

# 可重复使用地火运输空间站火星移民

何胜茂<sup>1</sup>, 彭超<sup>1</sup>, 高扬<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>(中国科学院太空应用重点实验室, 中国科学院空间应用工程与技术中心)

<sup>2</sup>(中国科学院大学航空宇航学院)

**简介:** 中国力学学会第 12 届 (2022 年) 全国 (中国) 空间轨道设计竞赛由中国科学院太空应用重点实验室 (中国科学院空间应用工程与技术中心)、中国科学院大学航空宇航学院共同组织举办。本届竞赛提出了甲、乙两个题目 (2022 年 8 月 20 日 12 时发布), 本文为题目甲, 背景设定为利用可重复使用地火运输空间站支持火星移民的空间轨道设计问题。

## 1. 问题描述

随着航天科技的不断发展, 人类终将实现火星移民。本题目提出了一种可重复使用地火运输空间站的设想方案, 它从地月空间启航, 完成地火转移运输任务后, 返回地月空间补给燃料实现重复使用。地火运输空间站配备生命保障系统, 可批量化制造、多站同时运营, 从而支持较大规模火星移民任务。

本题目设定火星移民任务开始时间为 2025 年 1 月 1 日, 在此后的 20 年里, 同时运营不超过 50 个地火运输空间站, 期望将尽量多的移民运输至火星。

本文后续内容首先描述地火运输空间站的飞行方案, 给出设计指标, 然后建立轨道设计所需的坐标系和动力学模型, 总结约束条件, 最后规定设计结果的提交要求。

## 2. 飞行方案

地火运输空间站 (后文简称空间站) 从远距离逆行绕月轨道 (Lunar Distant Retrograde Orbit, 简称 DRO, 它逆行绕月、顺行绕地, 是地月空间内一类长期稳定的三体动力学轨道) 启航, 首先飞往地球, 在近地点时刻假定与发射入轨的载人飞船交会对接, 移民人员进入空

间站。之后，“空间站 + 载人飞船”组合体逃逸地月空间飞往火星，在抵达火星时刻假定移民人员进入载人飞船，载人飞船与空间站分离后再入火星大气并软着陆火星表面，空间站则在火星引力辅助作用下返回地月空间，最终重返 DRO，至此认为完成了一次地火转移运输任务。此后，空间站在 DRO 完成补给燃料和在轨维护，再次从 DRO 启航，执行上述地火转移运输任务，并如此循环往复，如图 1 所示。本文中，地月空间是指以地球为中心、距离地心 500 万公里范围内的空间区域。

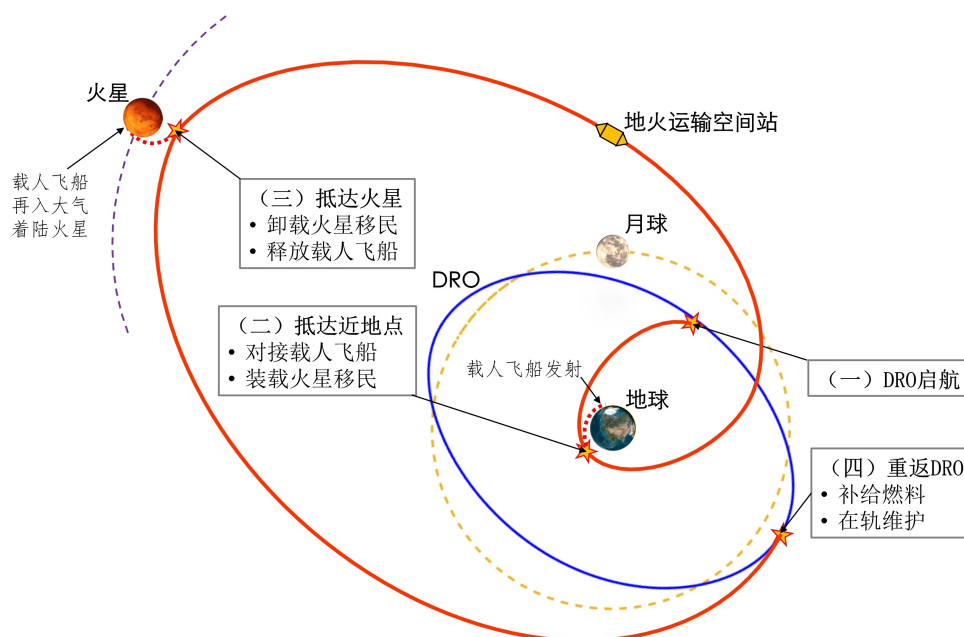


图 1 地火运输空间站飞行方案示意图（仅供参考，与实际轨迹不完全相符）

地火运输空间站飞行方案具体描述如下。

### （一）从 DRO 启航

在 DRO 部署一个补给维护服务站（简称 DRO 服务站），用于对空间站补给燃料和在轨维护。假设 DRO 服务站始终运行在 DRO，无任何轨道机动，DRO 服务站星历参见附录 1。空间站依次从 DRO 服务站启航（包括首次启航以及补给维护后复航），启航时间介于 2025 年 1 月 1 日和 2044 年 12 月 31 日之间，与相邻的上一次从 DRO 服务站启航的时间间隔不小于 10 天。

## （二）载人飞船发射入轨与交会对接（移民人员进入空间站）

空间站从 DRO 启航后飞往地球，在近地点时刻，载人飞船发射入轨并交会对接空间站，同时移民人员进入空间站。该过程的约束条件总结如下：

[1] 在地心赤道惯性坐标系（参见第 4 章第（一）节）中，空间站抵达近地点时刻，若地表高度介于 400-800 km 之间，速度不大于 12 km/s，则认为载人飞船具备发射入轨并交会对接空间站的条件。

[2] 每个空间站在 1 次地火转移运输任务中只能交会对接 1 艘载人飞船。空间站依次抵达近地点与载人飞船交会对接，与相邻的上一次交会对接载人飞船的时间间隔不小于 10 天，抵达近地点时刻前后各 1 天期间不得施加轨道机动。

## （三）载人飞船再入火星大气并软着陆火星（移民人员离开空间站）

当“空间站 + 载人飞船”组合体逃逸地月空间抵达火星时，假定移民人员转移至载人飞船，同时载人飞船从空间站释放，在近火点时刻通过制动进入环火轨道，然后再入火星大气并软着陆火星表面。该过程的约束条件总结如下：

[1] 在日心黄道惯性坐标系（参见第 4 章第（二）节）中，若空间站与火星位置相同，两者相对速度  $0 < v_{\infty} \leq 8$  km/s，则认为“空间站 + 载人飞船”组合体抵达火星，载人飞船具备再入火星大气并软着陆的条件。

[2] 载人飞船在近火点处施加 1 个制动速度脉冲  $\Delta v_{\text{ship}}$  进入环火轨道，设定近火点相对火星球心的距离为  $r_{\text{p,mars}}$  (= 3595 km, 即距离火星表面 200 km)， $\Delta v_{\text{ship}}$  计算公式如下。

$$\Delta v_{\text{ship}} = \sqrt{v_{\infty}^2 + 2\mu_{\text{mars}} / r_{\text{p,mars}}} - \sqrt{2\mu_{\text{mars}} / r_{\text{p,mars}}} \quad (1)$$

式 (1) 中， $\mu_{\text{mars}}$  为火星引力常数。设定此次地火转移运输任务搭载  $X$  名移民人员， $X$  仅由  $\Delta v_{\text{ship}}$  确定， $X$  计算公式如下。

$$X = 10 \times \text{floor} \left[ 16 \times \left( e^{-\frac{\Delta v_{\text{ship}}}{5}} - 0.33 \right) \right] \quad (2)$$

式 (2) 中， $\text{floor}(x)$  为  $x$  整数部分， $\Delta v_{\text{ship}}$  的单位为 km/s。

[3] “空间站 + 载人飞船”组合体依次抵达火星释放载人飞船，与相邻的上一次释放载人

飞船的时间间隔不小于 10 天，抵达火星时刻前后各 30 天期间不得施加轨道机动。

#### （四）重返 DRO 和补给维护

空间站重返 DRO，通过补给燃料实现重复使用。该过程的约束条件总结如下：

[1] 当空间站与 DRO 服务站的位置和速度相同时，即认为重返 DRO，同时空间站具备补给维护的条件。

[2] DRO 服务站在同一时刻只能补给维护 1 个空间站，补给维护时长不小于 10 天。假设 DRO 服务站存储足够多的燃料以供补给。

[3] 在火星移民任务结束时刻（2044 年 12 月 31 日），所有空间站必须重返 DRO 服务站。

#### （五）地火转移运输任务飞行时间

[1] 对于每次地火转移运输任务，空间站飞行时间（从 DRO 启航至重返 DRO 的时长）不大于 5 年。

[2] 对于每次地火转移运输任务，空间站载人飞行时间（从近地点对接载人飞船至抵达火星释放载人飞船的时长）不大于 300 天。

#### （六）空间站机动能力

空间站采用化学推进系统，每次轨道机动均简化为瞬时速度脉冲。以对接/释放载人飞船为节点，将空间站飞行轨道分为 3 段：DRO-近地点（对接前）、近地点（对接后）-近火点（释放前）、近火点（释放后）-DRO，假设 3 个轨道段内施加的速度脉冲之和分别为  $\Delta v_1$ 、 $\Delta v_2$  和  $\Delta v_3$ 。对于  $\Delta v_2$ ，考虑到对接载人飞船后空间站的质量增加，因此需用消耗更多燃料。为简化计算，消耗更多燃料等效于将  $\Delta v_2$  增大为  $\alpha \cdot \Delta v_2$ ， $\alpha$  固定取值为 1.33。在 1 次地火转移运输任务中，空间站施加速度脉冲总和  $\Delta v_{\text{station}}$  不大于 4.5 km/s。

$$\Delta v_{\text{station}} = (\Delta v_1 + \alpha \cdot \Delta v_2 + \Delta v_3) \leq 4.5 \text{ km/s} \quad (3)$$

#### （七）行星和月球的引力辅助和飞越高度

[1] 空间站可以利用月球、地球、火星和金星引力辅助变轨，引力辅助次数不限。在地月空间范围内外，引力辅助采用不同的计算模型。

[2] 在地月空间范围内，空间站利用地球和月球引力辅助变轨，采用日-地-月-空间站四体模型，参见第 5 章第（一）节，在任意时刻距离地表的高度不低于 400 km，距离月表的高度

不低于 100 km。

[3] 在地月空间范围外，空间站利用火星和金星引力辅助变轨，采用简化引力辅助模型，参见第 5 章第（二）、（三）节，近火/金点距离火表/金表的高度介于 200-10000 km 之间。

### （八）其它说明

[1] 载人飞船的飞行轨道无需设计。

[2] 对于任意一个空间站，其飞行轨道需满足上述全部约束条件，若违反某一项约束条件，则本次以及此后的地火转移运输任务设计结果不计入设计指标。

## 3. 设计指标

设定火星移民任务使用了  $N$  ( $N \leq 50$ ) 个地火转移运输空间站，运输的移民人数共计  $U$  人，其中第  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) 个空间站共完成了  $M_i$  次运输任务，第  $i$  个空间站完成第  $j$  ( $1 \leq j \leq M_i$ ) 次运输任务所施加的速度脉冲总和为  $\Delta v_{\text{station},j}^{(i)}$ 。本次竞赛题目设定了 3 项设计指标：

第一指标  $J_1$  为最大化火星移民总人数。

$$\text{maximize : } J_1 = 10 \times \text{floor} \left( \frac{B + U}{10} \right) \quad (4)$$

式 (4) 中， $\text{floor}(x)$  为  $x$  整数部分， $B$  为时间相关系数，表达式如下。

$$B = 100 \times \left( \frac{t_{\text{deadline}} - t_{\text{submission}}}{t_{\text{deadline}} - t_{\text{open}}} \right) \quad (5)$$

式 (5) 中， $t_{\text{submission}}$  为提交结果时间， $t_{\text{open}}$ 、 $t_{\text{deadline}}$  分别为竞赛开始和结束时间。

第二指标  $J_2$  为最小化采用的空间站个数。

$$\text{minimize : } J_2 = 3 \times \text{floor} \left( \frac{N}{3} \right) \quad (6)$$

第三指标  $J_3$  为最小化全部地火转移运输任务施加的总速度脉冲。

$$\text{minimize: } J_3 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \Delta v_{\text{station},j}^{(i)} \quad (7)$$

参赛团队所得  $J_1$  最大者胜出；若  $J_1$  得分相同，则  $J_2$  最小者胜出；若  $J_1$  和  $J_2$  得分均相同，则  $J_3$  最小者胜出。

## 4. 坐标系

### （一）地心赤道惯性坐标系

地心赤道惯性坐标系（简称 ECI）以地球质心为原点，赤道面为  $x-y$  平面， $x$  轴指向 2000 年的太阳春分点位置， $z$  轴垂直于赤道面且指向地球北极， $y$  轴同时垂直于  $x$  轴和  $z$  轴，并满足右手定则。

### （二）日心黄道惯性坐标系

日心黄道惯性坐标系（简称 HCI）以太阳质心为原点，黄道面（地球公转面）为  $x-y$  平面， $x$  轴指向 2000 年的太阳春分点位置， $z$  轴指向黄道面正法线方向， $y$  轴同时垂直于  $x$  轴和  $z$  轴，并满足右手定则。

### （三）地月旋转坐标系

地月旋转坐标系（简称 ROT）以地球质心为原点，白道面（月球公转轨道面）为  $x-y$  平面， $x$  轴由地球指向月球， $z$  轴为白道面正法线方向， $y$  轴同时垂直于  $x$  轴和  $z$  轴，并满足右手定则。

### （四）坐标系转换矩阵

设定  $\mathbf{r}^{(\text{ECI})}$  和  $\mathbf{v}^{(\text{ECI})}$ 、 $\mathbf{r}^{(\text{HCI})}$  和  $\mathbf{v}^{(\text{HCI})}$ 、 $\mathbf{r}^{(\text{ROT})}$  和  $\mathbf{v}^{(\text{ROT})}$  分别为空间站在 ECI、HCI、ROT 坐标系中的位置和速度矢量，那么它们的相互转换关系如下：

#### 1) ECI-HCI 相互转换

$$\text{HCI} \rightarrow \text{ECI} : \begin{cases} \mathbf{r}^{(\text{ECI})} = [\mathbf{M}]^T \cdot \left( \mathbf{r}^{(\text{HCI})} - \mathbf{r}_{\text{earth}}^{(\text{HCI})} \right) \\ \mathbf{v}^{(\text{ECI})} = [\mathbf{M}]^T \cdot \left( \mathbf{v}^{(\text{HCI})} - \mathbf{v}_{\text{earth}}^{(\text{HCI})} \right) \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{ECI} \rightarrow \text{HCI} : \begin{cases} \mathbf{r}^{(\text{HCI})} = \mathbf{r}_{\text{earth}}^{(\text{HCI})} + [\mathbf{M}] \cdot \mathbf{r}^{(\text{ECI})} \\ \mathbf{v}^{(\text{HCI})} = \mathbf{v}_{\text{earth}}^{(\text{HCI})} + [\mathbf{M}] \cdot \mathbf{v}^{(\text{ECI})} \end{cases} \quad (9)$$

式 (8)、(9) 中,  $\mathbf{r}_{\text{earth}}^{(\text{HCI})}$  和  $\mathbf{v}_{\text{earth}}^{(\text{HCI})}$  为地球在 HCI 坐标系中的位置和速度矢量,  $[\mathbf{M}]$  为由 HCI 至 ECI 的转换矩阵,  $[\mathbf{M}]^T$  为  $[\mathbf{M}]$  的转置,  $[\mathbf{M}]$  表达式如下。

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (10)$$

式 (10) 中,  $\beta (= 23.4393^\circ)$  为黄道面和赤道面的夹角。

## 2) ECI-ROT 相互转换

$$\text{ROT} \rightarrow \text{ECI} : \begin{cases} \mathbf{r}^{(\text{ECI})} = [\mathbf{A}]^T \cdot \mathbf{r}^{(\text{ROT})} \\ \mathbf{v}^{(\text{ECI})} = [\mathbf{A}]^T \cdot (\mathbf{v}^{(\text{ROT})} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^{(\text{ROT})}) \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{ECI} \rightarrow \text{ROT} : \begin{cases} \mathbf{r}^{(\text{ROT})} = [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{r}^{(\text{ECI})} \\ \mathbf{v}^{(\text{ROT})} = [\mathbf{A}] \cdot (\mathbf{v}^{(\text{ECI})} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^{(\text{ECI})}) \end{cases} \quad (12)$$

式 (11)、(12) 中,  $[\mathbf{A}]$  为由 ECI 至 ROT 的转换矩阵,  $[\mathbf{A}]^T$  为  $[\mathbf{A}]$  的转置,  $\boldsymbol{\omega}$  为月球绕地球公转的轨道角速度。  $[\mathbf{A}]$  和  $\boldsymbol{\omega}$  表达式如下。

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}_\theta] \cdot [\mathbf{A}_i] \cdot [\mathbf{A}_\Omega] \quad (13)$$

$$[\mathbf{A}_\theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta_{\text{moon}} & \sin \theta_{\text{moon}} & 0 \\ -\sin \theta_{\text{moon}} & \cos \theta_{\text{moon}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$[\mathbf{A}_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i_{\text{moon}} & \sin i_{\text{moon}} \\ 0 & -\sin i_{\text{moon}} & \cos i_{\text{moon}} \end{bmatrix} \quad (15)$$



$$[A_\Omega] = \begin{bmatrix} \cos \Omega_{\text{moon}} & \sin \Omega_{\text{moon}} & 0 \\ -\sin \Omega_{\text{moon}} & \cos \Omega_{\text{moon}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\omega} = [0 \ 0 \ \sqrt{\mu_{\text{earth}}/a_{\text{moon}}^3}]^T \quad (17)$$

式 (14)-(17) 中,  $\mu_{\text{earth}}$  为地球引力常数,  $a_{\text{moon}}$ 、 $i_{\text{moon}}$ 、 $\Omega_{\text{moon}}$ 、 $\theta_{\text{moon}}$  分别为月球轨道的半长轴、倾角、升交点赤经、纬度幅角, 参见附录 4。

## 5. 动力学模型

### (一) 地月空间范围内的轨道动力学模型

当空间站位于地月空间范围之内, 飞行轨道在 ECI 中描述, 采用日-地-月-空间站四体动力学模型, 如下所示。

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_{\text{earth}}}{r^3}\mathbf{r} - \mu_{\text{moon}}\left(\frac{\mathbf{r}_{\text{moon}}}{r_{\text{moon}}^3} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{moon}}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{moon}}\|^3}\right) - \mu_{\text{sun}}\left(\frac{\mathbf{r}_{\text{sun}}}{r_{\text{sun}}^3} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{sun}}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{sun}}\|^3}\right) \quad (18)$$

式 (18) 中,  $\mu_{\text{earth}}$ 、 $\mu_{\text{moon}}$  和  $\mu_{\text{sun}}$  分别为地球、月球和太阳的引力常数 (取值参见表 1),  $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{r}_{\text{moon}}$  和  $\mathbf{r}_{\text{sun}}$  分别为空间站、月球和太阳在 ECI 中的位置矢量, 其模值分别为  $r$ 、 $r_{\text{moon}}$  和  $r_{\text{sun}}$ 。太阳和月球的星历参见附录 3 和附录 4。

注意: 空间站在首次 DRO 启航前、重返 DRO 补给维护期间以及该空间站执行完全部火星移民任务后, 其位置和速度与 DRO 服务站相同, DRO 服务站星历参见附录 1。

### (二) 地月空间范围外的轨道动力学模型

当空间站位于地月空间范围之外, 飞行轨道在 HCI 中描述, 采用日心二体动力学模型, 如下所示。

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_{\text{sun}}}{r^3}\mathbf{r} \quad (19)$$

式 (19) 中,  $\mathbf{r}$  和  $r$  分别为空间站在 HCI 中的位置矢量及其模值。



### (三) 行星引力辅助模型

在地月空间范围外，空间站可以借助火星和金星（统称行星）引力辅助变轨，火星和金星星历参见附录 2。假定行星引力辅助时刻为  $t_{GA}$ ，此时，空间站位置矢量为  $\mathbf{r}(t_{GA})$ ，行星位置和速度矢量分别为  $\mathbf{r}_{planet}(t_{GA})$  和  $\mathbf{v}_{planet}(t_{GA})$ ；行星引力辅助瞬时完成，引力辅助前后的空间站速度矢量和空间站与行星相对速度矢量分别为  $\mathbf{v}^-(t_{GA})$  和  $\mathbf{v}^+(t_{GA})$ ， $\mathbf{v}_{\infty}^-(t_{GA})$  和  $\mathbf{v}_{\infty}^+(t_{GA})$ ；空间站近行星点相对于行星球心和表面的距离分别为  $r_{p,planet}$  和  $h_{p,planet}$ ；空间站通过行星引力辅助获得一个瞬时速度脉冲  $\Delta\mathbf{v}_{GA}$ 。 $\mathbf{v}_{\infty}^-(t_{GA})$ 、 $\mathbf{v}_{\infty}^+(t_{GA})$  和  $\Delta\mathbf{v}_{GA}$  计算公式如下。

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{\infty}^-(t_{GA}) = \mathbf{v}^-(t_{GA}) - \mathbf{v}_{planet}(t_{GA}) \\ \mathbf{v}_{\infty}^+(t_{GA}) = \mathbf{v}^+(t_{GA}) - \mathbf{v}_{planet}(t_{GA}) \\ \Delta\mathbf{v}_{GA} = \mathbf{v}^+(t_{GA}) - \mathbf{v}^-(t_{GA}) \end{cases} \quad (20)$$

行星引力辅助满足如下约束。

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t_{GA}) = \mathbf{r}_{planet}(t_{GA}) \\ v_{\infty} = \|\mathbf{v}_{\infty}^-(t_{GA})\| = \|\mathbf{v}_{\infty}^+(t_{GA})\| \\ 200 \text{ km} \leq h_{p,planet} \leq 10000 \text{ km} \end{cases} \quad (21)$$

式 (21) 中， $h_{p,planet}$  计算公式如下。

$$\begin{cases} r_{p,planet} = \frac{\mu_{planet}}{v_{\infty}^2} \left( \sqrt{\frac{2}{1 - \langle \mathbf{v}_{\infty}^-(t_{GA}) \cdot \mathbf{v}_{\infty}^+(t_{GA}) \rangle / v_{\infty}^2}} - 1 \right) \\ h_{p,planet} = r_{p,planet} - R_{planet} \end{cases} \quad (22)$$

式 (22) 中， $\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \rangle$  表示  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$  的点积， $\mu_{planet}$  为行星引力常数， $R_{planet}$  为行星半径（取值参见本章第六节）。

### (四) 地月空间边界的轨道拼接约束

空间站在地月空间边界内外采用不同的动力学模型和参考坐标系，其飞行轨道在地月空间边界处需要满足轨道拼接约束。

假设空间站飞出地月空间，抵达地月空间边界时刻为  $t_{sphere}^-$ ，此时在 ECI 中的位置和速度矢量为  $\mathbf{r}^{(ECI)}(t_{sphere}^-)$  和  $\mathbf{v}^{(ECI)}(t_{sphere}^-)$ ；飞离地月空间边界时刻为  $t_{sphere}^+$ ，此时在 HCI 中的

位置和速度矢量为  $\mathbf{r}^{(\text{ECI})}(t_{\text{sphere}}^+)$  和  $\mathbf{v}^{(\text{ECI})}(t_{\text{sphere}}^+)$ 。空间站在地月空间边界处的轨道拼接约束如下。

$$\begin{cases} t_{\text{sphere}}^+ = t_{\text{sphere}}^- \\ \mathbf{r}^{(\text{HCI})}(t_{\text{sphere}}^+) = \mathbf{r}_{\text{earth}}^{(\text{HCI})}(t_{\text{sphere}}^-) + [\mathbf{M}] \cdot \mathbf{r}^{(\text{ECI})}(t_{\text{sphere}}^-) \\ \mathbf{v}^{(\text{HCI})}(t_{\text{sphere}}^+) = \mathbf{v}_{\text{earth}}^{(\text{HCI})}(t_{\text{sphere}}^-) + [\mathbf{M}] \cdot \mathbf{v}^{(\text{ECI})}(t_{\text{sphere}}^-) \\ \|\mathbf{r}^{(\text{ECI})}(t_{\text{sphere}}^-)\| = 5 \times 10^6 \text{ km} \end{cases} \quad (23)$$

式 (23) 中,  $\mathbf{r}_{\text{earth}}^{(\text{ECI})}$  和  $\mathbf{v}_{\text{earth}}^{(\text{ECI})}$  为地球在 HCI 中的位置和速度矢量,  $[\mathbf{M}]$  表达式参见式 (10)。

若空间站飞入地月空间, 则空间站轨道在地月空间边界处的拼接约束如下。

$$\begin{cases} t_{\text{sphere}}^+ = t_{\text{sphere}}^- \\ \mathbf{r}^{(\text{ECI})}(t_{\text{sphere}}^+) = [\mathbf{M}]^T \left[ \mathbf{r}^{(\text{HCI})}(t_{\text{sphere}}^-) - \mathbf{r}_{\text{earth}}^{(\text{HCI})}(t_{\text{sphere}}^+) \right] \\ \mathbf{v}^{(\text{ECI})}(t_{\text{sphere}}^+) = [\mathbf{M}]^T \left[ \mathbf{v}^{(\text{HCI})}(t_{\text{sphere}}^-) - \mathbf{v}_{\text{earth}}^{(\text{HCI})}(t_{\text{sphere}}^+) \right] \\ \|\mathbf{r}^{(\text{ECI})}(t_{\text{sphere}}^+)\| = 5 \times 10^6 \text{ km} \end{cases} \quad (24)$$

### (五) 轨道机动约束

设定空间站在  $t_{\Delta v}$  时刻施加一个瞬时速度脉冲  $\Delta \mathbf{v}$ , 施加  $\Delta \mathbf{v}$  前后的时刻分别为  $t_{\Delta v}^-$  和  $t_{\Delta v}^+$ 。在  $t_{\Delta v}^-$  和  $t_{\Delta v}^+$  时刻, 空间站位置和速度矢量分别为  $\mathbf{r}(t_{\Delta v}^-)$  和  $\mathbf{v}(t_{\Delta v}^-)$ ,  $\mathbf{r}(t_{\Delta v}^+)$  和  $\mathbf{v}(t_{\Delta v}^+)$ 。空间站施加瞬时速度脉冲满足如下约束。

$$\begin{cases} t_{\Delta v}^+ = t_{\Delta v}^- \\ \mathbf{r}(t_{\Delta v}^+) = \mathbf{r}(t_{\Delta v}^-) \\ \mathbf{v}(t_{\Delta v}^+) = \mathbf{v}(t_{\Delta v}^-) + \Delta \mathbf{v} \end{cases} \quad (25)$$

## (六) 常值

表 1 动力学模型相关参数取值列表

名称	值
太阳引力常数 $\mu_{\text{sun}}$	$1.32712440018 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$
地球引力常数 $\mu_{\text{earth}}$	$398600 \text{ km}^3/\text{s}^2$
月球引力常数 $\mu_{\text{moon}}$	$4902.8 \text{ km}^3/\text{s}^2$
火星引力常数 $\mu_{\text{mars}}$	$42828 \text{ km}^3/\text{s}^2$
金星引力常数 $\mu_{\text{venus}}$	$324859 \text{ km}^3/\text{s}^2$
地球半径 $R_{\text{earth}}$	6378 km
月球半径 $R_{\text{moon}}$	1738 km
火星半径 $R_{\text{mars}}$	3395 km
金星半径 $R_{\text{venus}}$	6073 km
1 天 day	86400 秒
1 年 year	365.25 天

## 6. 约束条件总结

根据第 2 节描述的空间站飞行方案，空间站轨道约束条件总结如下。

## (一) 从 DRO 启航

[1] 火星移民任务起止时间为  $t_{\text{start}}$  和  $t_{\text{end}}$ ，空间站在  $t_{\text{start}}$  和  $t_{\text{end}}$  时刻的轨道状态：

$$\mathbf{r}(t_{\text{start}}) = \mathbf{r}_{\text{DRO}}(t_{\text{start}}), \quad \mathbf{v}(t_{\text{start}}) = \mathbf{v}_{\text{DRO}}(t_{\text{start}}) \quad (26)$$

$$\mathbf{r}(t_{\text{end}}) = \mathbf{r}_{\text{DRO}}(t_{\text{end}}), \quad \mathbf{v}(t_{\text{end}}) = \mathbf{v}_{\text{DRO}}(t_{\text{end}}) \quad (27)$$

[2] 空间站从 DRO 启航时间介于  $t_{\text{start}}$  和  $t_{\text{end}}$  之间：

$$t_{\text{start}} = \text{MJD } 60676, \quad t_{\text{end}} = \text{MJD } 67980 \quad (28)$$

[3] 空间站依次从 DRO 服务站启航的时间间隔  $\Delta t_{\text{depart}}$ ：

$$\Delta t_{\text{depart}} \geq 10 \text{ days} \quad (29)$$

## (二) 载人飞船发射入轨与交会对接（移民人员进入空间站）

[4] 空间站在近地点交会对接载人飞船的约束条件：

$$h_{p,\text{earth}} \in [400, 800] \text{ km} , v_{p,\text{earth}} \leq 12 \text{ km/s} \quad (30)$$

[5] 每个空间站在 1 次火星移民任务中只能对接 1 个载人飞船，空间站依次在近地点交会对接载人飞船的时间间隔  $\Delta t_{\text{load}}$ ：

$$\Delta t_{\text{load}} \geq 10 \text{ days} \quad (31)$$

[6] 空间站轨道机动时刻  $t_{\Delta v}$  相对于近地点时刻（交会对接载人飞船） $t_{p,\text{earth}}$  的时间间隔：

$$|t_{\Delta v} - t_{p,\text{earth}}| \geq 1 \text{ day} \quad (32)$$

## (三) 载人飞船再入火星大气并软着陆火星（移民人员离开空间站）

[7] 空间站抵达火星释放载人飞船的约束条件：

$$\mathbf{r}(t_{\text{GA}}) = \mathbf{r}_{\text{mars}}(t_{\text{GA}}), 0 < \|\mathbf{v}(t_{\text{GA}}) - \mathbf{v}_{\text{mars}}(t_{\text{GA}})\| \leq 8 \text{ km/s} \quad (33)$$

[8] 载人飞船施加制动速度脉冲  $\Delta v_{\text{ship}}$ ：参见式 (1)

[9] 空间站依次抵达火星释放载人飞船的时间间隔  $\Delta t_{\text{release}}$ ：

$$\Delta t_{\text{release}} \geq 10 \text{ days} \quad (34)$$

[10] 空间站轨道机动时刻  $t_{\Delta v}$  相对于抵达火星时刻（释放载人飞船） $t_{p,\text{mars}}$  的时间间隔：

$$|t_{\Delta v} - t_{p,\text{mars}}| \geq 30 \text{ days} \quad (35)$$

## (四) 重返 DRO 和补给维护

[11] 空间站重返 DRO 的约束条件：

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_{\text{DRO}}(t) , \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_{\text{DRO}}(t) \quad (36)$$

[12] DRO 服务站在同一时刻只能补给维护 1 个地火运输空间站，补给维护时长  $\Delta t_{\text{refuel}}$ ：

$$\Delta t_{\text{refuel}} \geq 10 \text{ days} \quad (37)$$

### (五) 地火转移运输任务飞行时间

[13] 空间站完成 1 次地火转移运输任务时间（从 DRO 启航至重返 DRO 的时长） $\Delta t_{\text{mission}}$ ：

$$\Delta t_{\text{mission}} \leq 5 \text{ years} \quad (38)$$

[14] 空间站载人飞行时间（从近地点交会对接载人飞船至抵达火星释放载人飞船的时长） $\Delta t_{\text{manned}}$ ：

$$\Delta t_{\text{manned}} \leq 300 \text{ days} \quad (39)$$

### (六) 载人飞船和空间站的机动能力

[15] 在 1 次地火转移运输任务中，空间站施加速度脉冲总和  $\Delta v_{\text{station}}$ ：

$$\Delta v_{\text{station}} \leq 4.5 \text{ km/s} \quad (40)$$

### (七) 行星和月球的飞越高度

[16] 空间站距离地球和月球表面的高度， $h_{\text{p,earth}}$  和  $h_{\text{p,moon}}$ ：

$$h_{\text{p,earth}} \geq 400 \text{ km} , h_{\text{p,moon}} \geq 100 \text{ km} \quad (41)$$

[17] 火星/金星引力辅助及飞越高度的约束条件：参见式 (21)

## 7. 设计结果提交要求

设计结果的数据格式如表 2 所示，表 2 中各列数据定义如下：

第 1 列 Line No 表示行序号；

第 2 列 Station No 表示空间站序号；

第 3 列 Mission No 表示地火转移运输任务序号，每个空间站分别独立排序；

第 4 列 Time 表示事件节点时刻，采用距离 MJD 60676 的时长表示；

第 5 -7 列  $x, y, z$  表示位置矢量分量；

第 8 - 10 列  $v_x, v_y, v_z$  表示速度矢量分量，若当前时刻获得速度脉冲，则记为获得速度脉冲后的速度矢量分量；

第 11 - 13 列  $\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z$  表示获得的速度脉冲矢量分量，包括地火运输空间站施加的速度脉冲以及火星/金星引力辅助等效的速度脉冲（参见式 20），若当前时刻未获得速度脉冲，则记为 0；

第 14 列 Model 表示动力学模型，0 表示 DRO 服务站星历模型，1 表示日-地-月-空间站四体动力学模型，2 表示日心二体动力学模型；

第 15 列 Event 表示飞行轨道事件节点，1 表示从 DRO 服务站启航（当 Event 为 1 时，Model 为 1），2 表示重返 DRO 服务站（当 Event 为 2 时，Model 为 0），21 表示位于近地点（对接载人飞船），22 表示位于近火点（释放载人飞船），23 表示位于地月空间边界，31 表示施加瞬时速度脉冲，32 表示火星引力辅助，33 表示金星引力辅助；

第 16 列  $X$  表示载人飞船搭载移民人数，当 Event 为 21 或 22 时，记录  $X$  的值，否则记为 0；

第 17 列  $\Delta v_{\text{ship}}$  表示载人飞船制动脉冲，当且仅当 Event 为 22 时，记录  $\Delta v_{\text{ship}}$  的值，否则记为 0。

关于空间站飞行轨道的位置误差和速度误差，说明如下：轨道数据采用双精度浮点数，在任意轨道段末端时刻  $t_{\text{Event}}$ ，由于轨道积分引起的位置矢量（记为  $\mathbf{r}^*$ ）等式约束误差  $\delta r$  不大于 1000m，速度矢量（记为  $\mathbf{v}^*$ ）等式约束误差  $\delta v$  不大于 1m/s。

$$\delta r = \|\mathbf{r}(t_{\text{Event}}) - \mathbf{r}^*(t_{\text{Event}})\| \leq 1000\text{m}$$

$$\delta v = \|\mathbf{v}(t_{\text{Event}}) - \mathbf{v}^*(t_{\text{Event}})\| \leq 1\text{m/s}$$

表 2 地火运输空间站轨道数据提交格式

Line No	Station No	Mission No	Time (day)	$x$ (km)	$y$ (km)	$z$ (km)	$v_x$ (km/s)	$v_y$ (km/s)	$v_z$ (km/s)	$\Delta v_x$ (km/s)	$\Delta v_y$ (km/s)	$\Delta v_z$ (km/s)	Model	Event	$X$	$\Delta v_{\text{ship}}$ (km/s)
1	1	1	0	float	float	float	float	float	float	float	float	float	0	2	0	0
2	1	1	float	float	float	float	float	float	float	float	float	float	1	1	0	0
...	...	...	float	float	float	float	float	float	float	float	float	float	...	...	0	0
...	1	1	float	float	float	float	float	float	float	float	float	float	0	2	0	0
...	1	2	float	float	float	float	float	float	float	float	float	float	1	1	0	0
...	1	...	float	float	float	float	float	float	float	float	float	float	...	...	...	...
...	1	...	7304	float	float	float	float	float	float	float	float	float	0	2	...	...
...	1	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	$N$	1	0	float	float	float	float	float	float	float	float	float	0	2	0	0
...	$N$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	$N$	...	7304	float	float	float	float	float	float	float	float	float	0	2	0	0



## 8. 附录

### 附录 1: DRO 服务站星历

设定在任意时刻  $t$ , DRO 服务站在 ECI 与 ROT 中的位置和速度矢量分别记为  $\mathbf{r}_{\text{DRO}}^{(\text{ECI})}$  和  $\mathbf{v}_{\text{DRO}}^{(\text{ECI})}$ ,  $\mathbf{r}_{\text{DRO}}^{(\text{ROT})}$  和  $\mathbf{v}_{\text{DRO}}^{(\text{ROT})}$ 。

首先, 采用如下拟合函数计算  $\mathbf{r}_{\text{DRO}}^{(\text{ROT})}$  和  $\mathbf{v}_{\text{DRO}}^{(\text{ROT})}$ 。

$$\mathbf{r}_{\text{DRO}}^{(\text{ROT})} = a_{\text{moon}} \begin{bmatrix} a_0^x + \sum_{i=1}^3 [a_i^x \cos(2\pi\omega_i^x \tau) + b_i^x \sin(2\pi\omega_i^x \tau)] \\ \sum_{i=1}^3 [a_i^y \cos(2\pi\omega_i^y \tau) + b_i^y \sin(2\pi\omega_i^y \tau)] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbf{v}_{\text{DRO}}^{(\text{ROT})} = \sqrt{\frac{\mu_{\text{earth}}}{a_{\text{moon}}}} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 [a_i^{v_x} \cos(2\pi\omega_i^{v_x} \tau) + b_i^{v_x} \sin(2\pi\omega_i^{v_x} \tau)] \\ \sum_{i=1}^3 [a_i^{v_y} \cos(2\pi\omega_i^{v_y} \tau) + b_i^{v_y} \sin(2\pi\omega_i^{v_y} \tau)] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

式 (42)、(43) 中,  $\mu_{\text{earth}}$  为地球引力常数,  $a_{\text{moon}}$  为月球轨道半长轴, 拟合函数各项参数取值如表 3 所示,  $\tau$  为无量纲时间,  $\tau$  表达式如下。

$$\tau = \sqrt{\frac{\mu_{\text{earth}}}{a_{\text{moon}}^3}} (t - t_0) \quad (44)$$

式 (44) 中,  $t_0$  为初始时刻 (MJD 60676)。

然后, 计算  $\mathbf{r}_{\text{DRO}}^{(\text{ECI})}$  和  $\mathbf{v}_{\text{DRO}}^{(\text{ECI})}$ , 参见式 (11)。

DRO 服务站在 ROT 和 ECI 中的飞行轨道分别如图 2 和图 3 所示。

表 3 DRO 轨道拟合函数各项参数取值列表

$a_0^x$	1.004416792940519				
$\omega_1^x$	0.318310613651114	$\omega_2^x$	0.636620862942161	$\omega_3^x$	0.954929789574872
$a_1^x$	-0.181970920960444	$a_2^x$	0.002999214058291	$a_3^x$	-0.001841735804046
$b_1^x$	-0.000339694958002	$b_2^x$	0.000008393690079	$b_3^x$	-0.000000619177065
$\omega_1^y$	0.318309134645416	$\omega_2^y$	0.636617759107742	$\omega_3^y$	0.954929213968546
$a_1^y$	0.000472036321598	$a_2^y$	0.000015290593321	$a_3^y$	0.000003018234912
$b_1^y$	0.244768639552355	$b_2^y$	0.002960758097617	$b_3^y$	0.002650026675994
$\omega_1^{v_x}$	0.318309196516475	$\omega_2^{v_x}$	0.636621150278213	$\omega_3^{v_x}$	0.954929177067250
$a_1^{v_x}$	0.000644080485616	$a_2^{v_x}$	0.000042417828521	$a_3^{v_x}$	0.000013643834980
$b_1^{v_x}$	0.363941953749817	$b_2^{v_x}$	-0.011999166419257	$b_3^{v_x}$	0.011049154388712
$\omega_1^{v_y}$	0.318310565837136	$\omega_2^{v_y}$	0.636620009522340	$\omega_3^{v_y}$	0.954930966495610
$a_1^{v_y}$	0.489537961370538	$a_2^{v_y}$	0.011846929325199	$a_3^{v_y}$	0.015903320386205
$b_1^{v_y}$	0.000853780144252	$b_2^{v_y}$	0.000007209074015	$b_3^{v_y}$	0.000053373319044

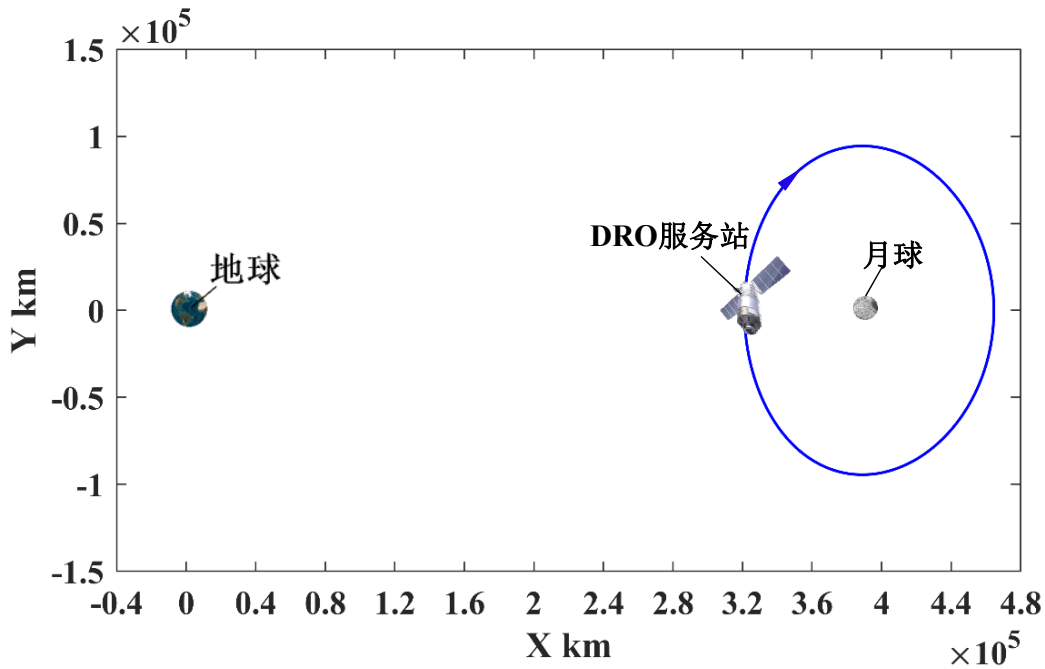


图 2 DRO 服务站飞行轨道示意图 (ROT)

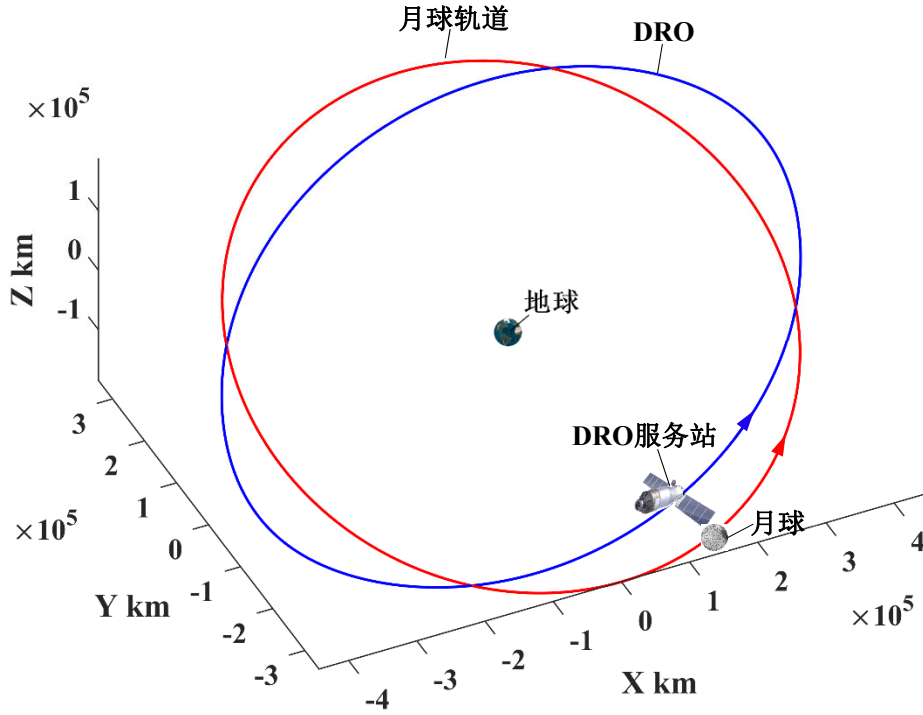


图 3 DRO 服务站飞行轨道示意图 (ECI)

## 附录 2: HCI 中的行星星历

表 4 金星、地球、火星在初始时刻 (MJD 60676) 的星历

轨道参数	金星	地球	火星
半长轴 $a$ , km	108208815.6480	149735127.0382	227948210.2885
偏心率 $e$	0.006747295613	0.017566762041	0.093429016179
倾角 $i$ , deg	3.394404082092	0.002976847126	1.847591021184
升交点经度 $\Omega$ , deg	76.611923848104	189.953211282428	49.487004128262
近地点幅角 $\omega$ , deg	55.115008104600	273.196254000254	286.712167769996
真近点角 $f_0$ , deg	279.349585752365	357.320625735227	132.696809000242

注：角度变量在后续公式计算中均采用弧度单位。

在 HCI 中, 行星在任意时刻  $t$  的位置矢量  $\mathbf{r}_{\text{planet}}^{(\text{HCI})}$  和速度矢量  $\mathbf{v}_{\text{planet}}^{(\text{HCI})}$  计算方法如下。

首先, 计算行星轨道在初始时刻 ( $t_0$ ) 的偏近点角  $E_0$  和平近点角  $M_0$ , 计算公式如下。

$$E_0 = 2 \tan^{-1} \left[ \tan \left( \frac{f_0}{2} \right) \sqrt{\frac{1-e}{e+1}} \right], M_0 = E_0 - e \sin(E_0) \quad (45)$$

然后，计算行星轨道在  $t$  时刻的平近点角  $M_t$  和平近点角  $E_t$ 。 $M_t$  计算公式如下。

$$M_t = M_0 + \sqrt{\frac{\mu_{\text{sun}}}{a^3}}(t - t_0) \quad (46)$$

式 (46) 中， $\mu_{\text{sun}}$  为太阳引力常数。 $E_t$  通过迭代法计算得到， $E_t$  表达式如下。

$$M_t = E_t - e \sin(E_t) \quad (47)$$

最后，计算  $\mathbf{r}_{\text{planet}}^{(\text{HCI})}$  和  $\mathbf{v}_{\text{planet}}^{(\text{HCI})}$ 。

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{\text{planet}}^{(\text{HCI})} = a(\cos E_t - e) \cdot \mathbf{P} + a\sqrt{1 - e^2} \sin E_t \cdot \mathbf{Q} \\ \mathbf{v}_{\text{planet}}^{(\text{HCI})} = \frac{\sqrt{\mu_{\text{sun}}/a}}{(1 - e \cos E_t)} (-\sin E_t \cdot \mathbf{P} + \sqrt{1 - e^2} \cos E_t \cdot \mathbf{Q}) \end{cases} \quad (48)$$

式 (48) 中， $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  表达式如下。

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i \\ \sin \omega \sin i \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i \\ -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i \\ \cos \omega \sin i \end{bmatrix} \quad (50)$$

### 附录 3: ECI 中的太阳星历

表 5 太阳在初始时刻 (MJD 60676) 的星历

轨道参数	太阳
半长轴 $a$ , km	149735127.0382
偏心率 $e$	0.017566762041
倾角 $i$ , deg	23.436367962048
升交点经度 $\Omega$ , deg	359.998706334837
近地点幅角 $\omega$ , deg	283.150652210347
真近点角 $f_0$ , deg	357.320625735227

在 ECI 中，太阳在任意时刻  $t$  的位置和速度矢量计算方法参照附录 2，需要说明的是：中心天体引力常数设为  $\mu_{\text{sun}}$ 。

#### 附录 4: ECI 中的月球星历

表 6 月球在初始时刻 (MJD 60676) 的星历

轨道参数	月球
半长轴 $a$ , km	391655.927755148
偏心率 $e$	0
倾角 $i$ , deg	28.4432699637778
升交点经度 $\Omega$ , deg	0.09737458134485
纬度幅角 $\theta_0$ , deg	293.398038326058

注：角度变量在后续公式计算中均采用弧度单位。

在 ECI 中，月球在任意时刻  $t$  的位置矢量  $\mathbf{r}_{\text{moon}}^{(\text{ECI})}$  和速度矢量  $\mathbf{v}_{\text{moon}}^{(\text{ECI})}$  计算方法如下：

首先，计算月球在  $t$  时刻的纬度幅角  $\theta_t$ ， $\theta_t$  计算公式如下。

$$\theta_t = \theta_0 + \sqrt{\frac{\mu_{\text{earth}}}{a^3}}(t - t_0) \quad (51)$$

式 (51) 中， $\mu_{\text{earth}}$  为地球引力常数， $t_0$  为初始时刻 (MJD 60676)。

然后，计算  $\mathbf{r}_{\text{moon}}^{(\text{ECI})}$  和  $\mathbf{v}_{\text{moon}}^{(\text{ECI})}$ 。

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{\text{moon}}^{(\text{ECI})} = a (\cos \theta_t \cdot \mathbf{P} + \sin \theta_t \cdot \mathbf{Q}) \\ \mathbf{v}_{\text{moon}}^{(\text{ECI})} = \sqrt{\frac{\mu_{\text{earth}}}{a}} (-\sin \theta_t \cdot \mathbf{P} + \cos \theta_t \cdot \mathbf{Q}) \end{cases} \quad (52)$$

式 (52) 中， $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  表达式如下。

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \end{bmatrix}^T \quad (53)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\sin \Omega \cos i & \cos \Omega \cos i & \sin i \end{bmatrix}^T \quad (54)$$