Analyse Numérique Matricielle

Filière: **Ingénierie des données**

S1-- ENSAH -- **F.MORADI**

Exercice 1 :

1- Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

En utilisant la méthode de Householder, trouver une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure R telles que: $A = QR$.

2- Même question pour la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -7 \\ 2 & \frac{23}{9} & \frac{-7}{3} \\ \sqrt{5} & -11\frac{\sqrt{5}}{9} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

1- Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Déterminer une matrice L triangulaire inférieure et une matrice U triangulaire supérieure telles que: $A = LU$.

2- Résoudre le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + t = 4 \\ 4x + 3y - z + 2t = 6 \\ 8x + 5y - 3z + 4t = 12 \\ 3x + 3y - 2z + 2t = 6 \end{cases}$$

Exercice 3 :

1- Considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 & 3 \\ 7 & -4 & 2 & -15 \\ 1 & -2 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

Déterminer une matrice L triangulaire inférieure et une matrice U triangulaire supérieure telles que: $B = LU$.

2- Résoudre le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} 2x - y - 6z + 3t = -1 \\ 7x - 4y + 2z - 15t = -32 \\ x - 2y - 4z + 9t = 5 \\ x - y + 2z - 6t = -8 \end{cases}$$

Exercice 4 :

Soit $\|.\|$ une norme matricielle subordonnée et B une matrice telle que: $\|B\| < 1$.

1- Montrer que les matrices $(I - B)$ *et* $(I + B)$ sont inversibles et que:

$$\frac{1}{1 + \|B\|} \leq \|(I + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$$

2- Montrer que la série de terme général $(I + B + B^2 + \cdots + B^n)$ converge vers $(I - B)^{-1}$.

Exercice 5 :

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée.

1- Montrer que $Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ avec $D_i = \{z : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|\}$.

2- En déduire que: $(\forall i \in \{1, \dots, n\}: \ |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|) \Rightarrow A \ inversible.$

Exercice 6 :

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique définie positive, $b\epsilon\mathbb{R}^n$.

Soit la matrice $D = diag(a_{i,i}, 1 \leq i \leq n)$.

1- Montrer que : $\forall i\epsilon\{1, \dots, n\}$: $a_{i,i} > 0$ et en déduire que D est inversible.

2- Montrer que : $Sp(D^{-1}A) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

3- On cherche à résoudre le système $Ax = b$. Considérons la méthode itérative suivante:

$$S_{(w)} \begin{cases} x_0\epsilon\mathbb{R}^n, \quad w\epsilon\mathbb{R}^* \\ x_{k+1} = (I - wD^{-1}A)x_k + wD^{-1}b \end{cases}$$

a- Montrer que cette méthode est consistante.

b- Cette méthode est elle convergente pour $w = -1$?

c- Pour quelles valeurs de w (en fonction $\rho(D^{-1}A)$), cette méthode converge -t- elle ?

d- Vérifier que pour $w = 1$, cette méthode est celle de Jacobi.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $S_{(1)}$ soit convergente.

Exercice 7 :

Soit A une matrice carrée de taille (n x n) diagonalisable dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Montrer que:

$$\lim_{k\to+\infty} A^k = 0 \iff |\lambda_i| < 1, \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Exercice 8 :

1- On considère le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

a- Résoudre le système.

b- Montrer que les méthodes de Jacobi et Gauss Seidel sont divergentes.

c- Laquelle des deux méthodes diverge plus vite ?

2- En permutant les deux équations, on considère le système:

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

a- Montrer que les méthodes de Jacobi et Gauss Seidel sont convergentes.

b- Laquelle des deux méthodes converge plus vite ?

c- En utilisant la méthode de Jacobi avec $X_0 = (0,0)$, calculer les cinq premières itérations.

d- Reprendre la question précédente avec la méthode de Gauss Seidel.

Exercice 9 :

On considère le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{cases} 4x - y = 6 \\ -x + 4y - z = 4 \\ -y + 4z = 6 \end{cases}$$

a- Résoudre le système par la méthode de Gauss.

b- Montrer que les méthodes de Jacobi et Gauss Seidel sont convergentes.

c- Calculer les cinq premières itérations, avec $X_0 = (0,0,0)$, pour les deux méthodes.

d- Que remarquez vous ?