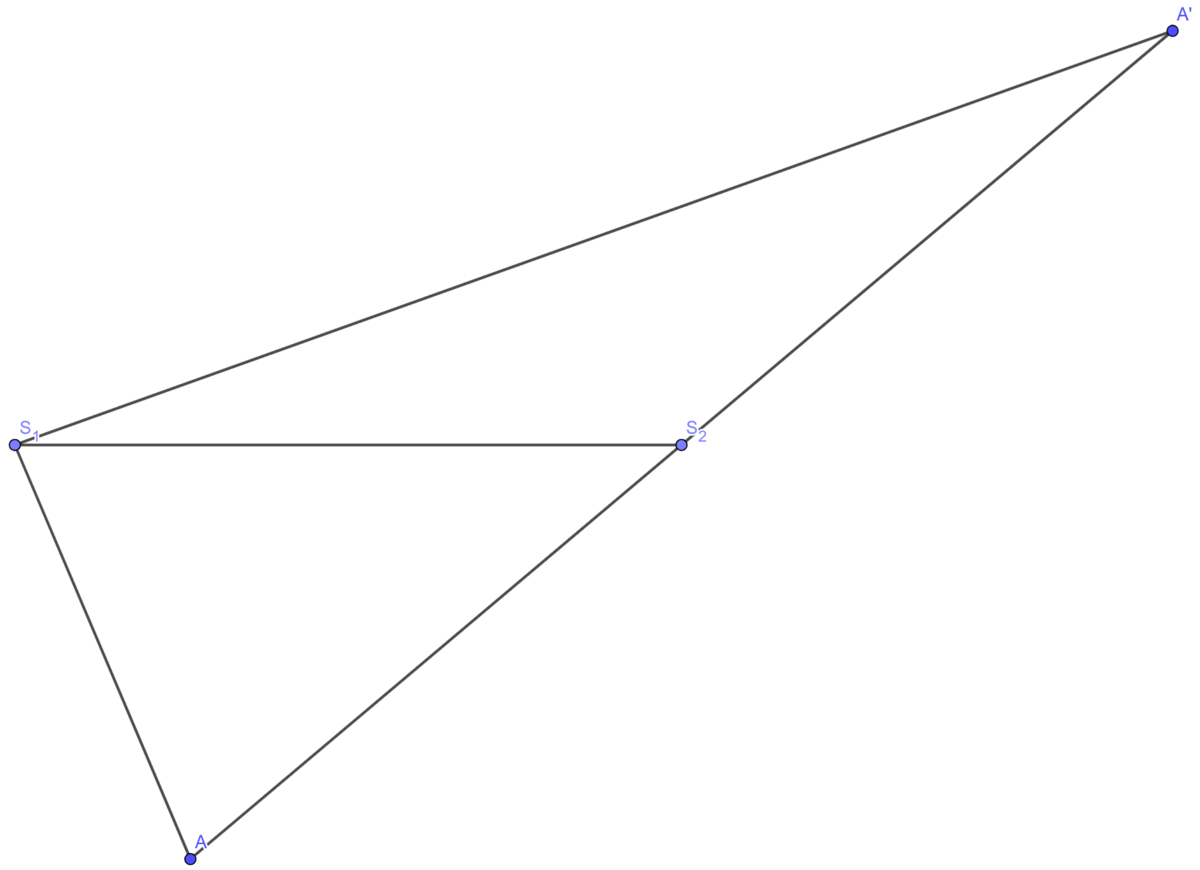

Obrázek 1: Konstrukce toho, když zobrazíme bod přes vzdálenější střed

Nejprve dokážu, že pokud množina a její středy leží na přímce, tak nemůže být množina omezená. Nechť máme bod A a dva středy S_1, S_2 (pokud je jich více, vybereme dva). Pak pokud $|AS_1| > |AS_2|$, pak pro obraz A' přes střed S_1, který se nutně v této množině nachází, platí, že $|A'S_1| + |S_1S_2| = |A'S_2| > |AS_1|$, tedy se obraz vzdálil od středů souměrnosti. Ale tento postup můžeme zopakovat pro každý obraz, který se bude pak vzdalovat do nekonečna. To je ale ve sporu, že množina je omezená. Tím jsme ošetřili tento případ a můžeme dokázat případy, kdy vybrané středy a bod A budou tvořit trojúhelník.

Pro tento důkaz jako první ukážu, že pokud nějaký bod A zobrazíme přes vzdálenější střed souměrnosti S_2, pak pro obraz A' bude platit $|S_1A| \leq |S_2A| < |S_1A'|$.

Pokud $|S_1A| \leq |S_2A|$, pak taky $|\sphericalangle AS_2S_1| \leq |\sphericalangle S_2S_1A|$, a proto úhel $\sphericalangle AS_2S_1$ je nutně ostrý. Tím pádem úhel $\sphericalangle S_1S_2A'$ je úhel tupý a tedy je nutně větší než úhly $\sphericalangle S_2A'S_1$ a $\sphericalangle A'S_1S_2$. Z toho tedy platí, že $|S_1A'| > |S_2A'|$, a protože $|S_2A| = |S_2A'|$, také platí $|S_1A'| > |S_2A|$. Tím jsme dokázali tvrzení výše.

Teď dokážeme sporem, že omezená množina nemůže mít více než jeden střed. Nechť bod A je součástí této množiny a S_1, S_2 jsou dva ze středů souměrnosti této množiny. Pak když získáme obraz přes vzdálenější střed souměrnosti A', který je nutně součástí této množiny, pak pomocí tvrzení dokázané výše ukážeme, že bod A' bude vzdálenější od středů souměrnosti než bod A. Tento postup ale můžeme opakovat donekonečna a dostaneme vždy bod, který bude vzdálenější od středů souměrností. A to je spor s tím, že množina je omezená. Tím je tedy celý důkaz u konce.