1 Úloha 1

Při postupu provedeme dvakrát per partes:

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$$
$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx$$

A dosadíme:

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx$$
$$\int e^x \sin x\, dx \overset{C}{=} e^x \frac{\sin x - \cos x}{2}$$

2 Úloha 2

Nejdříve musíme jednotlivé strany trojúhelníku vyjádřit analyticky. Taková strana bude ležet na přímce o koeficientech a, b, která bude splňovat soustavu:

$$ax_1 + b = y_1$$
$$ax_2 + b = y_2$$

Z ní vyjádřím obecné vzorce pro a a b:

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$
$$b = y - ax$$

Stranu ohraničenou body [0,0] a [3,0] nemusíme řešit, protože její funkce je nulová. U zbytku bude stačit vypočítat určitý integrál.

Nejdříve určíme stranu ohraničenou body [0,0] a [2,1]. Její koeficienty budou:

$$a = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$$
$$b = 1 - 1 = 0$$

Výsledek integrálu pak bude:

$$\int_0^2 \frac{x}{2}\, dx = \frac{2^2 - 0}{4} = 1$$

Pak určíme stranu ohraničenou body [2,1] a [3,0]. Její koeficienty budou:

$$a = \frac{0-1}{3-2} = -1$$
$$b = 1 + 2 = 3$$

Teď určíme další integrál:

$$\int_2^3 3 - x\, dx = 3 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} - 3 \cdot 2 + \frac{2^2}{2} = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

Když výsledky integrálů sečteme, získáme konečně obsah:

$$S = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

3 Úloha 3

Tady se musíme dát pozor na to, abychom správné integrály odečetli, jinak získáme špatný obsah. Z obrázku získáme následující výraz, který se rovná obsahu mnohoúhelníku:

$$S = \int_1^2 3 + x\,dx + \int_2^4 5\,dx + \int_4^5 9 - x\,dx - \int_1^3 \frac{11 - 3x}{2}\,dx - \int_3^5 \frac{-7 + 3x}{2}\,dx$$

Skoro všechny integrály se zde budou upravovat podobně:

$$S = \frac{9}{2} + 10 + \frac{9}{2} - 5 - 5 = 9$$