1 Úloha 1

Abychom našli požadované rovnice, musíme najít řešení soustavy rovnic níže:

$$6a - 3b + 2c = 0$$
$$-4a + 5b - 5c = 0$$
$$0a - 9b + 11c = 0$$

Pro to nám stačí najít RREF matice níže:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -9 & 11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{18} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tudíž $c \neq 0$ je parametr a $b = \frac{11}{9}c$ a $a = \frac{5}{18}c$. Z toho získáme:

$$\frac{5}{18}cx + \frac{11}{9}cy + cz = 0$$
$$\frac{5}{18}x + \frac{11}{9}y + z = 0$$

Získali jsme tedy rovnici roviny, ve které vektory leží.

2 Úloha 2

Víme, že když jsou generátory lineárně závislé, pak jeden z vektorů $\mathbf{v_i}$ lze vyjádřit jako:

$$\mathbf{v_i} = \alpha_1\mathbf{v_1} + \cdots + \alpha_{i-1}\mathbf{v_{i-1}} + \alpha_{i+1}\mathbf{v_{i+1}} + \cdots + \alpha_k\mathbf{v_k}$$

Kde alespoň některé koeficienty $\alpha_1, ..., \alpha_k$ jsou nenulové. Pak můžeme vyjádřit nulový vektor i jako:

$$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{v_1} + \cdots + \alpha_{i-1}\mathbf{v_{i-1}} - \mathbf{v_i} + \alpha_{i+1}\mathbf{v_{i+1}} + \cdots + \alpha_k\mathbf{v_k}$$

Tedy lineární kombinaci výše můžeme přičítat k vektoru ve span$G$ a dostaneme tentýž vektor. Tím jsme dokázali opačnou implikaci.

3 Úloha 3

Pro první množinu můžeme využít toho, že vektorový součin je definovaný ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$. Tedy řešením je:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

U druhé množiny dokážeme, že můžeme přidat vektory $(0, 0, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1)$. Tyto dva vektory jsou zřejmě na sobě nezávislý. Pak pokud je první vektor lineárně závislý na vektorech množiny M, musí matice níže mít řešení:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \\ 1 & -10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \\ 1 & -10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tedy vektor $(0, 0, 1, 0)$ je opravdu nezávislý. Stejně to uděláme pro druhý vektor:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 1 & -10 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tedy jsme ukázali, že oba tyto vektory jsou nezávislé na zbytku, tedy je lze doplnit do množiny M.

4 Úloha 4

Víme, že vektor $\mathbf{w}$ je lineární kombinací generátorů, tedy:

$$\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{v_n}$$

kde existuje $\alpha_k \neq 0$. Pak když vyměníme $\mathbf{v_k}$ za $\mathbf{w}$, umíme vyjádřit $\mathbf{v_k}$ jako:

$$\mathbf{v_k} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\mathbf{v_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\mathbf{v_2} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\mathbf{v_n} - \frac{1}{\alpha_k}\mathbf{w}$$

Tedy když máme nějakou lineární kombinaci vektoru v P, stačí nám do ní dosadit $\mathbf{v_k}$, abychom dostali lineární kombinaci s novými generátory, tedy nová množina generátorů generuje P.

5 Úloha 5

Pokud budeme vektory $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, ..., $\mathbf{u_m}$ přidávat po jednom, můžeme použít lemma o výměně. Z lemmatu o výměně víme, že v každém kroku, kdy provádíme výměnu s nějakým generátorem, existuje generátor, se kterým lze vektor vyměnit, a tedy tuto výměnu provedeme. Zbývá tedy dokázat, že vždy budeme moci tyto vektory vyměnit s původními generátory.

Pokud by v nějakém kroku nastalo, že by nějaký vektor $\mathbf{u_i}$ šel vyměnit jen s vektory $\mathbf{u_1}$, ..., $\mathbf{u_{i-1}}$, znamenalo by to, že $\mathbf{u_i}$ lze vyjádřit jako lineární kombinace těchto vektorů. To je však spor s tím, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé, a tedy vždy budeme moci tyto vektory vyměnit s původními generátory. Tím jsme dokázali Steinitzovu větu o výměně.

6 Úloha 6

Většinou budeme znát vyjádření bazických vektorů v kanonické bázi, proto tedy budeme schopni pro báze B,C snadno zkonstruovat matice ${}_{\text{kan}}[\mathbf{id}]_B$ a ${}_{\text{kan}}[\mathbf{id}]_C$, jelikož sloupce těchto matic odpovídají bazickým vektorům báze B, resp. C. A protože ${}_{\text{kan}}[\mathbf{id}]_B \cdot_B [\mathbf{id}]_{\text{kan}} = {}_{\text{kan}}[\mathbf{id}]_B \cdot ({}_{\text{kan}}[\mathbf{id}]_B)^{-1} = \mathbf{I}$, umíme získat převody z kanonické báze na báze B nebo C inverzí převodů z bází B,C do kanonické. Tedy:

$${}_B[\mathbf{id}]_C = {}_B[\mathbf{id}]_{\text{kan}} \cdot_{\text{kan}} [\mathbf{id}]_C = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \ldots & \mathbf{b_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{c_1} & \mathbf{c_2} & \ldots & \mathbf{c_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$${}_C[\mathbf{id}]_B = {}_C[\mathbf{id}]_{\text{kan}} \cdot_{\text{kan}} [\mathbf{id}]_B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{c_1} & \mathbf{c_2} & \ldots & \mathbf{c_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \ldots & \mathbf{b_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

7 Úloha 7

Nechť $\mathbf{u} = (2, 0, -1)^\top$. Jedna z podprostorů je určitě $\operatorname{span}(\{\mathbf{u}\})$, což je taky jediný jednodimenzionální podprostor obsahující tento vektor. Pak pro dvojrozměrné pak můžeme každý podprostor vyjádřit jako $\operatorname{span}(\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})$, kde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{k\mathbf{u}; k \in \mathbb{R}\}$, tedy vektor $\mathbf{v}$ je jakýkoli vektor, který je lineárně nezávislý na $\mathbf{u}$. Zbývají teď třírozměrné podprostory, z nichž jediná je $\mathbb{R}^3$.

8 Úloha 8

Nejprve dokážu, že celá čísla $\mathbb{Z}$ se sčítáním a násobením nejsou těleso. Pokud by se totiž jednalo o těleson, pak pro každé celé číslo x existuje takové y, že $x \cdot y = 1$, což ale zřejmě není pravda (stačí zkusit třeba za x dosadit 2). Proto $\mathbb{Z}^n$ nad $\mathbb{Z}$ není lineární prostor.

Protože množiny $\mathbb{Q}^n$ nad $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$ splňují všechna pravidla lineárního prostoru a její operace jsou uzavřené, jedná se o lineární prostory. Avšak množina $\mathbb{Q}^n$ nad $\mathbb{R}$ není uzavřená množina, proto se o lineární prostor nejedná (stačí např. vynásobit vektor číslem π).