

Jako první dokážu, že když platí  $abc = 1$ , tak je trojice záhadná. Tehdy cyklicky platí, že  $a^2 = \frac{1}{b^2}c^2$ , což když dosadíme, dostaneme:

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2c^2} + 2ab} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2a^2} + 2bc} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2b^2} + 2ca} = \\ & = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} + \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc} + \sqrt{c^2 + a^2 + 2ca} = a + b + b + c + c + a = 2(a + b + c) \end{aligned}$$

Teď sporem dokážu, trojice je záhadná právě tehdy, když  $abc = 1$ . Předpokládejme tedy BÚNO, že  $abc < 1$ . Protože čísla  $a, b, c$  jsou kladná čísla a kvadratická funkce a odmocnina jsou v kladných číslech definovány a rostoucí, platí:

$$\begin{aligned} a &< \frac{1}{bc} \\ c^2 + a^2 + 2ca &< c^2 + \frac{1}{c^2b^2} + 2ca \\ \sqrt{c^2 + a^2 + 2ca} &< \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2b^2} + 2ca} \end{aligned}$$

Analogicky pak můžeme získat zbývající dvě nerovnosti, které když sečteme, dostaneme:

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2c^2} + 2ab} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2a^2} + 2bc} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2b^2} + 2ca} > \\ & > \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} + \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc} + \sqrt{c^2 + a^2 + 2ca} = 2(a + b + c) \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že rovnost ze zadání v tomto případě nikdy nemůže platit.

Protože v případě  $abc > 1$  je postup podobný, dokázali jsme, že trojice je záhadná právě tehdy, když  $abc = 1$ . A protože  $abc = cba = 1$ , trojice  $(c, b, a)$  je taky záhadná, což jsme chtěli dokázat.