A Simple Text

Your Name

2024 年 4 月 23 日

1 前备知识

OFDM 波形

OFDM 是一种正交多载波调制技术，它将数据流进行串并变换，把高速数据流转换为多个低速数据流，再将他们分别调制到多个正交子载波上进行传输。与传统的频率复用不同，OFDM 不需要设置保护频带间隔，甚至在频带上有所重叠，所以频谱利用率高，而且因为它是将信道划分为了多个正交子信道，每个信道的所占带宽比较小，所以它能够很好地对抗频率选择性衰落和窄带干扰，此外，OFDM 可以使用快速傅里叶变换进行调制与解调，这能够很大程度上降低系统实现的复杂度。

因为频率选择性衰落会导致 OFDM 的少数子载波受到较大影响产生比特错误，所以一般 OFDM 还会采用在发送端进行加扰的方式分散由衰落所带来的比特错误，让它在时间上类似均匀分布，这样可以提高系统的性能。而且在特定的子载波上，通常会添加导频信号，接收端可以通过这些导频信号来进行信道估计，后续再做信道均衡可以大幅降低误码率。

由于多径时延，OFDM 会产生符号间干扰，所以需要在时域相邻的 OFDM 符号间插入保护间隔来消除这部分干扰，一般需要设置保护间隔的长度大于信道的最大多径时延，这样才能避免上一个符号进入到下一个符号的积分区域内，从而消除符号间干扰。但若是直接让保护间隔保持空白，这样还会有子载波间干扰的问题，即一个 OFDM 符号在其时域积分区间内各个子载波的正交性会受到破坏，所以通常会在保护间隔内插入循环前缀或者循环后缀来保证 OFDM 符号各子载波在积分区间内的正交性，从而消除子载波间干扰。此外，添加循环前缀还能够使得 OFDM 符号的一部分产生周期性，这样可以将时域信号与信道冲激响应的线性卷积转换为循环卷积，相当于在频域直接相乘，有利于后续直接做频域均衡。不过在实际工程中是很难得到信道的最大多径时延的，所以一般都将保护间隔的时长设为信道的时延拓展均方根的 2 到 4 倍，其次，插入保护间隔的时间与 OFDM 符号时长的比率越大，OFDM 符号的有效性就越低，OFDM

符号的时长也不能很长，因为时长越长，子载波间隔越小，一定带宽里包含的子载波越多，对硬件的要求也就越高，同时 OFDM 符号对频率偏移越敏感，所以一般会设置保护间隔的时长为 OFDM 符号时长的 1/5 倍。

设 OFDM 的符号时长为 T，子载波个数为 N，则子载波间隔为 $\Delta f = \frac{1}{T}$，单个 OFDM 符号可以表示如下：

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N} d(n) \times e^{j2\pi n \Delta f t}, t \in [0, T]$$

信道估计

信道估计是指通过对接收信号的处理，将信道对发送信号的影响用数学的方式表达出来。一般信道估计是为了最小化某个误差值，与此同时尽量降低算法实现的复杂度。信道估计包括非盲估计、半盲估计和盲估计。非盲估计是指发送端发送特定的训练序列，接收端通过接收信号与原始训练序列来进行信道估计，例如基于导频的信道估计就是接收端通过接受导频信号与原始导频信号得到导频处的信道特性，再通过插值的方式得到数据子载波处或者其他发送符号时刻的信道特性。不过这种方法会占用数据传输资源，导致传输效率降低。盲估计是指通过调制信号一些固有的、与传输数据无关的特性来进行信道估计，主要有基于子空间的和基于最大期望的信道估计。这种方法需要接受端接收大量数据才能够统计特性来进行信道估计，且算法复杂度较高，不过因为它不占用传输资源，所以相应的频谱利用率和数据有效性较高。半盲估计则是二者的折中，一般是使用较短的训练序列配合上盲估计算法来进行信道估计。

文章的这一部分主要聚焦于非盲信道估计，现在主要有三种方法，即最小二乘法信道估计算法（LS）、最小均方误差信道估计算法（MMSE）以及线性最小均方误差算法（LMMSE）。首先介绍 LS 算法，假设接收信号为 $Y = HX + Z$，信道估计为 $\widehat{H}$，估计接收信号为 $\widehat{Y} = \widehat{H}X$，误差函数可以表示如下：

$$\begin{aligned} J(\widehat{H}) &= \left\| Y - \widehat{H}X \right\|^2 \\ &= Y^H Y - Y^H X \widehat{H} - \widehat{H}^H X^H Y + \widehat{H}^H X^H X \widehat{H} \end{aligned}$$

而 LS 算法就是要使得这个误差函数最小，对上述误差函数求导可得：

$$\frac{\partial J(\widehat{H})}{\partial \widehat{H}} = -2Y^H X + 2\widehat{H}^H X^H X$$

令其等于 0，可得：

$$\widehat{H} = (X^H X)^{-1} X^H Y$$

当 X 为满秩矩阵时，$\widehat{H} = X^{-1}Y$ 即为 LS 算法信道估计的结果。LS 算法的均方误差（MSE）为：

$$\begin{aligned} MSE_{LS} &= E\{(H-\widehat{H})^H(H-\widehat{H})\} \\ &= E\{(X^{-1}Z)^H(X^{-1}Z)\} \\ &= \frac{\sigma_Z^2}{\sigma_X^2} \\ &= \frac{1}{SNR} \end{aligned}$$

由此可见，LS 算法因为忽略了噪声的影响，所以计算复杂度较低，实现也较为简单，但这会导致估计误差受信噪比影响较大，特别是当信号衰落较大、SNR 较小时，LS 算法的信道估计误差会很大，对信号的接受产生较大的影响。而 MMSE 算法则是考虑了噪声的影响，使用了一个加权矩阵调整 LS 算法的估计结果，即 $\widehat{H_M} = W\widehat{H}$，在 MMSE 算法中所要优化的目标函数为：

$$J(\widehat{W}) = \left\| H - W\widehat{H} \right\|^2$$

当误差向量 $e = H - W\widehat{H}$ 与 $W\widehat{H}$ 正交时，上述目标函数可以取得最小值，所以问题转为求 $E\{e\widehat{H}\}$ 等于零，即：

$$\begin{aligned} E\{eW\widehat{H}\} &= E\{(H-W\widehat{H})\widehat{H}^H\} \\ &= E\{H\widehat{H}^H\} - WE\{\widehat{H}\widehat{H}^H\} \\ &= R_{H\widehat{H}} - WR_{\widehat{H}\widehat{H}} \qquad = 0 \end{aligned}$$

也就是 $W = R_{H\widehat{H}}R_{\widehat{H}\widehat{H}}^{-1}$，其中 $R_{H\widehat{H}}$ 是 H 和 $\widehat{H}$ 的互相关矩阵，$R_{\widehat{H}\widehat{H}}$ 是 $\widehat{H}$ 的自相关矩阵。但是在使用 MMSE 算法进行信道估计时，需要不断地计算信噪比以及求矩阵的逆，所以 LMMSE 就是在 MMSE 的基础上用统计信噪比的期望值代替实时信噪比，从而降低计算复杂度。

OFDM 波形

2 Conclusion

This is the conclusion of the text.