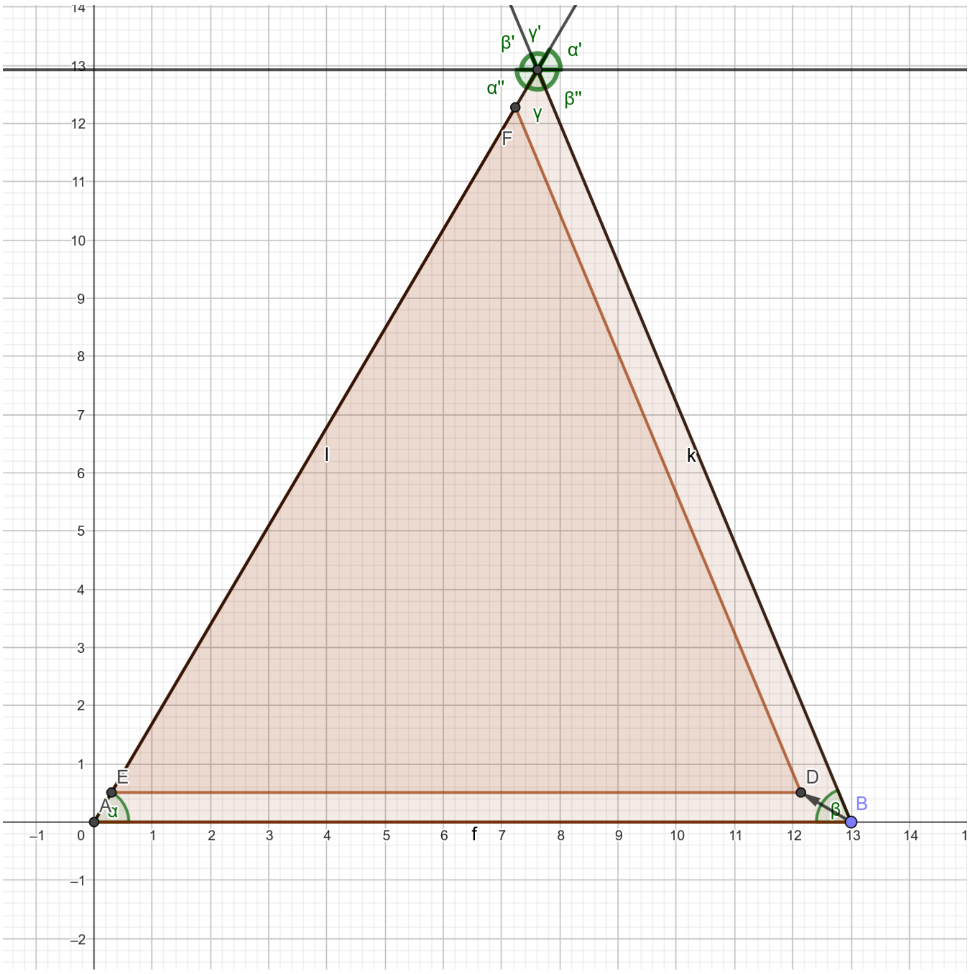

Obrázek 1: Konstrukce, při kterým je obsah průniku nejmenší

Jako první si musíme uvědomit, že průnik trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ je nutně těmto trojúhelníkům podobný. To můžeme ukázat pomocí věty uu – každá strana průniku je rovnoběžná s příslušnými stranami trojúhelníků ABC a $A'B'C'$, tím pádem se jejich úhly musí shodovat.

Teď budeme uvažovat případ, kdy když počátek vektoru dosadíme do jednoho z vrcholů A, B, C (dál budu bez újmy na obecnost uvažovat vrchol A), tak bude vektor mířit dovnitř trojúhelníku ABC. Pak jeden z vrcholů průniku bude A' a protější strana x bude ležet na úsečce BC. Proto bude obsah roven $S = \frac{1}{2} \cdot |x| \cdot |A';x|$. Z podobnosti zároveň víme, že každá strana a výška průniku trojúhelníků se zmenší k-krát, proto když zminimalizujeme $|A';x|$, tak zminimalizujeme i $|x|$. To nastane právě tehdy, když celý vektor bude ležet na výšce průniku z bodu A'. Proto v tomto případě je tedy nejmenší obsah průniku tehdy, kdy vektor leží na nejkratší výšce, když jeho počátek dáme do jednoho z vrcholů původního trojúhelníku.

Toto zjištění ale bude platit taky i v ostatních případech. Stačí nám jenom pozorování, že průnik u vektorů opačného směru je stejný, protože u opačných vektorů nám stačí prohodit A za A', B za B' a C za C' a dostaneme zase vektor, který míří do trojúhelníku. Tyto dva případy pokrývají veškeré případy, protože když přeneseme úhly, kde vektory v obou těchto případech leží, pokryjeme celých 360°. Pro nalezení nejmenšího průniku tedy musíme najít nejkratší výšku a tu zkrátit.

Obsah trojúhelníku ABC spočítáme jako:

$$S_{ABC} = \frac{1}{4}\sqrt{(13+14+15)(13+14-15)(13-14+15)(-13+14+15)} = 84$$

Nejkratší výška je pak výška vůči nejdelší straně, proto nejkratší výška je $v_{CA} = \frac{2S_{ABC}}{|CA|} = \frac{56}{5}$. Koeficient, o který se pak změní délka všech stran, bude $k = \frac{v_{CA}-1}{v_{CA}} = \frac{51}{56}$. Pak obsah průniku bude $S = k^2 S_{ABC} = \frac{7803}{112} \doteq 69{,}67$. Tento obsah je tedy nejmenší, který můžeme najít.