

Z toho, že budeme měřit ohniskovou vzdálenost spojné čočky, víme, že budou platit následující rovnice (a je předmětová a a' je obrazová vzdálenost):

$$l = a + a'$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

Kombinací těchto dvou rovnic dostaneme rovnici kvadratickou, kterou vyřešíme:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{l-a}$$

$$a(l-a) = fl$$

$$-a^2 + al - fl = 0$$

$$a_1 = \frac{l - \sqrt{l^2 - 4fl}}{2} \quad a_2 = \frac{l + \sqrt{l^2 - 4fl}}{2}$$

Z řešení a_1 vidíme, že $l^2 - 4fl \geq 0$, a tedy:

$$\frac{l}{f} \geq 4$$

Obě řešení jsou jinak nutně kladná, protože $l > \sqrt{l^2 - 4fl}$.

Pro důkaz vzorce ze zadání nejprve dosadíme námi nalezená řešení do d :

$$d = |a_1 - a_2| = \left| \frac{l - \sqrt{l^2 - 4fl}}{2} - \frac{l + \sqrt{l^2 - 4fl}}{2} \right| = \sqrt{l^2 - 4fl}$$

Následně ji dosadíme do výrazu $\frac{l^2 - d^2}{4l}$:

$$\frac{l^2 - d^2}{4l} = \frac{l^2 - (l^2 - 4fl)}{4l} = \frac{4fl}{4l} = f$$

Čímž jsme vzorec ze zadání dokázali. Tím jsme dokončili teoretickou část.