Nejprve dokážeme, že $n \geq a(n)$. Víme, že každé n můžeme zapsat jako:

$$x_0 \cdot 10^0 + x_1 \cdot 10^1 + \cdots + x_k \cdot 10^k,$$

kde každé x_i jsou cifry čísla. Protože pracujeme v desítkové soustavě, nerovnost ze zadání můžeme zapsat jako:

$$x_0 \cdot 10^0 + x_1 \cdot 10^1 + \cdots + x_k \cdot 10^k \geq x_0 \cdot x_1 \cdots x_k$$

Tuto nerovnost nebudeme řešit napřímo, protože jsme schopni jednoduše dokázat, že:

$$x_k \cdot 10^k \geq x_0 \cdot x_1 \cdots x_k$$

Víme, že pro každé x_i platí $0 \geq x_i \geq 9$, tím pádem také vždy platí, že $x_i < 10$. Z toho je už zřejmé, že nerovnost výše platí, protože na pravé straně je jen $k+1$ čitatelů.

A protože je zřejmé, že:

$$x_0 \cdot 10^0 + x_1 \cdot 10^1 + \cdots + x_k \cdot 10^k \geq x_k \cdot 10^k$$

Nerovnost $n \geq a(n)$ nutně platí.

Teď vyřešíme kvadratickou rovnici ze zadání. Víme, že musí platit nerovnost $0 \leq a(n) \leq n$ (cifry jsou vždy nezáporný), a tedy získáme nerovnice:

$$n^2 - 17n + 56 \geq 0$$
$$n^2 - 18n + 56 \leq 0$$

Celočíselná řešení první nerovnice jsou $\mathbb{Z} \cap (-\infty; 4\rangle \cap \langle 13; +\infty)$ a druhé nerovnice jsou $\mathbb{Z} \cap \langle 4; 14\rangle$. Tím se nám zúží počet možných řešení na $\{4,\ 13,\ 14\}$. Po vyzkoušení těchto hodnot najdeme jen jediné řešení, a to $n = 4$.

Tím je řešení u konce.