1 Úloha 1

U prvního výrazu použijeme vzorec pro konstantu. Při jeho použití vyjde:

$$\int 42\,dx \overset{C}{=} 42x$$

U dalšího použijeme vzorec pro součet a pak pro $\sin x$ a $\frac{1}{\cos^2 x}$:

$$\int 5\sin x + \frac{6}{\cos^2 x}\,dx = 5\int \sin x\,dx + 6\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx \overset{C}{=} -5\cos x + 6\,\mathrm{tg}\,x$$

V následujícím použijeme vzorec pro mocniny. Musíme si však dát pozor na konstanty:

$$\int\int 6x\,dx\,dx = \int 3x^2 + C\,dx \overset{C}{=} x^3 + Cx$$

Teď jdeme na určité integrály. Ty budu řešit jejich obecným vyřešením a následným dosazením do definice. V prvním použijeme vzorec pro mocninu:

$$\int x\,dx \overset{C}{=} \frac{1}{2}x^2$$

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{2}\cdot 0^2 = \frac{1}{2}$$

V druhém použijeme vzorec pro $\sin x$:

$$\int \sin x\,dx \overset{C}{=} -\cos x$$

$$\int_0^2 \pi = -\cos 2\pi + \cos 0 = 0$$

V posledním použijeme vzorec, jehož výsledek je $\arcsin x$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{C}{=} \arcsin x$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

2 Úloha 2

Nejdříve odvodíme vzorce pro velikost okamžité rychlosti v a uraženou vzdálenost pro volný pád s:

$$v = \int g\,dt \overset{C}{=} gt$$

$$s = \int gt\,dt \overset{C}{=} \frac{1}{2}gt^2$$

Protože známe uraženou vzdálenost s, můžeme ze vzorce pro uraženou vzdálenost vypočítat čas volného pádu t:

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2\cdot 58,7}{9,81}} \doteq 3,46\,\mathrm{s}$$

Ještě vypočítáme velikost rychlosti v a máme hotovo:

$$v = \int_0^t g\,dt = gt = g\cdot\sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{2sg} = \sqrt{2\cdot 9,81\cdot 58,7} = 33,94\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

3 Úloha 3

Nejprve výraz upravíme tak, abychom mohli aplikovat vzorec pro složenou funkci:

$$\int \frac{1}{e^x}\,dx = \int e^{-x}\,dx = -\int e^{-x}\cdot(-1)\,dx$$

Z tohoto tvaru můžeme odvodit, že vnější funkce $F(x) = e^x$ a vnitřní funkce $G(x) = -x$. Díky tomu lze výraz vyjádřit jako:

$$-\int e^{-x}\cdot(-1)\,dx \overset{C}{=} -e^{-x}$$

U druhého výrazu budeme muset pro obecné vyjádření také provést menší úpravy:

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\int(-2)xe^{-x^2}\,dx$$

Zde použijeme pak stejný postup:

$$-\frac{1}{2}\cdot\int(-2)xe^{-x^2}\,dx \overset{C}{=} -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

Teď můžeme zjistit výsledek určitého integrálu:

$$\int_0^2 xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2^2} + \frac{1}{2}e^{0^2} = \frac{1-e^{-4}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^4} \doteq 0,49$$

4 Úloha 4

Na první výraz můžeme krásně použít integraci per partes. Zde je nejlepší dosadit funkce jako $f(x) = e^x$ a $G(x) = x$. Tím nám vyjde:

$$\int x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - \int e^x\cdot 1\,dx \overset{C}{=} e^x(x-1)$$

U druhé využijeme nápovědy a dosadíme $f(x) = 1$ a $G(x) = \ln x$:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x} \overset{C}{=} x(\ln x - 1)$$

U posledního nejdříve musíme využít vzorce $sin^2x + cos^2x = 1$, díky níž spolu s jednou integrací per partes dostaneme rovnost, ze které už lze odvodit vyjádření integrálu:

$$\int\cos^2 x\,dx = \int 1\,dx - \int\sin^2 x\,dx = \int 1\,dx + \sin x\cos x - \int\cos^2 x\,dx$$

$$2\int\cos^2 x\,dx \overset{C}{=} x + \sin x\cos x$$

$$\int\cos^2 x\,dx \overset{C}{=} \frac{x+\sin x\cos x}{2}$$

5 Úloha 6

Snad příliš nevadí, že řeším úlohu ze svého článku. Jestli se Vám bude zdát, že se tímto zvýhodňuji, budu v pořádku s tím, že tuto úlohu nebudu mít obodovanou. Teď ale už jdeme na řešení.

Zde nejdříve musíme vyjádřit funkci obvodu závidlou na jedné proměnné $f(x)$. Protože známe plochu, můžeme vyjádřit jednu ze stran pomocí vzorce $S = ab$. Vyjádřením dostaneme vztah $b = \frac{S}{a} = \frac{800}{a}$. Obvod plotu v tomto případě bude $o = 2a + b$. Teď už jsme konečně schopni vyjádřit funkci obvodu:

$$f(x) = 2x + \frac{800}{x} = 2\left(x + \frac{400}{x}\right)$$

Následně musíme tuto funkci zderivovat:

$$f'(x) = 2\left(x + \frac{400}{x}\right)' = 2 + 2\frac{0 - 400}{x^2} = 2 - \frac{800}{x^2}$$

Protože funkce $f(x)$ je kvadratická, jejíž parametr a je kladné číslo, má tato funkce jediný extrém, která je jejím globálním minimem. Proto funkce $f(x)$ dosáhne minima, když:

$$2 - \frac{800}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{400} = 20$$

Teď už můžeme dopočítat rozměry oplocení:

$$a = 20\,\mathrm{m}$$
$$b = \frac{800}{a} = \frac{800}{20} = 40\,\mathrm{m}$$