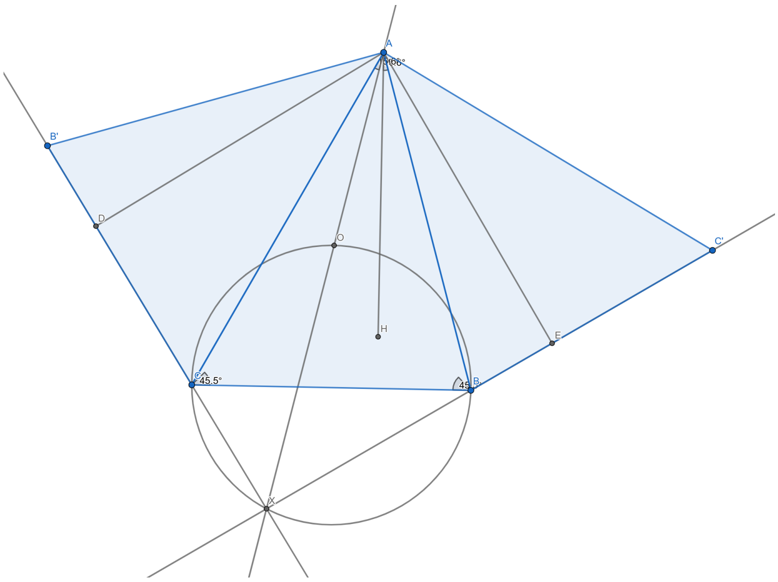
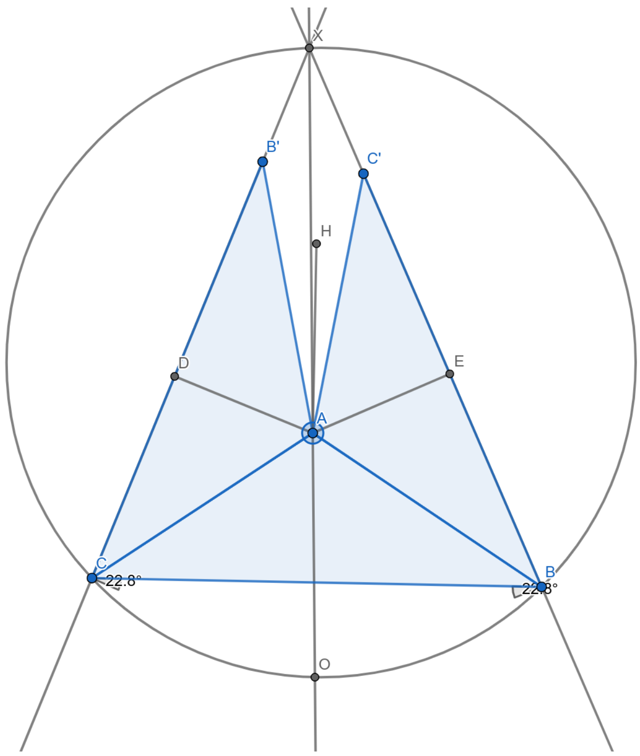


Obrázek 1: Případ pro ostroúhlý trojúhelník



Obrázek 2: Případ pro tupoúhlý trojúhelník s tupým úhlem u A

Jako první si dokážeme, že A nutně leží na ose úhlu $\angle BXC$ nebo na ose jeho vedlejšího úhlu. Díky projekci bodů B' jsou trojúhelníky ABC a $AB'C$ shodný, stejně tak jsou shodný i ABC a ABC'. Tím pádem je z bodu A na přímky $C'B$ a BC' stejné výšky, proto tedy nutně bod A leží na ose úhlu.

Teď musíme tedy dokázat, že O leží na ose úhlu $\angle BXC$. Pro dokázání tohoto tvrzení rozdělíme na tři případy – ostroúhlý trojúhelník, tupoúhlý s tupým úhlem u A a tupoúhlý s tupým úhlem u B nebo C. U všech případů dokážu, že body B, O, C, X leží na jedné kružnici.

První dva se liší jen výpočtem úhlu $|\angle BXC|$, který ale vyjde stejně:

$$|\angle BXC| = 180° - |\angle CBX| - |\angle XCB| = 180° - (180° - 2\beta) - (180° - 2\gamma) = 2\beta + 2\gamma - 180°$$

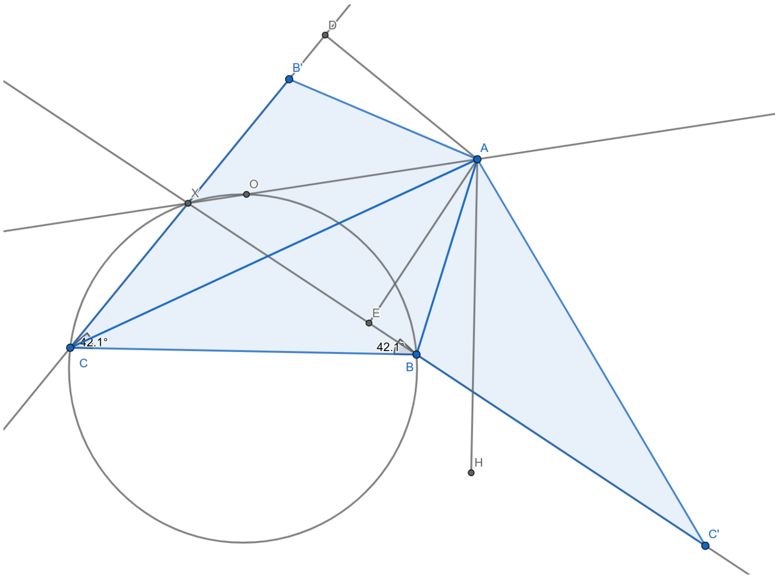
$$|\angle BXC| = 180° - |\angle CBX| - |\angle XCB| = 180° - 2\beta - 2\gamma$$

Velikost úhlu $|\angle BOC|$ zjistíme pro první, resp. druhý případ:

$$|\angle BOC| = 2\alpha$$

$$|\angle BOC| = 360^\circ - 2\alpha$$

Po sečtení nám pak vyjde, že $|\angle BXC| + |\angle BOC| = 180^\circ$, tedy body B, O, C, X leží na jedné kružnici. A protože bod O leží na ose strany BC, platí $|\angle CBO| = |\angle BCO|$ a tedy $|\angle BXO| = |\angle OXC|$, což jsme chtěli ukázat.



Obrázek 3: Případ pro tupoúhlý trojúhelník s tupým úhlem u B nebo C

Zbývá nám tedy poslední případ, tedy případ, kdy tupý úhel je u vrcholu B nebo C. Znova vypočítáme velikost úhlu při bodu X:

$$|\angle BXC| = 180^\circ - (2\beta + 2\gamma - 180^\circ) = 360^\circ - 2\beta - 2\gamma$$

Velikost středového úhlu je:

$$|\angle BOC| = 2\alpha = 360^\circ - 2\beta - 2\gamma$$

Vidíme, že v tomto případě platí $|\angle BOC| = |\angle BXC|$, tudíž se změnilo pořadí bodů B, C, O, X. Musíme si proto uvědomit, že v tomto případě leží bod O na ose úhlu $\angle CXC'$. Zde úhlu $\angle CXO$ a $\angle OXC'$ dopočítáme následovně:

$$|\angle CXO| = |\angle CBO| = \frac{180^\circ - |\angle BOC|}{2}$$

$$|\angle OXC'| = 180^\circ - |\angle OXC| - |\angle BXC| = 180^\circ - \frac{180^\circ - |\angle BOC|}{2} - |\angle BOC| = \frac{180^\circ - |\angle BOC|}{2}$$

Dokázali jsme tedy zadání pro všechny případy. Tím je důkaz u konce.