

Protože předpokládáme, že  $A \gg d^2$ , je elektrické pole mezi deskami kondenzátoru homogenní. A poněvadž umíme zjistit velikost elektrické intenzity v blízkosti desky, zjistíme velikost elektrické intenzity mezi deskami takto:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} = \frac{Q}{2A\varepsilon}$$

Na desky působí dvě síly – elektrostatická a síla pružiny. Tyto síly působí přímo proti sobě a musí být v rovnováze. Z toho získáme rovnici, ze které můžeme vyjádřit výchylku pružiny  $y$  vzhledem k velikosti náboje  $Q$ :

$$\begin{aligned} EQ &= ky \\ \frac{Q^2}{2A\varepsilon} &= ky \\ y &= \frac{Q^2}{2A\varepsilon k} \end{aligned}$$

Práce, kterou musíme vykonat k nabití kondenzátoru, se převede na energii obou pružin a na energii kondenzátoru. Proto platí:

$$W = 2 \cdot \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^4}{4A^2\varepsilon^2k} + \frac{Q^2(d - \frac{Q^2}{A\varepsilon k})}{2A\varepsilon} = \frac{Q^4}{4A^2\varepsilon^2k} + \frac{Q^2(dA\varepsilon k - Q^2)}{2A^2\varepsilon^2k} = \frac{-Q^4 + 2Q^2dA\varepsilon k}{4A^2\varepsilon^2k}$$

Pro nalezení maximálního napětí nejprve vyjádříme vzorec napětí  $U$  vzhledem k náboji  $Q$ . Vyjdu přitom z definice kapacity:

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q(d - 2y)}{A\varepsilon} = \frac{QdA\varepsilon k - Q^3}{A^2\varepsilon^2k}$$

Tento vzorec můžeme následně zderivovat vzhledem k  $Q$ :

$$\frac{dU}{dQ} = \frac{dA\varepsilon k - 3Q^2}{A^2\varepsilon^2k}$$

Extrémy jsou tedy v bodech, kdy:

$$\begin{aligned} \frac{dA\varepsilon k - 3Q^2}{A^2\varepsilon^2k} &= 0 \\ dA\varepsilon k &= 3Q^2 \\ Q &= \pm \sqrt{\frac{dA\varepsilon k}{3}} \end{aligned}$$

Nalezli jsme tedy dva extrémy, z nichž jeden je pro naše účely neplatný, tedy musíme jen ukázat, že ten extrém v kladných hodnotách je maximum a že kondenzátor můžeme nabít nábojem o dané velikosti.

Fakt, že extrém v kladných hodnotách je maximum v kladných hodnotách, lze ukázat jednoduše na grafu derivace funkce  $U(Q)$ . Jejím grafem je zřejmě parabola ve tvaru "kopce" (má před nejvyšším členem negativní koeficient) a už jsme zjistili, že má dva různé kořeny, proto tedy nejdříve klesá, chvíli vyroste a pak zase klesá. V bodech, kdy se funkce mění z rostoucí na klesající a naopak, máme nalezené extrémy. Anžto kladný extrém je druhý v pořadí, musí tedy nutně být maximem v kladných číslech.

Teď musíme zkontrolovat, zda vůbec můžeme nabít kondenzátor tímto nábojem. Víme, že  $d > 2y$ , z čehož dostaneme:

$$\begin{aligned} d &> 2 \cdot \frac{Q^2}{2A\varepsilon k} = \frac{Q^2}{A\varepsilon k} \\ \sqrt{dA\varepsilon k} &> Q \end{aligned}$$

Což když dosadíme námi nalezený náboj, kdy je napětí maximální, dostaneme:

$$\begin{aligned} \sqrt{dA\varepsilon k} &> \sqrt{\frac{dA\varepsilon k}{3}} \\ 1 &> \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Tato nerovnice platí, tedy nám zbývá jen dosadit tuto hodnotu náboje do vzorce pro napětí:

$$U_{max} = \frac{\sqrt{\frac{dA\varepsilon k}{3}} \cdot dA\varepsilon k - \left(\sqrt{\frac{dA\varepsilon k}{3}}\right)^3}{A^2\varepsilon^2k} = \left(\sqrt{\frac{dA\varepsilon k}{3}} \cdot dA\varepsilon k\right) \cdot \frac{1 - \frac{1}{3}}{A^2\varepsilon^2k} = \frac{2d \cdot \sqrt{dA\varepsilon k}}{3\sqrt{3} \cdot A\varepsilon}$$

Tím jsme našli maximální možné napětí, který může mít tento rezistor.