1 Úloha 1

Pro pozitivně definitní matici $\mathbf{A}$ platí $\mathbf{u}^\top \mathbf{A}\mathbf{u} > 0$. Protože $\mathbf{u}^\top \mathbf{L}\mathbf{L}^\top \mathbf{u} = (\mathbf{L}^\top \mathbf{u})^\top \mathbf{L}^\top \mathbf{u}$, označme $\mathbf{v} = \mathbf{L}^\top \mathbf{u}$. Pak víme, že:

$$\mathbf{v}^\top \mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2$$

Tento výraz je nutně kladný pro všechny nenulové vektory a je nulový právě jen pro nulový vektor, tedy $\mathbf{L}\mathbf{L}^\top$ je opravdu pozitivně definitní.

2 Úloha 3

Víme, že $\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle \geq 0$. Z toho nutně vyplývá, že $\sqrt{\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle} = \|\mathbf{u}\| \geq 0$, jelikož druhá odmocnina je rostoucí funkce v nezáporných reálných číslech.

U druhého axiomu postupně upravíme výraz $\|\alpha\mathbf{u}\|$, čímž ho dokážeme:

$$\|\alpha\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \alpha\mathbf{u}|\alpha\mathbf{u}\rangle} = \sqrt{\alpha\langle \mathbf{u}|\alpha\mathbf{u}\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle} = \alpha\sqrt{\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle} = |\alpha| \cdot \|\mathbf{u}\|$$

U třetího axiomu nejprve umocníme obě strany, což můžeme, protože obě strany jsou kladné. Postupně pak upravíme do tvaru, který zjevně platí:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &\leq (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \\
\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}|\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\
\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}|\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\
\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle + 2\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\
\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\varphi + \|\mathbf{v}\|^2 &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\
2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\varphi &\leq 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \\
\cos\varphi &\leq 1
\end{aligned}$$

Toto zřejmě platí z definice kosinu, čímž jsme dokázali platnost třetího axiomu pro normu indukovanou skalárním součinem.