# 1 Úkol 1 – Nelineární zobrazení

Jeden z jednoduše popsatelných případů je přičítání konstantního vektoru, aneb "posouvání". U něj neplatí ani jedna z podmínek.

Mějme zobrazení $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{c}$ s parametrem $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$. Pro každou z podmínek vyzkoušíme, jestli platí vždy:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$
$$\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{c} = \mathbf{x}+\mathbf{c}+\mathbf{y}+\mathbf{c}$$
$$\mathbf{0} = \mathbf{c}$$

Tato podmínka tedy nemůže platit vždy. S druhou podmínkou to bude podobné:

$$f(a\mathbf{x}) = af(\mathbf{x})$$
$$a\mathbf{x}+\mathbf{c} = a\mathbf{x}+a\mathbf{c}$$
$$\mathbf{c} = a\mathbf{c}$$

Jeden z příkladů, na kterém je neplatnost vidět, je třeba nulový vektor.

# 2 Úkol 2 – Fibonacciho čísla

Matice $\mathbf{Q}$ lze jednoduše odvodit z podmínky. Protože v horním řádku chceme $F_n$ nahradit $F_{n+1}$ a ve spodním chceme součet předchozích dvou čísel posloupnosti, výsledná matice $\mathbf{Q}$ musí být:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Můj algoritmus se nachází v souboru `fibonacci.jl` a je napsaný v jazyce Julia. Díky tomu, že postupně počítám matice pro mocniny dvojky a ty podle binárního zápisu skládám, dostáváme časovou složitost $\mathcal{O}(\log n)$ a prostorová složitost je $\mathcal{O}(1)$.

# 3 Úkol 3 – Dosažitelnost

Předchozí postup využívající maticový součin stačí jen mírně upravit, a to interpretováním pomocí Booleovské algebry, neboli jen nahrazením součtu operátorem OR a násobení operátorem AND. Pak dostaneme matici dosažitelnosti. Tento postup bude asymptoticky trvat stejně dlouho jako získání matice počtu sledů.

# 4 Úkol 4 – Obecná inverze

Inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ dostaneme po vyřešení dvou lineárních soustav rovnic pro každý sloupec jednotkové matice.

Pro první sloupec máme soustavu:

$$\begin{pmatrix} c & -c \\ c & c \end{pmatrix} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jejíž řešení je:

$$\begin{pmatrix} 2c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A pro druhý sloupec:

$$\begin{pmatrix} c & -c \\ c & c \end{pmatrix} \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jejíž řešení je:

$$\begin{pmatrix} 2c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 = \frac{1}{2c}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Proto inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ je:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2c}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$