

Nechť je počátek komplexní roviny ve středu kružnice opsané sedmiúhelníku, která je jednotková, a bod $a = 1$. Jelikož pro orthocentrum trojúhelníku BCE platí $h = b + c + e$ a vrcholy sedmiúhelníku můžeme vyjádřit jako mocniny sedmé odmocniny z jedné ξ (pro ujasnění, $\xi = \xi_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ podle značení v seriálu), je tedy $h = \xi + \xi^2 + \xi^4$. Jednu z možných hodnot h jsme pak schopni zjistit tak, že zjistíme, jakou kvadratickou rovnici h splňuje:

$$\begin{aligned} h^2 &= (\xi + \xi^2 + \xi^4)^2 = \xi^2 + \xi^4 + \xi^8 + 2(\xi\xi^2 + \xi\xi^4 + \xi^2\xi^4) = \xi + \xi^2 + \xi^4 + 2(\xi^3 + \xi^5 + \xi^6) \\ &= h - 2(1 + \xi + \xi^2 + \xi^4) = h - 2(1 + h) = -h - 2 \end{aligned}$$

$$h^2 + h + 2 = 0$$

Tuhle kvadratickou rovnici nám zbývá vyřešit v komplexních číslech:

$$\begin{aligned} D &= 1^2 - 4 \cdot 2 = -7 \\ h &= \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

Máme tedy dvě různá řešení, ale protože jsou obě stejně vzdálená od bodu A , nemusí nás to zajímat a rovnou vypočítáme vzdálenost $|AH|$:

$$|AH| = |h - a| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{7}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = 2 = 2r$$

Protože jsme kružnici opsanou zvolili na začátku jako jednotkovou, dokázali jsme tvrzení ze zadání.