**Série 1:** **Spectre et Inverse d'une matrice carrée.** **2021/2022**

**Analyse Numérique Matricielle**

**Filière:** **Ingénierie des données**

**S1-- ENSAH --** **F.MORADI**

**Exercice 1 :**

Considérons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

**1-** Calculer $detA$ et $P(A)$ le polynôme caractéristique de A.

**2-** Montrer que 1 est une valeur propre de A.

**3-** Déterminer $Sp(A)$ le spectre de A et en déduire $\rho(A)$ le rayon spectral de A.

**4-** Donner $A^{-1}$ la matrice inverse de A.

**Exercice 2 :**

Soit $J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \epsilon \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1- Calculer ${J_n}^2$ .

2- La matrice $J_n$ est-elle inversible ? Si oui déterminer son inverse.

3- Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \epsilon \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

a- Montrer que $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 8 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 8 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ en utilisant la matrice $J_5$ .

b-La matrice A est-elle inversible ? Si oui déterminer son inverse.

c-En déduire un polynôme Annulateur de A et les valeurs propres possibles.

d- Déterminer $Sp(A)$.

**Exercice 3 :**

Considérons le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et les matrices

$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$.

**1-** Calculer $X^2$, $Y^2$ , $X^4$ et $Y^4$.

**2-** En déduire les valeurs propres possibles des matrices X et Y.

**3-** Calculer $XY$ et $YX$.

**4-** En déduire l'inverse de X et l'inverse de Y.

**Exercice 4 :**

Soit $A = \begin{pmatrix} \beta & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \alpha & \beta \end{pmatrix}$ avec $(\alpha, \beta) \epsilon \mathbb{R}^2$.

**1-** Montrer que :

$$detA = (\beta + 2\alpha)\,(\beta - \alpha)^2$$

**2-** En déduire $P(A)$ le polynôme caractéristique de A
et $Sp(A)$ le spectre de A.

**3-** Considérons la matrice : $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**a-** Déterminer $Sp(B)$ le spectre de B et en déduire le rayon spectral $\rho(B)$.
**b-** Déterminer les sous espaces propres.

**Exercice 5 :**

**1-** Posons $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer $K^2$ et en déduire $A^{1010}$.

**2-** Posons $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , $L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} chx & shx \\ shx & chx \end{pmatrix}$ $avec\ x\epsilon\mathbb{R}$.

**a-** Calculer $detB$ et $P(B)$ le polynôme caractéristique de B.
**b-** Déterminer $Sp(B)$ .
**c-** Calculer $J^2, L^2$ , JL et LJ.
**d-** En déduire pour tout $n \geq 1$, $J^n$ et $L^n$.
**e-** Montrer que : $\forall n \geq 1$, $B^n = \begin{pmatrix} ch(nx) & sh(nx) \\ sh(nx) & ch(nx) \end{pmatrix}$ .

**Exercice 6 :**

On considère la matrice carrée suivante : $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

**1-** Calculer $(M - I)(M + 3I)$ et déduire les valeurs propres possibles de M.
**2-** Calculer $P(M)$ le polynôme caractéristique de M.
**3-** Déduire $Sp(M)$ le spectre de M et le rayon spectral $\rho(M)$.
**4-** Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^3$ par $(X - 1)(X + 3)$ et calculer $M^3$.
**5-** En déduire $M^n$ $pour\ tout$ $n\epsilon\mathbb{N}$.

**Exercice 7 :**

Soients $(a, b, c)\epsilon\mathbb{R}^3\ tels\ que$: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et la matrice $N = VV^T$ .

1- Déterminer N , calculer $V^TV$ et en déduire $N^2$.

2- Soit $M = \begin{pmatrix} a^2 - 1 & ab & ac \\ ab & b^2 - 1 & bc \\ ac & bc & c^2 - 1 \end{pmatrix}$, calculer $M^n\ pour\ tout\ n\epsilon\mathbb{N}$ .