1 Úloha 1

Tohle lze ukázat následujícím způsobem:

$$(a \times f)' = a' \times f + a \times f' = 0 \times f + a \times f' = a \times f'$$

2 Úloha 2

Nejdříve si to ukážeme na menších číslech. Pro x^2 lze derivaci odvodit takto:

$$(x^2)' = (x \times x)' = 2x \times x' = 2x$$

A derivaci x^3 takto:

$$(x^3)' = (x^2 \times x) = x^2 \times x' + x \times (x^2)' = x^2 + 2x^2 = 3x^2$$

Můžeme si zde všimnout toho, že po použití vzorce na součin nám zbyde zderivovat mocnina s exponentem nižší o jedna, což napovídá, že by to mohl být rekurentní vzorec, což se ukáže jako pravda:

$$(x^n)' = (x \times x^{n-1})' = x^{n-1} + x \times (x^{n-1})'$$

Ale co s tím můžeme dělat? Zkusme to ještě rozložit:

$$x^{n-1} + x \times (x^{n-1})' = x^{n-1} + x \times (x^{n-2} + x \times (x^{n-2})') = 2x^{n-1} + x^2 \times (x^{n-2})'$$

A zde můžeme vidět, že počet x^{n-1} a exponent čísla násobící funkci, která zbývá derivovat, je stejný jako počet kol derivace. Tudíž když provedeme $n-1$ kol, vyjde:

$$(x^n)' = (n-1) \times x^{n-1} + x^{n-1} \times x' = n \times x^{n-1}$$

To jsme chtěli dokázat.

3 Problém 3

Vzorec pro derivaci podílů funkcí lze odvodit takto:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = (f \times g^{-1})' = f' \times g^{-1} + f \times (g^{-1})'$$

Než budeme pokračovat, musím definovat $h(x) = x^{-1}$:

$$f' \times g^{-1} + f \times (g^{-1})' = f' \times g^{-1} + f \times (h(g))' = f' \times g^{-1} + f \times (h'(g) \times g') = f' \times g^{-1} - f \times g^{-2} \times g' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

A hotovo.