1 Problém 1

Jako první zmíním typické příklady zobrazení, které nemůžou být lineární. Nejjednodušší příklad nelineárního zobrazení je posunutí. U ní lze její nelinearita dokázat jednodušše. Otočení ocasu je taky nelineární, protože by muselo nutně dojít také k posunutí. Nelinearitu posunutí si dokážeme.

Nechť je posunutí zobrazení $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{c}$, kde $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ je konstanta. Pro lineární zobrazení platí $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, proto za předpokladu, že posunutí je lineární zobrazení, musí platit $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{c} = \mathbf{x}+\mathbf{y}+2\mathbf{c}$. To však nemůže platit, čímž jsme dokázali, že se nejedná o lineární zobrazení.

Dále ukážu zobrazení, které si můžeme představit jako úpravu, když přehneme průhlednou fólii s obrázkem podél x-ové osy, tedy zobrazení, které všechny vektory se zápornou y-souřadnicí překlopí přes x-ovou osu. Toto zobrazení můžeme vyjádřit jako $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_1, |\mathbf{x}_2|)$. A protože absolutní hodnota není lineární funkce, nemůže tato funkce být lineární zobrazení. Dalšími příklady můžou být nějaké kvadratické a jiné nelineární funkce.

Zbytek zobrazení zmíněných zadání splňují podmínky pro lineární zobrazení, a to $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ a $f(a\mathbf{x}) = af(\mathbf{x})$. Tyto vlastnosti říkají, že počátek zůstane vždy na stejném místě a že při přičtení stejného vektoru se vektor změní stejně.

2 Úloha 2

Výsledky jsou vypsané postupně z leva doprava po řádcích.

$$\begin{pmatrix} 24 & -60 \\ -4 & -90 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} 18 & -13 \\ 39 & 16 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & 0 & 4 \\ 8 & 6 & 19 & 0 & 14 \\ 13 & 11 & 29 & 0 & 24 \\ 18 & 16 & 39 & 0 & 34 \\ 23 & 21 & 49 & 0 & 44 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} 21 & 12 \\ 31 & 12 \\ 40 & 57 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 42 & 44 & 46 & 48 & 50 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix} \tag{6}$$

3 Úloha 3

Pro vyřešení této rovnice nám stačí obě rovnice vynásobit takovou inverzní maticí, abychom pak dostali explicitní vzorec pro matici $\mathbf{A}$. To si můžeme dovolit, jelikož tyto matice nejsou singulární.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 19 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 19 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 19 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

A to je tedy řešení.

4 Úloha 4

Řešením je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times l}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times l}$.

5 Úloha 5

Když si tuto úlohu vyjádříme jako rovnici:

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Tak tuto rovnici můžeme upravit na:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 17 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}$$