Jako první upravíme polynom na levé straně rovnice na součin:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = p^n$$
$$(x^2 + 1)(x + 1) = p^n$$

Díky podmínkám ze zadání víme, že na pravé straně rovnice je přirozené číslo větší nebo rovno dvěma. Tím pádem x nemůže být ani záporné číslo, ani 0, proto x je nutně přirozené číslo. Díky tomu víme, že jak výraz $x^2 + 1$, tak výraz $x + 1$, je větší než jedna, proto oba tyto výrazy jsou dělitelné prvočíslem p. To můžeme formulovat jako soustavu kongruencí:

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$$
$$x + 1 \equiv 0 \pmod p$$

Z této soustavy víme, že platí:

$$x^2 + 1 \equiv x + 1 \equiv 0 \pmod p$$
$$x^2 \equiv x \pmod p$$
$$x(x - 1) \equiv 0 \pmod p$$

Z toho máme dvě řešení $x \equiv 0 \pmod p$ a $x \equiv 1 \pmod p$. Po dosazení je však zřejmé, že může platit jen řešení $x \equiv 1 \pmod p$, a to tehdy, když $p = 2$. Z toho plyne, že $p = 2$ a že číslo x je liché číslo.

Z toho tedy víme, že výrazy $x^2 + 1$ a $x + 1$ musí být mocniny dvojky větší než jedna. Protože víme, že x je liché číslo, provedeme substituci $x = 2y + 1$ a dosadíme ho do výrazu $x^2 + 1$:

$$x^2 + 1 = 2^a$$
$$(2y + 1)^2 + 1 = 2^a$$
$$4y^2 + 4y + 2 = 2^a$$
$$2y^2 + 2y + 1 = 2^{a-1}$$

Jak můžeme vidět, ve výsledné rovnici máme na levé straně liché číslo. A protože jediná lichá celočíselná mocnina dvojky je 1, musí $y = 0$ a tedy $x = 1$.

Tohle je už dost informací, abychom získali jediné možné řešení, které je $x = 1$, $p = 2$ a $n = 2$. Protože jsme všechna ostatní řešení vyřadili, důkaz je u konce. Q. E. D.