I. Notations et Définitions :

2.1. Généralités :

Définition 1:

Soient $p \ et \ q \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice de type (p, q) ou matrice à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R} \ ou \ \mathbb{C}$, toute famille $(a_{i,j})_{1 \le i \le p \ ; 1 \le j \le q}$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{K}, \forall i, j$.

On note cette matrice de la manière suivante :

$$\begin{array}{cc} & q \quad \text{colonnes} \\ p \ lignes \left\{ \vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}} \right. & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition 2:

On note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (p, q) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- Un élément de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), q = 1$, s'appelle une matrice colonne.
- Un élément de $\mathcal{M}_{1,q}(\mathbb{K}), p = 1$, s'appelle une matrice ligne.
- Les éléments de $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{K}), q = p$, s'appellent des matrices carrées d'ordre p ou de taille $p \times p$.

On note alors $\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{K})$.

2.1. Transposé d'un vecteur et transposée d'une matrice :

Définition 1:

1- Le vecteur transposé d'un vecteur colonne $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ est un vecteur ligne noté par : $u^T = (u_1, \dots, u_n)$.

2- Soit $M = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $V_i = \begin{pmatrix} v_{1,i} \\ v_{2,i} \\ \vdots \\ v_{n,i} \end{pmatrix}$, $pour\ tout\ 1 \leq i \leq n$.

La transposée de la matrice M est la matrice $M^T = \begin{pmatrix} V_1{}^T \\ \vdots \\ V_n{}^T \end{pmatrix}$ où

$V_i{}^T = (v_{1,i}, v_{2,i}, \dots, v_{n,i}), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

3- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique si et seulement si $A = A^T$.

2.1. Le déterminant et l'inverse d'une matrice :

1..1. Formule du déterminant :

On peut calculer le déterminant d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à l'aide de n déterminant de matrices carrées d'ordre $n - 1$.

Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on note $A_{i,j}$ la matrice obtenue en enlevant à A sa $i^{iéme}$ ligne et sa $j^{iéme}$colonne .

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Ainsi, on peut développer le calcul du déterminant de A suivant une ligne ou une colonne.

Le développement suivant la ligne i est donné par la formule :

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \ (-1)^{i+j} \ det(A_{i,j})$$

Le développement suivant la colonne j est donné par :

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \ (-1)^{i+j} \ det(A_{i,j})$$

Le terme $det(A_{i,j})$ est appelé le mineur du terme $a_{i,j}$ et le terme $(-1)^{i+j} \ det(A_{i,j})$ est appelé le cofacteur du terme $a_{i,j}$.

Définitions :

1- On dit que la matrice A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$.

2- Si la matrice A est inversible, on appelle inverse de A la matrice carrée M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AM = MA = I$$

On note : $M = A^{-1}$.

1..2. Le calcul de l'inverse d'une matrice :

Matrice d'ordre 2 :

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 inversible donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

Son inverse est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

Matrice d'ordre 3 :

Soit A une matrice carrée d'ordre 3 inversible donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

Pour calculer A^{-1} , l'inverse de A, on suit les étapes suivantes :

- ✓ **Etape 1 :** On calcule le déterminant de A :
  (par exemple, on développe suivant la ligne 1)

$$det(A) = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

- ✓ **Etape 2 :** On calcule A^T , la transposée de A :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

- ✓ **Etape 3 :** On calcule les sous déterminants suivants :

$$\Gamma_{1,1} = + \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{2,3} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{1,2} = - \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{1,3} = + \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{2,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{2,1} = - \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{2,3} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{2,2} = + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{3,1} \\ a_{1,3} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{2,3} = - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,3} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{3,1} = + \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{2,2} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{3,2} = - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

et

$$\Gamma_{3,3} = + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{vmatrix}$$

Ainsi, on obtient la matrice $\left(\Gamma_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq 3}$, qu'on note $\Gamma(A)$, appelée la matrice auxiliaire de la matrice A.

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} \Gamma_{1,1} & \Gamma_{1,2} & \Gamma_{1,3} \\ \Gamma_{2,1} & \Gamma_{2,2} & \Gamma_{2,3} \\ \Gamma_{3,1} & \Gamma_{3,2} & \Gamma_{3,3} \end{pmatrix}$$

- ✓ **Etape 4 :** La matrice inverse de A est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\Gamma(A)$$

Exemples :

1- Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

On a $detA = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, donc A est inversible et son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \end{pmatrix}$$

2- Soit la matrice B suivante : $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

On a $detB = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, d'où B est inversible.

Pour calculer l'inverse de B, on détermine sa transposée et sa matrice auxiliaire :

On a : $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, par suite, la matrice auxiliaire de B est :

$$\Gamma(B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalement, la matrice inverse de B est donnée par :

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -2 & -1 & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Par un calcul simple, on peut vérifier que :

$$B^{-1}B = BB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

3- Soit la matrice C suivante : $C = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1-i & 1 \end{pmatrix}$.

On a $detC = \begin{vmatrix} 2 & i & 1 \\ -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1-i & 1 \end{vmatrix} = 16i - 11 \neq 0.$

D'où C est une matrice inversible, sa transposée et sa matrice auxiliaire sont données respectivement par :

$$C^T = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ i & 0 & 1-i \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma(C) = \begin{pmatrix} 3(i-1) & 1-2i & 3i \\ 5 & 2 & -11 \\ 5(i-1) & 2(i-1) & 5i \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice inverse de C est :

$$C^{-1} = \frac{1}{16i - 11}\begin{pmatrix} 3(i-1) & 1-2i & 3i \\ 5 & 2 & -11 \\ 5(i-1) & 2(i-1) & 5i \end{pmatrix}$$

II. Réduction des matrices :

2.1. Éléments propres d'une matrice carrée :

Définitions :

1- Un nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe un vecteur non nul x tel que : $Ax = \lambda x$. Ou encore, si la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

2- On appelle le polynôme caractéristique de A le polynôme suivant : $P(A) = det(A - \lambda I)$.
3- Les valeurs propres de A sont les n racines réelles ou complexes du polynôme caractéristique de A.
4- Le spectre de A noté $Sp(A)$ est l'ensembles de tous les valeurs propres de A.
5- Si λ est une valeur propre de A, alors tout vecteur non nul x vérifiant l'équation : $Ax = \lambda x$ s'appelle vecteur propre associé à λ.
   L'ensemble $\mathcal{H}_\lambda$ des vecteurs propres associés à λ est un sous espace vectoriel appelé : sous espace propre associé à λ. On note aussi :

$$\mathcal{H}_\lambda = Ker(A - \lambda I)$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : \quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}$$

6- On appelle le rayon spectral de A noté , $\rho(A)$, le nombre réel positif : $\rho(A) = max\{|\lambda_i|;\ 1 \leq i \leq n\}$.
7- Soit $Q = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_pX^p$ un polynôme de degré p. On définit le polynôme matriciel $Q(A)$ comme étant la matrice carrée :

$$Q(A) = a_0 + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_pA^p$$

   On dit que le polynôme Q est annulateur de la matrice A lorsque: $Q(A) = 0$.
8- Le plus petit polynôme Q divisant le polynôme caractéristique de A et tel que : $Q(A) = 0$ s'appelle le polynôme minimal de A.
9- Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. On appelle la trace de A le nombre $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Exemples:

1- On considère la matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivante : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 1$$

Pour trouver les valeurs propres de A, il suffit de résoudre l'équation:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

On trouve ainsi deux valeurs propres : $\lambda_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$.
Par suite , $Sp(A) = \{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}$ et le rayon spectral est $\rho(A) = 2 + \sqrt{3}$.

Remarquons que : $tr(A) = 4 = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det(A) = 1 = \lambda_1\lambda_2$

Les sous espaces propres $\mathcal{H}_{\lambda_1}$ et $\mathcal{H}_{\lambda_2}$ sont définis par :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\lambda_1} &= \left\{\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ (A - (2-\sqrt{3})I)\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ \begin{cases}(1+\sqrt{3})\alpha - 2\beta = 0 \\ -\alpha + (-1+\sqrt{3})\beta = 0\end{cases}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix}(-1+\sqrt{3})\beta \\ \beta\end{pmatrix};\quad \beta \in \mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

De même, on trouve : $\mathcal{H}_{\lambda_2} = \left\{\begin{pmatrix}-(1+\sqrt{3})\beta \\ \beta\end{pmatrix};\quad \beta \in \mathbb{R}\right\}$

2- Considérons la matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de B est :

$$\begin{aligned}Q(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & 0 \\ 1 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-3-\lambda)(2-\lambda) - 2(2-\lambda) + 4(2-\lambda)\end{aligned}$$

$$= -8 + 6\lambda + \lambda^2 - \lambda^3$$

Remarquons qu'on peut factoriser par $(2-\lambda)$ et par suite, on obtient :

$$Q(\lambda) = (2-\lambda)(-4+\lambda+\lambda^2)$$

D'ou, les valeurs propres de B sont :

$$\lambda_1 = 2 \ ; \ \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

Remarquons que :

$$tr(B) = 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ \text{ et } \ det(B) = -8 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Propriétés:

1- La somme des dimensions des espaces propres d'une matrice carrée de taille n est inférieure ou égal à n.

2- Les valeurs propres d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) sont ces coefficients diagonaux.

3- Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $0 \notin Sp(A)$.

4- Si Q est un polynôme annulateur de la matrice A alors toutes les valeurs propres de A sont également des racines de Q.

5- Si $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ est une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ sont les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$, alors :
$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

6- Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a :

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B) \quad \text{et} \quad tr(AB) = tr(BA)$$

7- $\det(AB) = \det(BA) = \det(A) * \det(B)$

2.2. Matrices diagonalisables:

Définition1:

Deux matrices carrées A et B sont dites semblables si et seulement si il existe une matrice P inversible telle que:
$A = P^{-1}BP$.

Remarques:

1- Toute matrice carrée A est semblable à elle même car : $A = {I_n}^{-1} A I_n$.

2- La notion de 'semblable' est réflexive : A et B sont semblables est équivalent à dire que B et A sont semblables.

3- La seule matrice semblable à l'identité I_n est elle même.

4- La seule matrice semblable à la matrice nulle 0_n est elle même.

Exemple:

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables:

En effet, cherchons trois vecteurs V_1, V_2 et V_3 tels que :

$$\begin{cases} AV_1 = 0 \\ AV_2 = V_1 \\ AV_3 = 0 \end{cases}$$

Donc, on choisi V_1 dans ImA, prenons $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

et par suite $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Remarquons que:

$A^2 = 0$ $(la\ matrice\ nulle)$.

Pour V_3, on constate que :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \epsilon Ker A \Leftrightarrow x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = x_1 + x_2$$

$$\Leftrightarrow X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prenons alors, $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finalement, considérons la matrice P suivante:

$$P = (V_1, V_2, V_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est facile de voir que :

$$P \text{ est inversible et } AP = PB$$

D'ou, $B = P^{-1}AP$.

Propositions:

1- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. En effet, si $B = P^{-1}AP$ alors:

$$\begin{aligned} P(B) = det(B - \lambda I) &= det(P^{-1}AP - \lambda I) \\ &= det(P^{-1}(A - \lambda I)P) \\ &= det(P^{-1}) * det(A - \lambda I) * detP = det(A - \lambda I) \\ &= P(A) \end{aligned}$$

2- Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Définition2:

Une matrice carrée A est dite diagonalisable s'il existe une matrice diagonale D, semblable à A.

Exemple :

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$.

- Cherchons les valeurs propres de A:

Le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} P(A) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 2i \\ -2i & 2 - \lambda \end{vmatrix} &= \lambda^2 - \lambda - 6 \\ &= (\lambda - 3)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

Par suite, le spectre de A est : $Sp(A) = \{-2,3\}$.

- Cherchons les sous espaces propres $\mathcal{H}_{-2}$ et $\mathcal{H}_3$ associés respectivement à -2 et 3:

On a: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \epsilon \mathcal{H}_{-2} \iff x_1 + 2ix_2 = 0 \iff X = x_2 \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$

On en déduit donc que $\mathcal{H}_{-2}$ est le sous espace vectoriel engendré par le vecteur $V = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'une autre part, on a:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \epsilon \mathcal{H}_3 \iff 2ix_1 + x_2 = 0 \iff X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$$

D'ou, $\mathcal{H}_3$ est le sous espace vectoriel engendré par le vecteur $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$.

- Considérons la matrice P suivante :

$$P = (V, W) = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible, puisque $detP = -5 \neq 0$, et sa matrice inverse est : $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$.

En calculant $P^{-1}AP$, on trouve :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

On en déduit donc que A est une matrice diagonalisable et que les coefficients de D sont les valeurs propres de A.

Théorème fondamental de diagonalisation:

Soit $A \epsilon \mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$, alors A est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \epsilon Sp(A)} dim\big(Ker(A - \lambda I)\big) = n$$

Remarque :

Toute matrice carrée de $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$ possédant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Exemple :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable car elle possède trois valeurs propres distinctes 17, 0 et 1.

Proposition:

Soit $A \epsilon \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité et $V_1, V_2, \dots, V_n$ les vecteurs propres associés respectivement.
La matrice $P = (V_1, V_2, \dots, V_n) \epsilon \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice inversible telle que :

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Remarque:

L'opération qui consiste à calculer les puissances kième d'une matrice carrée A est fastidieuse.
C'est pour cette raison que la réduction de la matrice est un artifice pratique dans la simplification des calculs.
Si A est diagonalisable telle que:

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors, pour tout $k \epsilon \mathbb{N}$, on a:

$$P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = D^k = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (\lambda_n)^k \end{pmatrix}$$

D'ou,

$$A^k = P\begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (\lambda_n)^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

III. Propriétés des matrices symétriques et hermitiennes:

3.1. Matrices symétriques et hermitiennes:

Définitions 1:

Une matrice carrée $A \epsilon \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite

1- Symétrique si $A \epsilon \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, réelle, et $A = A^T$.

2- Hermitienne si $A \epsilon \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, complexe, et $A = A^*$ avec $A^* = \overline{A^T}$ (la matrice conjuguée de A^T).

3- Orthogonale si $A \epsilon \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, réelle, et $AA^T = A^TA = I$.

4- Unitaire si $A \epsilon \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, complexe, et $AA^* = A^*A = I$.

Exemples:

1- Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, il est facile de voir que : $A^T = A^* = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

La matrice A n'est pas symétrique.

2- Pour la matrice $B = \begin{pmatrix} i & 2-i & 4 \\ 2-i & 5 & 3i \\ 4 & 3i & 0 \end{pmatrix}$, on a

$B^T = \begin{pmatrix} i & 2-i & 4 \\ 2-i & 5 & 3i \\ 4 & 3i & 0 \end{pmatrix} = B$.

D'ou, B est symétrique.

Par contre, B n'est pas hermitienne car:

$$B^* = \begin{pmatrix} -i & 2+i & 4 \\ 2+i & 5 & -3i \\ 4 & -3i & 0 \end{pmatrix}$$

Propriétés:

1- Pour toutes matrices carrées A et B , on a:

$$(A^T)^T = A, \qquad (A^*)^* = A,$$

$$(AB)^T = B^TA^T \quad et \quad (AB)^* = B^*A^*$$

2- Pour toutes matrices A et B inversibles, on a:
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ et $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$
3- Une matrice réelle symétrique n'a que des valeurs propres réelles.
4- Toute matrice réelle symétrique est diagonalisable.
Remarques:
1- Pour toute matrice carrée A, la matrice AA^T est symétrique.
2- Pour toute matrice carrée A, la matrice AA^* est hermitienne.
3- Les valeurs propres de la matrice hermitienne AA^* sont toujours positives.

3.2. Matrices hermitiennes positives:

Définitions 1:
1- On dit qu'une matrice carrée $A \epsilon \mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$ est définie positive si pour tout vecteur non nul $V \epsilon \mathbb{K}^n$, on a: $V^T A\, V > 0$.
2- A est dite positive (ou semi définie positive) si

$$V^T A\, V \geq 0 \qquad \forall\, V \epsilon \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$$

Théorème:
Une matrice hermitienne est définie positive (respectivement positive) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives (respectivement positives).
En effet,
Si A est une matrice hermitienne, λ une valeur propre et V un vecteur propre associé alors:

$$V^T A\, V = \lambda V^T\, V = \lambda\, \|V\|^2$$

Comme $\|V\|^2 > 0$, $\forall\, V \epsilon \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, alors

$$V^T A\, V \geq 0 \;\; (resp \;\; > 0) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \geq 0 \;\; (resp \;\; > 0)$$

Décomposition en valeurs singulières:
Définitions 2:
Soit A une matrice carrée. On appelle valeurs singulières de A les racines carrées positives des valeurs propres de la matrice hermitienne AA^* (ou AA^T si la matrice est réelle).

Propriété:

Soit A une matrice carrée. Il existe deux matrices unitaires U et V telles que

$$U^*AV = D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_n \end{pmatrix}$$

avec les scalaires (σ_i) sont les valeurs singulières de A caractérisées par $\sigma_i = \sqrt{\mu_i} \quad ou \quad \mu_i \epsilon Sp(AA^*)$.

Remarque:

Si A est hermitienne ($A = A^*$) de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors les valeurs singulières de A sont $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i{}^2} = |\lambda_i|$.