

Veškeré symboly označující funkce jsem přeoznačil písmenami od a po n podle toho, které z nich se v nápovědě vyskytli dříve.

## 1 První část

Už podle názvu a prvních rovností v první části tohoto úkolu lze usoudit, že znaky budou s největší pravděpodobností číslice. Zároveň nám na mysl může přijít domněnka, že tato čísla budou seřazena od nejmenšího po největší. Jak se dále dozvíme, nejlépe odpovídají číslice od 0 do 6.

Když se podíváme na rovnosti pod číslicemi, všimneme si, že by mohli značit funkčních hodnot nějakých funkcí. První funkce by mohla být  $a(x) = x$ , protože vůbec nemění hodnotu daných čísel. U druhý pokud je první číslice tvaru X nula, pak se v této funkci musí přičítat konstanta, proto řešením se zdá  $b(x) = x + 1$ . Musíme však vyřešit poslední rovnost, protože tam se ze šestky stane nula. Z toho vyplývá, že výsledná funkce bude  $b(x) = (x + 1) \% 7$ . Podobně pak zjistíme, že  $c(x) = 2x \% 7$  a  $d(x, y) = (y + 1) \% 7$ . Díky těmto informacím můžeme vyřešit první nedorozumění sekci:

```
a(a(b(4))) = 5
c(0) = 0
c(b(5)) = 5
d(a(b(b(c(a(6))))), b(6)) = 1
```

## 2 Velká instance

Tady je velmi užitečné si uvědomit několik vlastností těchto funkcí, které se ve velké arkádě nachází. Nejprve musí platit, že koeficienty těchto funkcí musí být nezáporná celá čísla, protože kdyby nebyla, pak by pro nějakou hodnotu muselo nutně vyjít takové číslo, které bychom nebyli jejich zápisem schopni vyjádřit. Dále se znalostí modulární aritmetiky můžeme zjistit, že nám stačí hledat jen koeficienty menší než 7.

Díky těmto vlastnostem si můžeme dovolit hledat koeficienty funkcí hrubou silou. Postupoval jsem následujícím způsobem: nejprve jsem nahradil veškeré vyřešené funkce jejich funkčními hodnotami pro daný vstup a následně jsem substituoval z rovnic navzájem. Pak jsem si vybral tu funkci, pro kterou jsem díky substitucím v daném kole získal nejvíce funkčních hodnot, našel jsem její koeficienty a pro každé nalezené  $n$ -tice koeficientů jsem rekurzivně spustil stejnou funkci (to však nakonec nebylo zapotřebí). Zde jsou níže nalezené funkce:

```
e(a, b, c, d) = 5a + 0b + 3c + 4d % 7
f(a, b) = 5a + 1b % 7
g(a, b, c) = 5a + 0b + 4c % 7
h(a, b, c) = 2a + 2b + 4c % 7
i(a, b, c) = 0a + 3b + 2c % 7
j(a, b, c, d) = 3a + 3b + 6c + 1d % 7
k(a, b, c, d) = 5a + 3b + 4c + 3d % 7
l(a, b) = 5a + 4b % 7
m(a, b, c, d) = 5a + 6b + 1c + 0d % 7
n(a, b) = 4a + 1b % 7
```

Tím už můžeme vyřešit velkou instanci:

```
g(g(1,6,0),f(6,n(3,5)),i(l(3,4),4,0)) = 3
m(5,m(f(5,3),6,f(k(3,2,4,0),6),3),l(1(4,2),5),h(f(1,5),h(2,2,5),6))) = 0
m(n(e(6,f(1,6),0,6),n(g(5,2,1),3)),i(3,m(1(5,2),1,0,2),i(4,k(4,0,1,5),e(5,3,5,6))),n(2,n(1(5,0),3)),m(m(5,5,0,5),j(2,3,3,1),f(5,2),0))) = 6
i(i(h(6,4,4),l(n(6,2),4),m(h(0,0,4),l(1,3),3,4)),1,e(j(1(6,0),1,0,i(1,2,1)),k(2,4,2,5),e(m(2,3,4,2),k(2,5,1,5),g(0,3,1),4),6))) = 5
l(i(k(n(0,0),6,5,2),4,f(6,5)),j(1,j(6,0,4,k(5,0,5,3)),5,1)) = 4
e(0,m(g(0,5,f(4,1)),j(2,k(5,0,4,3),e(2,6,6,5),0),6,g(4,4,4)),5,g(n(e(4,3,0,0),0),1,4)) = 6
k(i(3,1,k(h(1,1,5),j(5,6,4,4),5,5)),2,m(1,5,2,n(3,i(5,4,3))),m(3,1,5,m(e(5,1,3,0),4,h(4,3,4),6))) = 1
m(f(0,e(2,l(4,6),0,2)),g(3,e(0,3,e(3,4,1,6),3),n(j(4,3,1,0),5)),2,j(1(5,3),6,i(5,3,0),6)) = 3
k(h(2,1,1),i(1,4,i(5,n(6,1),1)),j(g(0,3,1),3,6,4),l(n(f(0,3),1),k(m(6,6,5,4),5,0,0))) = 2
i(g(4,2,3),i(e(0,2,3,5),4,h(0,1,4)),f(1(5,6),n(j(5,5,6,6),4))) = 0
```

$h(n(h(1,2,6),2),4,k(3,4,4,e(5,j(4,4,5,6),h(3,6,4),4))) = 5$   
 $k(m(3,3,h(2,1,3),h(3,3,2)),m(4,g(2,1,2),f(4,5),n(4,5)),4,m(3,0,l(0,k(4,4,1,1)),l(1(1,0),4))) = 4$   
 $f(1,m(3,j(h(3,2,2),1,0,1),0,3)) = 4$   
 $f(n(m(k(0,1,5,3),0,0,1),h(g(6,4,0),1,5)),m(n(4,5),j(1,6,3,e(3,5,5,0))),m(1,5,0,2),4)) = 6$   
 $j(n(h(h(5,2,4),4,2),k(5,0,4,6)),i(5,m(2,i(6,1,2),n(4,4),i(5,0,1)),4),g(g(2,1,h(6,1,5)),g(i(2,3,1),2,n(5,6)),3),g(l(k(0,0,3,6),0),3,l(e(2,0,4,3),g(1,0,0)))) = 2$   
 $f(i(5,4,m(j(4,6,4,6),5,1,5)),l(0,5)) = 2$   
 $h(l(6,2),3,l(5,3)) = 6$   
 $m(l(0,5),l(5,i(3,l(2,0),5)),l(e(6,2,2,m(6,6,0,2)),4),f(0,4)) = 3$   
 $e(n(i(f(2,2),4,0),m(m(1,2,5,5),3,n(3,6),m(5,0,3,1))),n(f(6,3),1),4,h(4,2,e(4,1,5,m(2,0,2,1)))) = 6$   
 $f(5,4) = 1$   
 $k(n(2,k(4,f(5,5),6,4)),5,k(k(0,1,0,3),0,l(g(4,5,4),3),0),0) = 2$   
 $m(3,f(m(0,4,0,k(4,6,2,0)),3),4,k(i(5,4,g(6,3,6)),h(5,4,2),j(0,3,4,4),e(2,5,0,h(6,2,5)))) = 1$   
 $g(j(6,3,1,1),3,l(0,n(f(5,0),1))) = 1$   
 $m(3,0,j(e(6,6,4,l(3,0)),3,2,0),e(e(6,0,0,6),i(g(2,0,4),3,3),4,i(6,1,2))) = 6$   
 $l(l(n(4,2),i(5,i(2,0,2),h(2,4,0))),e(e(4,1,e(1,1,6,3),m(1,0,5,5)),f(0,n(0,6)),h(1,3,3),6)) = 4$   
 $l(0,f(l(g(1,1,2),j(3,4,2,4)),5)) = 3$   
 $l(f(m(3,e(5,3,0,2),2,4),2),k(n(3,2),6,j(2,5,4,n(0,6)),1)) = 6$   
 $i(h(e(0,k(2,5,3,2),i(5,1,4),0),2,1),k(h(3,1,0),n(4,5),5,g(g(3,1,2),3,3)),i(l(3,f(0,6)),n(2,0),1)) = 3$   
 $h(l(4,l(g(6,5,4),2)),k(i(5,0,4),l(6,6),5,n(1,2)),k(3,e(2,m(5,1,3,1),2,0),i(i(3,0,0),5,h(0,2,2)),l(2,j(0,2,4,2)))) = 0$   
 $l(i(n(6,1),j(4,6,6,3),k(3,1,1,n(3,3))),0) = 4$   
 $l(k(l(1,3),4,0,h(6,3,1)),2) = 4$   
 $h(f(6,g(4,5,2)),h(1,2,n(1,3)),h(e(3,4,3,l(1,2)),n(4,0),f(2,6))) = 0$   
 $n(i(j(2,6,4,6),n(3,0),n(6,0)),3) = 3$   
 $g(2,f(g(h(4,5,1),5,0),5),l(h(1,3,0),3)) = 1$   
 $j(j(e(2,2,6,k(6,0,4,4)),g(6,4,n(5,2)),6,k(h(1,1,1),4,n(2,6),5)),l(0,3),e(1,4,f(0,n(4,6)),2),g(i(4,1,k(3,3,0,5)),6,j(1,6,2,0))) = 5$   
 $m(1,0,4,m(f(3,3),0,4,4)) = 2$   
 $l(h(1,m(3,1,j(4,5,1,2),0),n(l(1,4),1)),2) = 3$   
 $h(g(l(m(3,1,0,3),2),j(2,5,2,e(5,2,3,1)),l(e(6,6,6,4),2)),e(0,4,i(l(0,3),0,4),k(1,1,1,1)),j(l(3,0),6,g(m(2,4,3,1),1,2),e(1,4,h(0,4,6),5))) = 1$   
 $l(i(1,0,0),j(j(1,5,6,5),f(5,3),k(5,6,0,e(1,6,2,6)),g(k(6,0,5,0),4,1))) = 5$   
 $k(4,i(4,4,1),e(5,k(4,6,m(5,2,0,4),5),e(4,3,4,1),m(2,3,6,0)),5) = 5$   
 $f(m(g(4,1,5),1,k(0,k(1,4,4,3),4,f(1,3)),1),k(f(1,2),l(4,5),3,e(h(6,3,4),5,f(5,2),3))) = 2$   
 $k(k(6,0,l(4,i(1,5,6)),h(4,0,3)),1,6,i(g(3,1,3),l(g(3,5,0),1),f(m(4,5,6,6),f(6,1)))) = 0$   
 $g(n(k(6,j(4,2,0,3),0,6),m(1,6,5,3)),k(6,m(5,4,5,2),5,i(5,m(1,0,3,4),5)),f(l(1,2),j(3,1,5,3))) = 6$   
 $f(i(5,0,3),0) = 2$   
 $l(k(2,n(3,i(6,3,0)),1,m(n(0,1),1,h(5,1,0),j(6,4,3,3))),3) = 0$   
 $g(n(k(6,3,3,f(3,1)),3),k(g(k(6,3,5,2),i(2,2,1),1),i(0,5,0),i(h(5,6,3),4,4),6),m(e(k(3,3,2,5),3,3,5),j(2,5,5,3),g(5,g(1,5,4),m(1,3,2,3)),3)) = 6$   
 $n(m(n(1,m(3,1,2,3)),j(2,4,m(6,3,6,3),n(3,5)),3,k(0,i(2,2,3),1,k(1,4,0,0))),e(i(3,6,6),i(6,6,l(5,5)),l(m(4,4,4,5),m(2,5,3,2)),0)) = 5$   
 $m(6,i(0,5,5),l(l(4,0),3),m(5,f(h(4,5,2),3),f(3,2),3)) = 5$   
 $f(4,e(i(0,6,j(6,1,0,0)),0,1,g(5,2,1))) = 5$   
 $i(f(2,5),k(l(m(6,4,2,2),6),k(1,3,n(6,2),l(1,1)),4,k(3,6,0,6)),l(5,6)) = 2$