

Jako první si musíme uvědomit, že pokud v určitém  $n$ -písmenném slově je výskyt každého z podslov  $UO$  a  $UF$  sudý nebo naopak lichý, pak jich dohromady bude vždy sudý počet a naopak. Z toho je tedy zřejmé, že veškerá slova, kde je celkový výskyt těchto slov lichý, nemohou být započítána. Zároveň je zřejmé, že tato podslova se nemohou v žádném z podslov překrývat.

Tedy budeme uvažovat všechna slova, kde celkový počet podslov  $UF$  a  $UO$  je nenulové  $2m$  a kde se tato podslova nachází na stejných místech, jen se mění jejich poměr a jejich pořadí. Tehdy můžeme zanedbat, jaké písmena se nachází mimo tato podslova, protože pořadí a poměr těchto podslov nebude ovlivňovat zbylá písmena. Proto jediné, co stačí, je spočítat počet permutací těchto podslov pro každý jejich poměr a pak z nich zjistit počet slov s daným rozmístěním podslov, kde každý z těchto podslov se vyskytuje suděkrát nebo lichékrát.

Počet slov s daným rozmístěním podslov, kde každý z podslov se vyskytuje suděkrát, je:

$$\sum_{i=0}^m \frac{(2m - 2i + 2i)!}{2i! \cdot (2m - 2i)!} = \sum_{i=0}^m \binom{2m}{2i}$$

A počet podslov, kde se vyskytují lichékrát, je:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{(2m - (2i + 1) + 2i + 1)!}{(2i + 1)! \cdot (2m - (2i + 1))!} = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{2m}{2i + 1}$$

Když na tyto sumy budeme opakovaně aplikovat rekurentní vztah  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ , zjistíme, že obě tyto sumy se rovnají výrazu:

$$\sum_{i=0}^{2m-1} \binom{2m-1}{i}$$

To znamená, že když si zvolíme taková slova, kde se podslova  $UF$  a  $UO$  nachází na stejných místech a mění se jen pořadí těchto podslov a jejich poměr, pak z nich je počet slov, kde se každý z podslov vyskytuje suděkrát, stejný jako počet slov, kde se každý z podslov vyskytuje lichékrát. Což ale zároveň znamená, že toto znamená pro všechna rozmístění podslov, tudíž pro všechna slova, kde je výskyt těchto podslov nenulový, je počet slov, kde se každý z podslov vyskytuje suděkrát, stejný jako počet slov, kde se každý z podslov vyskytuje lichékrát.

Tedy když toto víme, musíme uvážit i taková slova, kde se tato podslova nenachází ani jednou. Těchto slov určitě existuje nenulové množství a řadí se mezi slova, kde se každý z podslov vyskytuje suděkrát. A to s předchozím poznatkem znamená, že počet slov, kde se každý z podslov vyskytuje suděkrát, je ostře větší než počet slov, kde se každý z podslov vyskytuje lichékrát, což jsme chtěli dokázat. Q. E. D.