

Víme, že první číslo $a_1 = k$, kde $k \in \mathbb{N}$, a každé další číslo $a_i = \kappa_i \cdot \sum_{j=1}^{i-1} a_j$, kde $\kappa_i \in \mathbb{N}$ je koeficient, kterým je násoben suma předchozích čísel. Protože se nám bude hodit vyjádřit každé z čísel na tabuli v součinném tvaru, dokážeme, že pro $i > 2$ umíme tato čísla i vyjádřit jako $a_i = k\kappa_i \cdot \prod_{j=2}^{i-1} (\kappa_j + 1)$. To dokážeme indukcí.

Víme, že pro třetí číslo platí $a_3 = \kappa_3(a_2 + a_1) = \kappa_3(\kappa_2 k + k) = k\kappa_3(\kappa_2 + 1)$, tedy můžeme rovnou jít na důkaz indukčního předpokladu:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \kappa_{n+1} \cdot \sum_{i=1}^n a_i = \kappa_{n+1} a_n + \kappa_{n+1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i = \kappa_{n+1} a_n + \kappa_{n+1} \cdot \frac{a_n}{\kappa_n} = \\ &= k\kappa_{n+1}\kappa_n \prod_{j=2}^{n-1} (\kappa_j + 1) + k\kappa_{n+1} \prod_{j=2}^{n-1} (\kappa_j + 1) = k\kappa_{n+1} \prod_{j=2}^n (\kappa_j + 1) \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali indukční předpoklad, jak jsme chtěli.

Teď předpokládejme, že čísel na tabuli je m . Pak pokud by následující člen měl koeficient $\kappa_{m+1} = 1$, bude platit:

$$a_{m+1} = k \prod_{j=2}^m (\kappa_j + 1) = 2024$$

Abychom tedy dosáhli co největšího množství čísel na tabuli, zvolíme si $k = 1$. Poněvadž žádný další člen nemůžeme nastavit tak, aby byl roven jedné, a rozklad na prvočísla čísla 2024 je $2^3 \cdot 11 \cdot 23$, je tedy největší možný počet čísel na tabuli $m = 6$. Takovými čísly, které splňují zadání, jsou například 1, 10, 11, 22, 44, 1936.

Tím je důkaz u konce.