Pokud ukážeme, že pro každý pár a, b platí, že $a + b \leq \text{lcm}(a, b) + \text{gcd}(a, b)$, součet se nikdy nezmenší. A protože původní součet je $\frac{2025 \cdot 2024}{2} > 2 \cdot 10^6$, bude nutně platit podmínka ze zadání.

Protože $ab = \text{lcm}(a, b) \cdot \text{gcd}(a, b)$, po dosazení dostaneme:

$$a + b \leq \frac{ab}{\text{gcd}(a, b)} + \text{gcd}(a, b)$$

Když provedeme substituci $x = \text{gcd}(a, b)$, postupnými úpravami dostaneme:

$$\begin{gathered} a + b \leq \frac{ab}{x} + x \\ x(a + b) \leq ab + x^2 \\ x^2 - (a + b)x + ab \geq 0 \\ (x - a)(x - b) \geq 0 \end{gathered}$$

Tato rovnice nebude platit jedině tehdy, když $\min(a, b) < \text{gcd}(a, b) < \max(a, b)$, což ale nikdy nemůže nastat, protože $\text{gcd}(a, b) \leq \min(a, b)$ (to vyplývá ze samotné definice nejmenšího společného dělitele). Tím jsme dokázali, že tato nerovnice vždy platí a tedy i tvrzení ze zadání.