ENSA d'Al-Hoceima | Année 2021/2022
Ingénierie des Données(ID), 1ère année, | Semestre 1
Statistique Inférentielle, | Devoir Libre

Devoir Libre en Statistique Inférentielle
à rendre sur papier A4 le 14 février 2022

Exercice 1

On considère une suite de variables aléatoires réelles X_n définies par $X_n : \Omega \to \{0, 1, 2, \dots, 2k\}$ où k est un entier donné. La loi de ces variables est définie par récurrence sur n :

- la loi de la variable X_0 est donnée ;
- la loi conditionnelle de la variable X_n sachant $X_{n-1} = j$ est la loi binomiale de paramètre $2k$ et $\frac{j}{2k}$, c'est à dire $\mathcal{B}\left(2k, \frac{j}{2k}\right)$.

On désigne par M_n la matrice colonne dont les coefficients sont les paramètres :

$$P([X_n = i]) \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, \dots, 2k.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice B telle que $M_n = B\,M_{n-1}$.
2. (a) Quelle est la valeur de $Q\,M_n$? et que représente pour la loi de X_n le nombre $R\,M_n$ si Q et R sont les matrices lignes

$$Q = (1\,1\ \dots 1) \quad R = (0\,1\,2\ \dots 2k)$$

   (b) Vérifier que : $Q\,B = Q$ et $R\,B = R$.

   (c) Que peut-on en déduire pour la loi de X_n ?
3. (a) Montrer que, si S est la matrice ligne ;

$$S = (0\,1\,4\ \dots\ 4k^2)$$

   alors le produit SB peut être exprimé en fonction de S, R et k.

   (b) Étudier la suite de terme général $\lambda_n = S\,M_n$.
4. (a) Vérifier que si X est une variable aléatoire réelle prenant les valeurs $0, 1, \dots, 2\,k$, alors

$$\mathbb{E}(X^2) \le 2\,k\,\mathbb{E}(X)$$

   Vérifier que l'égalité impliquant que les seules valeurs ayant une probabilité non nulle sont 0 et $2\,k$.

   (b) Que peut-on en déduire pour la suite des variables aléatoires X_n ?

Exercice 2

On considère une suite de variables aléatoires réelles X_n définies par $X_n : \Omega \to \{0, 1, 2, \dots, 2k\}$ où k est un entier donné. La loi de ces variables est définie par récurrence sur n :

- la loi de la variable X_0 est donnée ;
- la loi conditionnelle de la variable X_n sachant $X_{n-1} = j$ est la loi binomiale de paramètre $2k$ et $\frac{j}{2k}$, c'est à dire $\mathcal{B}\left(2k, \frac{j}{2k}\right)$.

On désigne par M_n la matrice colonne dont les coefficients sont les paramètres :

$$P([X_n = i]) \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, \ldots, 2k.$$

On rappelle que la suite X_n satisfait à la relation de récurrence $X_n = B\, X_{n-1}$ où B est la matrice dont le terme de la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne est

$$B_{ij} = \mathcal{B}\left(i; 2k, \frac{j}{2k}\right) = \mathrm{C}_{2k}^{i} \left(\frac{j}{2k}\right)^{i} \left(1 - \frac{j}{2k}\right)^{2k-i}.$$

1. Montrer que la matrice B peut s'écrire

$$B = \begin{pmatrix} 1 & U & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & V & 1 \end{pmatrix}$$

   Vérifier que tous les coefficients des matrices U, A et V sont différents de 0 et indiquer la valeur de la somme des coefficients d'une colonne de B.

2. Montrer que les valeurs propres de B ont, à l'exception de la valeur 1, un module strictement inférieur à 1.

3. Montrer que la suite des matrice B^n a une limite ; que peut-on dire de la suite des matrices colonnes M_n ?

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire réelle ayant une densité $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On appelle **fonction caractéristique** de X, notée ϕ_X, la fonction définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}t\,x} f(x)dx.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction définie ϕ_n par : $\phi_n(t) = \displaystyle\int_{-n}^{n} e^{\mathrm{i}t\,x} f(x)dx$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction ϕ_X est bien définie et que : $\phi_X(0) = 1$ et $|\phi_X(t)| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers la fonction ϕ_X sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la fonction ϕ_X est uniformément continue dans $\mathbb{R}$.

4. Déterminer la fonction caractéristique ψ de la variable aléatoire $Y = \alpha X + \beta$ en fonction de ϕ_X, α et β.

5. Déterminer la fonction caractéristique d'une loi normale de moyenne μ et de variance γ^2.

6. Montrer que si la variable aléatoire X a une espérance, alors la fonction ϕ_X est dérivable et que

$$\phi'_X(0) = \mathrm{i}\mathbb{E}(X) \quad \text{et} \quad |\phi'_X(t)| \leq \mathbb{E}(|X|).$$