Celý tento důkaz směřujeme k důkazu, že průsečík kružnic ze zadání je ortocentrum H trojúhelníku vyznačené středními příčkami trojúhelníku ABC. Pokud totiž toto platí, pak tento bod leží na Eulerově přímce, stejně jako střed kružnice opsané $S_aS_bS_c$ těžiště, které je pro trojúhelníky ABC a $S_aS_bS_c$ stejné.

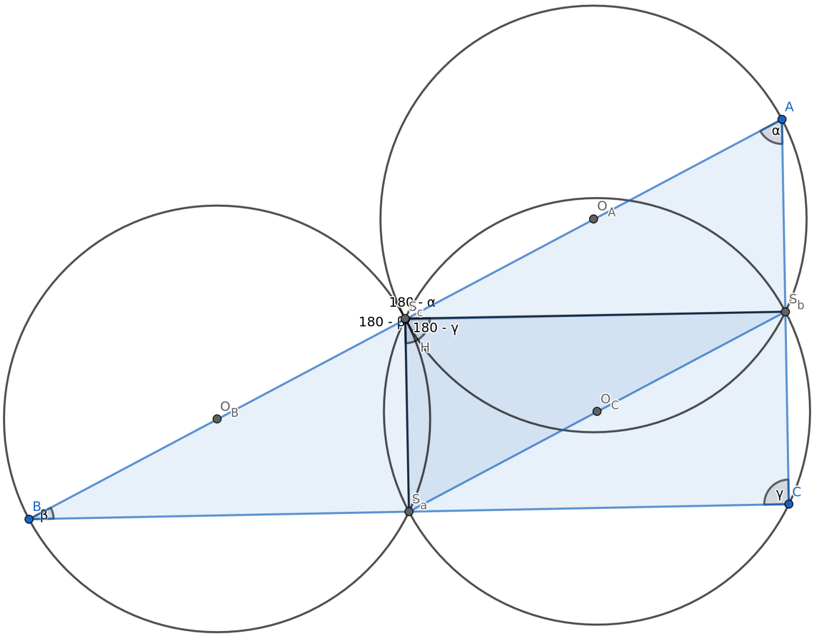
Jako první ukážeme, že kružnice opsané trojúhelníkům AS_bS_c, BS_aS_c a CS_aS_b se vždy po dvojicích protínají ve dvou bodech. Protože všechny tyto trojúhelníky jsou si shodné, pokud by se jedna dvojice kružnic protínala v jednom bodě, musí tyto trojúhelníky být pravoúhlé, protože jedna z jejich stran bude průměrem kružnice opsané (viz obr 1). Tento příklad ale rozebíráme jen pro ostroúhlé trojúhelníky, tedy každá dvojice kružnic opsaných musí mít právě dva průsečíky.

Teď dokážeme, že průnik těchto kružnic je opravdu jediný bod. Nechť kružnice opsané trojúhelníkům AS_bS_c, BS_aS_c se protínají kromě bodu S_c v bodě H. Přes tětivové čtyřúhelníky zjistíme, že $|\sphericalangle S_aHS_b| = 360° - |\sphericalangle S_aHS_c| - |\sphericalangle S_bHS_c| = 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta = 180° - \gamma$. Díky tomu z obvodových a středových úhlů víme, že bod H leží i na kružnici opsané trojúhelníku CS_aS_b a tedy se tyto kružnice opravdu protínají v jednom bodě.

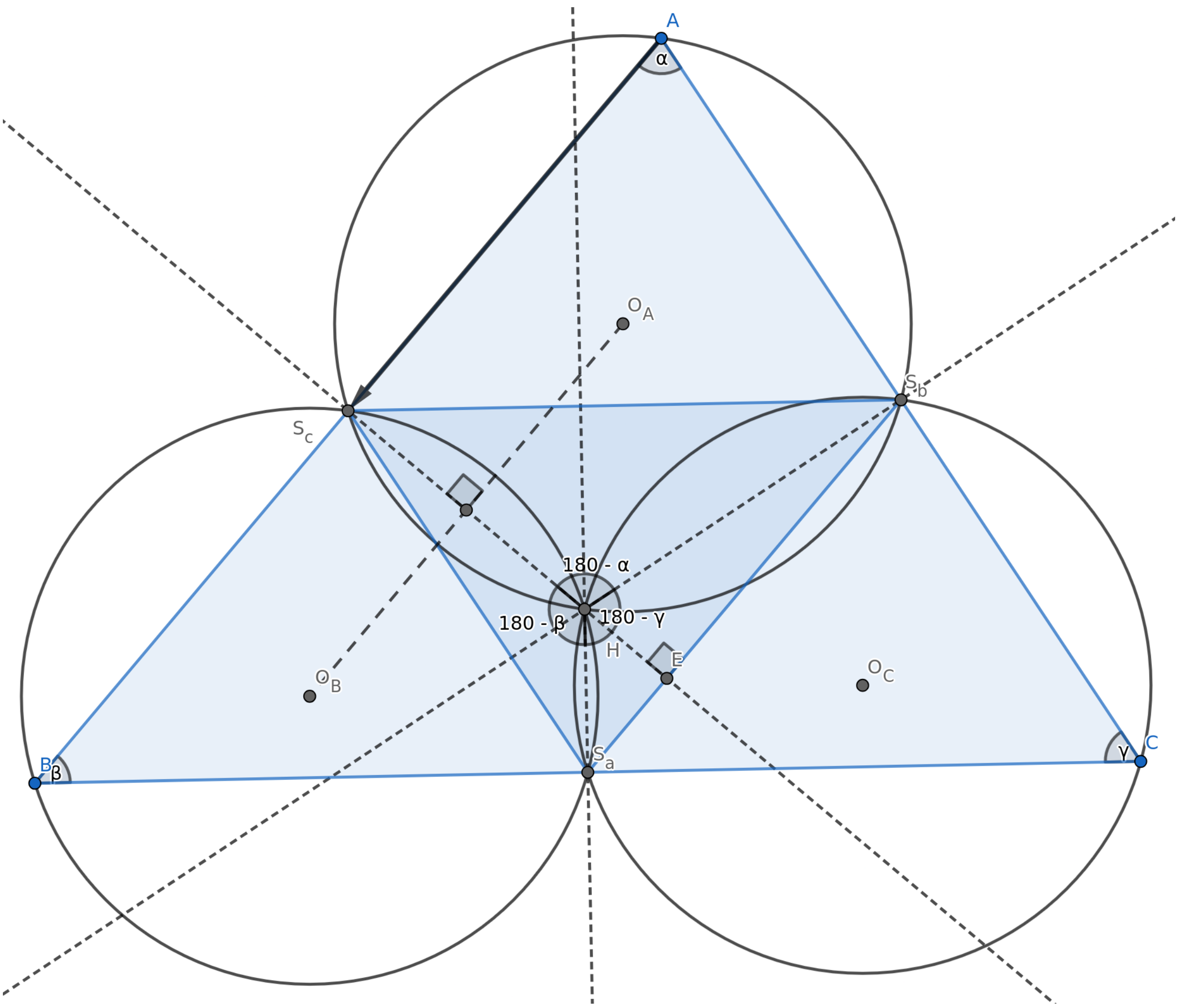
Teď nám zbývá dokázat, že průsečík těchto kružnic je opravdu ortocentrum trojúhelníku $S_aS_bS_c$. K tomu dokážeme, že každá přímka HS_a, HS_b, HS_c je výška v daném trojúhelníku. To ukáži důkazem, který je pro každou z přímek symetrický.

Nechť to tedy dokážeme pro přímku HS_c. Víme, že trojúhelník AS_bS_c lze zobrazit na trojúhelník BS_aS_c posunutím o vektor $\boldsymbol{AS_c}$. Z toho plyne, že spojnice středů těchto kružnic opsaných je rovnoběžná se stranou AB a S_aS_b. A protože je přímka HS_c chordálou těchto kružnic opsaných, je tato přímka kolmá na S_aS_b, což jsme chtěli ukázat.

Když tento postup zopakujeme pro všechny strany, dostaneme, že v průsečíku kružnic se protínají všechny výšky a tedy se jedná o ortocentrum trojúhelníku $S_aS_bS_c$. To jsme přesně chtěli dokázat, protože díky tomu tento bod leží na Eulerově přímce stejně jako střed kružnice opsané a těžnice. Q. E. D.



Obrázek 1: Případ pravoúhlého trojúhelníku



Obrázek 2: Pro důkaz, že se jedná o ortocentrum