alpha_1 e_1)$$

On en déduit donc,

$$Q_1 u_1 = u_1 - (u_1 - \alpha_1 e_1) = \alpha_1 e_1$$

Par suite, Q_1A est une matrice avec des zéros dans la première colonne excepté du premier élément qui vaudra α_1.

$$Q_1A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

En répétant la même opération pour la matrice A' de taille $(n-1) \times (n-1)$, on trouve une matrice de Householder $Q_2{}'$ de taille $(n-1) \times (n-1)$.

On prend alors, $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_2{}' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \epsilon \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de telle sorte:

$$Q_2Q_1A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \alpha_2 & * & \dots & * \\ \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A'' & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Ainsi de suite, après (n-1) itérations, on aboutit à: $Q_{n-1} \dots Q_2Q_1A = R$ est une matrice triangulaire supérieure.

En posant, $Q = Q_1{}^T Q_2{}^T \dots Q_{n-1}{}^T$ qui est clairement une matrice orthogonale, on trouve $QR = A$. D'ou la décomposition QR de A.

Remarque:

Les matrices Q_i ainsi construite sont non seulement orthogonales mais aussi symétriques, donc on a: $Q = Q_1Q_2 \dots Q_{n-1}$.

Exemple:

Cherchons une décomposition QR pour la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -12 & 25 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

Considérons le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a donc:

$$\alpha_1 = \|u_1\| = 3, \qquad v_1 = u_1 - \alpha_1 e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad et \quad w_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de Householder est donnée donc par:

$$Q_1 = I_3 - 2w_1{w_1}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Calculons Q_1A:

On a:

$$Q_1A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -12 & 25 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 18 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & -15 \end{pmatrix}$$

Prenons, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$. On a:

$$\alpha_2 = \|u_2\| = 6, \qquad v_2 = u_2 - \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad et \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par suite, la matrice de Householder de taille 2x2 est donnée par:

$$q_2 = I - 2w_2{w_2}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Posons alors,

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul matricielle Q_2Q_1A nous donne :

$$Q_2Q_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -12 & 18 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 18 \\ 0 & 6 & -15 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = R$$

Finalement, $A = QR$ avec,

$$R = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 18 \\ 0 & 6 & -15 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad et \quad Q = Q_1Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

2. Normes matricielles et vectorielles:

2.1. Normes vectorielles:

Définition1:

Une **norme** sur un espace vectoriel V est une application: $N: V \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les trois propriétés suivantes:

1- Pour tout $v \epsilon V$, $N(v) = 0 \iff v = 0$.

2- $\forall v \epsilon V$, $\forall \alpha \epsilon \mathbb{K}$, $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$.

3- $\forall v \epsilon V, \forall w \epsilon V$, $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$. (inégalité triangulaire)

On note souvent la norme par $\|.\|$.

Une norme sur un espace vectoriel est appelé norme vectorielle.

Exemples des normes vectorielles:

1- Soit $v = (v_1, v_2) \epsilon \mathbb{K}^2$, , l'application $N: \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+$ définie par:

$$N(v) = |v_1| + |v_2|$$

est une norme notée souvent par : $\|v\|_1 = |v_1| + |v_2|$.

Plus généralement, sur $\mathbb{K}^n$, $\|v\|_1 = |v_1| + \cdots + |v_n| = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$.

2- L'application $\|.\|_2: \mathbb{K}^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par:

$$\|v\|_2 = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$$

est une norme vectorielle appelée norme euclidienne.

Plus généralement, sur $\mathbb{K}^n$, $\|v\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.

3-Soit $v \epsilon \mathbb{K}^n$, $\forall p \epsilon [1, +\infty[$, l'application $\|.\|_p$ définie par:

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

4- L'application $\|.\|_\infty: \mathbb{K}^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par:

$$\|v\|_\infty = max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$$

est une norme vectorielle.

Propositions:

1- Inégalité de Cauchy- Schwarz:

$$\forall (u,v)\epsilon(\mathbb{K}^n)^2: \quad |\langle u|v\rangle| \leq \|u\|_2\|v\|_2$$

Avec $\langle u|v\rangle = u^T v = v^T u$ est le produit scalaire des deux vecteurs u et v.

On a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

2- Inégalité de Hölder:

Pour $p > 1 \;\; et \;\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\forall (u,v)\epsilon(\mathbb{K}^n)^2$:

$$\sum_{i=1}^{n}|u_i v_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|v_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|u\|_p\|v\|_q$$

Remarque:

Pour $p = 2$, l'inégalité de Holder coïncide avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition2:

Deux normes $\|.\| \;\; et \;\; \|.\|'$, définies sur un même espace vectoriel V, sont dites équivalentes s'il existe deux constantes strictement positives C et C' telles que:

$$\forall v\epsilon\mathbb{K}^n, \quad C\|v\|' \leq \|v\| \leq C'\|v\|'$$

Proposition:

Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

2.3. Normes matricielles:

Définition:

Une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application: $\|.\|: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ vérifiant:

1- $\|A\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0$.

2- $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\| \quad \forall \alpha\epsilon\mathbb{K}, \forall A\epsilon\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall (A,B)\epsilon\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$ (inégalité triangulaire).

4- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \quad \forall (A,B)\epsilon\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$

Proposition:

Etant donné une norme vectorielle $\|.\|$ sur $\mathbb{K}^n$, l'application $\|.\|_s: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$définie par:

$$\|A\|_s = sup_{v\epsilon\mathbb{K}^n\backslash\{0\}}\frac{\|Av\|}{\|v\|} = sup_{v\epsilon\mathbb{K}^n,\|v\|\leq 1}\|Av\| = sup_{v\epsilon\mathbb{K}^n,\|v\|=1}\|Av\|$$

est une norme matricielle, appelée norme matricielle subordonnée (à la norme vectorielle donnée) .

De plus,

$$\|Av\| \leq \|A\|_s \quad \|v\| \qquad \forall v \epsilon \mathbb{K}^n$$

et il existe au moins un vecteur $u \epsilon \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que: $\|Au\| = \|A\|_s \quad \|u\|$

Remarque:

Pour toute norme subordonnée $\|.\|_s$, on a: $\|I\|_s = 1$.

Exemples des normes matricielles subordonnées:

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a:

$$\|A\|_1 = sup_{v \epsilon \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$$

$$\|A\|_\infty = sup_{v \epsilon \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

et

$$\|A\|_2 = sup_{v \epsilon \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2$$

Remarque:

1- Si une matrice A est hermitienne, ou symétrique, alors: $\|A\|_2 = \rho(A)$.

2- Si une matrice A est unitaire, ou orthogonale, alors: $\|A\|_2 = 1$.

Théorème: (Norme de Frobenious)

L'application: $\|.\|_E : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ définie par:

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})$ d'ordre n,

$$\|A\|_F = \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{tr(A^*A)}$$

est une norme matricielle non subordonnée (pour $n \geq 2$) et vérifie:

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2 \qquad \forall A \epsilon \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

De plus, $\|I\|_F = \sqrt{n}$.

Exemple:

Considérons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a: $\|A\|_1 = \max(1,5) = 5$, $\|A\|_\infty = \max(4,2) = 2$,

Pour la norme euclidienne et la norme de Frobenious, on a

$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est donné par:

$P(A^*A) = \lambda^2 - 14\lambda + 4 = \left(\lambda - (7 - 3\sqrt{5})\right)\left(\lambda - (7 + 3\sqrt{5})\right)$.

D'ou, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{7 + 3\sqrt{5}}$ et $\|A\|_F = \sqrt{tr(A^*A)} = \sqrt{14}$.

Théorème:

1- Soit $\|.\|$ une norme matricielle subordonnée et B une matrice telle que: $\|B\| < 1$.

Alors, la matrice (I+B) est inversible et $\|(I + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$.

2- Si une matrice de la forme (I+B) est singulière, alors nécessairement $\|B\| \geq 1$ pour toute norme matricielle. (subordonnée ou non)

2.3. Suites de vecteurs et de matrices:

Définition:

Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$, on dit qu'une suite $(v_n)_n$ d'éléments de V converge vers un élément $v\epsilon V$ si $lim_{n\to+\infty}\|v_n - v\| = 0$.

On écrit, $lim_{n\to+\infty}v_n = v$.

Théorème:

Soit B une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1- $lim_{n\to+\infty}B^k = 0$

2- $lim_{n\to+\infty}B^k v = 0$ pour tout vecteur v.

3- $\rho(B) < 1$,

4- $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée.

3 Méthodes itératives :

3.2. Méthodes itératives :

Soient $A\epsilon\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible $(\mathbb{K} = \mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C})$ $et\ b\epsilon\mathbb{K}^n$.

Résoudre le système linéaire $Ax = b$ par une méthode itérative consiste à construire une suite de vecteurs $(x^k)_{k\epsilon\mathbb{N}}$ où $x^k\epsilon\mathbb{K}^n$ telle que :

$$\lim_{k\to+\infty} x^k = x = A^{-1}b$$

Les méthodes itératives classiques sont de la forme :

$$\begin{cases} x^0 \ \ valeur\ initiale\ donnée \\ x^{k+1} = Bx^k + c \end{cases}$$

où $B \epsilon \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ \ et\ \ c \epsilon \mathbb{K}^n$ sont donnés en fonction de A et b.

Définitions :

1- Une méthode itérative est dite convergente si pour toute valeur initiale x^0 on a :

$$\lim_{k \to +\infty} x^k = x = A^{-1}b$$

Pratiquement, on s'arrête lorsque $\|x^k - x\|$ est suffisamment petit.

2- Une méthode itérative est dite consistante si la limite de la suite x^k lorsqu'elle existe est solution du système linéaire : $Ax = b$.

3- Une méthode itérative classique de la forme : $x^{k+1} = Bx^k + c$ est consistante si seulement si :

$$\begin{cases} c = (I - B)A^{-1}b \\ I - B \ \ est\ inversible \end{cases}$$

Remarque :

Une méthode itérative consistante n'est pas toujours convergente.

Exemple :

Considérons le système linéaire : $Ax = b$ avec $A = \frac{1}{2}I$.

On va résoudre le système par la méthode itérative $x^{k+1} = Bx^k + c$ où

$$\begin{cases} c = -b \\ B = I + A \end{cases}$$

Cette méthode est consistante car :

$$\begin{cases} B = I + A \quad \Leftrightarrow \quad I - B = -A \quad qui\ est\ inversible \\ c = -b \quad \Leftrightarrow \quad c = -b = -AA^{-1}b = (I - B)A^{-1}b \end{cases}$$

Par contre, cette méthode n'est pas convergente. En effet, on a:

$$(x^{k+1} - x) = B(x^k - x) \quad car\ \ x^{k+1} = Bx^k + c\ et\ x = Bx + c$$

Or $B = I + A = \frac{3}{2}I$, d'ou :

$$(x^{k+1} - x) = \frac{3}{2}(x^k - x)$$

Par itération, on obtient :

$$(x^{k+1} - x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}(x^0 - x) \quad qui\ \ diverge$$

3.2. Comparaison des méthodes itératives :

On considère la méthode itérative convergente définie par :

$$\begin{cases} x^0 \ \ valeur\ initiale\ donnée \\ x^{k+1} = Bx^k + c \end{cases}$$

Posons $e^k = x^k - x$ l'erreur à la kième itérative.

On s'arrête lorsque $\|e^k\|$ est suffisamment petit avec $e^0 = x^0 - x$ est l'erreur initiale.

On obtient donc : $e^k = Be^{k-1}$ et par suite : $e^k = B^k e^0$. D'où,

$$la\ méthode\ est\ convergente \iff \lim_{k\to+\infty} e^k = 0 \iff \lim_{k\to+\infty} B^k = 0$$

Considérons sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la norme matricielle induite par la norme vectorielle $\|.\|$ définie par :

$$\forall M\epsilon\mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \quad \|M\| = sup_{x\neq 0}\frac{\|Mx\|}{\|x\|}$$

On a donc :

$$\frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} = \frac{\|B^k e^0\|}{\|e^0\|} \leq \|B^k\|$$

Il est important de pouvoir estimer le nombre d'itérations nécessaires à l'obtention d'une approximation acceptable de la solution.

Pour avoir $\frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \leq \varepsilon : erreur\ permise$, il suffit donc que $\|B^k\| \leq \varepsilon$.

C'est à dire : $ln(\|B^k\|) \leq ln\varepsilon \iff k \geq \frac{ln\varepsilon}{ln\left(\|B^k\|^{1/k}\right)} \qquad (car\ \|B\| < 1)$

Définitions :

Soit la méthode itérative convergente définie par :

$$\begin{cases} x^0 \ \ valeur\ initiale\ donnée \\ x^{k+1} = Bx^k + c \end{cases}$$

1- On appelle **taux moyen de convergence** pour kième itérative, d'une méthode itérative convergente, le nombre $\mathcal{R}_k(B) = -ln\left(\|B^k\|^{1/k}\right)$

2- On appelle **vitesse de convergence**, le nombre $\vartheta(B) = \lim_{k\to+\infty} \mathcal{R}_k(B)$

Remarque :

la méthode itérative $\begin{cases} x^0 \ \ valeur\ initiale\ donnée \\ x^{k+1} = Bx^k + c \end{cases}$ est convergente si et seulement si $\rho(B) < 1$.

Théorème :

Soit B une matrice carrée. Pour toute norme matricielle, on a :

$$\rho(B) = \lim_{k \to +\infty} \left(\|B^k\|^{1/k} \right)$$

et par suite $\vartheta(B) = -ln\big(\rho(B)\big)$.

3.3. **Principales méthode itératives classiques :**

Elles sont basées sur la décomposition de A sous la forme : $A = M - N$ avec $M \epsilon \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (facile à inverser).

On a alors,

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad Mx = Nx + b \quad \Leftrightarrow \quad x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

En posant : $M^{-1}N = B \quad et \quad M^{-1}b = c$, on obtient :

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad x = Bx + c$$

On peut alors associer la méthode itérative suivante :

$$\begin{cases} x^0 \ \ valeur\ initiale\ donnée \\ x^{k+1} = Bx^k + c \end{cases}$$

Ainsi construite, cette méthode est consistante. En effet,

$$\begin{cases} I - B = I - M^{-1}N = M^{-1}(M - N) = M^{-1}A \quad est\ inversible \\ c = M^{-1}b = (M^{-1}A)A^{-1}b = (I - B)A^{-1}b \end{cases}$$

Par suite, pour que cette méthode soit convergente il suffit que $\rho(B) < 1$.

Ceci équivalent à dire que : $\rho(M^{-1}N) < 1$.

3.3.1. Méthode de Jacobi :

La méthode de Jacobi consiste à décomposer A sous forme : $A = D - E - F = M - N$

avec $\begin{cases} M = D \\ N = E + F \end{cases}$. Où,

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}; \ -E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } -F = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On suppose que $a_{1,1} \neq 0$, $\forall 1 \leq i \leq n$, et dans ce cas M est inversible.

La méthode itérative s'écrit :

$$x^{k+1} = Bx^k + c = D^{-1}(E + F)x^k + D^{-1}b$$

La matrice $B = J = D^{-1}(E + F)$ est appelée la matrice de Jacobi associée à A.

Proposition :

La méthode de Jacobi est convergente si et seulement si $\rho(J) < 1$.

Comme $E + F = D - A$, la méthode itérative peut s'écrie :

$$x^{k+1} = Bx^k + c = D^{-1}(D - A)x^k + D^{-1}b$$

Les composantes de x^{k+1} sont données alors par :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(-\sum_{j=1;j\neq i}^{n} a_{i,j}\ x_j^k + b_i\right)$$

et par suite,

$$x_i^{k+1} - x_i^k = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\ x_j^k\right) = \frac{r_i^k}{a_{i,i}}$$

où, r_i^k est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $r^k = b - Ax^k$ appelé vecteur résidu à la $k^{\text{ième}}$ itération.

3.3.2. Méthode de Gauss-Seidel :

La méthode de Gauss-Seidel consiste à prendre : $M = D - E \quad et \quad N = F$

La matrice M est triangulaire inférieure et elle est inversible si $a_{i,i} \neq 0;\ \forall 1 \leq i \leq n$.

La méthode itérative s'écrit alors :

$$x^{k+1} = Bx^k + c = (D - E)^{-1}Fx^k + (D - E)^{-1}b$$

La matrice $B = \mathcal{L}_1 = (D - E)^{-1}F$ est appelée la matrice de Gauss-Seidel associée à A.

Proposition :

La méthode de Gauss-Seidel est convergente si et seulement si $\rho(\mathcal{L}_1) < 1$.

On a

$$x^{k+1} = (D - E)^{-1}Fx^k + (D - E)^{-1}b \quad \Leftrightarrow \quad (D - E)x^{k+1} = Fx^k + b$$

$$\Leftrightarrow \quad Dx^{k+1} = Ex^{k+1} + Fx^k + b$$

Supposons les composantes $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}$ sont calculées. Alors la $i^{\text{ème}}$ composante est donnée par :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}\ x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\ x_j^k\right)$$

Exemple :

On cherche à résoudre le système $Ax = b$ avec : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$.

1- Montrons que la méthode de Jacobi est convergente :

On décompose A sous forme : $A = D - E - F$ avec ;

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \ ; \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/4 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, la matrice de Jacobi associée à A est

$$J = D^{-1}(E + F) = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

cherchons les valeurs propres de J :

Le polynôme caractéristique associé à J est :

$$P(\lambda) = det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1/4 & -1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1/4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\right)$$

On en déduit ainsi le spectre de J; $Sp(J) = \left\{0, \frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right\}$ et le rayon spectral $\rho(J) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Finalement, puisque $\rho(J) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ alors la méthode de Jacobi est convergente.

2- Etudions maintenant la méthode de Gauss Seidel :

La matrice de Gauss-Seidel associée à A est :

$$\mathcal{L}_1 = (D - E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5/4 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & -1 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -5/16 & -1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique associé à $\mathcal{L}_1$ est :

$$P(\lambda) = det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1/_4 & -1 \\ 0 & 1/_4 - \lambda & 0 \\ 0 & -5/_{16} & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1+\lambda)\left(\frac{1}{4} - \lambda\right)$$

Par suite, le spectre de $\mathcal{L}_1$; $Sp(\mathcal{L}_1) = \{0, -1, 1/_4\}$.

La méthode de Gauss-Seidel n'est donc pas convergente puisque le rayon spectral de $\mathcal{L}_1$ est $\rho(\mathcal{L}_1) = 1$.

3.4. Etude de la convergence:

Définition :

Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ est dite à diagonale strictement dominante si on a :

$$\forall 1 \le i \le n \,; \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Théorème 1 :

Si A est à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi converge .

Théorème 2 :

Soit A une matrice hermitienne (resp symétrique) définie positive. Considérons la décomposition : $A = M - N$ avec M inversible.

Si la matrice $M^* + N$ (resp la matrice $M^T + N$) est définie positive, alors :

$\rho(M^{-1}N) < 1$.

De plus, la méthode itérative classique : $x^{k+1} = Bx^k + c$ avec $B = M^{-1}N \;\; et \; c = M^{-1}b$ est convergente.

Corollaire :

Soit A une matrice hermitienne. Si $2D - A$ est définie positive, alors la méthode de Jacobi converge si et seulement si A est définie positive .

Cas des matrices tridiagonales :

Soit A une matrice tridiagonale.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix}$$

avec E et F définies par :

$$-E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_n & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad -F = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lemme :

Soit $A_\mu = D - \mu E - \frac{1}{\mu} F \quad avec \quad \mu \epsilon \mathbb{C}^*$. Alors on a : $det(A_\mu) = detA$.

Théorème :

Soit A une matrice tridiagonale dont les éléments de la diagonale sont non nuls, alors :

$$\rho(\mathcal{L}_1) = \left(\rho(J)\right)^2$$

Corollaire :

$$\rho(J) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(\mathcal{L}_1) < 1$$

Alors, dans ce cas, les méthodes de Gauss Seidel et de Jacobi convergent simultanément.

Lorsque les deux méthodes convergent, la méthode de Gauss Seidel converge plus vite que la méthode de Jacobi : $\vartheta(\mathcal{L}_1) = 2\vartheta(J)$.