

Abychom uvážili dobu pádu kapaliny, musíme zjistit, v jaký čas vytekl z kohoutku poslední voda, která stihla dopadnout v čase  $t$ . Protože doba pádu je  $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ , pak poslední voda vytekla z kohoutku v čase  $t - \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$  a proto:

$$a^2 h = Q \left( t - \sqrt{2} \sqrt{\frac{H-h}{g}} \right)$$

$$Qt - a^2 h = Q \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

Teď budeme muset umocnit obě strany. Protože to může přinést řešení, které ale jsou neplatná, musíme uhlídat, aby řešení splnilo podmínku  $Qt \geq ha^2$ . Po umocnění dostaneme kvadratickou rovnici:

$$(Qt - a^2 h)^2 = \frac{2Q^2(H-h)}{g}$$

$$a^4 h^2 + \frac{2Q^2 h}{g} - 2Qa^2 ht + Q^2 t^2 - \frac{2HQ^2}{g} = 0$$

Řešením této kvadratické rovnice pak jsou:

$$\left[ h = \frac{Qa^2 gt - Q^2 - Q\sqrt{2Ha^4 g - 2Qa^2 gt + Q^2}}{a^4 g}, h = \frac{Qa^2 gt - Q^2 + Q\sqrt{2Ha^4 g - 2Qa^2 gt + Q^2}}{a^4 g} \right]$$

Tyto řešení platí pro  $t$  v intervalu  $\left\langle \sqrt{\frac{2H}{g}}; \frac{a^2 h}{Q} \right\rangle$ , výrazy pod odmocninou budou vždy kladná. Teď musíme zjistit, jaké z těchto řešení je to správné. Nejprve vyzkoušíme první řešení:

$$Qt \geq \frac{Qa^2 gt - Q^2 - Q\sqrt{2Ha^4 g - 2Qa^2 gt + Q^2}}{a^2 g}$$

$$Qt \geq Qt - \frac{Q^2}{a^2 g} - \frac{Q\sqrt{2Ha^4 g - 2Qa^2 gt + Q^2}}{a^2 g}$$

$$0 \leq \frac{Q^2}{a^2 g} + \frac{Q\sqrt{2Ha^4 g - 2Qa^2 gt + Q^2}}{a^2 g}$$

Tato nerovnost nutně platí, tudíž první řešení je správné. Teď zkusíme druhé řešení:

$$Qt \geq \frac{Qa^2 gt - Q^2 + Q\sqrt{2Ha^4 g - 2Qa^2 gt + Q^2}}{a^2 g}$$

$$Qt \geq Qt - \frac{Q^2}{a^2 g} + \frac{Q\sqrt{2Ha^4 g - 2Qa^2 gt + Q^2}}{a^2 g}$$

$$\frac{Q^2}{a^2 g} \geq \frac{Q\sqrt{2Ha^4 g - 2Qa^2 gt + Q^2}}{a^2 g}$$

$$Q^2 \geq Q\sqrt{2Ha^4 g - 2Qa^2 gt + Q^2}$$

Tato nerovnost v čase  $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$  neplatí, proto jediné řešení je tedy:

$$h(t) = Q \frac{a^2 gt + Q - \sqrt{2Qa^2 gt + Q^2}}{a^4 g}$$

kdy  $t \in \left\langle \sqrt{\frac{2H}{g}}; \frac{a^2 h}{Q} \right\rangle$ . Pro  $t < \sqrt{\frac{2H}{g}}$  je pak  $h(t) = 0$ .