1 Úkol 1 – Robot na Marsu

Abychom zkalibrovali vesmírnou sondu, musíme vyřešit tyto dvě rovnice:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = f_1\mathbf{u} + f_2\mathbf{v}$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = l_1\mathbf{u} + l_2\mathbf{v},$$

kde $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou nové vektory pohybu a koeficienty f_1, f_2 pro pohyb dopředu a l_1, l_2 pro pohyb doleva. Každá z těchto rovnic lze zapsat jako soustavu rovnic, ze který pak lze koeficienty vyjádřit. Její řešení jsou (pro pohyb dopředu s podmínkou $v_2 \neq 0$ a pro pohyb doleva $v_1 \neq 0$):

$$f_1 = \frac{v_2}{u_1v_2 - u_2v_1}$$
$$f_2 = -\frac{u_2}{u_1v_2 - u_2v_1}$$
$$l_1 = \frac{v_1}{u_2v_1 - u_1v_2}$$
$$l_2 = -\frac{u_1}{u_2v_1 - u_1v_2}$$

2 Úkol 2 – Nezávislost a soustavy

Vzorec lineární kombinace lze pomocí roznásobení a sečtení složek převést na soustavu rovnic, která se pak vyřeší za pomoci Gaussovy eliminace.

Pokud chceme zjistit, jestli jsou vektory $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ lineárně nezávislé, musíme najít jiné řešení rovnice:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x}_i = \mathbf{0},$$

kterou převedeme na soustavu rovnic, než když jsou všechny koeficienty $a_i = 0$. Pokud najdeme po vyřešení soustavy rovnic pomocí Gaussovy eliminace jiné řešení, pak jsou vektory lineárně závislé.

Pokud chceme některý z vektorů vyjádřit jako lineární kombinaci zbytku, pak si musíme vybrat jeden z těchto vektorů a pak rovnici lineární kombinace upravit vynásobením složek koeficienty a sečtení složek, čímž získáme znova soustavu rovnic řešitelnou Gaussovou eliminací. Pokud jsme si však vybrali takový vektor, který není v lineárním obalu zbytku, budeme ho muset vyměnit za jiný a postup zopakovat.

3 Úkol 3 – Algoritmus eliminace

Implementace Gaussovy eliminace se nachází v souboru `gauss.py`. Asymptotická časová složitost této implementace je $\mathcal{O}(n^3)$.