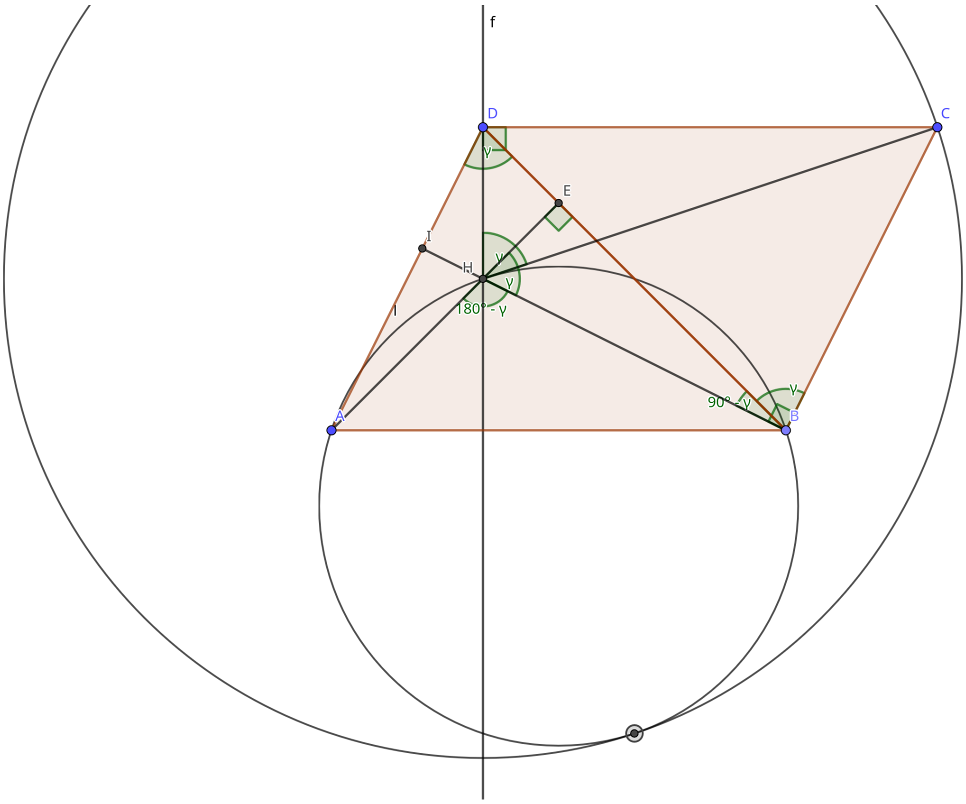

Obrázek 1: Konstrukce ze zadání s doplněnými úhly

Abychom dokázali výrok ze zadání, uvědomím si, že pokud průměr kružnice opsané ABH bude roven poloměru kružnice k, pak se kružnice opsaná ABH dotýká kružnice k. To platí díky tomu, že pokud průměr té kružnice opsané splňuje tuto podmínku, právě jeden bod té kružnice opsané, ten nejvzdálenější, bude vzdálen od bodu H o poloměr kružnice k, tím pádem bude ležet i na kružnici k.

Nechť $|\angle BDA| = |\angle DBC| = \gamma$. Abychom zjistili velikost úhlu $\angle BHA$, nejprve půjdeme přes pravý úhel mezi výškou na stranu AD a stranou BC, pak dopočítáme úhly v pravoúhlém trojúhelníku BEH a následně dopočítáme $|\angle BHA| = 180° - \gamma$.

Následně dopočítáme velikost úhlu $\angle DHC$ jednoduše tím, že čtyřúhelník HBCD je tětivový díky pravým úhlům u vrcholů B a D. Odtud pak $|\angle DHC| = \gamma$.

Teď už nám zbývá ukázat, že poloměr kružnice k a průměr kružnice opsané trojúhelníku ABH je stejně velký. Protože trojúhelník CDH je pravoúhlý s přeponou CH, zjištěním poloměru jeho kružnice opsané získáme velikost poloviny úsečky CH, která má stejnou velikost jako poloměr kružnice k. Pomocí sinové věty formulujeme vztahy:

$$2r_{ABH} = \frac{|AB|}{\sin(180° - \gamma)}$$

$$2r_{CDH} = \frac{|CD|}{\sin \gamma}$$

Protože $|AB| = |CD|$ a $\sin\gamma = \sin(180° - \gamma)$, jsou si poloměry těchto kružnic rovny. Z toho vyplývá, že průměr kružnice opsané trojúhelníku ABH je roven poloměru kružnici k. Q. E. D.