1 Pro souvislou řadu šelem

Nejdříve vyřešíme případ, kdy stojící šelmy tvoří souvislou řadu. Na to můžeme využít Goldbachovi hypotézi, která říká, že jakékoli sudé číslo větší než dva lze vyjádřit jako součet dvou prvočísel. Přestože na ní neexistuje formální důkaz, s největší pravděpodobností bude do deseti milionů platit.

Musíme však ukázat, že bude platit, přestože v seznamu prvočísel nemůžeme mít číslo dva. Na důkaz stačí jen ukázat, že jediné číslo, které v součtu bude mít dvojku, je číslo 4, protože jinak by nemohl být součet sudý.

Této hypotézi můžeme využít i u lichých čísel. Z ní pak vyplývá, že všechna lichá čísla, které nejsou prvočísly, lze vyjádřit jako součet sudého čísla a trojky. Proto liché složené číslo lze být vyjádřeno jako součet tří čísel. Taky u nich nejde mít počet sčítanců menší, protože součet dvou lichých čísel je sudé číslo.

Tím máme pokryté skoro všechna čísla až na 1, 2, 4. Tyhle čísla lze vyjádřit jako rozdíl.

Číslo 2 máme už vyřešené ze zadání. Lze vyjádřit jako $2 = 5 - 3$, což musí být optimální řešení, jelikož jinak by 2 musela být povolená hlasitost, což není.

Číslo 1 vyjádříme jako $1 = 7 - 3 - 3$. Důvod optimálnosti je stejný jako pro liché složené čísla a zároveň 1 není prvočíslo.

Spolu s číslem 4 vyřeším první vstup. Pro něj bude výstup `2`, protože 4 lze vyjádřit jako $4 = 7 - 3$.

Postup je následující: nejdříve se přečte vstup a spočítá se velikost souvislé řady, následně vrátíme `2`, kdyby se jednalo o sudé číslo, jinak zkontrolujeme, jestli se jedná o prvočíslo. Pak vrátíme `1`, pokud by šlo o prvočíslo, jinak vrátíme `3`. Čtení vstupu a inicializace má složitost $\mathcal{O}(N)$ a kontrola, jestli se jedná o prvočíslo, $\mathcal{O}(\sqrt{N})$, proto celková časová složitost s tímto postupem je $\mathcal{O}(N)$.

2 Pro nesouvislou řadu šelem

Pro nesouvislou řadu stojících šelem postup výše nemůžeme použít. Můžeme však použít při řešení následující algoritmus. Souvislou řadou budu mínit šelmy, které jsou ve stejném stavu a zároveň jsou pospolu.

Nejdříve přečteme vstup a z něj vytvoříme pole, které bude ukládat délku souvislých řad (pro vstup `25 26 28` to je `[2, 1, 1]`). Při tom zjistíme vzdálenost první stojící šelmy po poslední stojící šelmu a po toto číslo najdeme všechna prvočísla pomocí Erathosthenově sítu, což bude trvat maximálně $\mathcal{O}((x_N - x_1) \cdot \log(\log(x_N - x_1)))$. Samozřejmě pak odstraníme dvojku ze seznamu prvočísel.

Pak pro každý prvek v seznamu ukládající délky souvislých řad zjistíme stejným postupem jako první části, kolik zařvání potřebujeme, aby šelmy v této řadě se postavili či sedli a aby ostatní šelmy zůstali ve stejném stavu. Pak během toho, co řada stojících šelem není souvislá, zkoušíme pro každou souvislou řadu, jakým směrem a jakou hlasitostí je nejlepší zařvat (pro směr doprava voláme od první šelmy v souvislé řadě, pro směr doleva od poslední), vybereme ten, který nejvíce zminimalizuje počet zařvání, upravíme seznam a opakujeme. Tento postup má maximální složitost $\mathcal{O}(N^2 \cdot \pi(x_N - x_1) \log \pi(x_N - x_1))$, kde $\pi(n)$ je hustota prvočísel do čísla n.

Jakmile už máme souvislou řadu, vyhodnotíme v čase $\mathcal{O}(\log \pi(x_N - x_1))$, kolik zařvání potřebujeme na posazení těchto šelem, a vrátíme celkový výsledek. Pokud použijeme substituci $a = x_N - x_1$, celkový čas je $\mathcal{O}(N^2 \cdot \pi(a) \log \pi(a) + a \log \log a)$.

Tímto způsobem můžeme vyřešit druhou úlohu. Ze vstupu vytvoříme seznam `[1, 5, 3, 6, 1]` a upravujeme takto:

```
[1, 5, 3, 6, 1] // od poslední šelmy doprava s hlasitostí 7
  ->
[1, 5, 9] // postavíme ty uprostřed
  ->
[15] // a máme souvislou posloupnost
```

Protože 15 je liché složené číslo, výsledek druhé úlohy je `5`.