3.1. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

3.1.1. Nguyên hàm của hàm số

Định nghĩa 3.1:

Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng X nếu:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in X$$

Ví dụ3.1: Hàm số $\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $\cos x$ trên $\mathbb{R}$.

Định lí 3.1:

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng X thì:

1) $F(x)+C$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên X, C là hằng số tùy ý.

2) Mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x)+C$.

3.1.2. Tích phân bất định

Định nghĩa 3.2: Tập hợp tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng X được gọi là tích phân bất định của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int f(x)dx$.

Vậy $$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên X.

Điều kiện tồn tại nguyên hàm:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên (a, b) thì $f(x)$ có nguyên hàm trên (a, b).

Tính chất:

$$\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \ (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x); \quad d\left[\int f(x)dx \right] = f(x)dx$$

$$\int f'(x)dx = f(x) + C; \ \int dU(x) = U(x) + C$$

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u)du = F(u) + C$

với $u = u(x)$ là hàm số của x (u có đạo hàm liên tục).

3.1.3. Nguyên hàm của các hàm sơ cấp cơ bản

Hàm số $f(x)$	Nguyên hàm $F(x)$		Hàm số $f(x)$	Nguyên hàm $F(x)$
$x^{\alpha}, \ \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$		$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$		$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$		$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$-\dfrac{1}{a}\operatorname{arccot}\dfrac{x}{a}$
e^x	e^x		$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert$
$\sin ax$	$-\dfrac{\cos ax}{a}$		$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\dfrac{x}{a}$
$\cos ax$	$\dfrac{\sin ax}{a}$		$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$-\arccos\dfrac{x}{a}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert$

14/11/2024 4

3.1.4. Hai phương pháp cơ bản tính tích phân bất định

A. Phương pháp đổi biến số:

- Dạng 1: Nếu $\int f(x)dx = \int g(\varphi(x)).\varphi'(x)dx$ thì đặt $t = \varphi(x)$.

$$\boxed{\int f(x)dx = \int g(t)dt}$$

- Dạng 2: Đặt $x = \varphi(t)$ với $\varphi(t)$ là hàm khả vi liên tục và có hàm ngược.

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt = \int g(t)dt}$$

Chú ý: *Kết quả của tích phân tính theo biến mới phải đưa về hàm chứa biến ban đầu.*

Ví dụ 3.2: Tính $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx \quad (a > 0)$

Giải: Đặt $x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t dt \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$

$$I = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}.a\cos t dt = a^2 \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt$$

$$= \int a^2 \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

Có $\frac{x}{a} = \sin t \Leftrightarrow t = \arcsin\frac{x}{a}$

$$\frac{1}{2}\sin 2t = \sin t\cos t = \sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = \frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Ví dụ 3.3: ▪ Tính $I = \int \frac{e^{2x}dx}{e^x + 3}.$ Giải: Đặt $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

$$\Rightarrow I = \int \frac{e^{2x}dx}{e^x + 3} = \int \frac{udu}{u+3} = \int \left(1 - \frac{3}{u+3}\right)du = u - 3\ln|u+3| + C$$

$$\Rightarrow I = e^x - 3\ln(e^x + 3) + C.$$

▪ Tính $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}dx$ Giải: Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2}$

$$t = \sqrt{x^2+2} \Rightarrow t^2 = x^2 + 2 \Rightarrow tdt = xdx$$

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}dx = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}xdx = \frac{t^2-2}{t}tdt = (t^2-2)dt$$

$$I = \int (t^2-2)dt = \frac{t^3}{3} - 2t + C = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x^2+2} + C$$

Ví dụ 3.4: Tính $I = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x+1)^3}}$.

Giải: Đặt $t = \sqrt{e^x+1} \Rightarrow e^x = t^2 - 1 \Rightarrow e^x dx = 2tdt$

$$I = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x+1)^3}} = \int \frac{e^x dx}{\left(\sqrt{e^x+1}\right)^3} = \int \frac{2tdt}{t^3} = 2\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{2}{t} + C$$

Thay $t = \sqrt{e^x+1}$

Ta có $I = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x+1)^3}} = -\frac{2}{\sqrt{e^x+1}} + C$

B. Phương pháp tích phân từng phần

$$\int udv = uv - \int vdu$$ (u, v có đạo hàm liên tục)

Phương pháp tích phân từng phần thường dùng khi tính các tích phân dạng:

$$\boxed{\int P(x)e^{\alpha x}dx, \int P(x)\cos\alpha x dx, \int P(x)\sin\alpha x dx \ldots \quad (1)}$$

$$\boxed{\int P(x)\arcsin x dx, \int P(x)\arctan x dx, \int P(x)\ln x dx \ldots \quad (2)}$$

$P(x)$ là một đa thức

Đối với các tích phân dạng (1) *nên đặt* $u = P(x)$

Đối với các tích phân dạng (2) *nên đặt* $dv = P(x)dx$

Ví dụ 3.5: Tính $F(x) = \int (x+a)3^x dx$ Giải: Đặt $\begin{cases} u = x + a \\ dv = 3^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{3^x}{\ln 3} \end{cases}$

$$F(x) = (x+a)\frac{3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x}{\ln 3}dx = (x+a)\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{(\ln 3)^2} + C$$

Ví dụ 3.6: Tính $F(x) = \int x \arctan x dx$ Đặt $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

Ví dụ 3.7: Tính $F(x) = \int x^3 \ln x dx$ Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^4}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

Ví dụ 3.8: Tính $F(x) = \int \dfrac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

Đặt $\begin{cases} u = xe^x \\ dv = \dfrac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (x+1)e^x dx \\ v = -\dfrac{1}{x+1} \end{cases}$

$$F(x) = -\frac{xe^x}{x+1} + \int e^x dx = -\frac{xe^x}{x+1} + e^x + C.$$

Ví dụ 3.9: Tính $F_n(x) = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx, \ (a>0)$

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^n} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{2nx dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\ v = x \end{cases}$

$$F_n(x) = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n} - \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} \right) dx$$

$$F_n(x) = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nF_n(x) - 2na^2 F_{n+1}(x)$$

$$F_n(x) = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nF_n(x) - 2na^2F_{n+1}(x)$$

$$\Rightarrow F_{n+1}(x) = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)F_n(x)\right] \quad (*)$$

Nhờ công thức truy hồi (*), ta tính $F_2(x)$ *từ* $F_1(x)$, *tính* $F_3(x)$ *từ* $F_2(x)$...

Trong đó: $F_1(x) = \int \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

$$\Rightarrow F_2(x) = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right] + C.$$

3.5. Tích phân của các hàm hữu tỉ hoặc đưa về hàm hữu tỉ

A. Tích phân của các hàm hữu tỉ

Tính $\int f(x)dx$ với $f(x)$ là phân thức hữu tỉ.

* Viết $f(x) = P(x) + \dfrac{Q(x)}{R(x)}$

$P(x),\ Q(x),\ R(x)$ là các đa thức, bậc $Q(x) <$ bậc $R(x)$.

* Viết $\dfrac{Q(x)}{R(x)}$ thành tổng các phân thức tối giản.

* Tính các tích phân dạng $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^m}, \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx$

với $p^2 - 4q < 0$

* $$\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = \frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + K \quad \text{khi } m \neq 1$$

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln\left|x-a\right| + K \qquad \text{khi } m = 1$$

* $$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{(2x+p)\frac{B}{2} + C - \frac{Bp}{2}}{(x^2+px+q)^n}dx$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

$$\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dv}{v^n} = \frac{v^{1-n}}{1-n} + K,$$ K là hằng số tùy ý.

* $F_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]^n}$

$= \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}$ với $t = x + \frac{p}{2}, \; a = \sqrt{\frac{4q - p^2}{4}} > 0.$

$$F_n(x) = \frac{x + \frac{p}{2}}{(x^2 + px + q)^n} + 2nF_n(x) - 2na^2F_{n+1}(x)$$

$$\Rightarrow F_{n+1}(x) = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x + \frac{p}{2}}{(x^2 + px + q)^n} + (2n - 1)F_n(x)\right]$$

Ví dụ 3.10: Tính $F(x)=\int \frac{1}{(x^2+3)(x^2-1)}dx.$

Giải: Sử dụng công thức $\frac{1}{(t+a)(t+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{t+a}-\frac{1}{t+b}\right)$

$$\frac{1}{(x^2+3)(x^2-1)}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+3}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{x^3+3}\right]$$

$$=\frac{1}{8}.\frac{1}{x-1}-\frac{1}{8}.\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}.\frac{1}{x^2+3}$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{8}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{8}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2+3}dx$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

Ví dụ 3.11: Tính $F(x)=\int \frac{dx}{x^5-x^2}$

$$\frac{1}{x^5-x^2}=\frac{1}{x^2(x^3-1)}=\frac{x}{x^3(x^3-1)}=x\left(\frac{1}{x^3-1}-\frac{1}{x^3}\right)=\frac{x}{x^3-1}-\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1},\forall x\neq 1$$

Lấy $x\to 1\Rightarrow A=\frac{1}{3},\ x\to\infty\Rightarrow B=-A=-\frac{1}{3}, x=0\Rightarrow C=A=\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^5-x^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}.\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}.\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

$$-\frac{1}{3}.\frac{x-1}{x^2+x+1}=-\frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}=-\frac{1}{6}\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

Vậy $F(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln\left|x-1\right|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

B. Một số dạng tích phân có thể đưa về tích phân hữu tỉ

1. Tích phân của một số hàm lượng giác

Xét tích phân dạng $\int R(\sin x, \cos x)dx$

(R là hàm hữu tỉ đối với các đối số trong ngoặc)

* Phương pháp chung: Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t$. Khi đó:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

* Một số trường hợp đặc biệt:

- *Nếu hàm dưới dấu tích phân lẻ đối với $\sin x$ thì đặt $\cos x = t$*
- *Nếu hàm dưới dấu tích phân lẻ đối với $\cos x$ thì đặt $\sin x = t$*
- *Nếu hàm dưới dấu tích phân cùng chẵn hoặc lẻ đối với $\sin x$ và $\cos x$*

  thì đặt $\tan x = t$ hoặc $\cot x = t$

Ví dụ 3.12: Tính $F(x)=\int \frac{dx}{a+\cos x}\ (a>1)$

Giải: Đặt $\tan\frac{x}{2}=t \Rightarrow x=2\arctan t \Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

$$F(x)=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{a+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{2}{a+at^2+1-t^2}dt$$

$$=2\int \frac{dt}{a+1+(a-1)t^2}=\frac{2}{a-1}\int \frac{dt}{\frac{a+1}{a-1}+t^2}$$

$$=\frac{2}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}t\right)+C=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

Ví dụ 3.13: Tính $F(x) = \int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx$

Giải: Hàm dưới dấu tích phân lẻ đối với $\sin x$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

$$F(x) = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x dx}{2+\cos x} = \int \frac{(t^2-1)dt}{t+2} = \int \frac{(t^2-4)+3}{t+2} dt$$

$$= \int \left(t - 2 + \frac{3}{t+2} \right) dt = \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C.$$

Ví dụ 3.14: Tính $F(x) = \int \sin^2 x \cos^4 x dx$

Giải: $\sin^2 x \cos^4 x = \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x.\cos^2 x$

$$F(x) = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x.\cos^2 x dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x.d(\sin 2x)$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

2. Tích phân của một số hàm vô tỉ

a. Xét tích phân dạng:

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx \quad (m,\ n,\ldots,r,s\in\mathbb{Z}^{*})$$

(*R là hàm hữu tỉ đối với các đối số trong ngoặc*)

Cách giải: Gọi k là BCNN của các số $n,\ldots,\ s$

Đổi biến số $t=\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}}$

ta nhận được tích phân hàm hữu tỉ theo biến t.

b. Xét tích phân dạng $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$

(R là hàm hữu tỉ đối với các đối số trong ngoặc)

Có thể đặt $x = a\sin t$ hoặc $x = a\cos t$

c. Xét tích phân dạng $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})dx$

(R là hàm hữu tỉ đối với các đối số trong ngoặc)

Có thể đặt $x = a\tan t$ hoặc $x = a\cot t$

Ví dụ 3.15: Tính $F(x)=\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ Đặt $x^{\frac{1}{6}}=t \Leftrightarrow x=t^6 \Rightarrow dx=6t^5dt$

$$F(x)=\int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int \frac{t^3}{t+1}dt=6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}dt=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln\left|t+1\right|\right)+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C$$

Ví dụ 3.16: Tính $F(x)=\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$ Đặt $\sqrt[3]{x-2}=t$

$$\Rightarrow x-2=t^3 \Rightarrow dx=3t^2dt$$

$$F(x)=\int \frac{3t^2dt}{1+t^2}=3\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=3(t-\arctan t)+C$$

$$=3(\sqrt[3]{x-2}-\arctan\sqrt[3]{x-2})+C$$

Ví dụ 3.17: Tính $F(x) = \int x^2\sqrt{4-x^2}dx$

Đặt $x = 2\sin t, \left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = 2\cos t dt$

$$F(x) = \int 4\sin^2 t.\left|2\cos t\right|.2\cos t dt = 4\int \sin^2 2t dt = 4\int \frac{1-\cos 4t}{2}dt$$

$$= 2t - \frac{1}{2}\sin 4t + C = 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{2}\right) + C.$$

Ví dụ 3.18:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}} = \ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+4}\right| + C$$

Ví dụ 3.19:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \arcsin\frac{x-1}{2} + C.$$

3. Tích phân hàm hữu tỉ đối với $e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}$

Xét $\int R(e^{\alpha x})dx$ trong đó R là hàm hữu tỉ đối với $e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Đặt $t = e^{\alpha x} \Rightarrow dt = \alpha e^{\alpha x}dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{\alpha t}$

Khi đó $\int R(e^{\alpha x})dx = \dfrac{1}{\alpha}\int \dfrac{R(t)}{t}dt$

Ví dụ 3.20: Tính $F(x) = \int \dfrac{dx}{e^x + e^{-x}}$

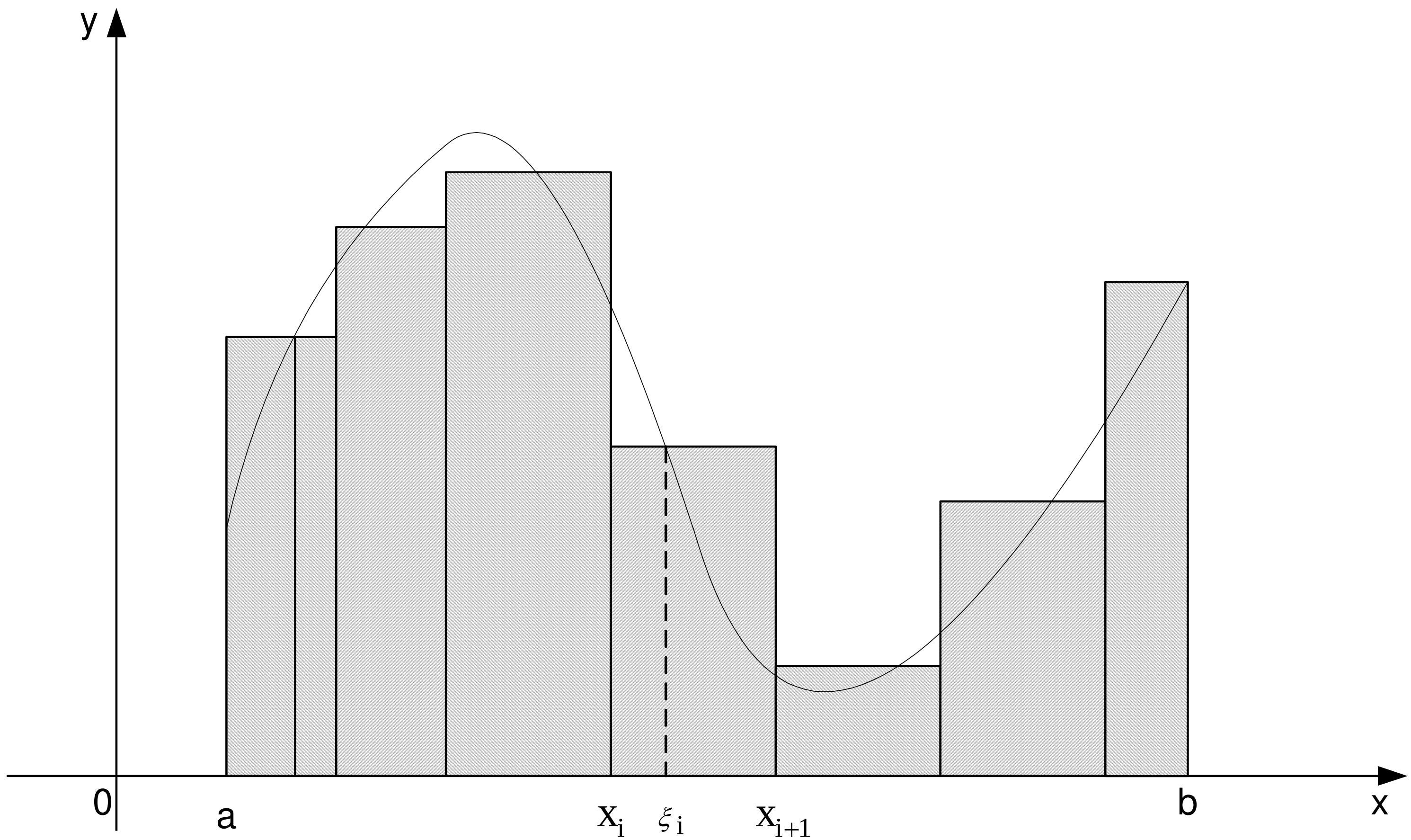
Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{t}$

$$F(x) = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C = \arctan e^x + C$$

3.2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

3.2.1. Khái niệm tích phân xác định

Khái niệm tích phân xác định hàm không âm $f(x)$ xác định trên $[a, b]$ xuất phát từ bài toán tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục hoành và hai đường thẳng song song trục tung.



Diện tích S của hình thang cong cần tính bằng tổng các hình thang cong nhỏ và mỗi hình thang cong nhỏ được tính xấp xỉ với hình chữ nhật theo cách sau.

Chia $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ tùy ý bởi các điểm:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Diện tích S của cần tìm bằng tổng diện tích các hình thang cong có cạnh đáy là các đoạn $\left[x_{i-1}, x_i\right]; i = 1, \ldots, n$.

Diện tích hình thang cong có độ dài cạnh đáy là $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ được xấp xỉ với diện tích hình chữ nhật có chiều cao bằng $f(\xi_i); \xi_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$.

Ta nhận được diện tích xấp xỉ $S \simeq S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i$.

Diện tích S cần tính bằng giới hạn của diện tích xấp xỉ khi các Δx_i tiến đến 0.

Định nghĩa 3.3:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,b]$. Chia $[a,b]$ thành n đoạn nhỏ tùy ý bởi các điểm chia $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Trên mỗi đoạn $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ chọn một điểm ξ_i tùy ý.

Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1, \ldots, n)$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i$ được gọi là ***một tổng tích phân*** của hàm $f(x)$

Nếu $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} S_n = I$ tồn tại hữu hạn, *không phụ thuộc phép chia* $x_i; i = 0, \ldots, n$ và *phép chọn các điểm* $\xi_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$ thì giới hạn đó được gọi là tích phân xác định của hàm số $f(x)$ trên $\left[a, b\right]$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Khi đó ta nói f ***khả tích*** trên $[a,b]$.

Vậy $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i$$

Định nghĩa 3.4:

- Trường hợp $b < a$ ta định nghĩa $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$

Chú ý: Tích phân xác định không phụ thuộc biến lấy tích phân, chẳng hạn

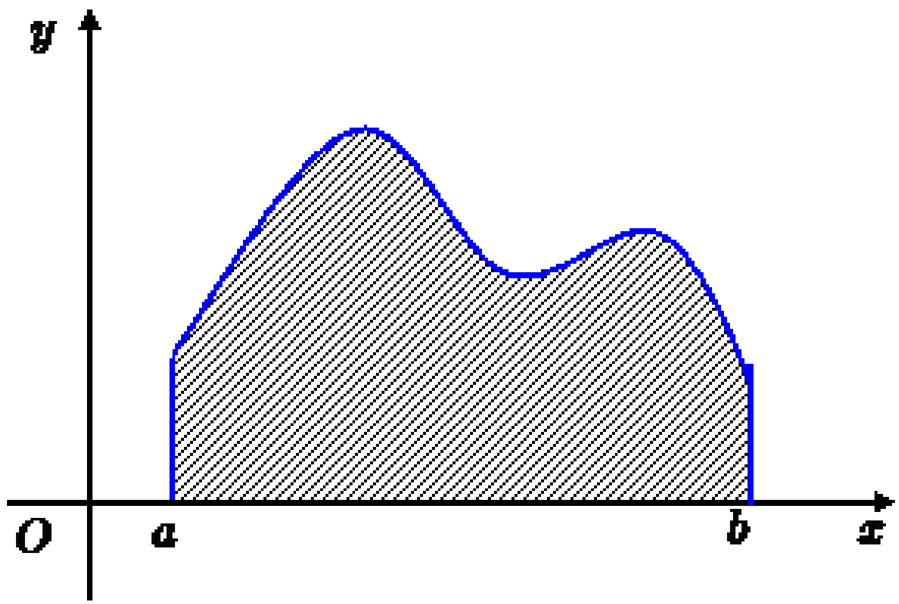
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du \ldots$$

Điều này cũng tương tự như tổng $\sum_{k=1}^{N} a_k = a_1 + \cdots + a_N = \sum_{m=1}^{N} a_m$

Ý nghĩa hình học của tích phân xác định:

$\int_a^b f(x)dx$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$x = a, x = b, y = 0, y = f(x) \geq 0$$



3.2.2. Điều kiện khả tích

Sử dụng tổng Darboux ta có thể chứng minh được các kết quả sau:

Điều kiện cần

* Nếu f khả tích trên $[a,b]$ thì f bị chặn trên $[a, b]$.

Điều kiện đủ

* Nếu f liên tục trên $[a,b]$ thì f khả tích trên $[a,b]$.

* Nếu f bị chặn và có hữu hạn điểm gián đoạn loại I trên $[a,b]$ thì f khả tích trên $[a,b]$.

Hệ quả:

* Nếu f đơn điệu và bị chặn trên $[a, b]$ thì f khả tích trên $[a, b]$.

* Nếu f, g khả tích trên $[a, b]$ thì $f \pm g, \lambda.f, f.g, |f|$ cũng khả tích trên $[a, b]$.

* Nếu f khả tích trên $[a, b]$ thì f khả tích trên mọi đoạn $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

  Ngược lại nếu f khả tích trên $[a, b]$, $[b, c]$ thì f khả tích trên $[a, c]$ và

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Ví dụ 3.22: Bằng định nghĩa, tính $\int_0^1 x\,dx$

Giải: Hàm số $f(x) = x$ liên tục trên $[0,1]$ nên khả tích trên $[0,1]$.

Do đó tồn tại $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i$ không phụ thuộc cách chia $[0,1]$

và cách chọn các điểm ξ_i. Ta chia $[0,1]$ thành n đoạn bằng nhau bởi

các điểm chia $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \ldots, x_i = \frac{i}{n}, \ldots, x_n = 1 \Rightarrow \forall i, \Delta x_i = \frac{1}{n}$

Trên mỗi đoạn $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, chọn một điểm $\xi_i = x_i$

Lập tổng $\overline{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i}{n}.\frac{1}{n} = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \frac{(1+n)n}{2n^2}$

Có $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n = \frac{1}{2}$. Vậy $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

Hàm số $f(x) = x$ liên tục nên khả tích trên $[0,1]$.

Áp dụng công thức Newton–Leibniz ta được $\int_0^1 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$.

Khi sử dụng cách tính tích phân theo định nghĩa ta thường chia miền lấy tích phân theo các khoảng bằng nhau và trong mỗi đoạn ta có thể chọn đầu mút trên hoặc dưới hoặc trung điểm.

Ta chia $[0,1]$ thành n đoạn bằng nhau bởi các điểm chia

$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_i = \frac{i}{n}, \dots, x_n = 1$. Trên mỗi đoạn $\left[x_{i-1}, x_i\right]$:

- Chọn đầu mút dưới $\xi_i = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$

$$\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n}.\frac{1}{n} = \frac{0+1+2+\ldots+(n-1)}{n^2} = \frac{(n-1)n}{2n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

- Chọn trung điểm của đoạn $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = \frac{i}{n} - \frac{1}{2n}$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n} - \frac{1}{2n}\right).\frac{1}{n} = \left(\frac{n(n+1)}{2n} - \frac{n}{2n}\right).\frac{1}{n} = \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

3.2.3. Tính chất của tích phân xác định

* $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

* $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ là một hằng số.

* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

* Nếu $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|dx, \ (a < b).$

* Nếu $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$ và f khả tích trên $[a,b]$ thì

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

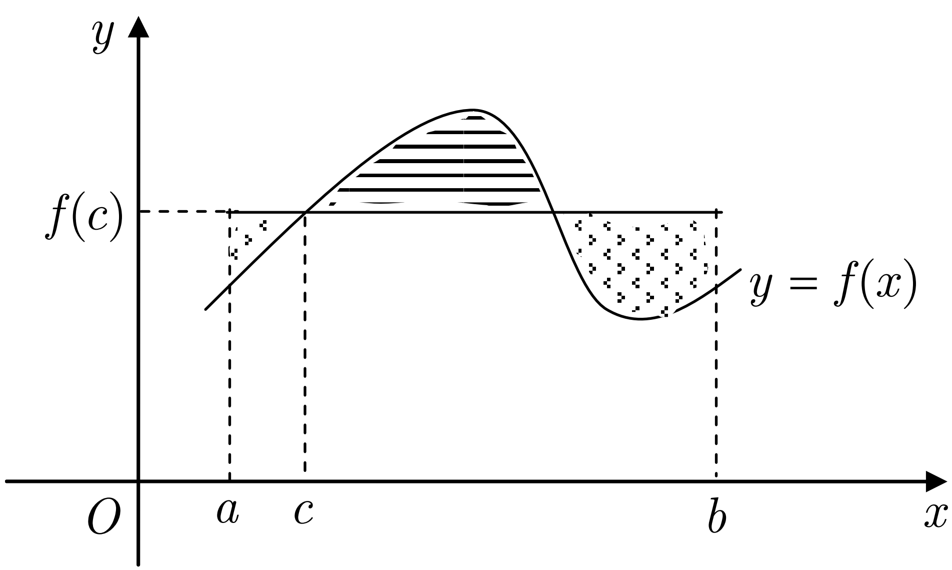
* Nếu $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$ và f khả tích trên $[a,b]$ thì

$$\exists \mu \in [m,M] \text{ sao cho } \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

* Đặc biệt, nếu f liên tục trên $[a, b]$ thì $\exists\ c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

(gọi là tính chất giá trị trung bình của tích phân).



Ví dụ 3.22:

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và $\exists\, c \in (a,b)$ sao cho

$$\forall x \in [a,c), \forall x' \in (c,b]; f(x) < f(x')$$

Chứng minh rằng: $(c-a)\int_c^b f(x)dx > (b-c)\int_a^c f(x)dx$

Giải:

$$(c-a)\int_c^b f(x)dx > (b-c)\int_a^c f(x)dx \Leftrightarrow \frac{1}{b-c}\int_c^b f(x)dx > \frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)dx$$

Theo tính chất giá trị trung bình ta có:

$$\exists x_0 \in [a,c) : \frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)dx = f(x_0); \exists x_0' \in (c,b] : \frac{1}{b-c}\int_c^b f(x)dx = f(x_0')$$

Từ giả thiết ta có $f(x_0') > f(x_0)$, suy ra điều cần chứng minh.

3.2.4. Liên hệ với tích phân bất định

A. Hàm theo cận trên

Định nghĩa 3.5:

Giả sử hàm số f khả tích trên $[a,\ b]$, khi đó f khả tích trên $[a,\ x]$ với mọi $x \in [a,\ b]$. Đặt

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(t)dt$$

là hàm số liên tục trong $\left[a, b\right]$, gọi là hàm tích phân theo cận trên.

Định lí 3.2: Nếu hàm số f liên tục trên $[a,b]$ thì hàm số

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ khả vi trên $[a,b]$ và $F'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$.

Nhận xét 3.1: Nếu f liên tục trên $[a,b]$ thì f khả tích trên $[a,b]$ do đó có nguyên hàm trên $[a,b]$.

Ví dụ 3.23: Cho $F(x) = \int_0^x \cos^2(2t+3)dt$ Ta có $F'(x) = \cos^2(2x+3)$

B. Công thức Niutơn – Lepnit (Newton - Leibnitz)

Định lí 3.3: Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và có một nguyên hàm là $F(x)$ trên $[a,b]$, khi đó

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b}$$

$$\int_{x_0}^x f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^b f(x)dx - \int_{x_0}^a f(x)dx = (F(b)+C) - (F(a)+C) = F(b) - F(a)$$

Ví dụ 3.24: $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}; \forall\alpha \geq 0.$

Ví dụ 3.25: Tính $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$

Giải:

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Vậy

$$I = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\sin(2.\frac{\pi}{4})\right) - \left(0 + \frac{1}{4}\sin(0)\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

Nhận xét 3.2: Dãy số dạng

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k), \text{ với } \frac{(b-a)}{n}(k-1) \le \xi_k - a \le \frac{(b-a)}{n}k$$

Là tổng tích phân của f trên $[a,b]$, do đó nếu f liên tục trên $[a,b]$ thì

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_a^b f(x)dx$$

Ví dụ 3.26: Tìm giới hạn của dãy số $u_n = \frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}, \ (\alpha \ge 0)$

Hàm số $f(x) = x^{\alpha}$ liên tục trên $[0,1]$. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} = \int_0^1 x^{\alpha}dx = \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

5. Hai phương pháp cơ bản tính tích phân xác định

A. Phương pháp đổi biến số

❖ Dạng I

Định lí 3.4: Xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$ với $f(x)$ là hàm liên tục trong $[a,b]$.

Giả sử phép đổi biến $x = \varphi(t)$ thỏa mãn:

* $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ có đạo hàm liên tục trong $[\alpha, \beta]$.

* $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b.$

Khi đó

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right].\varphi'(t)dt}$$

❖ Dạng II

Định lí 3.5: Xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$ với $f(x)$ là hàm liên tục trong $[a,b]$.

Giả sử phép đổi biến $t=\varphi(x)$ thỏa mãn:

* $\varphi(x)$ có đạo hàm liên tục trong $[a,b]$.

* Biểu thức dưới dấu tích phân $f(x)dx$ trở thành $g(t)dt$, trong đó $g(t)$ liên tục trên một khoảng chứa tập giá trị của $\varphi(x)$.

Khi đó $$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt}$$

Ví dụ 3.27: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^8 x dx$

$$\begin{cases} t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \\ x = 0 \Rightarrow t = 1;\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos^8 x . \sin x dx = \int_1^0 (1 - t^2) t^8 (-dt)$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 (1 - t^2) t^8 dt = \left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{9} - \frac{1}{11} = \frac{2}{99}$$

Ví dụ 3.28: Tính $I = \int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}dx$

$$\begin{cases} x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt \\ x = -2 \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{2}; x = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4\sin^2 t)\left(\sqrt{4-4\sin^2 t}\right)(2\cos t)dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4\sin^2 t)\left(\sqrt{4\cos^2 t}\right)(2\cos t)dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4\sin^2 t)(4\cos^2 t)dt = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2tdt = 8\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 2tdt$$

$$= 8\int_{0}^{\pi/2} \frac{1-\cos 4t}{2}dt = 4\int_{0}^{\pi/2} (1-\cos 4t)dt = (4t - \sin 4t)\Big|_{0}^{\pi/2} = 2\pi$$

Ví dụ 3.29:

a) Cho f là hàm số liên tục trên $\left[-a,a\right]$, chứng minh rằng:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx & \text{nếu } f \text{ chẵn} \\ 0 & \text{nếu } f \text{ lẻ} \end{cases}$$

b) Cho f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn với chu kì T.

Chứng minh rằng: $$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{b}^{b+T} f(x)dx\,;\ \forall a,b \in \mathbb{R}$$

Giải: **a)**

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \quad (*)$$

Xét $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$ $\begin{cases} x = -a \Rightarrow t = a \\ x = 0 \Rightarrow t = 0. \end{cases}$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \begin{cases} \int_{0}^{a} f(t)dt & \text{nếu } f \text{ chẵn} \\ -\int_{0}^{a} f(t)dt & \text{nếu } f \text{ lẻ} \end{cases}$$

Thay vào $(*)$, ta có điều phải chứng minh.

b) Ta chỉ cần chứng minh $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx,\ \forall a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx \ (*)$$

Xét $\int_T^{a+T} f(x)dx$ Đặt $x = t + T \Rightarrow dx = dt$ $\begin{cases} x = T \Rightarrow t = 0 \\ x = a + T \Rightarrow t = a \end{cases}$

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt = -\int_a^0 f(t)dt = -\int_a^0 f(x)dx$$

Thay vào (*), ta có: $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx,\ \forall a \in \mathbb{R}$

Một số công thức tích phân của hàm lượng giác thường dùng

$$\forall n, m \in \mathbb{N}; n \neq 0: \int_0^{2\pi} \cos(nx)dx = \int_0^{2\pi} \sin(mx)dx = 0$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N}: \int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \neq m \\ \pi & \text{nếu } n = m \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)dx = \left.\frac{\sin(nx)}{n}\right|_0^{2\pi} = 0; \int_0^{2\pi} \sin(mx)dx = -\left.\frac{\cos(mx)}{m}\right|_0^{2\pi} = 0$$

$$n \neq m \Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)\right]dx = 0$$

$$n = m \Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos(2nx))dx = \pi$$

B. Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử u, v là các hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[a,b\right]$

Khi đó: $$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

Trường hợp hàm dưới dấu tích phân có dạng:

$$\int_a^b P(x)e^{\alpha x}dx, \int_a^a P(x)\cos\alpha x\,dx, \int_a^a P(x)\sin\alpha x\,dx \ldots \quad (1)$$

$$\int_a^a P(x)\arcsin x\,dx, \int_a^a P(x)\arctan x\,dx, \int_a^a P(x)\ln x\,dx \ldots \quad (2)$$

Đối với các tích phân dạng (1) *nên đặt* $u = P(x)$

Đối với các tích phân dạng (2) *nên đặt* $dv = P(x)dx$

Ví dụ 3.30: Tính $I = \int_0^1 x^2 \arctan x dx$

Giải: Đặt $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x^2} dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

$$I = \frac{x^3}{3} \arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx = \frac{1}{3} . \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right) \Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \right)$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \ln 2$$

Ví dụ 3.31: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$

Giải: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx = x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = x\tan x + \ln\left|\cos x\right| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

Vậy $I = \frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$

Ví dụ 3.32: Tính $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx,\ n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u = \sin^{n-1} x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\forall n \geq 2 : I_n = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

$$\Rightarrow I_n = (n-1)I_{n-2} - nI_n + I_n \Rightarrow nI_n = (n-1)I_{n-2} \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \Rightarrow I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.I_0;\ I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} I_1$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\frac{\pi}{2}\ ;\ I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} I_1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}.\dfrac{\pi}{2} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Ví dụ 3.33: Tính $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx,\ n \in \mathbb{N}^*$

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$ $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

$$J_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = I_n.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}.\frac{\pi}{2} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$