1 Úloha 1

$$(x^2 - 4x + 4)' = (x^2)' - (4x)' + (4)' = 2x - 4 = 2 \cdot (x - 2) \tag{1}$$

$$(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)' = (x^3)' - (6x^2)' + (12x)' - (8)' = 3x^2 - 6 \cdot 2x + 12 = 3 \cdot (x^2 - 4x + 4) \tag{2}$$

$$(2 \sin x \cos x)' = 2 \cdot (\sin x \cos x)' = 2 \cdot ((\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)') = 2 \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cdot \cos 2x \tag{3}$$

2 Úloha 2

U funkce 1 je toto jednoduché, protože její derivace je prostou lineární rovnici, která protíná osu x jen v jediném bodě, neboli hodnota x, která vynuluje y, což je $x = 2$. A protože tato funkce je rostoucí (koeficient a je kladný), funkce 1 roste v intervalu $\langle 2; +\infty)$ a klesá v intervalu $(-\infty; 2\rangle$.

Derivace funkce 2 je funkcí kvadratickou, tudíž budeme muset zjistit její kořeny. V tomto případě nebude potřeba použít diskriminant, použijeme místo něj vzorec pro umocněný rozdíl:

$$3 \cdot (x^2 - 4x + 4) = 3(x - 2)^2$$

Jak lze vidět, jedná se o kvadratickou funkci s dvojnásobným kořenem, tudíž funkce 2 musí růst neustále.

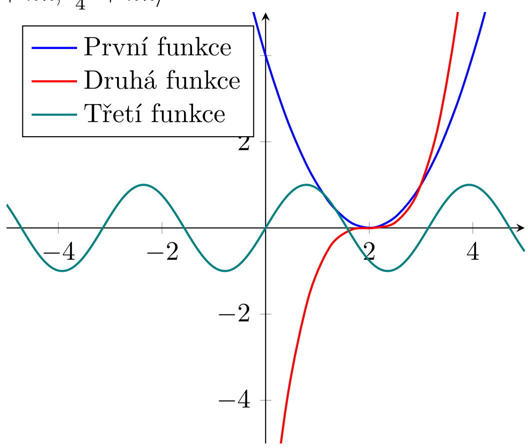
Teď nám zbývá jen funkce 3. Protože se jedná o periodickou funkci, budu určovat interval klesání s ohledem na $k \in \mathbb{Z}$.

Abychom určili chování derivace, níže je tabulka:

Tabulka 1: Tabulka hodnot derivace

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$2 \cdot \cos 2x$	2	0	-2	0

Z této tabulky lze vidět, že v intervalu $\langle 0; \pi\rangle$ klesá funkce 3 v intervalu $\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\rangle$ a roste v intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{3\pi}{4}; \pi\rangle$. Tohle, když zobecníme, vyjde nám, že funkce 3 roste v intervalu $\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\rangle$ a klesá v intervalu $\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\rangle$



3 Úloha 3

Protože extrémy jsou krajními body intervalů růstu a klesání, stačí se nám podívat na intervaly z druhé úlohy, abychom získali extrémy funkcí.

U funkce 1 nám stačí určit, kdy její derivace, lineární funkce, protíná osu x, a to v bodě $x = 2$. Neboť derivace je rostoucí, jedná se globální minimum.

U funkce 2 můžeme chybně určit, že bod $x = 2$ bude extrémem, ale protože se jedná o dvojnásobný kořen její derivace a samotná funkce roste v $\mathbb{R}$, nemůže to být extrém. Tudíž funkce 2 nemá žádný extrém.

A poněvadž je funkce 3 periodická, pokud bude mít globální maxima a minima, bude jich mít nekonečně mnoho, což musí mít, anžto existují intervaly, kdy roste a kdy klesá. Když se podíváme na intervaly růstu a klesání dané funkce, zjistíme, že pro $k \in \mathbb{Z}$ budou globální maxima $\frac{\pi}{4} + k\pi$ a globální minima $\frac{3\pi}{4} + k\pi$.