Z pozorování si můžeme všimnout, že po každém rozšíření je v posloupnosti vždy jedna devítka a pak každé číslo přibyde v posloupnosti o tolik, kolik bylo čísel větších než toto číslo před rozšířením. To můžeme vyjádřit soustavou rekurentních vztahů (počítám prvky od jedničky):

$$
\begin{gathered}
a_n = 1 \\
b_1 = 1 \qquad b_n = b_{n-1} + a_{n-1} \\
c_1 = 1 \qquad c_n = c_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-1} \\
d_1 = 1 \qquad d_n = d_{n-1} + c_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-1} \\
e_1 = 1 \qquad e_n = e_{n-1} + d_{n-1} + c_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-1} \\
f_1 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + e_{n-1} + d_{n-1} + c_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-1} \\
g_1 = 1 \qquad g_n = g_{n-1} + f_{n-1} + e_{n-1} + d_{n-1} + c_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-1} \\
h_1 = 1 \qquad h_n = h_{n-1} + g_{n-1} + f_{n-1} + e_{n-1} + d_{n-1} + c_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-1} \\
i_1 = 1 \qquad i_n = i_{n-1} + h_{n-1} + g_{n-1} + f_{n-1} + e_{n-1} + d_{n-1} + c_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-1}
\end{gathered}
$$

Tyto vztahy lze pak zjednodušit na:

$$
\begin{aligned}
& a_n = 1 \\
b_1 = 1 \qquad & b_n = b_{n-1} + a_n \\
c_1 = 1 \qquad & c_n = c_{n-1} + b_n \\
d_1 = 1 \qquad & d_n = d_{n-1} + c_n \\
e_1 = 1 \qquad & e_n = e_{n-1} + d_n \\
f_1 = 1 \qquad & f_n = f_{n-1} + e_n \\
g_1 = 1 \qquad & g_n = g_{n-1} + f_n \\
h_1 = 1 \qquad & h_n = h_{n-1} + g_n \\
i_1 = 1 \qquad & i_n = i_{n-1} + h_n
\end{aligned}
$$

Tudíž pro získání explicitního vyjádření se zdá, že budeme muset vyřešit spoustu sum. Pokud však prvky posloupností zapíšeme pomocí kombinačních čísel, dost si zjednodušíme práci:

$$
b_n = \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + ... + \binom{n-1}{0} = \binom{n}{1}
$$

$$
c_n = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + ... + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}
$$

Tudíž nás může napadnout, jestli dál $d_n = \binom{n+2}{3}$ atd. Zobecněný tvar tohoto vzorce dokážu indukcí, tedy budu chtít dokázat, že:

$$
\sum_{i=1}^{n} \binom{i+k-1}{k} = \binom{n+k}{k+1}
$$

Pro první sumy už jsem to ukázal, takže nám zbývá dokázat indukční krok. Nejprve si však sumu nalevo zapíšu vzestupně:

$$
\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + ... + \binom{n+k-1}{k}
$$

Teď dosadíme $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$. Protože obecně pro kombinační čísla platí $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (vztah, který umožňuje sestrojení Pascalova trojúhelníku), za součet prvních dvou členů můžeme dosadit $\binom{k+2}{k+1}$:

$$
\binom{k+2}{k+1} + \binom{k+2}{k} + \binom{k+3}{k} + ... + \binom{n+k-1}{k}
$$

Můžeme tedy pozorovat, že tento vztah můžeme používat opakovaně do té doby, dokud nezískáme konečnou sumu, tedy platí:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{k+1} + \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k}{k+1}$$

Což jsme chtěli dokázat. Teď pro počet jedniček potřebujeme získat správné k. Protože jsme pro devítku používali $k = 0$, pak tedy pro počet jedniček je $k = 8$, proto:

$$i_n = \binom{n+7}{8}$$

A protože tato posloupnost začíná od jedničky, počet jedniček po n-tém rozšíření je:

$$\binom{n+8}{8}$$

Z rekurzivního vztahu pro počet jedniček zároveň víme, že délka celé posloupnosti po n-tém rozšíření je stejný jako počet jedniček po $n+1$-tém rozšíření, a proto délka celé posloupnosti bude:

$$\binom{n+9}{8}$$

Tím jsme získali vše, co jsme chtěli.