I. Logica e Insiemi

Simboli Fondamentali

Concetto	Simbolo/Equivalenza
Appartenenza	$a \in A$ (o $A \ni a$)
Quantificatori	$\forall$ (Per ogni), $\exists$ (Esiste), $\exists!$ (Esiste ed è unico)
Implicazioni	$P \Rightarrow Q$ (Implica), $A \iff B$ (Se e solo se)

Relazioni e Operazioni tra Insiemi

Relazione / Operazione	Formula / Notazione
Inclusione	$A \subseteq B$
Uguaglianza	$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
Unione	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$
Intersezione	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$
Insiemi Disgiunti	$A \cap B = \emptyset$
Differenza	$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$
Prodotto Cartesiano	$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Proprietà Algebriche degli Insiemi

Proprietà	Formule
Idempotenza	$A \cup A = A$, $A \cap A = A$
Commutatività	$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
Associatività	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributività	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Negazione Logica

Negazione di Quantificatori	Formula
Negazione di $\forall$	$\neg(\forall x \in A, P) \iff \exists x \in A : \neg P$
Negazione di $\exists$	$\neg(\exists x \in B : Q) \iff \forall x \in B : \neg Q$
Contronominale	$(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

II. Strutture Algebriche (Campi e Ordine)

Proprietà (Campo X, P1-P9)	Somma (+)	Prodotto ($\cdot$)
P1/P5 (Commutativa)	$x + y = y + x, \forall x, y \in X$	$x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in X$
P2/P6 (Associativa)	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
P3/P7 (Neutro)	$\exists 0 : x + 0 = x, \forall x \in X$	$\exists 1 : x \cdot 1 = x, \forall x \in X$
P4/P8 (Inverso)	$\forall x, \exists (-x) : x + (-x) = 0$	$\forall x \neq 0, \exists x^{-1} : x \cdot x^{-1} = 1$
P9 (Distributiva)		$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Proprietà di Ordine (Campo Totalmente Ordinato)

Proprietà di Ordine ($\leq$, P10-P15)	Formula
P10 (Riflessività)	$x \leq x, \forall x \in X$
P12 (Anti-simmetria)	$x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
P13 (Transitività)	$x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
P14 (Compatibilità con +)	$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \forall x, y, z \in X$
P15 (Compatibilità con $\cdot$)	$0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y, \forall x, y \in X$

Disuguaglianze in $\mathbb{R}$

Proprietà	Formula
Archimedea	$\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0, \exists n \in \mathbb{N} : nx \geq y$
Ordine opposto	$x \leq y \iff -x \geq -y$
Quadrato	$\forall x \neq 0, x^2 > 0$

III. Estremi e Insiemi (in $\mathbb{R}$)

Definizione di Estremi

Estremo	Definizione formale	Caso Illimitato
Estremo Superiore	$\sup A = \min\{k \in \mathbb{R} : k \geq a, \forall a \in A\}$	$\sup A = +\infty$
Estremo Inferiore	$\inf A = \max\{k \in \mathbb{R} : k \leq a, \forall a \in A\}$	$\inf A = -\infty$

Caratterizzazione di Estremi (per $l \in \mathbb{R}$)

Estremo	Condizione 1 (Maggiorante/Minorante)	Condizione 2 (Minimalità/Massimalità)
$\sup A = l$	$a \leq l, \forall a \in A$	$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a > l - \varepsilon$

Estremo	Condizione 1 (Maggiorante/Minorante)	Condizione 2 (Minimalità/Massimalità)
$\inf A = l$	$a \geq l, \forall a \in A$	$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a < l + \varepsilon$

Proprietà di Monotonia degli Estremi

Operazione / Inclusione	Formula
Se $A \subseteq B$	$\sup A \leq \sup B$
Se $A \subseteq B$	$\inf A \geq \inf B$
Unione (Sup)	$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$
Unione (Inf)	$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$

IV. Valore Assoluto (Modulo)

Concetto	Formula
Definizione	$\lvert x\rvert = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$
Positività	$\lvert x\rvert \geq 0$
Prodotto	$\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert\lvert y\rvert$
Divisione	$\lvert x/y\rvert = \lvert x\rvert/\lvert y\rvert, \forall y \neq 0$
Disuguaglianza triangolare (Somma)	$\lvert x+y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$
Disuguaglianza triangolare (Differenza)	$\lvert x-y\rvert \geq \lvert\lvert x\rvert - \lvert y\rvert\rvert$

V. Potenze ed Esponenziali

Proprietà delle Potenze ($b, c > 0$; $p, q \in \mathbb{R}$)

Proprietà	Formula
Prodotto di basi uguali	$b^p \cdot b^q = b^{p+q}$
Potenza di potenza	$(b^p)^q = b^{pq}$
Potenza negativa	$b^{-q} = 1/b^q$
Esponente zero	$b^0 = 1$
Prodotto di esponenti uguali	$b^p \cdot c^p = (bc)^p$
Disuguaglianza di Bernoulli	$(1+h)^n \geq 1 + nh, \forall n \in \mathbb{N}, h \in (-1, +\infty)$

Logaritmi (**Base** $b > 0, b \neq 1$)

Proprietà	Formula
Inversa dell'esponenziale	$b^{\log_b(x)} = x$, $\log_b(b^x) = x$
Prodotto	$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$
Quoziente	$\log_b(x/y) = \log_b(x) - \log_b(y)$
Potenza	$\log_b(x^r) = r\log_b(x), \forall r \in \mathbb{R}$
Cambio di base	$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

VI. Successioni e Limiti

Limite di Successione ($a_n \to l$)

Tipo di Limite	Formula (Definizione con Intorni/Palle Aperte)
Limite finito ($l \in \mathbb{R}$)	$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \overline{n}, \lvert a_n - l\rvert < \varepsilon$
Limite $+\infty$	$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0, \exists\overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \overline{n}, a_n > M$
Limite $-\infty$	$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M > 0, \exists\overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \overline{n}, a_n < -M$

Proprietà dei Limiti di Successione

Proprietà	Formula / Risultato
Unicità del Limite	$\lim a_n = l_1 \land \lim a_n = l_2 \Rightarrow l_1 = l_2$
Teorema del Confronto	$a_n \le b_n \le c_n \land \lim a_n = \lim c_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim b_n = l$
Convergenza $\Rightarrow$ **Limitata**	$\lim a_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow (a_n)$ è limitata
Prodotto limitata x infinitesima	(a_n) limitata $\land \lim b_n = 0 \Rightarrow \lim(a_n b_n) = 0$
Corollario (Monotone)	(a_n) monotona e limitata superiormente (o inferiormente) $\Rightarrow (a_n)$ converge

Algebra dei Limiti (Risultati per $l, m \in \mathbb{R}$)

Operazione	Limite ($l = \lim a_n, m = \lim b_n$)
Somma	$\lim(a_n + b_n) = l + m$
Prodotto	$\lim(a_n b_n) = lm$
Quoziente	$\lim(a_n/b_n) = l/m,\ \text{se } m \neq 0$

Forme Esponenziali e Limiti Notevoli

Limite	Formula
Numero di Nepero (e)	$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
Limite Generalizzato	$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{b_n}\right)^{b_n} = e^\alpha,\ \text{se } b_n \to +\infty$

Gerarchia degli Infiniti ($b > 1, \alpha > 0$)

$$\log_b(n) \ll n^\alpha \ll b^n \ll n! \ll n^n$$

Limite di Gerarchia	Formula
Potenza vs Esponenziale	$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{b^n} = 0$
Logaritmo vs Potenza	$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_b(n)}{n^\alpha} = 0$
Esponenziale vs Fattoriale	$\lim_{n\to+\infty}\frac{b^n}{n!} = 0$
Radice ennesima di n	$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1$
Fattoriale vs Potenza n^n	$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$

Notazione di Landau / Equivalenza Asintotica

Notazione	Simbolo / Equivalenza
Infinitesima ($o(1)$)	$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \iff a_n = o(1)$
a_n **tende a** $l \neq 0$	$a_n = l + o(1)$
Equivalenza Asintotica	$a_n \sim b_n \iff \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$
Algebra di $o(1)$	$o(1) \pm o(1) = o(1)$, $o(1)\cdot o(1) = o(1)$, $\frac{1}{1+o(1)} = 1 + o(1)$
Proprietà del Prodotto Asintotico	$a_n \sim a'_n \wedge b_n \sim b'_n \Rightarrow a_n b_n \sim a'_n b'_n$
Proprietà del Quoziente Asintotico	$a_n \sim a'_n \wedge b_n \sim b'_n \Rightarrow a_n/b_n \sim a'_n/b'_n$

VII. Serie Numeriche ($\sum a_n$)

Definizioni e Condizioni

Concetto	Formula/Condizione
Serie Numerica	$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$
Somma Parziale	$S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$
Convergenza (Carattere)	S converge se $\lim_{k\to+\infty} S_k \in \mathbb{R}$
Criterio Necessario	Se $\sum a_n$ converge, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
Convergenza Assoluta	$\sum a_k$ converge assolutamente se $\sum \lvert a_k\rvert$ converge
Teorema Assoluta $\Rightarrow$ Semplice	[$\sum \lvert a_k\rvert$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge]
Disuguaglianza triangolare (Serie)	$\lvert\sum a_k\rvert \leq \sum \lvert a_k\rvert$

Serie Specifiche e Somme

Tipo di Serie	Formula Somma / Condizione
Serie Geometrica	Se $\lvert r\rvert< 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$
Serie Telescopica	$\sum_{n=0}^{+\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_0 - \lim_{k\to+\infty} b_{k+1}$

Criteri per Serie a Termini Non Negativi ($a_n \geq 0$)

Criterio	Condizione / Risultato
Confronto (i)	Se $0 \leq a_n \leq b_n$ e $\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty$
Confronto (ii)	Se $0 \leq a_n \leq b_n$ e $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge
Rapporto ($\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = l$)	Converge se $l \in [0, 1)$, Diverge se $l \in (1, +\infty]$
Radice ($\lim \sqrt[k]{a_k} = l$)	Converge se $l \in [0, 1)$, Diverge se $l \in (1, +\infty]$
Confronto Asintotico ($l \in (0, +\infty)$)	$\sum a_k \wedge \sum b_k$ hanno lo stesso carattere
Confronto Asintotico ($l = 0$)	Se $\sum b_k$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge

Criterio per Serie a Segni Alterni

Criterio di Leibniz (per $\sum(-1)^k a_k, a_k \geq 0$)	Condizioni per convergenza semplice
	(i) $a_k \geq 0$ (definitivamente non negativi) (ii) $\lim a_k = 0$ (infinitesima) (iii) $a_{k+1} \leq a_k$ (definitivamente monotona non crescente)

Serie di Potenze Centrate in x_0

Concetto	Formula / Condizione
Definizione	$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - x_0)^k$
Raggio di Convergenza (r)	$r = \frac{1}{\lim_{k\to+\infty} \frac{\lvert a_{k+1}\rvert}{\lvert a_k\rvert}}$ oppure $r = \frac{1}{\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\lvert a_k\rvert}}$
Convergenza Assoluta	$\lvert x - x_0\rvert< r$
Non Convergenza	$\lvert x - x_0\rvert> r$

VIII. Somme e Disuguaglianze per Induzione

Sommatoria	Formula
Somma interi	$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
Somma quadrati	$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Somma cubi	$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$