1 Úkol 1 – Mnohoúhelník

Díky konvexitě mnohoúhelníku nám k rozhodnutí, zda bod $\mathbf{x}$ leží uvnitř mnohoúhelníku, stačí pro všechny hrany zkontrolovat, jestli bod $\mathbf{x}$ leží na stejné straně od každé hrany. To můžeme udělat tak, že získáme vektor hrany mezi vrcholy $\mathbf{p}_i$ a $\mathbf{p}_{i+1}$ jako $\mathbf{h}_{i,i+1} = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i$ a nový bod $\mathbf{x}_{i,i+1} = \mathbf{x} - \mathbf{p}_i$. Teď získáme nový vektor $\mathbf{u}_{i,i+1} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathbf{h}_{i,i+1}$, a vůči němu vypočítáme skalární součin $a_{i,i+1} = \langle \mathbf{u}_{i,i+1}, \mathbf{x}_{i,i+1} \rangle$. Pak znaménko skalárního součinu $a_{i,i+1}$ nám určí, na jaké straně hrany bod $\mathbf{x}$ leží.

Tento algoritmus pak pro každou sousední dvojici vrcholů $\mathbf{p}_i$ a $\mathbf{p}_{i+1}$ (a dvojici $\mathbf{p}_n$ a $\mathbf{p}_0$) spočítá skalární součin $a_{i,i+1}$ a pokud je ten skalární součin nenulový, zkontroluje, jestli všechny ostatní mají stejné znaménko. Kontrolu bude provádět tak, že se uloží znaménko skalárního součtu první dvojice, jehož skalární součet je nenulový, a pak pro každou další dvojici s nenulovým skalárním součinem se znaménko porovnává s uloženým znaménkem. Protože čas pro kontrolu jedné hrany je konstantní, je časová složitost tohoto algoritmu $\mathcal{O}(n)$.

2 Úkol 2 – Vzdálenost od roviny

Protože potřebujeme, aby rovina procházela počátkem, získáme novou rovinu ϱ' a nový bod $\mathbf{x}'$, pro které platí:

$$\varrho' = \varrho - \mathbf{c} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2$$
$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{c} = (5, 1, 0)^T$$

Teď musíme získat ortogonální bázi roviny ϱ', kterou označím $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$. Bazický vektor $\mathbf{v}_1$ dostaneme jednoduše normalizací vektoru $\mathbf{u}_1$:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}$$

Bazický vektor $\mathbf{v}_2$ pak dostaneme, jak je popsán v článku:

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1$$
$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_2\|}$$

Teď nám zbývá najít projekci:

$$\mathbf{x}'_\varrho = \langle \mathbf{x}', \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}', \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2$$

Po dosazení všech hodnot určíme vzdálenost $\left\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_\varrho\right\| = 3,15$.

3 Úkol 3 – Fyzikální měření

Nejdříve z naměřených hodnot potřebujeme získat lineární systém rovnic. Všechny rovnice budou ve tvaru $pt + q = m$, kde potřebujeme zjistit hodnoty p a q, abychom získali lineární funkci.

Proto matice $\mathbf{A}$, vektor $\mathbf{b}$ a vektor $\mathbf{x}$ budou následující:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 & 14 & 20 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \qquad \mathbf{b} = (67, 66, 63, 62, 60)^T \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Teď musíme akorát dosadit hodnoty do vzorce $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$. Pak nám vyjdou hodnoty:

$$p \doteq -0,35 \qquad q \doteq 66,93$$

Číslo p nám určuje přibližnou změnu hmotnosti za čas, proto rychlost vypařování bude $0,35\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.