

点云模型的谱聚类分割

马 腾, 龙 翔, 冯 路, 骆 沛, 吴壮志*

(北京航空航天大学计算机学院 北京 100191)

(zzwu@buaa.edu.cn)

摘 要: 为了实现点云模型的有意义分割, 提出一种基于谱聚类的分割算法. 首先用图 G 表示点云模型, 将分割问题转化为图切割问题; 然后根据归一化的非对称 Laplacian 矩阵构造谱聚类空间; 最后通过移除掉多余的特征向量, 在一个更低维的空间中找到了分割问题的松弛解. 文中还给出了该算法相关定理的证明, 并通过实验验证了算法的正确性和有效性.

关键词: 点云模型; 点云分割; 谱聚类; Laplacian 矩阵

中图法分类号: TP391

Point Cloud Segmentation Based on Spectral Clustering

Ma Teng, Long Xiang, Feng Lu, Luo Pei, and Wu Zhuangzhi*

(Department of Computer Science and Technology, Beihang University, Beijing 100191)

Abstract: A spectral clustering based method is proposed to segment point cloud into meaningful subparts. By representing the point cloud as a graph G , the segmentation problem can be turned into a graph min-cut problem. The nonsymmetric normalized Laplacian matrix is used to construct the spectral space. By removing redundant eigenvectors from the spectral domain, the segmentation solution is found in a lower dimensional space. The theoretical guarantee of the proposed method is proved. The accuracy and efficiency of the algorithm are verified by experimental results.

Key words: point cloud model; point cloud segmentation; spectral clustering; Laplacian matrix

作为对三维模型做进一步处理的基础, 模型分割是近年来国际学术界的一个前沿研究领域, 它在计算机图形学、计算机辅助几何设计和数字几何处理等方面有着广泛的应用. 例如, 模型简化可以通过模型分割生成模型的逼近表示, 模型压缩可以基于模型分割结果对分割出的部分分别进行压缩. 此外, 模型交互编辑、模型匹配与检索、参数化与纹理映射、碰撞检测、几何变形和计算机动画等工作都需要对模型进行分割以方便后续开发.

模型分割是指根据一定的几何、拓扑或语义特

征, 将三维模型分割为一组数目有限的、各自具有简单形状意义的且各自连通的子部分^[1]. 基于心理物理学, Hoffman 等^[2]提出了视觉理论的最小值原则: 人类在对物体进行识别时, 往往将复杂的物体看成简单的基本元素的组合; 而在将物体分割为几个组成要素时, 倾向于把最小的负曲率线定义为各组成要素的边界. 根据该规则得到的分割结果称为有意义的分割. 尽管三角网格模型是三维模型的主流表示方式, 但是这种表示方法也有以下不足:

1) 三角网格模型不是扫描设备的标准输出格式,

收稿日期: 2011-12-30; 修回日期: 2012-08-23. 基金项目: 国家科技支撑计划(2008BAH29B00). 马 腾(1983—), 男, 博士, 主要研究方向为计算机图形学、计算几何、数字几何处理; 龙 翔(1963—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为计算机体系结构、分布式并行处理、嵌入式系统、计算机网络安全; 冯 路(1982—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为计算机图形学、计算几何、计算同调; 骆 沛(1983—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为计算机图形学、图像处理、压缩传感; 吴壮志(1969—), 男, 博士, 副教授, 论文通讯作者, 主要研究方向为计算几何、计算机图形学、数字几何处理、三维人体测量、三维视觉测量.

目前存在多种三角网格模型格式,如 PLY, STL, OFF, OBJ, 3DS 等,在模型处理时可能需要在不同的格式间进行转换。

2) 三角网格模型需要对原始采样点云进行曲面重建,这个过程十分复杂而且计算量大。在很多应用中,并不需要对点云数据进行全局的重建。

3) 三角网格模型需要保存拓扑信息。一般来说,模型中拓扑信息的数据量是几何信息的 2 倍,而拓扑信息是可以通过几何信息重构得到的,因此模型数据中存在大量的冗余数据。同时,维护这些拓扑信息会导致网格模型的处理变得复杂,当拓扑改变时,在某些情况下可能需要完全重建网格以保持拓扑信息的一致性。

与三角网格模型相比,点云模型是扫描设备标准输出格式,不需要对曲面进行重建,也不需要维护各点之间的拓扑关系,同样也引起了学术界的极大关注。基于点的图形学也成为了计算机图形学一个新的研究领域^[3-4]。通过将点云模型表示为图,点云模型的分割问题可以转化为图切割问题。谱聚类算法是建立在图论中的谱图理论基础上的聚类算法,其本质是将聚类问题转化为图的最优划分问题。谱聚类算法能对任意形状的样本空间进行划分,且收敛于全局最优解,已经被成功地应用到三角网格模型分割上^[5]。该算法首先根据网格模型上三角形的邻接关系构造三角形的相似矩阵 W ,通过使用 W 的度矩阵 D (具体定义见第 3 节)对 W 进行归一化,得到矩阵 $N=D^{-1/2}WD^{-1/2}$ 。基于 N 是分块对角对称矩阵,使用特征分解得到了 N 的特征向量,然后根据这些特征向量进行聚类,实现了三角网格模型的分割。一般来说,分块对角矩阵都存在一组特征向量满足:在分块外的元素为 0,分块内的元素为实值。基于这些特征向量进行聚类能够很好地对模型进行分割。但是,矩阵的分块对角化是能够使用谱聚类的必要条件,而不是充分条件。矩阵还需要满足以下 2 个性质:

1) 矩阵的特征值和特征向量的顺序是有意义的。在谱聚类中,如果取前 m 个特征向量,则这 m 个特征向量就应该对应着 m 个连通部分。

2) 特征向量的每个元素必须能够和 0 区分开。在理想情况下,如果第 j 个点属于第 i 个连通部分,则第 i 个特征向量的第 j 个分量不为 0;否则,该分量应该为 0 (在实际计算中,该分量可以是一个接近于 0 的实数)。

矩阵 N 只满足第一个性质。由于矩阵 N 的特征

向量不是指示向量(指示某个点属于哪个连通部分,具体定义见第 3 节),在聚类时需要将谱空间中的点再次归一化,此时很容易将接近于 0 的实数乘上一个很大的系数,这样就无法得到想要的聚类结果了。

本文提出的点云模型分割算法使用归一化的非对称 Laplacian 矩阵 L_{rw} 进行特征分解。由于 Laplacian 矩阵可以保证任意连通的部分都有一个与 0 特征值对应的特征向量,如果特征值是按递增顺序排列的,则 m 个连通部分就对应着前 m 个特征向量。 L_{rw} 的特征向量为指示向量,因此不需要多次归一化,而可以直接根据特征向量进行聚类。由于点云模型缺少面信息,文献[5]使用的分割方法(为了叙述方便,本文简称为 LZ 分割算法)不能直接应用到点云模型上。本文研究了使用谱聚类算法对点云模型进行分割的理论背景,提出了一种基于谱聚类的点云模型分割算法。该算法基于归一化的非对称 Laplacian 矩阵,避免了构造谱空间时多次归一化造成的误差;通过移除掉多余的特征向量,在一个更低维的聚类空间中进行模型分割;基于视觉理论的最小值原则,使用归一化的几何矩定义相似矩阵,使分割结果对模型的平移、旋转和缩放变换无关。

1 相关工作

国内外学者对三维模型分割进行了大量的研究,相关的综述文章可以参考文献[1, 6-9]。这些工作中大多数都是基于三角网格模型的,与网格模型分割相比,点云模型分割方法相对较少。

2003 年, Dey 等^[10]根据模型的拓扑结构定义了形状的特征,通过使用 Delaunay 三角化对点云模型进行了分割;在随后的工作中, Dey 等^[11]对该方法进行了改进,使其能够处理带噪声的点云数据。

2005 年, 肖春霞等^[12]采用虚拟的测地线技术,使用移动最小二乘法和 Level Set 法计算点云模型上点之间测地距离和测地线。通过人机交互实现了对点云模型的区域分割。柯映林等^[13]基于采样点的曲率,使用空间栅格结构建立采样点的拓扑关系,然后根据特征栅格的空间位置与曲面栅格的连通性实现了散乱点云数据的分割。在随后的一篇文章中,柯映林等^[14]将采样点的几何属性值映射到法曲率坐标系和高斯球上,使用假设检验法识别映射点的分布模式,分割出了与二次曲面、拉伸面和直纹面等特征曲面对应的数据区域。

2006 年, Rabbani 等^[15]提出了一种使用平滑约

束对点云模型进行分割的算法,首先根据采样点的 k 最近邻域点估算每个采样点的法矢,然后检测出点云模型中平滑连接的区域,最后使用区域增长法对点云模型进行分割.孙红岩等^[16]根据点之间的平均距离定义类间距离,采用 K -means 聚类分析方法对三维点云模型进行分割;与此类似的还有 Fransens 等^[17]提出的基于主成分分析的点云模型分割算法,其使用聚类合并平坦区域中的采样点,实现了点云模型的层次分割.Yamazaki 等^[18]使用拓扑方法定义了点云模型上梯度流场的特征,根据 Morse 理论得到点云模型上由这些特征确定的超节点,然后使用谱分析对由这些超节点构成的图进行层次二分,同时保证每个分割子部分至少包含一个特征;但该方法需要计算所有点对间的测地距离,因此分割过程非常耗时.最近,Yamazaki 等^[19]构造了一个加权超节点图来描述各超节点间的关系,同时只选取部分采样点参与运算,因此算法效率和分割质量都得到了提高.

2007 年,Zou 等^[20]将网格模型上提出的层次模糊聚类分割方法^[21]扩展到点云模型上,通过构造点云模型的有向包围盒树(oriented boundary box tree, OBBT)建立拓扑关系,不同深度的 OBBT 对应点云模型不同层次的逼近;然后使用模糊聚类法对点云模型进行了分割.吴世雄等^[22]首先计算点云数据中每个采样点的主曲率和主方向,然后根据每个采样点在其邻域内主方向的曲率变化确定该点是否为边界点,最后使用区域增长法实现点云模型的分割.对于输入的点云模型,Miao 等^[23]认为分割边界位于模型的高曲率区域,通过构造模型的体素网格,使用水平集演化的方法实现了点云模型的分割.

在近年来的工作中,Lai 等^[24]将图像分割中的随机游走方法扩展到三维模型上,通过使用不同的概率分布模型实现了三角网格模型和点云模型的分割;Richsfeld 等^[25]提出了一个基于径向反射的点云模型层次分割方法,首先将所有的点射向点云中心,然后通过计算这些内部点的凸包来提取核心部分,最后使用泛洪法计算每个分割子部分;Ning 等^[26]基于人类感知提出了一种点云模型分解的框架,通过计算采样点的曲率和法向变化,使用区域增长法对点云模型进行分割,根据分割结果构造了一个语义图来描述点云模型.

本文提出的点云模型分割算法是基于谱聚类理论的,依照视觉理论的最小值原则,使用角度距离和归一化的几何矩来描述采样点间的相似性,在得到

有意义的分割结果的同时,还能使算法对模型的平移、旋转和缩放变换无关.

2 谱聚类理论

设点云模型为点集 $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, 点 p_i 和 p_j 的相似性为 $s_{ij} \in [0, 1]$ ($s_{ij} = s_{ji}$). P 可以用无向带权图 $G = (V, E)$ 来表示: 顶点 $v_i \in V$ 表示点 p_i , 当 s_{ij} 为正或者大于某个阈值时, v_i 和 v_j 被 E 中的一条边相连, 该边的权值为 $w_{ij} = s_{ij}$.

图 G 的相似矩阵定义为 $W = (w_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, 顶点的度定义为 $d_i = \sum_{j=1}^n w_{ij}$. 度矩阵定义为对角线元素是 d_1, \dots, d_n 的对角矩阵.

设集合 $A \subset V$, \bar{A} 表示 A 的补集, $|A|$ 表示 A 的顶点个数. 设 $n = |V|$, A 的指示向量定义为 $\mathbf{I}_A = (f_1, \dots, f_n)' \in \mathbb{R}^n$; 当 $v_i \in A$ 时, $f_i = 1$, 否则 $f_i = 0$. 定义 $v(A) = \sum_{i \in A} d_i$. 对子集 $A, B \subset V$, 定义

$$w(A, B) = \sum_{i \in A, j \in B} w_{ij}.$$

非归一化的 Laplacian 矩阵定义为 $L = D - W$. 归一化的 Laplacian 矩阵有 2 个: 一个是对称矩阵 $L_{\text{sym}} = D^{-1/2} L D^{-1/2}$; 另一个是非对称矩阵 $L_{\text{rw}} = D^{-1} L$, 其与随机游走(random walks)有关.

命题 1. 归一化的 Laplacian 矩阵有如下性质^[27]:

1) 所有的向量 $f \in \mathbb{R}^n$, 都满足: $f' L_{\text{sym}} f = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n w_{ij} \left(\frac{f_i}{\sqrt{d_i}} - \frac{f_j}{\sqrt{d_j}} \right)^2$, $f' L_{\text{rw}} f = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n w_{ij} (f_i - f_j)^2$.

2) 当且仅当 L_{sym} 的特征值 λ 对应的特征向量为 $D^{1/2} u$ 时, L_{rw} 有特征值 λ , 其对应的特征向量为 u .

3) 当且仅当 λ 和 u 是广义特征值问题 $Lu = \lambda Du$ 的解时, L_{rw} 有特征值 λ , 其对应的特征向量为 u .

4) 0 是 L_{rw} 的特征值, 其对应的特征向量为元素全为 1 的常量向量 $\mathbf{1}$. 0 是 L_{sym} 的特征值, 其对应的特征向量为 $D^{1/2} \mathbf{1}$.

5) L_{sym} 和 L_{rw} 是半正定矩阵, 它们有 n 个非负的特征值 $0 = \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

归一化的 Laplacian 矩阵 0 特征值的个数和图 G 的连通部分的个数有关.

命题 2. 设图 G 的连通部分为 A_1, \dots, A_m , 则^[27] L_{sym} 和 L_{rw} 的 0 特征值的个数为 m . L_{sym} 的 0 特征值

对应的特征空间由指示向量 $D^{1/2} I_{A_i}$ 张开, L_{rw} 的 0 特征值对应的特征空间由指示向量 I_{A_i} 张开.

谱聚类算法将聚类问题转化为图的最优切割问题, 设图 G 被分成 A_1, \dots, A_m , 则图的最优切割需要使目标函数

$$c(A_1, \dots, A_m) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m w(A_i, \bar{A}_i) \quad (1)$$

最小^[27].

常用的切割标准是 RatioCut^[28] 和 NCut^[29],

$$c_R(A_1, \dots, A_m) = \sum_{i=1}^m \frac{c(A_i, \bar{A}_i)}{|A_i|} \quad (2)$$

$$c_N(A_1, \dots, A_m) = \sum_{i=1}^m \frac{c(A_i, \bar{A}_i)}{v(A_i)} \quad (3)$$

RatioCut 和 NCut 的优化问题分别可以转换为非归一化的谱聚类 and 归一化的谱聚类. 由式(2)(3)可知, RatioCut 和 NCut 在优化时都要最小化 $c(A, \bar{A})$. 这就使得不同类中的点间的相似性最小. 由于 $w(A, A) = w(A, V) - w(A, \bar{A}) = v(A) - c(A, \bar{A})$, 当 $v(A)$ 越大、 $c(A, \bar{A})$ 越小时, $w(A, A)$ 越大, 因此 NCut 还能最大化 $w(A, A)$, 这就使得相同类中的顶点之间的相似性最大化. 所以, 使用归一化的 Laplacian 矩阵进行谱聚类能产生更好的结果.

如果用图 $G = (V, E)$ 来表示点云数据 P , 则 P 的分割可以通过优化目标函数式(1)实现. 根据命题 2, L_{rw} 的 0 特征值对应的特征向量为指示向量 I_{A_i} , 因此本文使用 L_{rw} 作为 Laplacian 矩阵, 并选择式(3)为优化函数. 如果将 P 分成 m 部分, 如文献[27]中所述, NCut 的最优化问题可以通过最小化

$$\min_{U \in \mathbb{R}^{n \times m}} \text{tr}(U' L_{rw} U) = I \quad (4)$$

来得到一个松弛解, 其中 $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹.

谱聚类中的谱映射过程和傅里叶变换类似, 对输入的数据做了一个从原始空间到另一个空间的变换. 在傅里叶变换中, 输入的时域信号被分解为几个频域分量的线性组合, 通过分析频域中不同频率的参数, 使得原来那些难以处理的时域信号变得易于处理. 谱映射将输入的数据映射到谱空间中, 将原始数据表示为不同频谱的组合. 为了说明在谱域中能够更好地对点云数据进行分割, 本节给出几个定理.

定理 1. 设实对称矩阵 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的特征值为

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n, \text{ 则 } \min_{U \in \mathbb{R}^{n \times m}, U'U = I_m} \text{tr}(U' S U) = \sum_{i=1}^m \lambda_i, \text{ 其中 } I_m \text{ 为 } m \times m \text{ 的单位矩阵, } 0 \leq m \leq n.$$

根据定理 1 可知, 式(4)的最小值为 $\sum_{i=1}^m \lambda_i$.

定理 2. 设实对称矩阵 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的特征值为 $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, 设 F 为 \mathbb{R}^n 的子空间, 则^[31]

$$\lambda_i = \min_{\dim(F)=i} \max_{x \in F, \|x\|_2=1} x' S x \quad (5)$$

定理 2 和 Rayleigh 熵有着密切的联系. 非 0 向量 x 和实对称矩阵 S 的 Rayleigh 熵定义为 $R(S, x) = \frac{x' S x}{x' x}$. S 的特征向量 ϕ_1, \dots, ϕ_n 提供了一组单位正

交基, 可以用这组基将 x 展开为 $x = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i$, 其中 $c_i = \phi_i' x$. 由此可以得到

$$R(S, x) = \frac{(\sum_{i=1}^n c_i \phi_i)' (\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \phi_i)}{(\sum_{i=1}^n c_i \phi_i)' (\sum_{i=1}^n c_i \phi_i)} = \frac{(\sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i)}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \quad (6)$$

如果 x 是某个特征向量 ϕ_i , 则 $x' S x = \frac{x' S x}{x' x} = \lambda_i$. 所以, 式(5)的最小值可以通过令 $x = \phi_i$ 得到.

推论 1. 设实对称矩阵 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的特征值为 $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, 对应的特征向量为 ϕ_1, \dots, ϕ_n , 当矩阵 $U \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $0 \leq m \leq n$ 的列向量为 ϕ_1, \dots, ϕ_m 时,

$$\text{tr}(U' S U) = \sum_{i=1}^m \lambda_i.$$

$$\text{证明. } \text{tr}(U' S U) = \sum_{i=1}^m \text{tr}(\phi_i' S \phi_i) = \sum_{i=1}^m \text{tr}(\frac{\phi_i' S \phi_i}{\phi_i' \phi_i}).$$

$$\text{由于 } \phi_i \text{ 是 } S \text{ 的特征向量, 根据式(6) 可知 } \text{tr}(U' S U) = \sum_{i=1}^m \frac{c_i^2 \lambda_i}{c_i^2} = \sum_{i=1}^m \lambda_i. \quad \text{证毕.}$$

推论 1 意味着当 U 的列向量为 L_{rw} 的前 m 个特征向量时, 能够在空间 $\mathbb{R}^{n \times m}$ 中得到式(4)的一个最优解. 当 L_{rw} 有 p 个 0 特征值时 ($p < m$), 还可以在空间 $U \in \mathbb{R}^{n \times (m-p)}$ 中找到最优解.

推论 2. 设实对称矩阵 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的特征值为 $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, 对应的特征向量为 ϕ_1, \dots, ϕ_n , 设 S 的 0 特征值的个数为 p , 当矩阵 $U \in \mathbb{R}^{n \times (m-p)}$, $p < m \leq n$

$$\text{的列向量为 } \phi_{(p+1)}, \dots, \phi_m \text{ 时, } \text{tr}(U' S U) = \sum_{i=1}^m \lambda_i.$$

$$\text{证明. 由推论 1 可知, } \text{tr}(U' S U) = \sum_{i=p+1}^m \lambda_i. \text{ 由于 } \lambda_i = \dots = \lambda_{p-1} = 0, \text{ 因此 } \text{tr}(U' S U) = \sum_{i=1}^m \lambda_i.$$

证毕.

所以,通过移除 L_{rw} 的前 p 个 0 特征值对应的特征向量,可以在空间 $U \in \mathbb{R}^{n \times (m-p)}$ 中得到式(4)的最优解. 根据各顶点属于的连通部分,可以将 L_{rw} 写成分块对角形式

$$L_{rw} = \begin{bmatrix} L_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L_m \end{bmatrix},$$

其中每个分块 L_i 都是 Laplacian 矩阵. 如果将 v_i 表示为和 U 的第 i 行对应的向量,则所有属于 L_i 的 v_i 都有相同的形式 $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)'$, 1 的位置表明该点属于的分块. 这就意味着这些点被映射到谱空间中的同一点,在谱空间中进行聚类会变得非常容易. 然而在实际的计算中,每个子部分间的相似性不可能完全为 0(可以认为 L_{rw} 有一个扰动),此时,属于相同 L_i 的点会被映射到谱空间中的不同点. 根据下面的 2 个定理可知,当满足一定条件时,这些点会被映射到谱空间中比较集中的位置;同时,属于不同 L_i 的点会离得更远.

定理 3. 设 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为实对称矩阵,其扰动矩阵为 \tilde{S} . 设 $\sigma_T(S)$ 为 S 在区间 $T \subset \mathbb{R}$ 中的特征值集合, F 为这些特征值对应的特征空间. 设 $\delta = \min |\lambda - t| : \lambda \notin T, t \in T$, 其中 λ 是 S 的一个特征值,则特征空间 F 和其扰动 \tilde{F} 的距离满足^[32]: $d(F, \tilde{F}) \leq \frac{\|S - \tilde{S}\|}{\delta}$, 其中 $\|S - \tilde{S}\|$ 表示 $S - \tilde{S}$ 的 Frobenius 范数.

根据定理 3 可知,对 Laplacian 矩阵 L_{rw} , F 和 \tilde{F} 的距离由 $\frac{\|L_{rw} - \tilde{L}_{rw}\|}{|\lambda_m - \lambda_{m+1}|}$ 界定. 其中, $\|L_{rw} - \tilde{L}_{rw}\|$ 与相似矩阵 W 有关, $|\lambda_m - \lambda_{m+1}|$ 为特征值间隙,取决于分割的子部分个数 m . 当 $\|L_{rw} - \tilde{L}_{rw}\|$ 越小、特征值间隙越大时, F 和 \tilde{F} 的距离就越近,在谱空间中聚类的效果就越好.

定理 4. 设实对称半正定矩阵 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的特征值为 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, 对应的特征向量为 ϕ_1, \dots, ϕ_n . 设 $S_{(k)} = X_{(k)} X_{(k)}'$ 为 S 基于 Frobenius 范数的 k 阶最优逼近, 其中 $X_{(k)} \in \mathbb{R}^{n \times k}$, 其列向量为 $\sqrt{\lambda_1} \phi_1, \dots, \sqrt{\lambda_k} \phi_k$. 设 $x_i^{(k)}$ 为 $X_{(k)}$ 的第 i 行对应的向量, $\theta_{ij}^{(k)}$ 为 $x_i^{(k)}$ 和 $x_j^{(k)}$ 的夹角, 则当 S 依次投影到 S_{n-1}, \dots, S_1 时, $\theta_{ij}^{(k)}$ 的余弦平方和 $\sum_{i \neq j} (\cos \theta_{ij}^{(k)})^2 = \sum_{i \neq j} \left(\frac{x_i^{(k)'} x_j^{(k)}}{\|x_i^{(k)}\|_2 \|x_j^{(k)}\|_2} \right)^2$ 是严格递增的^[33].

定理 4 又称为极化定理. 根据该定理可知, 当 S 依次投影到更低阶时, $\cos \theta_{ij}^{(k)}$ 的值会向极点 ± 1 靠近. 对投影的谱空间中的点来说, 相似的点会靠得更

近($+1$), 不相似的点会离得更远(-1), 因此在谱空间中更容易对点云模型进行分割.

3 谱聚类分割算法

本节将讨论点云模型的谱聚类分割算法. 对输入的点云 $P = \{p_i \in \mathbb{R}^3, 1 \leq i \leq n\}$, 使用谱聚类进行分割的算法步骤如下:

Step1. 构造相似矩阵 $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$. 矩阵元素 $w_{ij} \in [0, 1]$ 描述了 v_i 和 v_j 的相似度, w_{ij} 越大说明 v_i 和 v_j 越相似. 特别地, $w_{ii} = 0$.

Step2. 对 W 的 Laplacian 矩阵 L_{rw} 进行特征分解, 构造谱空间 Ω .

Step3. 用 Ω 中的点 y_i 表示 p_i , 使用 K -means 算法对 $Y = \{y_i \in \Omega, 1 \leq i \leq n\}$ 进行聚类.

根据 y_i 和 p_i 的对应关系就可以得到点云模型的分割结果.

算法 1. 谱聚类分割算法

输入. 点云数据 $P = \{p_i \in \mathbb{R}^3, 1 \leq i \leq n\}$, 聚类个数 m .

输出. 聚类结果 A_1, \dots, A_m , $A_i = \{j | p_j \in A_i\}$.

// 构建邻域图

$G(V, E) = \text{graph_construction}(P)$;

// 计算相似矩阵

$\text{init_matrix}(W)$;

for $v_i \in V$ do

$E_i = \text{get_edges}(v_i)$;

for $v_j \in E_i$ do

$w_{ij} = \text{calculate_similarity}(v_i, v_j)$;

end

end

// 计算 L_{rw}

$L_{rw} = I - D^{-1}W$;

// 构造聚类空间

$\text{eigen_decomposition}(L_{rw})$;

for $p_i \in P$ do

$y_i = \text{spectral_projection}(p_i)$;

end

// K -means 聚类

$[A_1, \dots, A_m] = \text{kmeans_cluster}(Y)$;

点云模型的邻域图 G 可以根据各采样点的 k 最近邻域点来构建. Pauly 等^[34]指出, 为了获得计算稳定性, k 应该大于 6. 本文设置 $k=10$. 如果 v_i 和 v_j 被图 G 中的边相连, 则用权值 $w_{ij} \in (0, 1]$ 来描述它们之间的相似度; 否则, $w_{ij} = 0$. 为了获得有意义的分割结果, w_{ij} 根据视觉理论的最小值原则来定义.

由 Katz 等^[21]提出的角度距离是基于最小值原则的,给定法向 \mathbf{n}_i 和 \mathbf{n}_j ,设它们间的夹角为 θ_{ij} ,则 \mathbf{n}_i 和 \mathbf{n}_j 的角度距离定义为 $d_a(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j) = 0.2(1 - \cos \theta_{ij})$.

除了角度距离,本文还使用几何矩来描述 v_i 和 v_j 的相似性.对顶点 $v \in G$,设 $(x_0, y_0, z_0)'$ 为其对应的三维坐标,设 $\{(x_i, y_i, z_i)'\}_{i=1}^k$ 为其邻域点的坐标,则几何矩为 $m(p, q, r) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k x_i^p y_i^q z_i^r$,其中 $p+q+r$ 表示几何矩的阶数.

为了使相似性度量对平移、旋转和缩放无关,需要对三维坐标进行归一化.具体步骤如下^[35]:

Step1. 将点集的坐标原点移动到重心 $(m(1,0,0), m(0,1,0), m(0,0,1))'$ 处

$$\{(x_i, y_i, z_i)'\}_{i=0}^k \leftarrow \{(x_i, y_i, z_i)' - (m(1,0,0), m(0,1,0), m(0,0,1))'\}_{i=0}^k.$$

Step2. 对由新点集的二阶几何矩组成的矩阵

$$\begin{pmatrix} m(2,0,0) & m(1,1,0) & m(1,0,1) \\ m(1,1,0) & m(0,2,0) & m(0,1,1) \\ m(1,0,1) & m(0,1,1) & m(0,0,2) \end{pmatrix} = \Sigma \Lambda \Sigma'$$

进行奇异值分解.得到的酉矩阵 Σ 表示点集从标准位置的旋转,对角矩阵 Λ 表示每个轴的缩放.

Step3. 使用

$$\{(x_i, y_i, z_i)'\}_{i=0}^k \leftarrow \frac{\Sigma}{\Lambda(0,0)} \{(x_i, y_i, z_i)'\}_{i=0}^k$$

对新点集进行归一化.其中 $\Lambda(0,0)$ 为最大的缩放量.

Step4. 对归一化后的点的坐标进行一个翻转操作,以保证多数的点在坐标轴的正方向.

完成了这些操作后,顶点 v 的几何矩定义为满足 $p+q+r \leq d$ 的几何矩组成的向量

$$\mathbf{m}(v) = (m(0,0,1), m(0,1,0), \dots, m(d,0,0)).$$

本文设置 $d=5$,此时 $\mathbf{m}(v)$ 是一个 55 维向量.

在得到 v_i 和 v_j 的角度距离和归一化的几何矩后, w_{ij} 定义为

$$w_{ij} = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{m}(v_i) - \mathbf{m}(v_j)\|_2^2}{2\sigma_1^2}\right) \exp\left(-\frac{(d_a(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j))^2}{2\sigma_2^2}\right),$$

其中 σ_1 和 σ_2 是高斯核的宽度参数. σ_1 设置为 $m(v_i)$ 到所有 v_i 的邻域点的几何矩的平均距离, σ_2 为整个点云模型的平均角度距离. 2 个高斯核的乘积是一个双边滤波器,要求只有几何矩距离近并且法向夹角小的顶点才有高相似性,这样就能保证 w_{ij} 在满足最小值原则的同时,还能对点云模型的平移、旋转和缩放无关.

构造完相似矩阵 W 后,根据推论 2, Ω 应该由 L_{rw} 的第 $p+1$ 个~第 m 个特征值对应的特征向量张开,其中 p 为 L_{rw} 的 0 特征值个数 ($p < m$). 设 $U \in$

$\mathbb{R}^{n \times (m-p)}$ 为这些特征向量组成的矩阵. 在 Ω 中,每个顶点 v_i 被表示为和 U 的第 i 行对应的向量 $y_i \in \mathbb{R}^{(m-p)}$. 在理想情况下,属于相同分割部分的顶点 v_i 会映射到空间 Ω 中的同一点. 如果 U 有扰动,定理 3 保证了这些点会被映射到比较靠近的位置;同时,定理 4 保证了属于不同分割部分的点会分得比较开. 因此可以使用 K -means 聚类法来对这些点进行聚类,得到点云模型的分割结果.

4 实验结果与分析

本文使用算法 1 对不同的点云模型进行分割并获得了一些很好的分割结果,如图 1 所示. 表 1 所示为不同模型分割过程各步骤的详细时间,这些实验数据是在 Intel Core2Duo 2.5 GHz CPU, 2 GB RAM 的 PC 机上测试的. 在对 Laplacian 矩阵 L_{rw} 进行特征分解时,由于谱空间只需要前 m 个特征值对应的特征向量,因此该过程的速度非常快,整个分割过程的时间主要由相似矩阵的构造来决定.

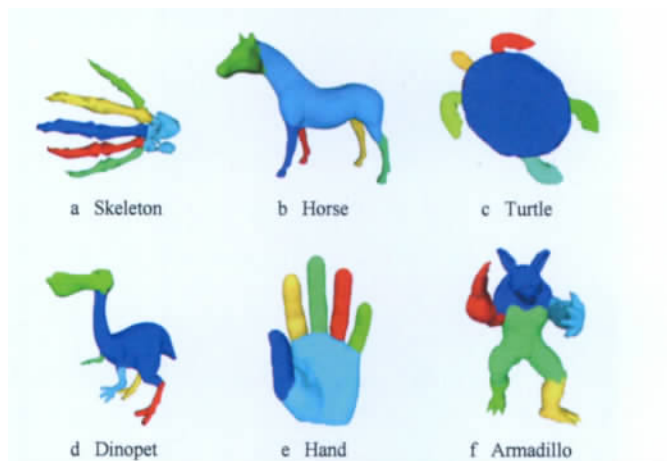


图 1 谱聚类算法的分割结果

表 1 点云模型分割各步骤的具体时间

模型	顶点数	相似矩阵/s	特征分解/s	聚类/s	总计/s
Skeleton	497	1.185	0.065	0.087	1.337
Horse	1102	1.541	0.113	0.125	1.779
Turtle	1620	1.789	0.167	0.187	2.143
Dinopet	2041	2.361	0.225	0.251	2.837
Hand	3364	5.551	0.731	0.319	6.601
Armadillo	4002	7.235	1.042	0.443	8.720

LZ 分割算法中使用的矩阵 N 实际上就是 $I - L_{sym}$. 由于 L_{sym} 的特征向量不是指示向量(命题 2),因此在聚类前需要对映射到谱空间上的点进行归一

化,然后根据归一化的点集构造矩阵 Q 进行聚类. 如图 2 所示,本文统计了相似矩阵 W 、对称 Laplacian 矩阵 L_{sym} 、非对称 Laplacian 矩阵 L_{rw} 和 LZ 分割算法中使用的矩阵 Q 中的非 0 元素的分布,其中第一

行为 Skeleton 模型,第二行为 Horse 模型. 从图 2 可以看出, W 和 L_{sym} 中各元素的分布相对比较平均,不利于直接聚类; Q 和 L_{rw} 都很好地对 W 进行了极化,因此很适合聚类.

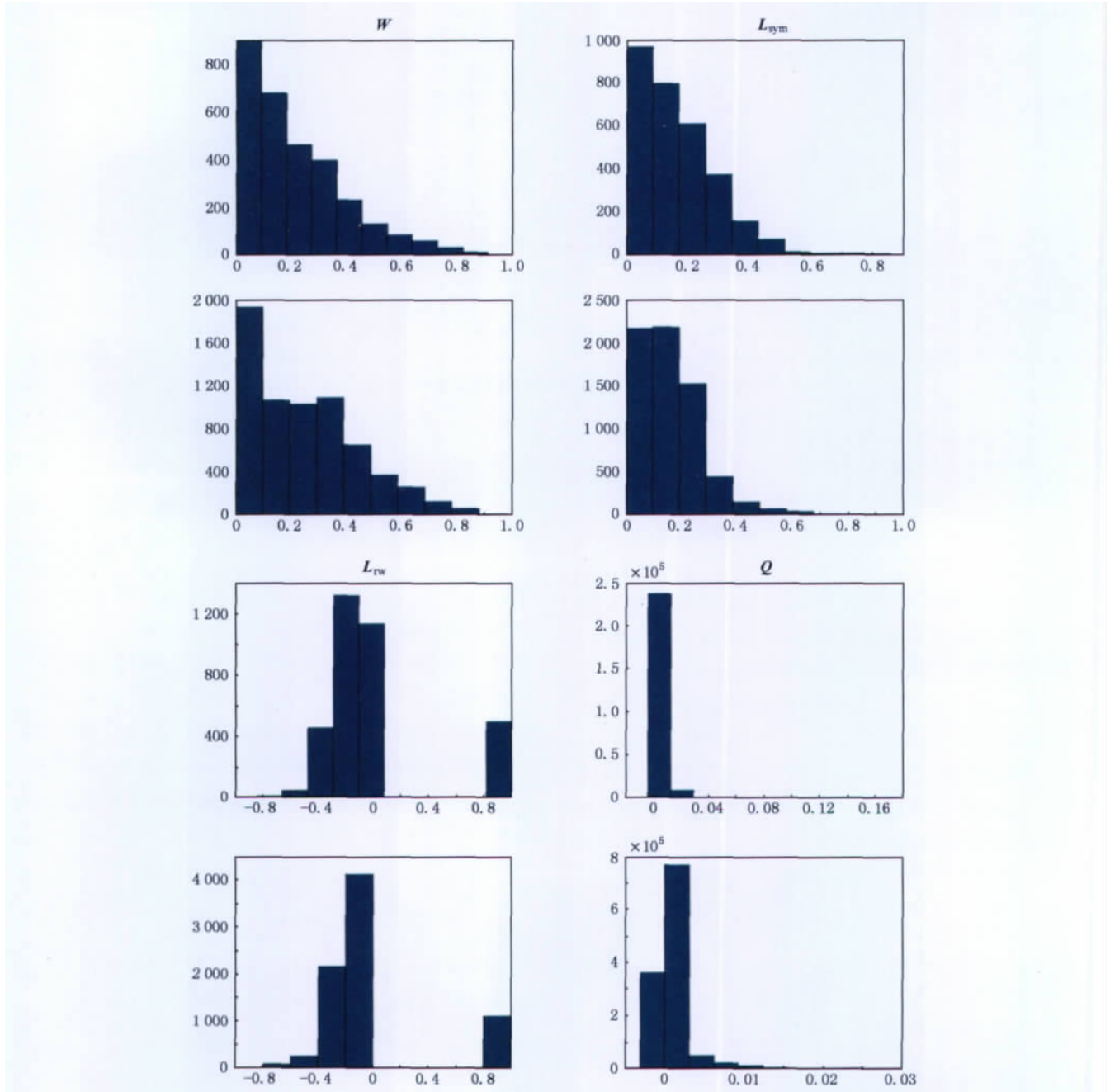


图 2 不同矩阵元素的直方图

设谱空间中的聚类为 $C_1, \dots, C_m, C_i = \{j | y_j \in C_i\}, c_i$ 为 C_i 的聚类中心,则投影点在谱空间中分布的好坏可以用 $e = \sum_{j=1}^m \|y_j - c_i\|_2, y_j \in C_i$ 衡量. e 越小,说明每个 C_i 中的点离聚类中心越近,谱投影的

效果就越好. 在理想情况下,属于同一个分割部分的顶点会映射到谱空间中的同一点,此时 $e=0$. 为了验证推论 2 的正确性,本文比较了在不同模型上的聚类误差和聚类时间,如图 3 a 所示. 可以看出,由于 L_{rw} 的特征向量是指示向量(命题 3),因此本文

算法避免了多次归一化造成的误差,使得投影点在谱空间中离聚类中心更近,聚类误差也更小;而基于推论 2 的 LZ 分割算法由于降低了聚类数据的维度,从某种程度上也减少了多次归一化造成的误差,因此得到的聚类误差比原始的 LZ 分割算法要小。

图 3 b 中比较了 LZ 分割算法、基于推论 2 的 LZ 分割算法和本文算法的聚类时间,可以很明显地看出,使用更低维数据的算法聚类速度更快. 由于本文算法使投影点在谱空间中分布得更好,因此速度最快。

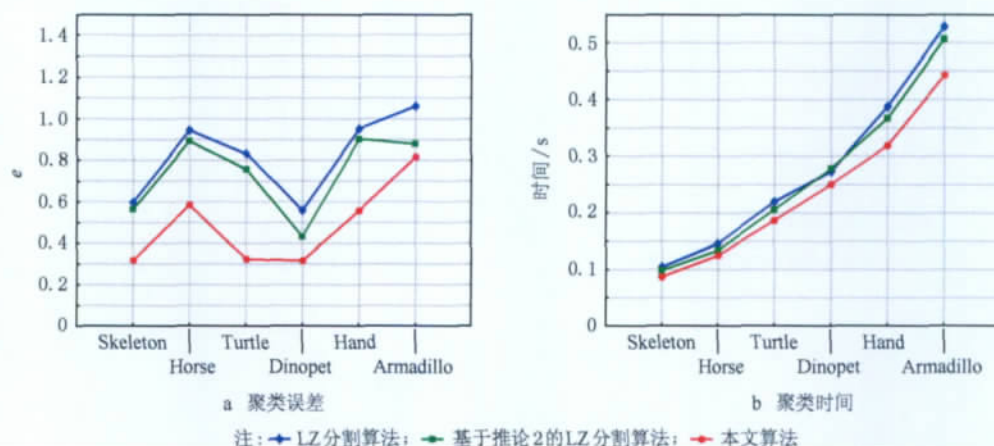


图 3 本文算法和 LZ 分割算法的比较

模型分割问题可以看成是聚类问题. 根据聚类空间的不同,现有的点云模型分割算法可以大致分为基于拓扑空间的聚类^[10-11,18-19]和基于模型所在空间的聚类^[15-17,20,22,26]. 其中,根据模型几何信息(如法向量^[15]、曲率^[22]等)的区域增长类算法取决于种子点的选择、区域增长规则以及区域的显著性准则,虽然这类方法也能够得到很好的分割结果,但是需要用户多次调试以获得合适的阈值参数(如法向量夹角阈值、曲率阈值等).

我们比较了本文算法、基于拓扑特征的分割算法^[10]和直接在模型所在空间使用 K-means 聚类在 Hand 模型上的分割结果. 在使用 K-means 聚类直

接进行分割时,采样点间的距离使用了文献[21]中的定义

$$d(p_i, p_j) = \delta \frac{g(p_i, p_j)}{a(g)} + (1 - \delta) \frac{d_a(n_i, n_j)}{a(d_a)};$$

其中, $g(p_i, p_j)$ 表示点 p_i 和 p_j 间的测地距离, $a(\cdot)$ 表示求平均值, δ 为权参数. 为了遵循最小值原则, 本文设置 $\delta=0.05$. 如图 4 所示, 这些方法都能够分割出有意义的子部分, 只是分割边界不同. 直接使用 K-means 聚类得到的分割结果较差, 这是因为在模型的原始空间中采样点离聚类中心的距离近, 虽然使用了角度距离描述相似性, 但是很难找到合适的 δ 得到较好的分割边界.















图 4 不同分割算法的比较

层次分割能够提供不同细节的分割模型, 在三维模型的分析 and 处理中有着广泛的应用^[7]. 如表 2 所示, 通过递归地对已经分割好的结果进行谱聚类, 本文实现了点云模型的层次分割. 这个过程就像自顶向下地构建一棵树一样, 根节点代表输入

通过层次地将父节点分成多个子节点, 越来越多的细节被分割出来. 由于每次分割构造的相似矩阵是基于最小值原则的, 因此整个层次分割的过程是符合人们的认知的(上肢分割出手, 下肢分割出脚等).

表 2 谱聚类算法的层次分割

模型名称	原始模型	第一层	第二层	第三层
Ant				
Dinopet				
Lion				

5 总结和展望

本文提出了一种基于谱聚类的点云模型分割算法,基于视觉理论的最小值原则构造了点云模型的相似矩阵,同时使用归一化的几何矩使分割结果对平移、旋转和缩放无关;通过使用归一化的非对称 *Laplacian* 矩阵,将输入的点云模型映射到谱空间中,然后使用 *K-means* 聚类对点云模型进行了分割。

如果将顶点数为 n 的点云模型 P 分成 m 部分,谱聚类理论提供了一个在空间 $\mathbb{R}^{n \times m}$ 中的松弛解。如果 *Laplacian* 矩阵的 0 特征值个数为 p ($p < m$),本文在空间 $\mathbb{R}^{n \times (m-p)}$ 中找到了分割问题的松弛解。本文介绍了使用谱聚类对点云模型进行分割的理论背景,并对提出的分割算法的理论保证进行了证明。最后通过实验验证了本文算法的正确性和有效性。

谱聚类结果除了和选用的 *Laplacian* 矩阵有关外,还和相似矩阵以及聚类个数有关(定理 3),因此研究相似矩阵对谱聚类结果的影响是本文未来的工作之一。选择聚类个数是所有聚类算法的一个基本问题,在本文算法中聚类个数是手动设置的,自动确定聚类个数(如根据特征值间隙确定)也是本文未来的研究方向。

参考文献 (References):

[1] Sun Xiaopeng, Li Hua. A survey of 3D mesh model segmentation and application [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2005, 17(8):1647-1655 (in Chinese)

(孙晓鹏, 李 华. 三角网格模型的分割及应用技术综述[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(8): 1647-1655)

[2] Hoffman D D, Richards W A. Parts of recognition [J]. Cognition, 1984, 18(1/3): 65-96

[3] Kobbelt L, Botsch M. A survey of point-based techniques in computer graphics [J]. Computers & Graphics, 2004, 28 (6): 801-814

[4] Gross M, Pfister H. Point-based graphics [M]. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2007

[5] Liu R, Zhang H. Segmentation of 3D meshes through spectral clustering [C] //Proceedings of the 12th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications. Washington D C: IEEE Computer Society Press, 2004: 298-305

[6] Attene M, Katz S, Mortara M, et al. Mesh segmentation—a comparative study [C] //Proceedings of the IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications. Washington D C: IEEE Computer Society Press, 2006: Page: 7

[7] Agathos A, Pratikakis I, Perantonis S, et al. 3D mesh segmentation methodologies for cad applications [J]. Computer Aided Design & Applications, 2007, 4(6): 827-841

[8] Shamir A. A survey on mesh segmentation techniques [J]. Computer Graphics Forum, 2008, 27(6): 1539-1556

[9] Dong Hongwei. A review of mesh segmentation [J]. Journal of Image and Graphics, 2010, 15(2): 181-193 (in Chinese)
(董洪伟. 三角网格分割综述[J]. 中国图象图形学报, 2010, 15(2): 181-193)

[10] Dey T K, Giesen J, Goswami S. Shape segmentation and matching with flow discretization [M] //Lecture Notes in Computer Science. Heidelberg: Springer, 2003, 2748: 25-36

[11] Dey T K, Giesen J, Goswami S. Shape segmentation and matching from noisy point clouds [C] //Proceedings of Eurographics Symposium on Point-Based Graphics. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2004: 193-199

- [12] Xiao Chunxia, Feng Jieqing, Miao Yongwei, *et al.* Geodesic path computation and region decomposition of point-based surface based on level set method [J]. Chinese Journal of Computers, 2005, 28(2): 250-258 (in Chinese)
(肖春霞, 冯结青, 缪永伟, 等. 基于 level set 方法的点采样曲面测地线计算及区域分解[J]. 计算机学报, 2005, 28(2): 250-258)
- [13] Ke Yinglin, Shan Dongri. Edge-based segmentation of point cloud data [J]. Journal of Zhejiang University: Engineering Science, 2005, 39(3): 377-380 (in Chinese)
(柯映林, 单东日. 基于边特征的点云数据区域分割[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2005, 39(3): 377-380)
- [14] Ke Yinglin, Chen Xi. Geometric attribute analysis and segmentation of point cloud [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(8): 7-15 (in Chinese)
(柯映林, 陈曦. 点云数据的几何属性分析及区域分割[J]. 机械工程学报, 2006, 42(8): 7-15)
- [15] Rabbani T, van Den H F, Vosselmann G. Segmentation of point clouds using smoothness constraint [J]. International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, 2006, 36(5): 248-253
- [16] Sun Hongyan, Sun Xiaopeng, Li Hua. 3D point cloud model segmentation based on K-means cluster analysis [J]. Computer Engineering and Applications, 2006, 42(10): 42-45 (in Chinese)
(孙红岩, 孙晓鹏, 李华. 基于 K-means 聚类方法的三维点云模型分割[J]. 计算机工程与应用, 2006, 42(10): 42-45)
- [17] Fransens J, van Reeth F. Hierarchical PCA decomposition of point clouds [C] //Proceedings of the 3rd International Symposium on 3D Data Processing, Visualization, and Transmission. Washington D C: IEEE Computer Society Press, 2006: 591-598
- [18] Yamazaki I, Natarajan V, Bai Z, *et al.* Segmenting point sets [C] //Proceedings of the IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications. Washington D C: IEEE Computer Society Press, 2006: Page:6
- [19] Yamazaki I, Natarajan V, Bai Z, *et al.* Segmenting point-sampled surfaces [J]. The Visual Computer, 2010, 26(12): 1421-1433
- [20] Zou W H, Ye X Z. Multi-resolution hierarchical point cloud segmenting [C] //Proceedings of the 2nd International Multi-Symposiums on Computer and Computational Sciences. Washington D C: IEEE Computer Society Press, 2007: 137-143
- [21] Katz S, Tal A. Hierarchical mesh decomposition using fuzzy clustering and cuts [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH. New York: ACM Press, 2003: 954-961
- [22] Wu Shixiong, Wang Chengyong. Data segmentation of unorganized noise point-cloud [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(2): 230-233 (in Chinese)
(吴世雄, 王成勇. 散乱噪声点云的数据分割[J]. 机械工程学报, 2007, 43(2): 230-233)
- [23] Miao Y W, Feng J Q, Zheng Q X, *et al.* A level set based segmentation approach for point-sampled surfaces [J]. Journal of Zhejiang University: Science A, 2007, 8(4): 575-585
- [24] Lai Y K, Hu S M, Martin R R, *et al.* Rapid and effective segmentation of 3D models using random walks [J]. Computer Aided Geometric Design, 2009, 26(6): 665-679
- [25] Richtsfeld M, Vincze M. Point cloud segmentation based on radial reflection [C] //Proceedings of the 13th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns. Berlin: Springer, 2009: 955-962
- [26] Ning X J, Li E, Zhang X P, *et al.* Shape decomposition and understanding of point cloud objects based on perceptual information [C] // Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH. New York: ACM Press, 2010: 199-206
- [27] von Luxburg U. A tutorial on spectral clustering [J]. Statistics and Computing, 2007, 17(4): 395-416
- [28] Hagen L, Kahng A B. New spectral methods for ratio cut partitioning and clustering [J]. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 1992, 11(9): 1074-1085
- [29] Shi J, Malik J. Normalized cuts and image segmentation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(8): 888-905
- [30] Fan K, Schneider H. A minimum property of the eigenvalues of a hermitian transformation [J]. The American Mathematical Monthly, 1953, 60(1): 48-50
- [31] Golub G H, van Loan C F. Matrix computations [M]. 3rd ed. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996
- [32] Davis C, Kahan W M. The rotation of eigenvectors by a perturbation. III [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1970, 7(1): 1-46
- [33] Brand M, Huang K. A unifying theorem for spectral embedding and clustering [OL]. [2011-12-30]. <http://research.microsoft.com/conferences/aistats2003/proceedings/189.pdf>
- [34] Pauly M, Keiser R, Kobbelt L P, *et al.* Shape modeling with point-sampled geometry [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH. New York: ACM Press, 2003: 641-650
- [35] Elad M, Tal A, Ar S. Content based retrieval of vrml objects—an iterative and interactive approach [C] // Proceedings of the 6th Eurographics Workshop on Multimedia. Berlin: Springer, 2002: 107-118