

Víme tedy, že tento polynom můžeme vyjádřit jako:

$$x^6 + bx^5 + cx^4 - cx^2 - bx - 1$$

Můžeme si ale všimnout, že tento polynom má kořeny 1,  $-1$ , proto lze tento polynom rozložit na:

$$(x^4 + bx^3 + (c+1)x^2 + bx + 1)(x+1)(x-1)$$

Tudíž jsme dostali další reciproký polynom, ale čtvrtého stupně. Necht' je tento nový polynom  $Q(x)$ . Zároveň pokud by kořen  $Q(x)$  byla 1, musela by zároveň i  $-1$  být kořenem  $Q(x)$ , aby se zachovala parita reciprokých kořenů, a naopak. Tehdy ale součet dvojnásobných kořenů by byl 0, tím pádem ani 1, ani  $-1$ , nemohou být dvojnásobnými kořeny. Tedy  $Q(x)$  má oba dvojnásobné kořeny, které má zadaný polynom, tím pádem těmi dvojnásobnými kořeny musí být čísla  $a$ ,  $1/a$  pro nějaké  $a$ , které můžeme snadno najít:

$$a + \frac{1}{a} = -4$$

$$a^2 + 1 = -4a$$

$$a^2 + 4a + 1 = 0$$

$$a = \pm\sqrt{3} - 2$$

Obě řešení  $a$  jsou si navzájem reciproké, tedy hledaný polynom umíme vyjádřit jako:

$$(x - (-\sqrt{3} - 2))^2(x - (\sqrt{3} - 2))^2(x+1)(x-1) = x^6 + 8x^5 + 17x^4 - 17x^2 - 8x - 1$$

Tento polynom splňuje všechny podmínky ze zadání, tedy se jedná opravdu o něj. Našli jsme tedy hledaný polynom.