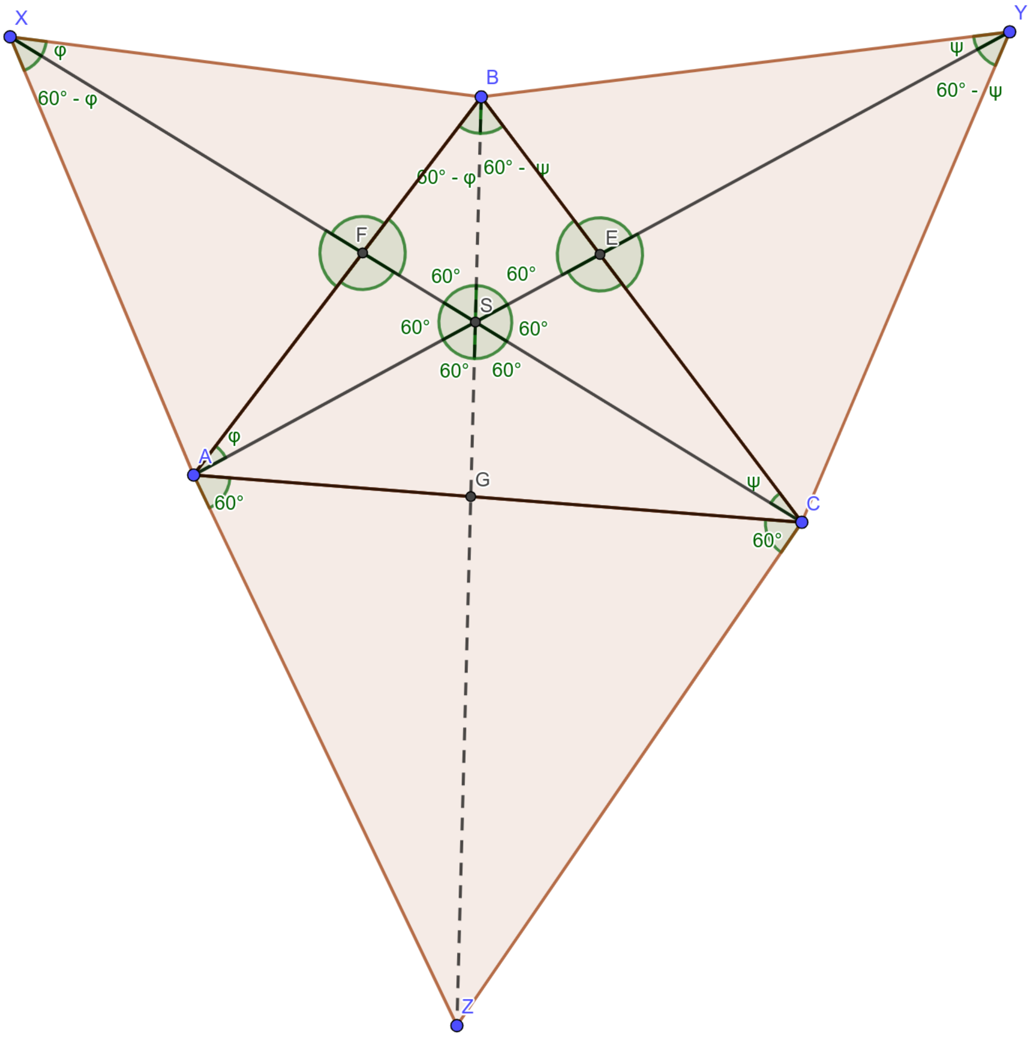

Obrázek 1: Konstrukce úlohy s vyznačenými úhly

V zadání po nás chtějí, abychom dokázali, že se úsečky AY,BZ,CX protínají v jednom bodě. Tehdy ale tento průsečík musí být vevnitř trojúhelníku ABC, což ale není v některých konfiguracích pravda. Proto po zbytek úlohy budu předpokládat, že dvě z těchto úseček mají průsečík vevnitř trojúhelníku.

Nechť průsečík AY a CX je S. Díky připsaným rovnostranným trojúhelníkům platí, že BXC a BAY jsou shodné trojúhelníky, proto tehdy $|\sphericalangle BXC| = |\sphericalangle BAY| = \varphi$ a $|\sphericalangle XCB| = |\sphericalangle BYA| = \psi$. Pak podle věty uu platí $FBX \sim FSA$ a $EYB \sim ECS$, proto $|\sphericalangle ASF| = |\sphericalangle ESC| = 60°$. Tedy aby bod S byl vevnitř trojúhelníku, každý úhel trojúhelníku ABC je menší než 120°. Pokud ale BÚNO platí, že $|\sphericalangle ABC| = 120°$, pak $B = S$ a tím pádem se úsečky nutně protnou v bodě B.

Z podobnosti $FBX \sim FSA$, víme, že $\frac{|BF|}{|FS|} = \frac{|XF|}{|FA|}$ a tedy $\frac{|BF|}{|XF|} = \frac{|FS|}{|FA|}$. A protože $|\sphericalangle XFA| = |\sphericalangle BFS|$, podle věty sus platí $FXA \sim FBS$. Analogicky dokážeme i podobnost $ECY \sim ESB$. Z těchto podobností pak zjistíme velikosti úhlů $|\sphericalangle FSB| = |\sphericalangle BSE| = 60°$.

Teď nám tedy zbývá zjistit velikosti úhlů $|\sphericalangle CSZ|$ a $|\sphericalangle ZSA|$. Ze zbývajících úhlů s vrcholem v S dopočítáme $|\sphericalangle CSA| = 120°$. A protože $|\sphericalangle AZC| = 60°$, čtyřúhelník $SAZC$ je tětivový, proto $|\sphericalangle CAZ| = |\sphericalangle CSZ| = 60°$ a $|\sphericalangle ZCA| = |\sphericalangle ZSA| = 60°$.

A poněvadž nám vyšlo, že $|\sphericalangle BSZ| = |\sphericalangle BSE| + |\sphericalangle ESC| + |\sphericalangle CSZ| = 180°$, bod S leží na úsečce BZ a tedy všechny úsečky se protínají v jednom bodě. Protože ve zbývajících konfiguracích se některé z těchto úseček neprotnou vůbec, je tímto důkaz u konce.