Ally

算法精讲——算法推导

- 设有 $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n$ 一共n+1个控制点，这些控制点用于定义样条曲线的走向、界限范围，则k阶B样条曲线的定义为：

$$P(u)=\begin{bmatrix}P_0 & P_1 & \cdots & P_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{0,k}(u)\\ B_{1,k}(u)\\ \vdots \\ B_{n,k}(u)\end{bmatrix}=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,k}(u) \quad 1$$

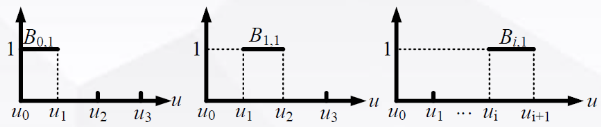
- 式中，$B_{i,k}(u)$ 是第i个k阶B样条基函数，与控制点 P_i 相对应，k≥1；u是自变量。
- 基函数具有如下德布尔-考克斯递推式：

$$B_{i,k}(u)=\begin{cases}\begin{cases}1, & u_i \le u < u_{i+1}\\ 0, & 其他\end{cases}, & 2\quad k=1\\ \dfrac{u-u_i}{u_{i+k-1}-u_i}B_{i,k-1}(u)+\dfrac{u_{i+k}-u}{u_{i+k}-u_{i+1}}B_{i+1,k-1}(u), & k\ge 2\end{cases}$$

- 约定0/0=0。式中，ui是一组被称为节点矢量的非递减序列的连续变化值，首末值一般定义为0和1，该序列如下：

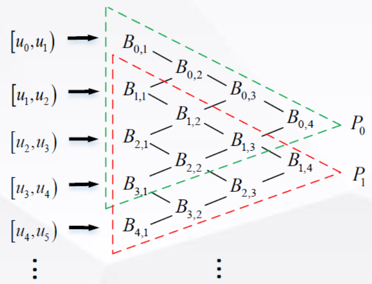
$$[u_0, u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, \cdots, u_n, u_{n+1}, \cdots, u_{n+k}]$$

- 根据递推式，当阶数k=1时，不同基函数的非零域如下图：



- 根据上式递推，有如下三角计算格式：

3



- K阶B样条→关于u的k-1次曲线；段数=(n+1) − (k-1) = n-k+2
- $B_{i,k}(u)$涉及到的节点为 $u_i, u_{i+1}, \cdots, u_{i+k}$ 一共k+1个节点，k个区间，因此从 $B_{0,k}(u)$ 到 $B_{n,k}(u)$共涉及 一共n+k+1个节点。
- 对于open B样条，~~u定义域为 $[u_k, u_{n+1}]$ 。~~ ✗

b样条基础知识、

bspline是关于B-样条基函数的线性组合

定义域为 $[u_{k-1}, u_{n+1}]$

为了保证 $P(u)$ 为样条基函数的线性组合，必须保证曲线在整个定义

开区间bspline有以下特点，即：

$t_0=\cdots=t_{k-1}$，$t_{n+1}=\cdots=t_{n+k}$

那么有效定义域为 $[t_{k-1}, t_{n+1}]$

为什么？

一、B样条基函数的支撑域

B样条曲线通过基函数 $B_{i,k}(t)$ 和控制点 P_i 组合构成

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_i\cdot B_{i,k}(t)$$ → 第i个k阶B样条基函数

每个k阶基函数的支撑域为 $[t_i, t_{i+k})$ 即在该区间以外 $B_{i,k}(t)=0$

此时对曲线无贡献

二、基函数的有效叠加区间

由于B样条的节点定义可知 $t_0=\cdots=t_{k-1}$ 那么我们直接知道 $[t_0, t_{k-1})$ 内是长为空集，是无效的，同理 $[t_{n+1}, t_{n+k})$ 也是无效区间，因此定义域为 $[t_{k-1}, t_{n+1}]$

bspline的段数问题:

✅ 方式二：基于控制点组的段数（logical segments）

- 每一段是由 $p+1$ 个控制点组合决定的 p次多项式
- 段数定义为:

$$\text{段数} = n - p + 1$$

(其中 $n+1$ 是控制点数量)

🟦 这种定义是**B样条数学书上更常见的**，因为它说明了控制点如何影响曲线。

例如:

- 6 个控制点，3 次 B 样条（$p=3$）

$$\Rightarrow \text{段数} = 6 - 3 = 3$$

- 对应的曲线段分别由控制点 $[P_0 \sim P_3], [P_1 \sim P_4], [P_2 \sim P_5]$ 控制

为不同组合的控制点为一段，由前面可知k阶基函数只在 $[t_i, t_{i+k}]$ 中不为0，其它区间外为0，因此对于控制点 $p_0 \cdots p_n$ 来说其不是一直参与构成 p 曲线

例：控制点 $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$，$k=4$

$B_{0,4}$ 生级区域为 $[u_0, u_4)$

$B_{1,4}$ 生级区域为 $[u_1, u_5)$

$B_{2,4}$ 生级区域为 $[u_2, u_6)$

$B_{3,4}$ 生级区域为 $[u_3, u_7)$

$B_{4,4}$ 生级区域为 $[u_4, u_8)$

$B_{5,4}$ 生级区域为 $[u_5, u_9)$

→在 $p(t)$ 中同时生效的点数最多为 k 个

第一段：p_0, p_1, p_2, p_3 决定

第二段 $p_1\ p_2\ p_3\ p_4$ 决定

第三段 $p_2\ p_3\ p_4\ p_5$ 决定

bspline的连续性问题

首先 $B_{i,1}$ 这种一阶基函数根据式①可知一定非连续

$$B_{i,1}(t)=\begin{cases}1 & t_i \le t < t_{i+1}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

现在构造二阶基函数

$$B_{i,2}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}B_{i,0}(t)+\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}B_{i+1,0}(t) \quad (k=2)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} & t_i \le t < t_{i+1}\\[2ex] \dfrac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}} & t_{i+1} \le t < t_{i+2}\\[2ex] 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$t=t_i$ 时 $B_{i,2}(t_i)=0$，因此在 t_i 处连续

$t\to t_{i+1}$ 时 $\lim\limits_{t\to t_{i+1}} \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}=1=B_{i,2}(t_{i+1})$，因此在 t_{i+1} 处连续

$t\to t_{i+2}$ 时 $\lim\limits_{t\to t_{i+2}} \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}=0$，因此在 t_{i+2} 连续

综上 $B_{i,2}(t)$ 为一连续函数

同理可证高阶 $(k\geq 2)$ 基函数连续

显然 $B_{i,k}(t)$ 连续，那么其线性组合

$P(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i\cdot B_{i,k}(t)$ 也必然连续

相比于 Bezier 的优势。

3 局部路径规划算法——B样条曲线法

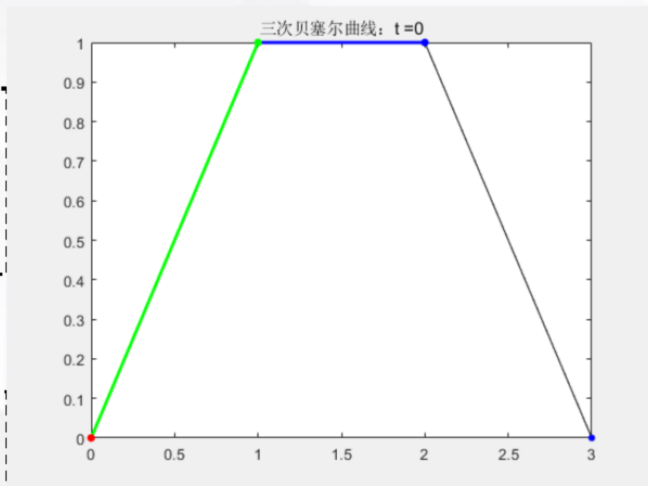
Ally

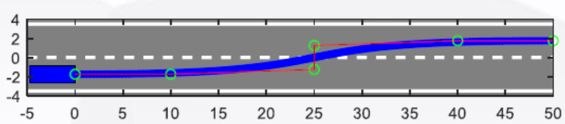
算法简介

- 样条是一根富有弹性的细木条或塑料条，在应用CAD/CAM技术以前，航空、船舶和汽车制造业普遍采用手工绘制自由曲线。绘制员用压铁压住样条，使其通过所有给定的型值点，再适当地调整压铁，改变样条形态，直到符合设计要求。
- B样条曲线是B-样条基函数（给定区间上的所有样条函数组成一个线性空间。）的线性组合。

算法思想

- 贝塞尔曲线有以下缺陷：
- 1. 确定了多边形的顶点数（n+1个），也就决定了所定义的Bezier曲线的阶次（n次），这样很不灵活。
- 2. 当顶点数（n+1）较大时，曲线的次数较高，曲线的导数次数也会较高，因此曲线会出现较多的峰谷值。
- 3. 贝塞尔曲线无法进行局部修改。
- B样条曲线除了保持Bezier曲线所具有的有点外，还弥补了上述所有的缺陷。





2021/2/17