1 Úkol 1 - Matice přechodu

Abychom vyjádřili matice ${}_B[\mathbf{id}]_C$ a ${}_C[\mathbf{id}]_B$, musíme vyjádřit bazické vektory báze B v bázi C a naopak. To však nebude těžké, protože všechny bazické vektory jsou kvadratickými funkcemi či funkcemi nižších tříd.

Začneme nejprve maticí ${}_C[\mathbf{id}]_B$. Pro vyjádření této matice musíme zjistit funkční hodnoty každého bazického vektoru báze B v bodech -1, 0, 1. Pak dostaneme:

$$ {}_C[\mathbf{id}]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} $$

Matici ${}_B[\mathbf{id}]_C$ vyplníme naopak koeficienty bazických vektorů báze C, proto bude vypadat takto:

$$ {}_B[\mathbf{id}]_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} $$

Když už máme všechny přechody, jsme schopni přechod ${}_C[g]_C$ převést na ${}_B[g]_B$:

$$ {}_B[g]_B = {}_B[\mathbf{id}]_C \cdot {}_C[g]_C \cdot {}_C[\mathbf{id}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Toto zobrazení by šlo jednoduše odvodit, když si vybavíme vrcholový tvar a chování paraboly v závislosti na parametrech. Abychom dosáhli zrcadlení paraboly o osu y, musí platit následující soustava rovnic:

$$ c - \frac{b^2}{4a} = c' - \frac{b'^2}{4a'} $$
$$ -\frac{b}{2a} = \frac{b'}{2a'} $$

Protože parametr a ovlivňuje tvar paraboly a nikoli jeho polohu, musí zůstat stejný, proto dosadíme $a = a'$. Tím dostáváme:

$$ c - \frac{b^2}{4a} = c' - \frac{b'^2}{4a} $$
$$ -b = b' $$

Po dosazení druhé rovnice do první dostáváme $c = c'$. Proto parametry zrcadlově otočené kvadratického funkce o osu y jsou $a' = a$, $b' = -b$, $c' = c$. Tím jsme dostali úplně stejný výsledek jako výše.

2 Úkol 3 - Rekurence

Jelikož máme posloupnost zadanou jen pomocí prvních dvou členů, musíme bazické vektory $\mathbf{b}_1$ a $\mathbf{b}_2$ vyjádřit jako vektor prvních dvou členů. Pak pro získání koeficientů lineární kombinace musí platit:

$$ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} $$

Odtud získáme jednoduše řešitelnou kvadratickou rovnici:

$$ 0 = a + b $$
$$ 1 = 3a - b $$

U níž po dosazení $b = -a$ z první rovnice do druhé dostaneme:

$$ 4a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4} $$

Díky tomu musí platit:

$$ s_n = a \cdot 3^n + b \cdot (-1)^n = \frac{3^n - (-1)^n}{4} $$