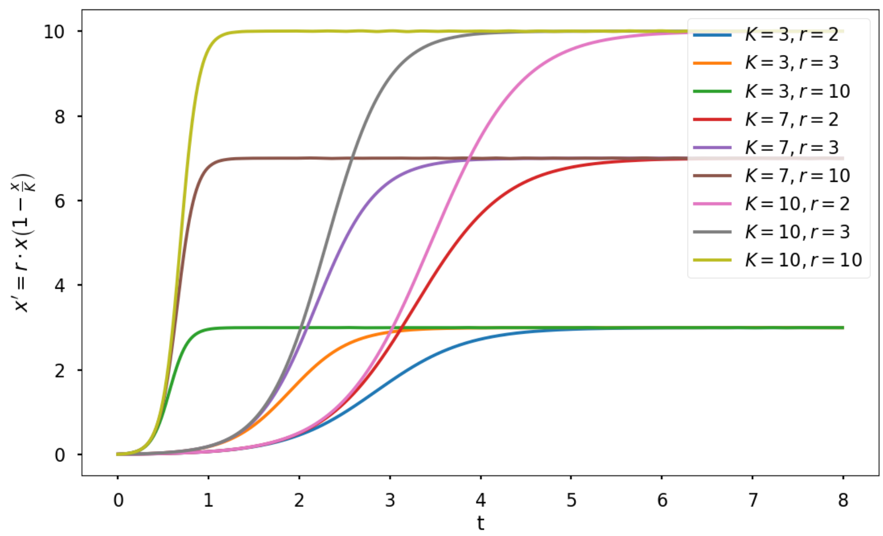
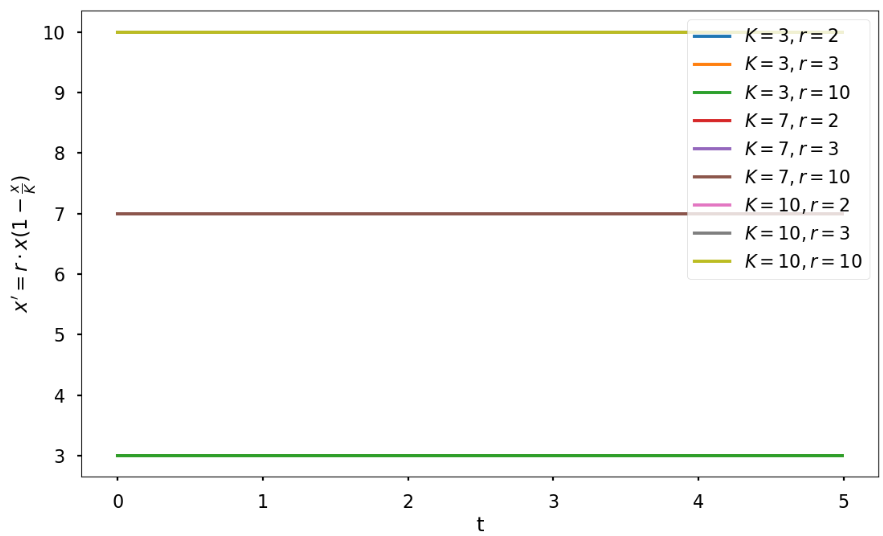
Zdrojové soubory všech těchto úloh jsou přiloženy spolu s popisem.

1 Úloha 1

Výsledný graf funkce je tento:



Pro ukázku jsem tam nevykresloval jen jednu funkci, ale několik funkcí s rozdílnými parametry. Můžeme vypozorovat, že parametr r určuje rychlost růstu funkce. U parametru to vypadá, že parametr K udává horní mez, ale můžeme si všimnout především u funkce s parametry $K = 10, r = 10$, že na konci, kde by měla být funkce konstantní, se funkce vlní. Poněvadž jsem měl podezření, že se jedná o chybu (s velkou pravděpodobností chybě čísel s plovoucí čárkou), spustil jsem to znova s počáteční hodnotou rovno kapacitě K:

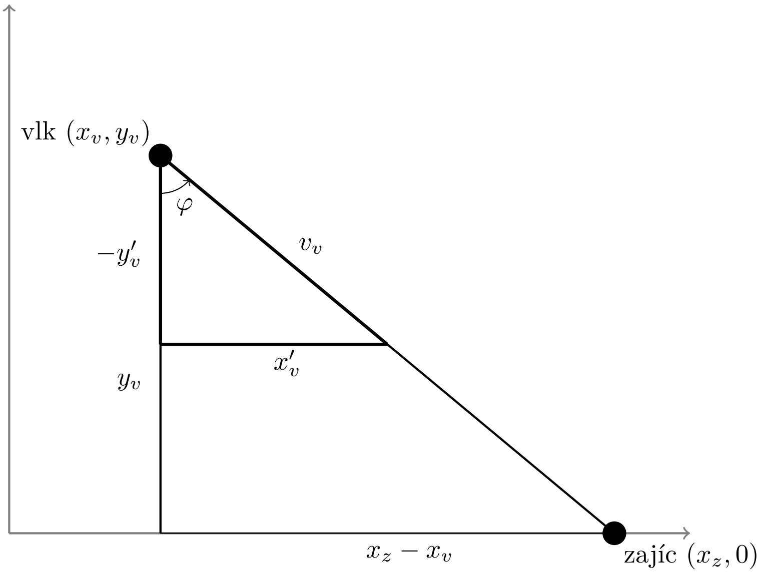


Zde je už je vidět, že dané funkce jsou konstantní, proto s velkou pravděpodobností šlo o chybu.

Jako počáteční hodnotu x_0 jsem vybral $x_0 = 0,01$, a to s cílem ukázat, že na začátku roste funkce jen nepatrně, než přijde "zlom".

2 Úloha 2

Pro odvození diferenciální rovnice jsem použil náčrt níže:



Z tohoto obrázku můžeme odvodit diferenciální rovnici dvěmi způsoby. Buď vypočítáme úhel φ a následně za pomoci goniometrických funkcí vypočítáme změnu, nebo použijeme Pythagorovu větu k získání poměru okamžité rychlosti vlka v_v ke vzdálenosti.

Jako první mně napadl způsob s použitím goniometrických funkcí. Nejprve zjistíme úhel φ:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_z - x_v}{y_v}$$

Teď za pomoci jednoduchých úprav získáme změnu jak x'_v, tak y'_v. Musíme ale vzít v úvahu, že y_v se celou dobu změnšuje, proto musíme přidat mínus:

$$\sin\varphi = \frac{x'_v}{v_v} \quad \Rightarrow \quad x'_v = v_v \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{x_z - x_v}{y_v}\right)$$
$$\cos\varphi = \frac{-y'_v}{v_v} \quad \Rightarrow \quad y'_v = -v_v \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{x_z - x_v}{y_v}\right)$$

Když jsem ale řešil třetí úlohu, přišel jsem na řešení pomocí Pythagorovi věty, které jsem později upřednostnil z několika důvodů:

1. předpokládám, že goniometrické funkce jsou složitější na výpočet něž odmocnina
2. když se stalo, že $y_v < 0$ (což by se nemělo stávat, ale řešil jsem to numericky, tudíž se to mohlo stát, když se vlk přiblížil ke zajíci), vlk otočil směr a běžel do nekonečna od zajíce. Očekávanější by podle mě bylo, že bude běžet rychlostí zajíce dál. A
3. bylo praktičtější použít na dvě úlohy stějný způsob než dva odlišné způsoby

Nechť $d_v z$ je vzdálenost vlka od zajíce. Z náčrtku můžeme vidět, že oba pravoúhlé trojúhelníky jsou si podobné, proto:

$$\frac{x'_v}{x_z - x_v} = \frac{-y'_v}{y_v} = \frac{v_v}{d_{vz}}$$

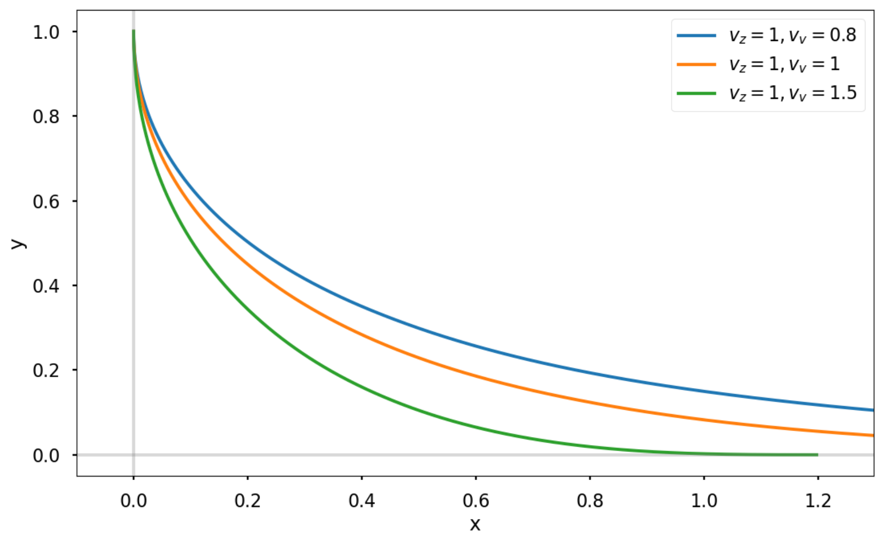
Zároveň pomocí Pythagorovi věty můžeme $d_v z$ vypočítat takto:

$$d_{vz} = \sqrt{(x_z - x_v)^2 + y_v^2}$$

Když oba poznatky spojíme, získáme vzorce pro výpočet změn x'_v a y'_v:

$$x'_v = x_v \cdot \frac{v_v}{\sqrt{(x_z - x_v)^2 + y_v^2}}$$
$$y'_v = -y_v \cdot \frac{v_v}{\sqrt{(x_z - x_v)^2 + y_v^2}}$$

Výsledný graf vypadá následovně:



Pokud bychom chtěli zjistit vzdálenost, kdy vlk chytí zajíce, je potřeba nastavit, aby se analýza zastavila, když $y_v = 0$ (což při numerickém řešení lze určit jen přibližně). Pro získání času konce pak tuto hodnotu vydělíme hodnotou v_z. Samozřejmě, pokud bude platit $v_v \leq v_z$, nemůžeme tuto hodnotu vypočítat (protože vlk zajíce nikdy nedohoní).

3 Úloha 3

V této úloze narozdíl od předchozí budeme nuceni použít postup s Pythagorovou větou, protože střela se během letu odchýlý od původního směru o více než 90°, jak uvidíte dále na grafu, a hodnotový obor funkce arkustangens je jen $(-90°, 90°)$.

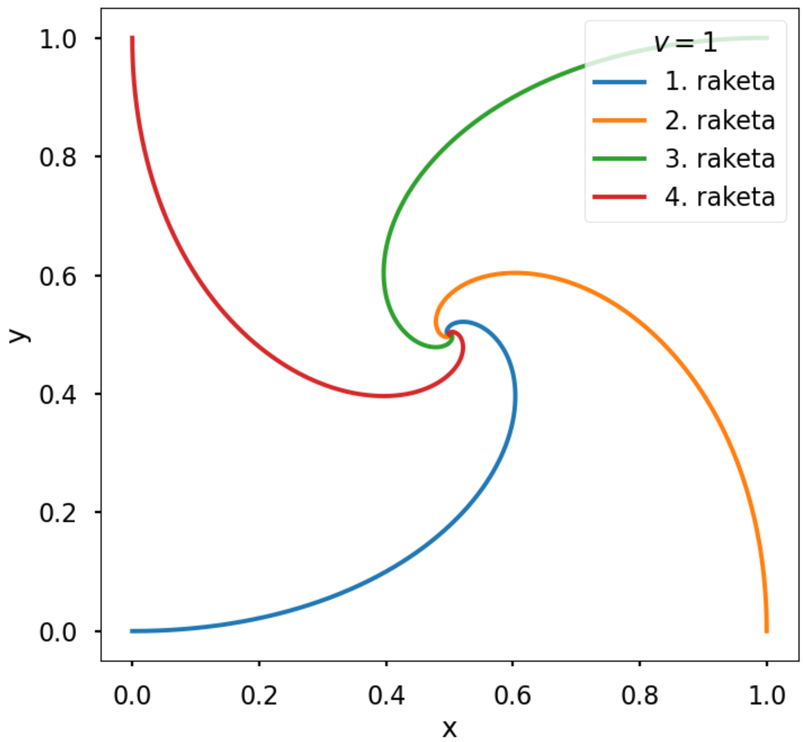
Protože postup získání vzorce je skoro stejný jako v předchozí úloze, rovnou napíšu výsledný vzorce pro raketu $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$x_i' = (x_{i+1} - x_i) \cdot \frac{v}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}$$
$$y_i' = (y_{i+1} - y_i) \cdot \frac{v}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}$$

A když $i = 4$, pak:

$$x_4' = (x_1 - x_4) \cdot \frac{v}{\sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2}}$$
$$y_4' = (y_1 - y_4) \cdot \frac{v}{\sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2}}$$

Výsledný graf je níže:



Výsledná trajektorie se neliší se změnou rychlosti. Rychlost mění jen čas trvaní letu raket, což dává smysl, když si uvědomíme, že rakety všechny letí stejnou rychlostí.