

1 Část a

Protože všechna přirozená čísla jsou rozdělena do aritmetických posloupností, pak je v nějaké z těchto posloupností zahrnut součin diferencí $d_1 d_2 \cdots d_n$. Nechť je tedy zahrnut v posloupnosti a_n a $a_k = d_1 d_2 \cdots d_n$. Pokud difference této posloupnosti je d_l , pak $a_k \equiv a_k + i d_l \equiv 0 \pmod{d_l}$, tedy veškeré čísla této posloupnosti jsou dělitelná její diferencí, tudíž i její první člen je dělitelný její diferencí. Tím je důkaz u konce.

2 Část b

Jako první si ukážeme, že pokud má nějaký pár z posloupností nesoudělné difference, pak nemůže být splněna druhá podmínka. Na to nám stačí formulovat soustavu kongruencí, která musí pro číslo x , které se bude nacházet v obou posloupnostech, platit:

$$\begin{aligned}x &\equiv a_1 \pmod{d_a} \\x &\equiv b_1 \pmod{d_b}\end{aligned}$$

Čínská zbytková věta nám pak říká, že tato soustava kongruencí má nekonečně mnoho řešení, pokud jsou čísla d_a a d_b jsou nesoudělná. Proto pokud chceme, aby tato soustava neměla řešení, musí být difference d_a a d_b nutně soudělná.

Z první podmínky následně nutně musí platit, že od určitého čísla musí být v posloupnostech zahrnuta všechna čísla. Tím pádem v nějaké posloupnosti se musí nacházet nějaký násobek součinu diferencí všech posloupností $k \cdot d_1 d_2 \cdots d_{2023}$. Z části a již víme, že všechny členy té posloupnosti, která obsahuje toto číslo, jsou dělitelná její diferencí. Proto aby platila třetí podmínka, musí být jak první číslo, tak difference, určité prvočíslo větší než 2023. Aby však platila druhá podmínka, musí být všechny difference soudělné a tedy být násobkem tohoto prvočísla.

Tedy už můžeme sporem ukázat, že pak nemůže platit první podmínka. Tehdy totiž nejmenší difference bude rovna tomuto prvočíslu větší než 2023, ale protože máme jen 2023 posloupností, nemůžeme nikdy do těchto posloupností zahrnout všechna čísla mezi dvěma členy posloupnosti s nejmenší diferencí, protože jejich počet bude větší než 2022. To tedy rozporuje s předpokladem, že platí první podmínka, tedy tyto posloupnosti nemůžou existovat.