LSML #5

Трюки с хэшированием

Хэширование полезно

- Уже знаем:
  - Хэширование признаков (vowpal wabbit)

- Узнаем сегодня для ***больших*** множеств:
  - Определение принадлежности множеству (Bloom Filter)
  - Оценка частот элементов множества в потоке (Count-min sketch)
  - Оценка похожести двух множеств (MinHash)
  - Отбор самых похожих множеств на заданное (LSH)

Будем решать приближенно!

Bloom Filter (1970)

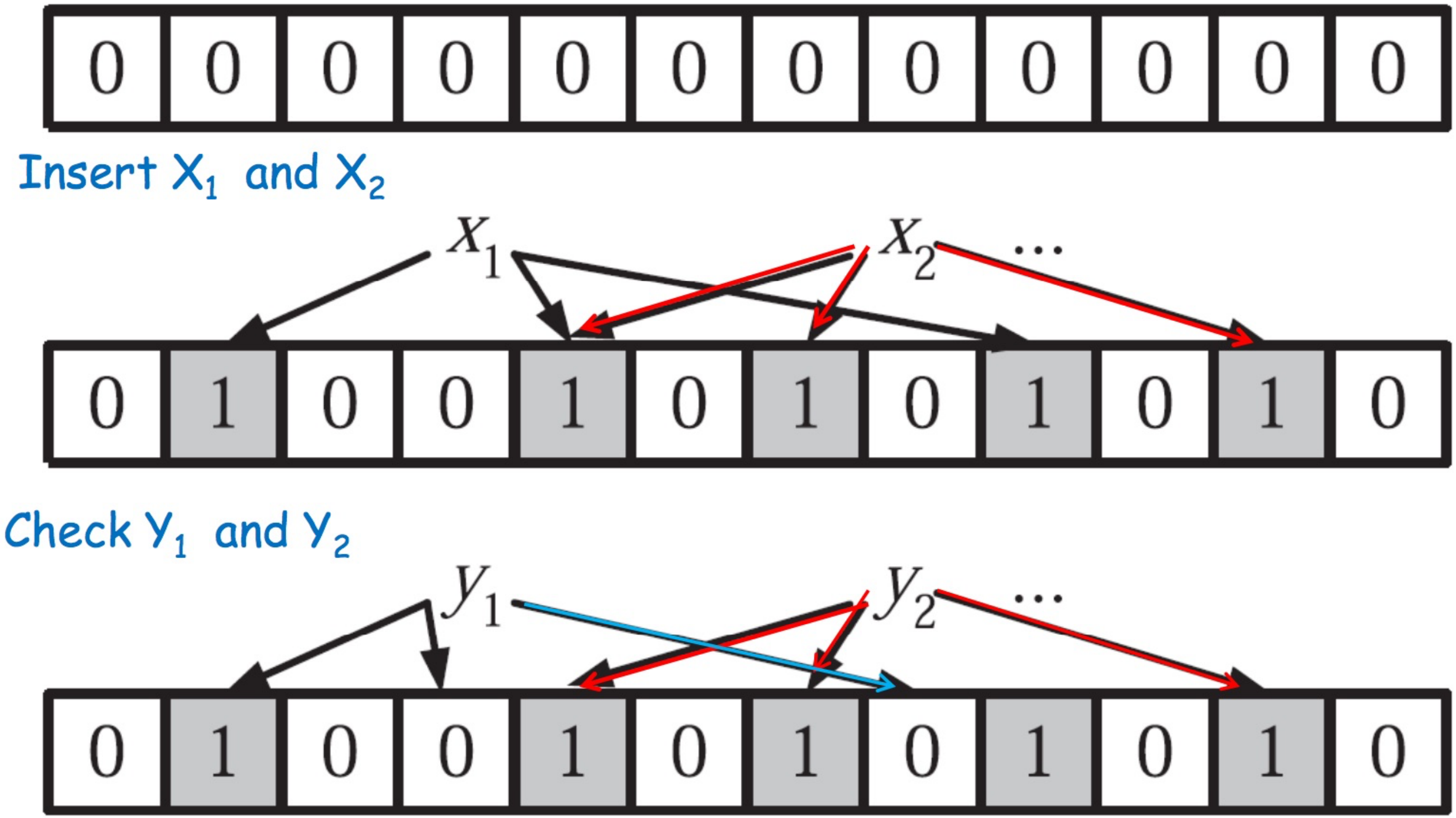
- **Определение принадлежности множеству (в память не лезет)**
- Bloom Filter – это массив из m бит, который хранит информацию о множестве $S = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$. Начинаем с массива нулей.
- Для работы фильтра нам нужно k независимых хэш-функций $h_1, \ldots, h_k$ с m корзинками (равномерно раскидывают по корзинкам).
- При вставке каждого элемента $x \in S$ выставляем биты $h_i(x)$ в 1 для всех $i \in [1, k]$.

https://en.wikipedia.org/wiki/Bloom_filter http://www.cs.utexas.edu/users/lam/396m/slides/Bloom_filters.pdf

Вставка и проверка принадлежности

$m = 12$

$k = 3$



y_1 **точно** нет
y_2 **возможно** есть

То есть может быть только false positive

- Вероятность того, что $h_i(x)$ не выставит бит j: $1 - \frac{1}{m}$
- Вероятность того, что ни одна из k хэш-функций не выставит: $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^k$
- Мы вставили n элементов, значит вероятность не выставить: $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{kn}$
- Вероятность того, что бит j в фильтре выставлен: $1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{kn}$
- Вероятность того, что k бит будут уже выставлены:

$$\boxed{\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m \approx e^{-1}}$$

$$\left(1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{kn}\right)^k \approx \left(1 - e^{-kn/m}\right)^k$$

Оптимальные параметры для заданной ошибки

- Минимизируем $\left(1 - e^{-kn/m}\right)^k$ по k: $k = \frac{m}{n}\ln 2$

substituting the optimal value of *k* in the probability expression above:

$$p = \left(1 - e^{-\left(\frac{m}{n}\ln 2\right)\frac{n}{m}}\right)^{\frac{m}{n}\ln 2}$$

which can be simplified to:

$$\ln p = -\frac{m}{n}(\ln 2)^2.$$

This results in:

$$m = -\frac{n \ln p}{(\ln 2)^2}$$

So the optimal number of bits per element is

$$\frac{m}{n} = -\frac{\log_2 p}{\ln 2} \approx -1.44\log_2 p$$

with the corresponding number of hash functions *k* (ignoring integrality):

$$k = -\frac{\ln p}{\ln 2} = -\log_2 p.$$

Хотим:

$n = 10^6$ $\quad p = 0.01$

Рассчитываем:

$m = 10^7$ $\quad k = 7$

https://hur.st/bloomfilter/?n=1M&p=0.01&m=&k=

https://en.wikipedia.org/wiki/Bloom_filter

А профит вообще есть?

- Предыдущий пример:
  $n = 10^6 \quad p = 0.01 \quad m = 10^7 \quad k = 7$

- Пусть множество из строк длины 1024 (например URL страниц)

- Для хранения множества нужно 1024×10^6 байт, то есть **1 ГБ**

- Для хранения фильтра: 10^7 бит, то есть **1.2 МБ**

Примеры применения

- Medium uses Bloom filters to avoid recommending articles a user has previously read.

- Bitcoin uses Bloom filters to speed up wallet synchronization.

- Google Bigtable, Apache HBase and Apache Cassandra, and PostgreSQL use Bloom filters to reduce the disk lookups for non-existent rows or columns.

https://en.wikipedia.org/wiki/Bloom_filter

Пример из ML практики

- Нужно сделать **join:**
  - огромной таблицы с логами юзеров
  - и набором интересующих юзеров (*не влезает в память*)

- Простой join на MapReduce будет шафлить (куча пересылок по сети) огромное количество логов зря → медленно

- Сделаем Map шаг (без пересылок по сети) с фильтрацией огромной таблицы при помощи Bloom Filter → суммарно в 4 раза быстрее

Операции над множествами

- Bloom Filter заменяет нам само множество с небольшими потерями

- Для объединения множеств нужно применить побитовый OR
- Для пересечения множеств – побитовый AND
- Вычитать сложнее – нужен Counting Bloom Filter…

- Создание Bloom Filter легко распараллелить!

Count-min sketch (2003)

- **Оценка частот элементов множества в потоке (поток и множество большие)**

- Заведем двумерный массив из d строк и w столбцов.
- Положим $w = \lceil e/\varepsilon \rceil$ и $d = \lceil \ln 1/\delta \rceil$, где ошибка в запросе частоты в пределах аддитивной добавки ε с вероятностью $1 - \delta$.

https://en.wikipedia.org/wiki/Count–min_sketch http://www.corelab.ece.ntua.gr/courses/ds.grad/count-min.ppt

Модель потока

- В момент времени t счетчики для всех n элементов:

$$\vec{a}(t) = (a_1(t), \ldots, a_i(t), \ldots a_n(t))$$

- Начинаем с нулей:

$$a_i(0) = 0 \quad \forall i$$

- На шаге t увеличиваем счетчик элемента i_t на c_t:

$$a_{i'}(t) = a_{i'}(t-1) \quad \forall i' \neq i_t$$

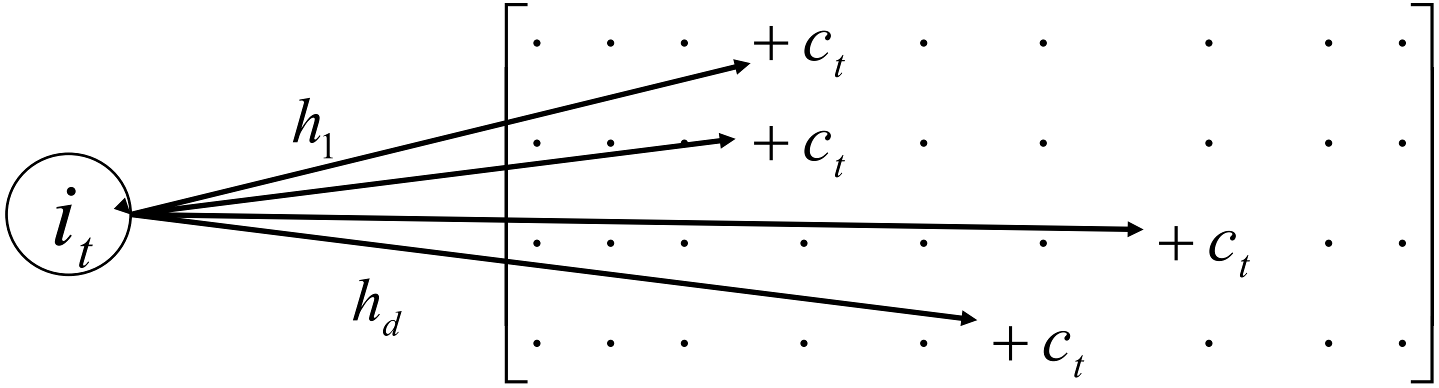
$$a_{i_t}(t) = a_{i_t}(t-1) + c_t$$

Обновление массива

- Пусть $h_i(x), i \in [1, d]$ – попарно независимые хэш-функции с w корзинками

When (i_t, c_t) arrives, set $\forall 1 \le j \le d$

$$count[j, h_j(i_t)] \leftarrow count[j, h_j(i_t)] + c_t$$



Будем хранить счетчики, а не частоту

Какие запросы можно делать

- point query $Q(i) \xrightarrow{\text{approx.}} a_i$

- range queries $Q(l,r) \xrightarrow{\text{approx.}} \sum_{i=l}^{r} a_i$

- inner product queries $Q(\vec{a},\vec{b}) \xrightarrow{\text{approx.}} \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

Point query ($a_{i_t}(t) > 0$)

$$Q(i) \Rightarrow \hat{a}_i = \min_j count[j, h_j(i)]$$

- Теорема: $a_i \le \hat{a}_i$ $\qquad P[\hat{a}_i > a_i + \varepsilon \|\vec{a}\|_1] \le \delta$

$$P\left[\frac{\hat{a}_i}{\|a\|_1} > \frac{a_i}{\|a\|_1} + \varepsilon\right] \le \delta$$

То есть частота оценивается хорошо

Point query ($a_{i_t}(t) > 0$)

$$Q(i) \Rightarrow \hat{a}_i = \min_j count[j, h_j(i)]$$

- Теорема: $\bigstar$ $a_i \le \hat{a}_i$ $\quad P[\hat{a}_i > a_i + \varepsilon\|\vec{a}\|_1] \le \delta$

$$I_{i,j,k} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i \ne k) \wedge (h_j(i) = h_j(k)) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\boxed{w = \lceil e/\varepsilon \rceil}$$

$$E(I_{i,j,k}) = \Pr[h_j(i) = h_j(k)] \le \frac{1}{w} = \frac{\varepsilon}{e}$$

$$X_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} I_{i,j,k} a_k \Rightarrow count[j, h_j(i)] = a_i + X_{i,j} \Rightarrow \min count[j, h_j(i)] \ge a_i$$

Point query ($a_{i_t}(t) > 0$)

$$Q(i) \Rightarrow \hat{a}_i = \min_j count[j, h_j(i)]$$

- Теорема: ★ $a_i \le \hat{a}_i$ ★ $P[\hat{a}_i > a_i + \varepsilon\|\vec{a}\|_1] \le \delta$

$$E(X_{i,j}) = E\left(\sum_{k=1}^{n} I_{i,j,k} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k E(I_{i,j,k}) \le \frac{\varepsilon}{e}\|\vec{a}\|_1$$

$$\Pr[\hat{a}_i > a_i + \varepsilon\|\vec{a}\|_1] = \Pr[\forall j.\, count[j, h_j(i)] > a_i + \varepsilon\|\vec{a}\|_1]$$ *для всех j одновременно*

$$= \Pr[\forall j.\, a_i + X_{i,j} > a_i + \varepsilon\|\vec{a}\|_1]$$

$$<= \Pr[\forall j.\, X_{i,j} > eE(X_{i,j})] < e^{-d} \le \delta$$

$$\boxed{d = \lceil \ln 1/\delta \rceil}$$

Markov inequality

$$\Pr[X \ge t] \le \frac{E(X)}{t} \quad \forall t > 0$$

Оценки сложности

$$\boxed{w = \lceil e/\varepsilon \rceil} \qquad \boxed{d = \lceil \ln 1/\delta \rceil}$$

Time to produce the estimate $O(\ln \frac{1}{\delta})$

Space used $O(\frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\delta})$

Time for updates $O(\ln \frac{1}{\delta})$

Inner Product Query

Есть счетчики для двух потоков: a и b

Set $$(\vec{a} \hat{\cdot} \vec{b})_j = \sum_{k=1}^{w} count_{\vec{a}}[j,k] * count_{\vec{b}}[j,k]$$

$$Q(\vec{a},\vec{b}) \Rightarrow (\vec{a} \hat{\cdot} \vec{b}) = \min_j (\vec{a} \hat{\cdot} \vec{b})_j$$

Например, для оценки размера **join** двух таблиц:

`x join y on x.`**`a`**`=y.`**`b`**

Inner Product Query

- Теорема: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \le (\vec{a} \,\hat{\cdot}\, \vec{b})$ $\qquad \Pr[(\vec{a} \,\hat{\cdot}\, \vec{b}) > \vec{a} \cdot \vec{b} + \varepsilon \|\vec{a}\|_1 \|\vec{b}\|_1] \le \delta$

$$\boxed{(\vec{a} \,\hat{\cdot}\, \vec{b})_j = \sum_{k=1}^{w} count_{\vec{a}}[j,k] * count_{\vec{b}}[j,k]} \qquad \boxed{(\vec{a} \,\hat{\cdot}\, \vec{b}) = \min_j (\vec{a} \,\hat{\cdot}\, \vec{b})_j}$$

$$(\vec{a} \,\hat{\cdot}\, \vec{b})_j = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{p \ne q, h_j(p) = h_j(q)} a_p b_q \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b}) \le (\vec{a} \,\hat{\cdot}\, \vec{b})$$

$$E(\vec{a} \,\hat{\cdot}\, \vec{b}_j - \vec{a} \cdot \vec{b}) = \sum_{p \ne q} \Pr[h_j(p) = h_j(q)] a_p b_q \le \sum_{p \ne q} \frac{\varepsilon a_p b_q}{e} \le \frac{\varepsilon \|\vec{a}\|_1 \|\vec{b}\|_1}{e}$$

Так же, как в прошлый раз

Markov inequality

$$\Pr[X \ge t] \le \frac{E(X)}{t} \quad \forall t > 0$$

$$\Pr[\vec{a} \,\hat{\cdot}\, \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} > \varepsilon \|\vec{a}\|_1 \|\vec{b}\|_1] \le \delta$$

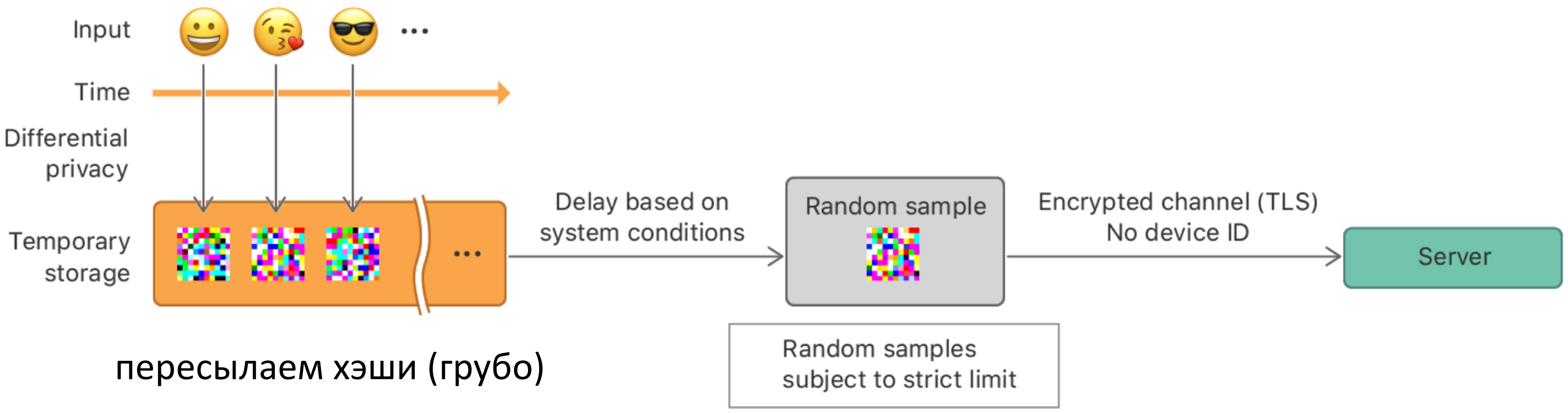
минимум из d штук

Примеры применений

- Статистики для больших корпусов в NLP
  - http://www.aclweb.org/anthology/D12-1100
- Приближенные статистики в Apache Spark
  - https://databricks.com/blog/2016/05/19/approximate-algorithms-in-apache-spark-hyperloglog-and-quantiles.html
  - https://mapr.com/blog/some-important-streaming-algorithms-you-should-know-about/

Пример от Apple

- Learning with Privacy at Scale (2017)
- Нельзя передавать в открытую все, что печатает юзер на клавиатуре
- Отошлем Count-Mean Sketch и проверим только интересные нам слова

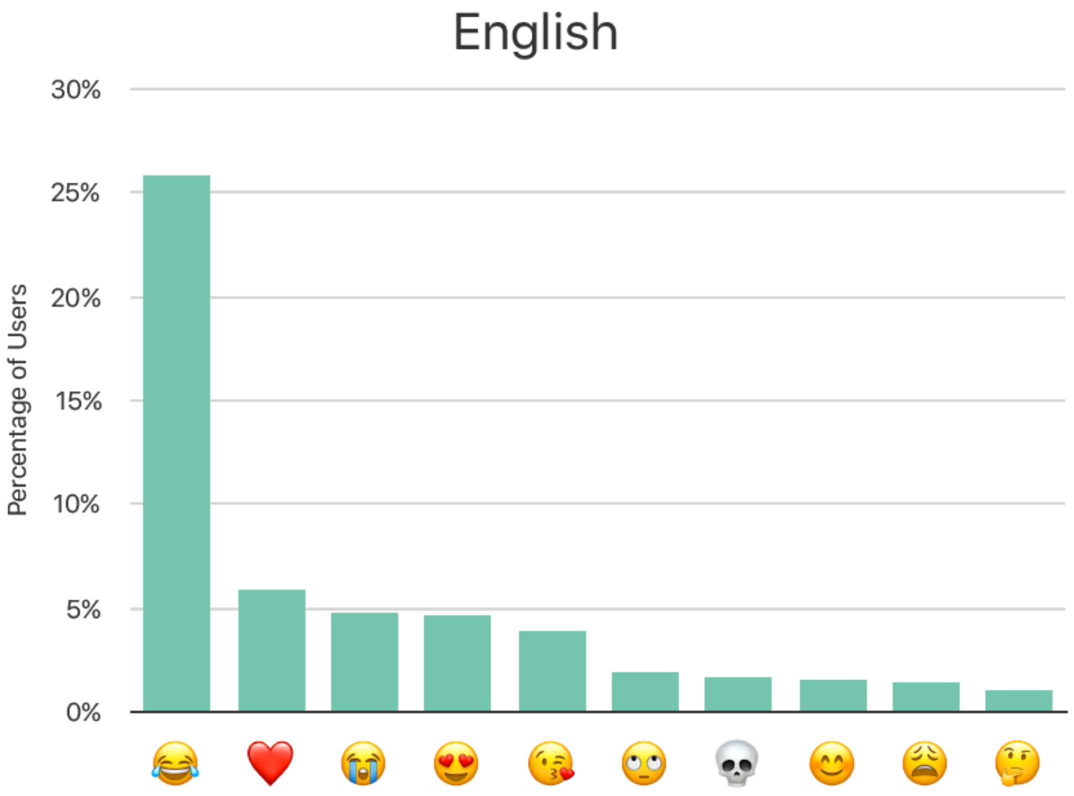


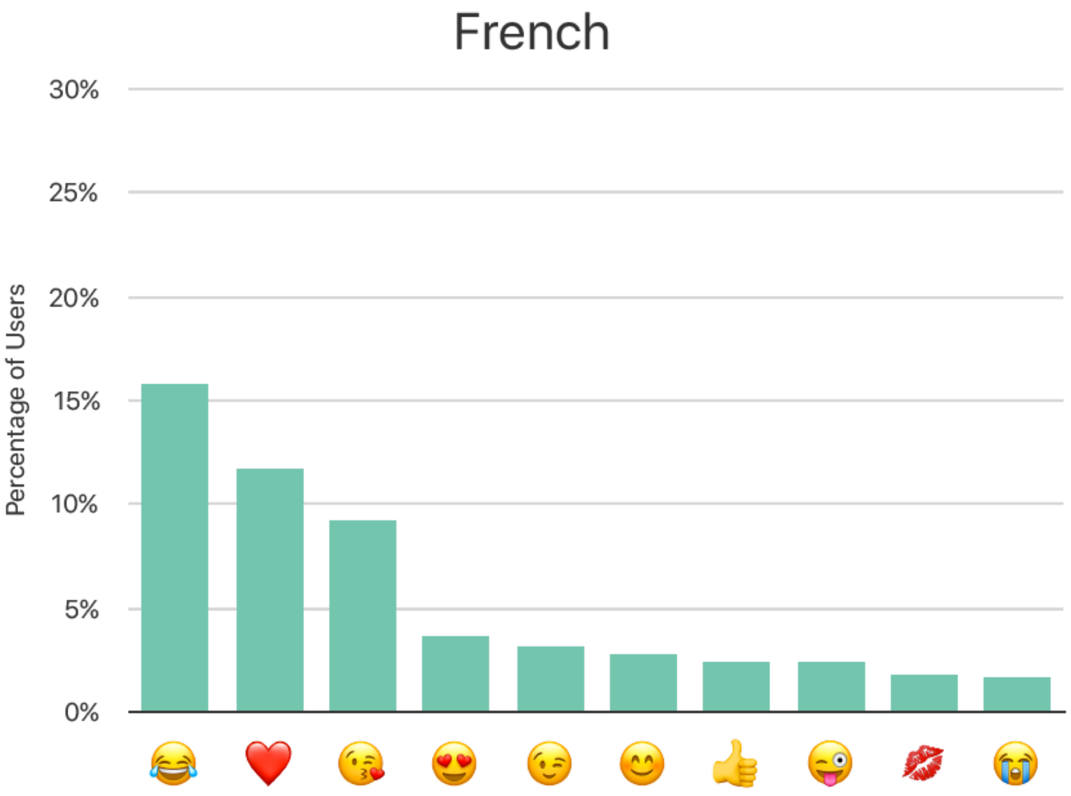
пересылаем хэши (грубо)

https://machinelearning.apple.com/2017/12/06/learning-with-privacy-at-scale.html

Пример от Apple

- Можно восстановить распределение





Можем узнать частоту интересных нам смайликов