

## 1 První úkol

Nejdříve popíši situaci pro všechny topologie bez šelm. Když v každé z těchto topologií nebude ani jedna šelma, pak, jak z definice jednotlivých topologií vyplývá, můžeme dojít na každý sloup skalního města. Proto pro každou z těchto topologií platí, že když se ve skalním městě nebude nacházet ani jedna šelma, pak jsme schopni úkol splnit vždycky.

Dále rozeberu jednotlivé topologie s přítomností šelem. Budu předpokládat, že hráč, šelmy i stěžeň budou na různých sloupech.

Z definice první topologie můžeme zjistit, že v první topologii je graf skalního města strom. Abychom dokázali, že nejsme schopni úkol splnit v každém případě, musíme dokázat, že po odstranění jednoho či dvou vrcholů grafu skalního města vzniknou nové komponenty. Protože v této topologii je grafem strom, stane se tak vždy, když je stupeň odstraňovaného vrcholu alespoň 2 (nejedná se o list). Tím jsme dokázali, že v tomto případě není možné úkol splnit nezávisle na rozmístění.

Pokud u druhé topologie počítáme jen s jednou šelmou, pak úkol jsme schopni splnit vždycky, protože graf skalního města této topologie neobsahuje žádné artikule. Avšak pokud jsou dvě šelmy, mohou být rozmístěny tak, že izolují sloup v rohu, protože tento sloup má jenom dva sousedy. Proto není možné pro tuto topologii a dvě šelmy splnit úkol nezávisle na rozmístění, avšak pro jednu šelmu to lze.

U třetí topologie musíme nejdříve rozebrat malá skalní města. Skalní města  $Q_0$  a  $Q_1$  jsou tak malá, že není možné splnit předpoklad v druhém odstavci. Kdybychom se je tam přesto pokoušeli rozmístit, nemohli bychom v ani jednom případě splnit úkol. Skalní město  $Q_2$  lze zařadit do druhé topologie, proto v tomto případě také nelze splnit úkol nezávisle na rozmístění.

Avšak pro skalní město  $Q_3$  už je to jiné. Pro izolaci komponenty o jednom vrcholu musíme odstranit nejméně tři vrcholy a o dvou nebo třech vrcholech musíme odstranit nejméně čtyři. Z čehož vyplývá, že jedna nebo dvě šelmy nejsou schopny skalní město rozdělit na komponenty, proto jsme pro toto skalní město splnit úkol nezávisle na rozmístění. Tento závěr můžeme přenést i pro skalní města  $Q_n$  pro  $n > 2$ , protože díky definici třetí topologie nemůže nastat, aby pro skalní město  $Q_k$  bylo možné splnit úkol vždy a pro skalní město  $Q_{k+1}$  tomu bylo naopak.

## 2 Druhý úkol

Začnu nejprve druhou topologií a jednou šelmou. Protože v tomto případě se nemůže hráč dostat do takové situace, kdy hráč se nemůže dostat do bezpečné vzdálenosti od šelmy, strategie hráče na utíkání je jednoduchá – jakmile hráč je na sloupu vedle sloupu se šelmou, posune se na sloup, která nesousedí se sloupem s šelmou.

Se dvěma šelmami je to přesně naopak, šelmy hráče vždy v nějakém momentu dostanou. Šelmám stačí jen se dostat do polohy, kdy jedna šelma sousedí s hráčem a druhá sousedí s tou první šelmou a zároveň je "šikmo" na sloup s hráčem. Tehdy můžou hráče zatlačit do rohu a obklíčit, protože tehdy omezí pohyb hráče jen do dvou směrů a zároveň po pohybu hráče jsou šelmy schopny se do tohoto rozpoložení vrátit. Zároveň není žádná strategie pro hráče, aby znemožnil použití této strategie šelmami.

Pro třetí topologii s jednou šelmou se to liší podle velikosti. Pro skalní města  $Q_0$  a  $Q_1$  je zřejmé, že šelma vždy vyhraje. Skalní město  $Q_2$  odpovídá i druhé topologii, proto zde hráči stačí stejná strategie jako pro druhou topologii s jednou šelmou, a ve větších skalních městech třetí topologie taky stačí tatáž strategie, protože díky definici pro tato města nemůže nastat situace, kdy hráč bude obklíčen jednou šelmou.

Se dvěma šelmami se k skalním městům, kdy hráč nemůže utéct, přidá  $Q_2$ , protože  $Q_2$  patří i do druhé topologie, a  $Q_3$ , protože šelmám stačí se rozmístit do takových vrcholů, jejichž hrana, kdyby existovala, by při znázornění skalního města krychlí tvořila úhlopříčku krychle, aby hráče obklíčili. Pro  $Q_4$  však stačí hráči se pohybovat v bezpečné vzdálenosti od šelem, protože pro toto skalní město nemůžou šelmy hráče obklíčit. Tohle díky definici třetí topologie bude platit i pro větší skalní města této topologie.

Pro čtvrtou topologii s jednou šelmou záleží na skalním městě a poloze šelmy, jestli hráč bude schopen utíkat do nekonečna. Pokud se ve městě nachází jenom cykly o třech vrcholech anebo je šelma schopna zablokovat přístup k větším cyklům předtím, než se tam hráč dostane, pak šelma může obklíčit hráče prostým přibližováním se. Pokud ale hráč má možnost se dostat na cyklus o alespoň čtyřech vrcholech, pak hráči stačí se vždy posouvat na vrchol v cyklu v bezpečné vzdálenosti od šelmy. Proto aby mohl hráč utíkat do nekonečna, musí platit, že se ve městě nachází alespoň jeden cyklus o alespoň čtyřech vrcholech a vzdálenost od hráče k nejbližšího takového cyklu je menší nebo rovno vzdálenosti od šelmy k takovému cyklu. V ostatních případech šelma vždy hráče obklíčí a vyhraje.

Když jsou ale dvě šelmy, pak můžou znemožnit nekonečný útěk hráče tím, že po tom, co se dostanou do cyklu, se rozdělí. Proto výherní strategie pro šelmy je taková, že pokud se nenachází na cyklu nebo se nachází na spojnici cyklů, pak jdou společně, a pokud jdou procházet cyklem, pak se rozdělí a jakmile se dostanou rozcestí, kudy míří cesta k hráči, počkají na sebe. Takhle pak následují hráče do té doby, dokud ho neobklíčí.