

电子科技大学
UNIVERSITY OF ELECTRONIC SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

博士学位论文

DOCTORAL DISSERTATION



论文题目 阵列方向图控制理论与算法研究

学科专业 信号与信息处理

学号 201511020308

作者姓名 张学敬

指导教师 何子述 教授

分类号 TN95 密级 公开

UDC ^{注1}

学位论文

阵列方向图控制理论与算法研究

(题名和副题名)

张学敬

(作者姓名)

指导教师 何子述 教授

电子科技大学 成都

(姓名、职称、单位名称)

申请学位级别 博士 学科专业 信号与信息处理

提交论文日期 2019.10.29 论文答辩日期 2019.12.05

学位授予单位和日期 电子科技大学 2019年12月

答辩委员会主席

评阅人

注1：注明《国际十进分类法 UDC》的类号。

Research on Array Beampattern Control Theory and Algorithm

**A Doctoral Dissertation Submitted to
University of Electronic Science and Technology of China**

Discipline: Signal and Information Processing

Author: Xuejing Zhang

Supervisor: Prof. Zishu He

School of Information and Communication

School: Engineering

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

作者签名: 张宇敬

日期: 2019 年 2 月 2 日

论文使用授权

本学位论文作者完全了解电子科技大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权电子科技大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

(保密的学位论文在解密后应遵守此规定)

作者签名: 张宇敬

导师签名: 何林

日期: 2019 年 2 月 2 日

摘要

阵列信号处理是信号处理的一个重要分支，在雷达、通信等领域，以及无人驾驶、物联网等方向均有广泛的应用。阵列方向图综合是阵列处理中一个重要研究方向，是一种使用传感器阵列定向发送和接收信号的信号处理技术。方向图设计与综合对阵列系统的高性能发挥起着重要作用。实际应用中，在不同场景中需要有针对性地对阵列方向图进行控制。本文研究阵列方向图控制理论与算法，所涉及的理论与方法主要包括：线性空间理论、正交投影理论、斜投影理论、优化理论、几何方法、欧拉公式等。具体应用包括：灵活的方向图控制新方法、稳健旁瓣方向图综合方法、唯相位方向图调整方法、低功耗的相控阵保密通信方法、稳健的阵列参数估计方法。本文的主要贡献和创新总结如下：

(1) 针对阵列响应控制和方向图综合灵活性差的问题，提出了一种简单有效的单点精确阵列响应控制方法(Accurate Array Response Control,A²RC)，该方法具有解析表达式同时可以有效避免方向图畸变现象。通过迭代应用所提方法，实现了方向图的快速合成。该方法突破了传统的方向图整体设计的框架，利用单点精确控制的概念实现方向图合成。基于A²RC方法，提出了一种简单有效的多点阵列响应控制方法 (Multi-point Accurate Array Response Control,MA²RC)。对MA²RC进行改进，提出一种可以有效避免波束中心偏移的多点方向图控制算法。利用所提算法实现了快速方向图设计。还提出了一种最优阵列响应控制算法(Optimal and Precise Array Response Control,OPARC)。基于OPARC，提出了协方差矩阵加载的概念。算法可以应用在静态和自适应波束形成中。另外研究最优阵列响应控制算法以及协方差矩阵加载的具体应用，应用背景包括数据独立和数据依赖两种场景。仿真结果显示，所提算法大大改善了传统波束形成器的性能。

(2) A²RC算法以经验方式进行参数寻优，为了克服该缺点，本文提出一种权向量正交分解算法(Weight vector ORthogonal Decomposition,WORD)，实现了在给定初始权向量条件下对单个方向响应电平的精确控制。将WORD算法与斜投影概念结合，提出一种灵活的多点控制算法。通过对所提算法进一步改进，提出一种不会产生波束中心偏移的灵活方向图控制算法。

(3) 提出了一种基于斜投影理论的灵活方向图控制算法 (Flexible Array Response Control via Oblique Projection,FARCP)。FARCP算法从自适应阵列理论出发，将最优权进行重新表示，由此得到一种新的权向量更新模型。所提算法实质

上将虚拟干扰功率与阵列波束响应电平进行解耦，算法灵活简单，对于对称阵列可以得到解析表达式。

(4) 研究存在阵列误差时的方向图控制。首先对存在误差时阵列方向图的上界进行分析，基于此提出了一种稳健的方向图控制方法，可以对上界方向图电平进行精确调整。通过对方向图上界进行迭代控制，可以实现阵列存在误差时的稳健方向图综合。

(5) 研究高性能阵列方向图综合。将方向图综合问题建模为非凸问题，利用拟凸优化和半正定松弛方法来解决该非凸问题。算法可以得到较高的阵列增益。

(6) 将唯相位方向图控制问题转换为多边形构造几何问题。为了避免方向图畸变，提出一种简单有效的相位确定方法。所提算法具有解析解，是几何方法在阵列处理领域的首次应用。

(7) 针对毫米波通信安全问题，创造性地利用多边形构造方法实现保密通信，提出一种符号级的权向量更新方法，是几何方法在保密通信中的首次应用。算法有解析表达式，且硬件设计简单。

(8) 研究等距线阵下的波达方向(Direction-Of-Arrival,DOA)与相位误差估计问题。针对部分校正阵列，提出了一种基于欧拉公式的单源DOA与阵列相位误差联合估计方法。参数估计最终建模为最小二乘问题，从而可以解析地得到DOA以及相位误差值。针对任意结构的部分校正阵列，提出一种DOA与相位误差联合估计方法。可以实现阵列存在相位误差时的单信号源DOA估计。

关键词：阵列信号处理，方向图控制与综合方法，保密通信算法，稳健阵列参数估计方法，矩阵理论

ABSTRACT

Array signal processing is an important branch of signal processing and has a wide range of applications in many fields such as, radar, wireless communications, and so on. This dissertation studies array response control theory and algorithm using mathematical theory. The mathematical theory discussed mainly include: linear space theory, orthogonal projection theory, oblique projection theory, optimization theory, geometric method and so on. The algorithms and related applications include: flexible array response control, robust sidelobe control and synthesis, phase-only array response adjustment, low-cost secure transmission using phased-array architecture, robust array parameter estimation. The main contributions and innovations of this dissertation are summarized as follows:

(1) A novel accurate array response control (A^2RC) algorithm is proposed. The A^2RC algorithm deals with the problem of how to accurately control the array response at a given direction. By applying the A^2RC algorithm, a new pattern synthesis approach for arbitrary arrays is developed. A multipoint accurate array response control (MA^2RC) algorithm is proposed and its application to beampattern synthesis is investigated. Moreover, in order to avoid possible beam axis shift in pattern synthesis, a modified MA^2RC (M^2A^2RC) algorithm is proposed by imposing a derivative constraint on the direction of beam axis. The problem of how to optimally and precisely control array response levels is addressed and the optimal and precise array response control (OPARC) algorithm is proposed. The applications of the OPARC algorithm to array signal processing are studied. It is applied to realize array pattern synthesis, multi-constraint adaptive beamforming, and quiescent pattern control.

(2) A new scheme based on weight vector orthogonal decomposition (WORD) is proposed to control the array response at a given direction and a novel WORD-based approach to pattern synthesis for arbitrary arrays is devised. A closed-form expression is achieved by introducing a new cost function that measures pattern variation. Two array response control algorithms for pattern synthesis are proposed by combining the WORD algorithm and the oblique projection operation. The proposed algorithms can control the array responses of multiple points starting from an arbitrarily given weight vector.

ABSTRACT

(3) A flexible array response control algorithm via oblique projection (FARCOP) is proposed. The proposed FARCOP algorithm stems from the adaptive array theory, and it can flexibly, precisely and simultaneously adjust the array response levels at multiple angles based on an arbitrarily given weight vector.

(4) A new array response control algorithm named complex-coefficient weight vector orthogonal decomposition (C^2 -WORD) is proposed and its application to robust sidelobe control and synthesis in the presence of steering vector mismatch is investigated. The proposed algorithm is able to precisely control the upper boundary response level of a sidelobe point as desired.

(5) A new method to synthesize high-performance beampatterns is presented by using linear fractional semidefinite relaxation (LFSDR) technique and quasi-convex optimization approach. The proposed method performs well and is not limited to the array configurations and/or noise environments.

(6) A geometric approach to fast array response adjustment with phase-only constraint is proposed. The devised algorithm can precisely and rapidly adjust the array response of a given point by only tuning the excitation phases of a pre-assigned weight vector. The proposed algorithm provides an analytical solution and guarantees a precise phase-only adjustment without pattern distortion.

(7) Two secure transmission algorithms for millimeter-wave wireless communication are proposed. The proposed algorithms are computationally attractive and have analytical solutions. Different from the existing works that are only feasible for the case of single-path mmWave channels, the proposed algorithms are applicable to more general multi-path channels.

(8) A new method is presented to effectively estimate the direction-of-arrival (DOA) of a source signal and the phase error of a uniform linear array. Assuming that one sensor (except the reference one) has been calibrated, the proposed method appropriately reconstructs the data matrix and establishes a series of linear equations with respect to the unknown parameters through eigenvalue decomposition. The proposed scheme is further extended to the case of partly calibrated arrays with arbitrary geometries.

Keywords: array signal processing, beampattern control and synthesis, secure wireless communications, robust array parameter estimation, matrix theory

目 录

第一章 绪论	1
1.1 研究工作的背景与意义	1
1.2 阵列信号处理若干问题研究现状	2
1.2.1 方向图控制与综合研究现状	2
1.2.1.1 方向图综合研究现状	2
1.2.1.2 稳健方向图控制研究现状	3
1.2.1.3 唯相位方向图控制研究现状	4
1.2.2 相控阵保密通信研究现状	5
1.2.3 稳健阵列参数估计研究现状	6
1.3 本文的主要贡献与创新	7
1.4 本论文的结构安排	9
第二章 基于线性空间理论的方向图控制算法	11
2.1 方向图控制与自适应阵列理论	11
2.1.1 方向图控制问题描述	11
2.1.2 自适应阵列理论	12
2.2 A ² RC 算法	12
2.2.1 最优权向量分析	12
2.2.2 基于特征值分解的权向量确定	15
2.2.3 基于几何方法的权向量确定	18
2.2.4 μ_k 的选择	20
2.2.5 应用A ² RC算法实现方向图综合	24
2.2.5.1 应用方向图综合时的几项注意	24
2.2.5.2 利用 A ² RC算法实现方向图综合	25
2.2.5.3 与菲利普方法比较	25
2.2.6 仿真实验	26
2.2.6.1 等电平旁瓣方向图综合	26
2.2.6.2 非等电平旁瓣方向图综合	27
2.3 MA ² RC 算法和M ² A ² RC 算法	27
2.3.1 MA ² RC算法	28
2.3.2 M ² A ² RC算法	33

2.3.3 M ² A ² RC算法最优权向量确定	35
2.3.4 基于M ² A ² RC的方向图综合	37
2.3.5 仿真实验	37
2.3.5.1 多点方向图控制	37
2.3.5.2 基于M ² A ² RC的方向图综合	38
2.4 OPARC 算法	39
2.4.1 自适应阵列理论	40
2.4.2 最优权的更新	41
2.4.3 γ_k 的最优选取	44
2.4.4 VCM逆矩阵的更新	45
2.4.5 OPARC性质	46
2.4.5.1 β_k 的几何分布	46
2.4.5.2 最优 β_k 的确定	47
2.4.5.3 虚拟协方差矩阵的正定性	49
2.4.6 与A ² RC算法对比	50
2.4.6.1 权向量更新形式对比	51
2.4.6.2 虚拟干扰干噪比对比	52
2.4.7 多点OPARC算法	53
2.4.7.1 多干扰最优波束形成器	53
2.4.7.2 多点OPARC问题描述	54
2.4.8 多点OPARC算法的应用	55
2.4.8.1 阵列方向图综合	55
2.4.8.2 多约束自适应波束形成	57
2.4.8.3 静态方向图控制	60
2.4.9 实验仿真	61
2.4.9.1 方向图变化仿真	62
2.4.9.2 基于多点OPARC的阵列方向图综合仿真	66
2.4.9.3 基于多点OPARC的多约束自适应波束形成算法	66
2.4.9.4 基于多点OPARC方法的静态方向图控制	68
2.5 本章小结	69
第三章 基于正交投影理论的方向图控制	70
3.1 WORD算法	70
3.1.1 最优权向量的正交投影解释	70

3.1.2 阵列方向图响应与 β 的关系	71
3.1.3 基于WORD算法的方向图控制	74
3.1.4 β 的选择	75
3.1.5 基于WORD的方向图综合	76
3.1.6 实验仿真	76
3.1.6.1 等距线阵方向图响应控制仿真	76
3.1.6.2 非等距线性阵列多波束方向图综合	77
3.1.6.3 等距线阵平顶方向图综合	78
3.1.6.4 二维阵列方向图综合	79
3.2 C ² -WORD算法与稳健C ² -WORD算法	80
3.2.1 C ² -WORD算法	81
3.2.1.1 C ² -WORD	81
3.2.1.2 β_k 的选取	83
3.2.2 C ² -WORD与A ² RC的关系	84
3.2.3 稳健旁瓣控制问题描述	87
3.2.4 阵列波束响应的界限分析	87
3.2.5 稳健的单点旁瓣响应控制问题描述	88
3.2.6 稳健C ² -WORD算法	90
3.2.7 $V_d(\theta_k)$ 与 $\varepsilon(\theta_k)$ 的限制关系	93
3.2.8 实际考虑	94
3.2.8.1 通道幅相误差	95
3.2.8.2 阵元位置误差	95
3.2.8.3 互耦误差	96
3.2.9 稳健的旁瓣方向图综合	97
3.2.10 仿真实验	97
3.2.10.1 稳健旁瓣方向图控制	98
3.2.10.2 基于稳健C ² -WORD算法的旁瓣方向图综合	99
3.3 本章小结	102
第四章 基于斜投影理论的灵活方向图控制算法	104
4.1 斜投影定义	104
4.2 FARCOM算法	105
4.2.1 自适应阵列理论	105
4.2.2 最优权的等价表示	106

4.2.2.1 FARCOP算法.....	107
4.2.2.2 参数确定	111
4.2.2.3 计算复杂度	114
4.2.3 MA ² RC与FARCOP比较	114
4.2.4 基于FARCOP的方向图综合	116
4.2.5 实验仿真	116
4.2.5.1 FARCOP算法方向图控制性能验证.....	116
4.2.5.2 基于FARCOP的方向图综合仿真.....	120
4.3 基于斜投影的多点方向图控制算法	122
4.3.1 基于斜投影的多点方向图控制算法	123
4.3.2 基于斜投影的波束中心无偏移多点控制算法	125
4.3.3 斜投影多点方向图控制算法的性质	129
4.3.4 仿真实验	130
4.3.4.1 所提算法的方向图控制效果	131
4.3.4.2 方向图综合仿真	134
4.4 本章小结	136
第五章 基于拟凸优化的高性能方向图综合	137
5.1 问题描述	137
5.2 线性分式半正定松弛和拟凸优化	138
5.2.1 线性分式半正定松弛	138
5.2.2 拟凸函数和拟凸优化问题	140
5.3 基于线性分式半正定松弛和拟凸优化的高性能波束综合	142
5.3.1 主瓣损失最小化	142
5.3.2 凹口电平最小化	145
5.4 仿真实验	146
5.4.1 主瓣损失最小化	147
5.4.2 凹口电平最小化	149
5.5 本章小结	151
第六章 唯相位方向图控制的几何方法	152
6.1 唯相位阵列响应调整的几何解释	152
6.2 基于三角形构造的几何解	153
6.3 基于多边形构造的解分析	155
6.4 相位确定	161

6.5 计算复杂度	165
6.6 实验仿真	166
6.6.1 等距线阵旁瓣调整	167
6.6.2 唯相位两波束合成	169
6.6.3 随机化阵列配置性能仿真	169
6.7 本章小结	170
第七章 基于多边形构造的相控阵保密通信方法	172
7.1 系统模型与问题描述	172
7.1.1 系统描述	172
7.1.2 问题描述	173
7.2 基于多边形构造的相位方程求解	173
7.2.1 权向量求解的几何解释	174
7.2.2 基于多边形构造的相位求解	175
7.2.3 解分析	180
7.3 保密通信算法	182
7.3.1 基于多边形构造的保密通信	182
7.3.2 基于松弛符号区域的改进保密通信方法	183
7.3.3 计算复杂度	184
7.4 实验仿真	185
7.4.1 固定 β 取值星座图合成结果	186
7.4.2 变化 β 时的性能测试	187
7.4.3 所提算法的合成结果	190
7.4.3.1 QPSK调制	190
7.4.3.2 8-PSK调制	191
7.4.3.3 16-QAM	192
7.4.4 所提算法的保密性能	193
7.4.5 单路径信道保密性仿真	194
7.5 本章小结	195
第八章 基于欧拉公式的DOA与相位误差联合估计	197
8.1 基于欧拉公式的DOA与相位误差联合估计-等距线阵情况	197
8.1.1 信号模型	197
8.1.2 所提方法	198
8.1.2.1 DOA和相位误差估计	198

8.1.2.2 提高实用性	202
8.1.3 实验仿真	203
8.1.3.1 空间谱对比	203
8.1.3.2 不同相位误差方差时的估计性能对比	203
8.1.3.3 不同信噪比时的估计性能对比	204
8.2 基于欧拉公式的DOA与相位误差联合估计-任意阵列情况	204
8.2.1 信号模型	204
8.2.2 所提方法	206
8.2.2.1 DOA和相位误差估计	206
8.2.2.2 提高实用性	208
8.2.2.3 包含二次约束的最小二乘问题	210
8.2.2.4 利用凹凸过程进行问题求解	211
8.2.3 克莱美罗界	213
8.2.4 实验仿真	214
8.2.4.1 不同相位误差标准差时的估计性能	215
8.2.4.2 不同信噪比时的估计性能	215
8.2.4.3 不同快拍数时的估计性能	216
8.3 本章小结	216
第九章 全文总结与展望	218
9.1 全文总结	218
9.2 后续工作展望	219
致 谢	221
参考文献	222
附录	233
A.1 定理2.2.1的证明	233
A.2 定理2.2.2的证明	234
A.3 式(2-86)–(2-89)推导	235
A.4 方程(2-108)相容性的证明	240
A.5 定理2.4.2的证明	241
A.6 定理2.4.3的证明	243
A.7 定理2.4.5的证明	245
A.8 定理2.4.7的证明	246
A.9 式(2-184)的推导	247

A.10 推论2.4.1的证明	248
A.11 式(2-187)和式(2-189)的推导	248
B.1 式(3-16)的推导	249
B.2 式(3-24)的推导	250
B.3 引理3.2.1的证明	252
B.4 定理3.2.2的证明	253
B.5 定理3.2.3的证明	253
B.6 定理3.2.4的证明	255
B.7 推论3.2.1的证明	256
B.8 推论3.2.2的证明	257
B.9 式(3-70)推导	259
B.10 方程(3-70)可行性的推导	261
C.1 定理4.2.1的证明	262
C.2 式(4-100)推导	265
C.3 式(4-101)的推导	266
C.4 式(4-103)推导	268
C.5 式(4-104)推导	268
C.6 式(4-105)推导	269
D.1 引理6.2.1的证明	270
D.2 定理6.3.1的证明	271
E.1 引理7.2.2的证明	272
E.2 定理7.2.1的证明	273
F.1 式(8-33)的证明	275
攻读博士学位期间取得的成果	279

缩略词表

A^2RC	Accurate Array Response Control,精确阵列响应控制
AN	Artificial Noise,虚拟噪声
ASM	Antenna Subset Modulation,天线子集调制
C^2 -WORD	Complex-Coefficient Weight vector ORthogonal Decomposition,复系数权向量正交分解
CCP	Concave-Convex Procedure,凹凸过程
CP	Convex Programming,凸规划
CSI	Channel State Information,信道状态信息
DM	Directional Modulation,方向调制
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique,旋转因子不变法
FARCOP	Flexible Array Response Control via Oblique Projection,灵活阵列响应控制
INR	Interference-to-Noise Ratio,干噪比
LCMV	Linearly Constrained Minimum Variance,线性约束最小无畸变
LC-QPC	Linearly-Constraint based Quiescent Pattern Control,线性约束静态方向图控制
M^2A^2RC	Modified Multi-point Accurate Array Response Control,改进的多点精确阵列响应控制
MA^2RC	Multi-point Accurate Array Response Control,多点精确阵列响应控制
MIMO	Multiple-Input Multiple-Output,多输入多输出
OPARC	Optimal and Precise Array Response Control,最优阵列响应控制
PSK	Phase Shift Keying,相移键控
PWPA	Programmable Weight Phased Array,可编程权向量相控阵
QAM	Quadrature Amplitude Modulation,正交幅度调制
QCMV	Quadratically Constrained Minimum Variance,二次约束最小方差无畸变
QPSK	Quadratic Phase Shift Keying,正交相移键控
SDR	Semi-Definite Relaxation,半正定松弛
SINR	Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio,输出信干噪比
SPA	Switched Phase Array,切换相控阵
ULA	Uniform Linear Array,等距线性阵列
VCM	Virtual Covariance Matrix,虚拟协方差矩阵
WORD	Weight vector ORthogonal Decomposition,权向量正交分解

主要符号表

\mathbb{R}	实数域
\mathbb{C}	复数域
$(\cdot)^H$	共轭转置
$(\cdot)^T$	转置
$(\cdot)^{-1}$	求逆
$(\cdot)^\dagger$	求伪逆
$(\cdot)^*$	共轭
$\mathbf{A}(m,:)$	矩阵 \mathbf{A} 的第 m 行
$\mathbf{A}(:,n)$	矩阵 \mathbf{A} 的第 n 列
$\Re(\cdot)$	取实部
$\Im(\cdot)$	取虚部
$\mathcal{R}(\cdot)$	矩阵的列空间
$\mathcal{R}^\perp(\cdot)$	矩阵列空间的正交补空间
$\mathcal{N}(\cdot)$	矩阵的零空间
\mathbf{I}_N	N 维单位阵
$\mathbf{1}_N$	$N \times 1$ 维全一向量
$\mathbf{0}_{M \times N}$	$M \times N$ 维零矩阵
$\mathbf{0}_N$	$N \times 1$ 维零向量
$\angle(\cdot)$	求相位

第一章 绪论

1.1 研究工作的背景与意义

阵列信号处理是信号处理领域中非常重要的一个分支，在雷达、通信、地震勘探、射电天文等军事和民用领域有着广泛的应用^[1-5]。所谓阵列信号处理是指将一组传感器按一定方式布置在空间的不同位置上，形成传感器阵列，对信号进行空间和时间采样，然后利用一定的方法对接收数据进行处理，并提取有用信息的过程。阵列信号处理研究的主要内容包括波束形成、预编码、阵列参数估计、信号源定位等。

阵列方向图综合（又称作波束赋形）是阵列处理中一个重要研究方向，是一种使用传感器阵列定向发送和接收信号的信号处理技术。方向图设计与综合对阵列系统的高性能发挥起着重要作用^[6-12]。例如在雷达系统中，通常需要在干扰方向形成深零陷，从而实现干扰抑制。某些通信系统中，需要设计多波束方向图以实现对多个用户的数据传输。卫星遥感应用中，需要设计宽主瓣方向图来扩大检测区域范围。方向图综合中，需要设计天线加权（包括数字加权和模拟加权）使得所形成的方向图满足特定要求。方向图综合既可以用于信号发射端，又可以用于信号接收端。随着电磁环境的复杂化，如何进行灵活、稳健、快速、满足特定硬件要求的方向图设计具有重要的理论和应用价值。

随着无线网络数据量需求的提高，新型应用层出不穷，迫切需要新技术来解决数据速率和容量等方面的问题。在此背景下，用于室内和室外无线通信的毫米波技术已成为提供高速数据链路的新方向。可以预见，毫米波无线通信将在未来移动网络中发挥重要作用^[13-16]。与传统移动通信相比，毫米波段可以提供足够的频谱带宽，因此可以支撑大规模传输容量。由于毫米波段电磁波波长较小，天线间距可以很小，所以毫米波通信系统中收发设备可以配置大规模天线阵列。大规模天线的部署可以提供大的阵列增益，从而可以弥补毫米波信道的路径损失。然而，与传统无线通信系统类似，毫米波通信中数据可能被窃听器窃取。如何提高毫米波通信的安全性至关重要。另外，随着数据量和天线个数的增加，学者们提出了多种能量有效的硬件结构，包括混合数字模拟结构、恒模预编码结构、相控阵传输结构等。因此，研究适用于某硬件结构的毫米波保密通信算法具有重要的理论和应用价值。

阵列参数估计是阵列信号处理的一个重要研究方向，其中波达方向(Direction-of-Arrival,DOA)估计在阵列参数估计中起着重要作用^[17-22]。对由多个阵元组成

的阵列接收信号进行空域处理，即可估计信号的波达方向，而这也是雷达、声纳和通信等各领域的重要任务之一。传统的常规波束形成算法可实现DOA估计。该类算法使波束输出功率在某一个方向为最大，实际上是传统的时域傅立叶谱估计算法的一种空域扩展形式。由于常规波束形成算法的DOA估计性能受限于阵列孔径，众多学者相继提出一系列高分辨DOA估计算法。其中有代表性的高分辨DOA估计算法包括 MUSIC算法^[23]，ESPRIT算法^[24]，最大似然估计方法^[25]等，这些方法通常需要精确已知阵列流形矢量。在实际应用中，阵列不可避免地存在着多种误差，如阵列天线各阵元电磁特性不一致、阵元位置未精确已知、阵元间互耦等。这些误差导致实际阵列流形与理想阵列流形存在偏差。阵列流形失配使得传统高分辨DOA估计方法性能下降甚至失效。因此，研究存在阵列误差时的稳健参数估计具有重要的理论意义和实用价值，是阵列信号处理技术能够获得广泛应用的关键所在。

本论文在上述背景下，围绕相关课题，研究阵列方向图控制理论与算法，主要内容包括方向图控制与综合，相控阵模式保密通信方法，稳健阵列参数估计方法等。下面分别对这几方面的现状进行简要介绍。

1.2 阵列信号处理若干问题研究现状

1.2.1 方向图控制与综合研究现状

下面从一般的方向图综合方法，稳健方向图综合，以及唯相位方向图综合三个方面进行介绍。

1.2.1.1 方向图综合研究现状

过去二三十年里，方向图综合受到国内外学者的广泛关注，众多方向图综合技术相继出现。文献[26–28]中的传统加权算法可以提供解析解，但是这些方法只适用于特定阵列结构或特定方向图设计问题。为了实现适用于任意阵列的方向图综合方法，学者们提出基于随机方式的全局优化解决方案，如基于遗传算法^[29]、粒子群优化算法^[30]和模拟退火算法^[31]的方向图综合技术。然而，由于上述方法需要全局搜索，通常运算量大。尤其当应用大规模阵列时，全局搜索方法需要消耗较长时间得到满意的方向图结果。另有一类方向图综合方法基于自适应阵列原理^[32–36]。这类方法通过迭代添加虚拟干扰使得合成方向图与期望方向图偏差最小。需要注意的是，现有的基于自适应阵列理论的方向图综合利用经验方式选取干扰功率，无法对给定方向电平进行精确控制。

最近，文献[37]和[38]提出了基于天线阵元选择的方向图置零方案。这类方法利用射频开关的状态切换来控制波束方向图。文献[39]提出几乎差集的概念，用来设计稀布平面阵列的方向图。利用几乎差集和阵列谱可以预测峰值旁瓣电平，从而可实现低旁瓣方向图综合。文献[40]利用一种新的稀疏正则化方法实现了对连续群集阵列的方向图综合。利用广义特征值分解，文献[41]提出一种最大效率方向图综合方法。需要注意的是，上述方法仅适用于线性阵列或矩形阵列，无法扩展至一般结构阵列中。

另一类方向图综合算法基于凸优化理论^[42]来实现。举例来说，文献[43]将方向图综合问题建模为凸优化问题，在此基础上利用内点法进行求解。然而，该方法只适用于某些特定方向图综合问题。当期望方向图包含下限约束要求时，得到的问题通常是非凸的，从而无法利用凸优化理论进行建模和求解。为了实现包含电平下限约束时的方向图综合，文献[44]考虑对称线性和平面阵列，通过引入共轭对称权向量将非凸问题转换为凸问题，从而实现了特殊阵列下具有电平下限约束的方向图综合。文献[45]将半正定松弛^[46]思想引入到方向图综合中，将非凸的方向图综合进行松弛建模。该方案利用迭代方式对权向量进行求解，从而降低了由于松弛操作所带来的松弛误差。但是，由于松弛后的问题与原问题不同，半正定松弛只能得到近似解。另有一些凸优化类方法利用工具包进行求解^[47-49]。此外，有学者分别提出利用最小二乘法^[50, 51]、快速傅里叶变换^[52]、激励匹配方法^[53]进行问题求解。需要指出的是，上述方法均无法实现精确方向图控制。所以，即使期望方向图出现一点变化，上述方法均需要重新进行方向图设计。

1.2.1.2 稳健方向图控制研究现状

实际阵列系统中难免存在各种误差，如何在阵列存在误差时进行稳健方向图控制与综合具有重要的理论和应用价值。文献[54]提出一种稳健的旁瓣方向图综合方法，可在阵列导向矢量存在未知扰动时进行稳健的旁瓣合成。该方法考虑最差性能优化问题，将稳健旁瓣控制问题建模为凸优化问题，并利用工具包进行求解。然而，该方法只能用来合成等电平旁瓣，当期望旁瓣为非等电平时无法应用。文献[55]提出一种稳健方向图综合方法，该方法考虑阵元间互耦效应，并提出两种解决方案。但是，由于需要提前计算或估计互耦误差矩阵，该方法在实际工程中实用性较低。文献[56]考虑存在阵列误差时的稳健宽带天线阵列方向图综合问题，并提出九种不同的优化准则进行问题建模及求解。

除了上述确定性稳健方向图综合方法之外，有不少工作考虑存在阵列误差下的稳健自适应波束问题，详见文献[57-63]。稳健自适应波束形成中需要形成满意

的方向图以抑制非理想的干扰和噪声。另外需要指出的是，稳健方向图控制问题不同于文献[64–68]中讨论的方向图扰动分析问题。扰动分析中假设权向量存在扰动，而阵列导向矢量不存在误差。

1.2.1.3 唯相位方向图控制研究现状

为了简化波束形成网络，降低系统成本，学者们提出唯相位阵列结构及唯相位方向图控制的概念^[69–71]。唯相位方向图控制中，天线阵列的激励幅度固定为常数，只有相位激励可调。唯相位结构使得各天线阵元可以共用一个功率驱动网络。与传统结构中利用数字模块调节激励幅度相比，唯相位结构的能量效率更高，从而可以降低能量消耗^[72]。而且在唯相位结构中，仅需要移相器即可实现可重构的方向图，其硬件成本低。

近年来，学者提出唯相位方向图控制或方向图综合解决方案。文献[73]考虑可重构共形阵列的唯相位方向图综合问题。该方法将唯相位方向图综合问题建模为交集寻找问题，并利用广义投影算法进行问题求解。文献[74]考虑了线性或矩形阵列的唯相位方向图综合问题。该方法可以合成具有最小峰值旁瓣电平的方向图。文献[75]利用波束相加的概念进行唯相位方向图综合，且问题可以高效求解。文献[76]提出一种直接数据域最小二乘问题进行唯相位方向图综合。另外，文献[77]研究了最小无冗余稀疏阵列的唯相位和差波束方向图综合问题。文献[78]考虑了非对称方向图综合问题，并使用奇相位激励技术得到了等距线阵相位加权的解析表达式。另外有多种经典的唯相位方向图控制方法，如连续投影算法^[79]，交集方法^[80]，零陷扰动方法^[81]，双二次规划方法^[82]等。

随着凸优化理论的发展成熟，学者们提出利用凸优化对唯相位方向图控制问题进行建模和求解。比如，文献[45]使用半正定松弛^[46]进行唯相位方向图控制。文献[83]使用一种凸松弛方法对唯相位问题进行松弛变换，并利用交替优化对松弛后的问题进行求解。需要指出的是，上述两种唯相位方向图控制方法只能得到近似解，这是因为两种松弛操作改变了原始问题。

作为一种特殊的唯相位方向图控制技术，唯相位干扰置零也是学者们探索和研究的方向。文献[84]从理论和技术两个角度对自适应旁瓣置零的唯相位解进行了分析。文献[85]在假设相位扰动较小的情况下，利用一阶近似方法得到了具有解析表达式的干扰置零权向量。在不对相位扰动进行约束的情况下，文献[86]使用非线性规划实现了对称位置的唯相位干扰置零。文献[48]考虑任意阵列的唯相位干扰置零问题，并利用半正定松弛方法进行权向量求解。除了上述方法之外，还有一些实现自适应唯相位干扰置零的其它方法，如神经网络^[87]，遗传算法^[88]，

最陡下降法^[89], 共轭梯度或牛顿算法^[90]。通常情况下, 上述方法的运算复杂度较高, 且可能只会得到性能较差的局部最优解。

需要注意的是, 以上各方法缺乏对方向图控制的灵活性。具体来说, 如果期望方向图发生任何变化, 均需要重新进行唯相位权向量设计。因此研究快速唯相位方向图控制方法具有重要的理论和应用价值。

1.2.2 相控阵保密通信研究现状

过去几年里, 不少学者提出物理层保密方法以增强数据传输的安全性^[91-93]。在窃听设备信道状态信息(Channel State Information,CSI)精确已知的情况下, 可以通过沿窃听器方向形成深零陷来防止信息泄露。然而, 由于窃听器一般是非合作的, 很难准确获取其CSI。为了实现在窃听器信道信息未知或部分已知情况下的保密通信, 文献[94]提出了虚拟噪声(Artificial Noise,AN)的概念。虚拟噪声方法在目标信道的正交补空间中添加额外的噪声成分来扰乱窃听器。由于虚拟噪声成分与目标信道相互正交, 所以虚拟噪声的加入不会影响目标设备的信息传输。但是, 尽管虚拟噪声的加入可以有效防止数据泄露, 虚拟噪声同时降低了数据传输的能量效率, 所以在目标用户处会产生较低的信干噪比^[95]。

最近, 有不少学者提出利用方向调制(Directional Modulation,DM)技术提高目标用户信息传输的安全性。方向调制可以在期望方向形成理想的星座图, 而在其它方向形成扰乱的接收数据。特别地, 文献[96]利用相控阵作为发射机, 通过变化发射权来增强目标用户通信的安全性。该方案中, 发射权向量以符号速率进行改变, 时变权在保证目标用户接收的前提下扰乱其它方向的接收信号。文献[97]利用4阵元相控阵对上述方案进行了试验, 并实现了正交相移键控(Quadratic Phase Shift Keying,QPSK)调制的安全通信。然而, 该试验中使用遗传算法设计时变的发射权向量, 只可以得到有限个近似解, 且运算量很大。基于方向调制的思想, 文献[98]提出了一种适用于毫米波通信系统的低复杂度安全通信方法, 称为天线子集调制(Antenna Subset Modulation,ASM)。在ASM技术中, 天线辐射方向图在射频端以符号速率进行调制, 从而实现了方位依赖数据传输。ASM技术利用开关电路对天线阵元的选通状态进行控制, 不同信息发送时刻选通天线阵元的个数是一样的。由于开关电路状态是随机切换的, 且目标信道矢量与发射权具有潜在的共轭对称性, 所以不同时刻下对目标用户可以实现可靠的通信, 而在其它方向的信号接收是扰乱的。类似地, 文献[99]提出切换相控阵(Switched Phase Array,SPA)发射结构。SPA结构中每一个发射时间只有一个天线阵元是静默的, 所以其激活的天线个数比ASM方案要多。另一种ASM的改进方案使用一种新型的可编程权

向量相控阵 (Programmable Weight Phased Array,PWPA)结构^[100]。 PWPA方案利用权向量的可编程特性实现对非目标用户方向的接收信号进行扰乱。另有一些保密通信方法将DM技术与新型的阵列结构相结合，如文献[101]利用混合多输入多输出(Multiple-Input Multiple-Output,MIMO)相控阵时间调制DM技术实现物理层保密。

需要指出的是，文献[98–101]中的保密通信方案只适用于单路径毫米波信道，因为这类方法本质上利用了目标信道矢量的恒模特性。对于多径信道，信道向量不再具有恒模性质，此时不同的发射权在目标用户上会得到不同的输出结果，这使得目标用户的接收信号被扰乱或无法进行灵活控制。而且，这些保密通信方法只适用于相移键控(Phase Shift Keying,PSK)调制。适用于其它调制类型的保密通信方案仍需进一步开发与研究。

1.2.3 稳健阵列参数估计研究现状

为了实现阵列存在误差时稳健的DOA参数估计，国内外学者提出了多种有效的DOA估计方法^[102–109]。例如，Weiss和Friedlander提出交替迭代的DOA与幅相误差联合估计方法（通常被称为WF算法）^[110]。然而，WF算法在大相位误差环境下性能严重恶化。文献[111]和[112]中的特征结构方法在大相位误差环境下表现良好。但是，这两种方法需要额外的两个校正源才能完成未知参数估计。文献[113]提出一种基于最大似然估计的DOA与误差估计方法。但是，该方法计算量大，且需要方位精确已知的校正源。文献[114]利用相位恢复方法进行DOA和误差参数估计。文献[115]将阵列误差建模为随机参数，并通过最大后验方法来估计误差扰动量。该方法可以实现误差的自校正，但是需要提前已知扰动参数的二阶累积量。文献[116]提出一种估计阵列幅相误差的子空间方法，该方法在DOA角度已知时性能良好。文献[117]利用MUSIC谱特性进行实际误差校正。该方法适用于任意阵列，但需要提前已知至少一个信源的方位信息。最近，文献[118]提出一种基于盲源分离的DOA与阵列误差校正方法。该方法需要进行空间谱搜索，所以当应用二维阵列时计算量较大。

除了上述DOA与误差参数估计方法之外，另有一些方法利用阵列几何结构或者协方差矩阵的特殊性质来进行稳健参数估计。例如，文献[119]利用等距线阵协方差矩阵的托普利兹性质估计幅相误差参数。该方法在文献[120]中得到进一步改进，改进方法具有低复杂度，且性能更好。文献[121]通过利用采样协方差矩阵的已有信息进行稳健DOA估计。另外，文献[122]研究了嵌套阵列的模型误差参数估计问题，并利用协方差矩阵的部分托普利兹结构进行参数恢复。上述方法仅适用于某种特殊阵列，尚无法扩展至任意几何结构阵列中。

前不久，部分校正阵列^[123–125]成为阵列信号处理的一个热点研究方向。部分校正阵列中假设少量阵元已被完全校正，而其余阵元尚未被校正。文献[126]研究了部分校正子阵的参数估计问题，并利用谱降秩算法确定未知的DOA信息。利用传统ESPRIT方法的参数估计原理，文献[127]提出了一种计算量低的伪ESPRIT算法。该方法可以实现DOA与未知幅相误差参数的联合估计，且具有解析解。文献[128]对伪ESPRIT方法进行了深入讨论，给出了DOA可辨识条件，并提出一种分层优化的方法来改善参数估计性能。除此之外，文献[129]将伪ESPRIT算法扩展至非均匀噪声环境中。需要指出的是，文献[126–129]中的方法需要至少一组相邻的已校正阵元进行参数确定。另外，伪ESPRIT算法只适用于等距线阵，无法应用于其它几何结构阵列中。

1.3 本文的主要贡献与创新

本文在上述背景下，研究阵列方向图控制理论与算法。内容涵盖方向图控制与综合、稳健旁瓣电平控制、唯相位方向图调整、相控阵传输保密通信发射权设计、稳健阵列参数估计等问题。本文研究涉及的理论与方法包括线性空间理论、正交投影理论、斜投影理论、优化理论、几何多边形构造方法、欧拉公式等。本文主要贡献与创新可概括如下：

(1) 新的方向图控制理论与方法

传统的方向图设计方法没有解析形式解，且通常运算量较大，无法实时实现。本文提出了一系列方向图设计与综合算法，建立了阵列方向图精确控制理论，为阵列处理的高性能发挥奠定了基础。具体地，针对阵列响应控制和方向图综合问题，对自适应权向量进行深入分析，结合子空间理论提出了一种简单有效的单点阵列方向图控制方法。该方法具有解析表达式同时可以有效避免方向图畸变现象。通过迭代应用所提方法，实现了方向图的快速合成。该方法突破了传统的方向图整体设计的框架，创造性地利用单点精确控制的概念实现方向图合成。该工作完善了阵列方向图综合理论，所提方法运算量低，收敛性能好，尤其适用于大规模阵列的波束合成。在上述工作基础上，本文基于正交投影理论提出了权向量正交分解算法，得到了更高效的权向量更新形式。该方法是正交投影理论与阵列方向图综合的首次结合应用。在考虑阵列增益的情况下，由自适应阵列理论导出了最优阵列响应控制算法，并提出协方差矩阵加载的概念，得到了数据独立波束形成与数据依赖波束形成的内在关系。为实现独立控制各点方向图，本文对自适应最优权向量进行深入分析，得到了其等价表述形式，并借助斜投影理论提出灵活方向图控制算法。另外，基于矩阵理论，本文将单点阵列方向图控制问题推广到多

点控制中。针对波束中心偏移问题，进一步提出了基于斜投影的多点方向图控制和综合算法，实现了无波束中心偏移的方向图控制，克服了方向图控制中的增益下降问题。为了实现稳健的阵列方向图控制，本文考虑阵列存在误差时的方向图合成方法，提出复系数权向量正交分解算法以及其稳健算法，提高了方向图控制的稳健性。本文还研究了高性能阵列方向图综合问题，将方向图综合问题建模为非凸问题，并利用拟凸优化和半正定松弛方法来解决该非凸问题，算法可以得到较高的阵列增益。

(2) 相控阵在低功耗保密无线通信中的应用

毫米波无线通信在未来移动网络中具有广泛的应用前景。类似于传统的无线通信系统，毫米波通信可能会遭受窃听，从而造成信息泄露。为了实现毫米波保密通信，本文研究了低功耗的毫米波保密通信方法。作为相控阵的扩展应用，本文提出了一种低功耗及硬件成本的保密通信方法，完善了毫米波保密通信的理论。已有的保密通信方法一般利用开关电路状态切换来扰乱窃听方向的接收信号，且一般仅适用于特定信道模型。针对毫米波通信安全问题，本文提出一种相控阵传输模式下的保密通信方法，算法简单新颖且性能优越。由于相控阵传输模式的唯相位约束，发射权向量只有相位可变，针对此限制本文创造性地利用多边形构造方法实现权向量求解，并提出以符号级速率进行权向量更新。该方法是几何方法在保密通信中的首次应用，算法有解析表达式。所提模型不需要开关电路，硬件成本低，尤其适用于大规模阵列。

(3) 稳健的阵列参数估计理论与方法

本文针对误差环境下的阵列参数估计问题进行了研究，提出了一系列稳健的阵列参数估计方法，完善了阵列参数估计的理论和算法。具体地，针对实际阵列误差校正过程中校正源难以精确设置的问题，本文研究了等距线阵存在相位误差时的DOA估计问题，提出了一种基于单辅助阵元的DOA与相位误差联合估计方法。所提方法以欧拉公式为基础，对阵列数据进行错位相加并由此建立关于DOA与相位误差的方程组，最终通过求解最小二乘问题来解析得到DOA以及相位误差值。所提方法不需要方位精确已知的校正源，可实现信源DOA与阵列相位误差的联合估计，避免了阵列误差校正过程中校正源需要精确安置的难题。在上述成果基础上，本文研究了适用于任意结构部分校正阵列的DOA与相位误差联合估计问题。类似于等距线阵，本文将参数估计问题建模为包含二次约束的最小二乘问题。利用凹凸过程进行问题求解，本文实现了任意结构阵列下的DOA与相位误差联合估计。所提方法简单有效、实用性强，尤其适用于对共形阵列进行误差校正。

1.4 本论文的结构安排

本论文共分为九章，研究内容和各章节结构分布如图1-1所示，章节结构具体安排如下：

第二章研究了基于线性空间理论的方向图控制算法。首先提出一种精确阵列响应控制算法A²RC算法，可以实现单点方向图电平的精确控制。通过迭代应用A²RC算法，实现了方向图的快速合成。在A²RC算法的基础上，提出一种多点精确阵列响应控制算法MA²RC，从而减少了方向图综合过程中的迭代次数。通过对MA²RC算法进行改进，提出一种 M²A²RC算法，从而实现了无波束中心偏移的多点方向图电平控制。另外考虑了最优精确阵列响应控制问题，提出一种OPARC算法，并探讨了 OPARC算法的实际应用。

第三章研究了基于正交投影理论的方向图控制算法。首先对自适应波束形成最优权进行重新表示，提出一种基于权向量正交分解的单点方向图电平控制算法（WORD算法）。相比于A²RC算法，WORD算法的参数选取方式更加灵活。在WORD算法的基础上，提出一种复系数权向量正交分解算法（C²-WORD算法）。C²-WORD算法以阵列增益最大化作为优化准则，且有解析解。在C²-WORD算法的基础上，进一步提出一种稳健C²-WORD算法。稳健C²-WORD算法可以在阵列存在误差时进行旁瓣控制。

第四章研究了基于斜投影理论的灵活方向图控制算法。首先对自适应波束形成最优权进行重新表示，提出FARCOP算法。 FARCOP算法可以实现对多个角度方向图电平的独立控制。另外分别考虑了基于斜投影的多点方向图控制算法和基于斜投影的波束中心无偏移的多点控制算法。

第五章研究了基于拟凸优化的高性能波束赋形方法。首先介绍了线性分式半正定松弛和拟凸优化。在此基础上提出一种基于线性分式半正定松弛和拟凸优化的高性能波束方向图综合方法。所提方法考虑了主瓣损失最小化和凹口电平最小化两种场景。

第六章研究了唯相位方向图控制的几何方法。首先研究了唯相位阵列响应调整的几何解释，在此基础上提出利用多边形构成进行问题求解。之后对几何方法的解进行了深入分析，并提出一种基于WORD方法的相位确定算法。所提的几何方法可以有效避免方向图畸变现象，实验仿真证实了所提方法的有效性。

第七章研究了基于多边形构造的相控阵保密通信方法。考虑相控阵发射模式下的保密通信问题，将问题建模为多边形构造问题。之后详细介绍了基于多边形构造的相控阵发射权设计方法，并提出两种基于时变权的保密通信方法。所提方

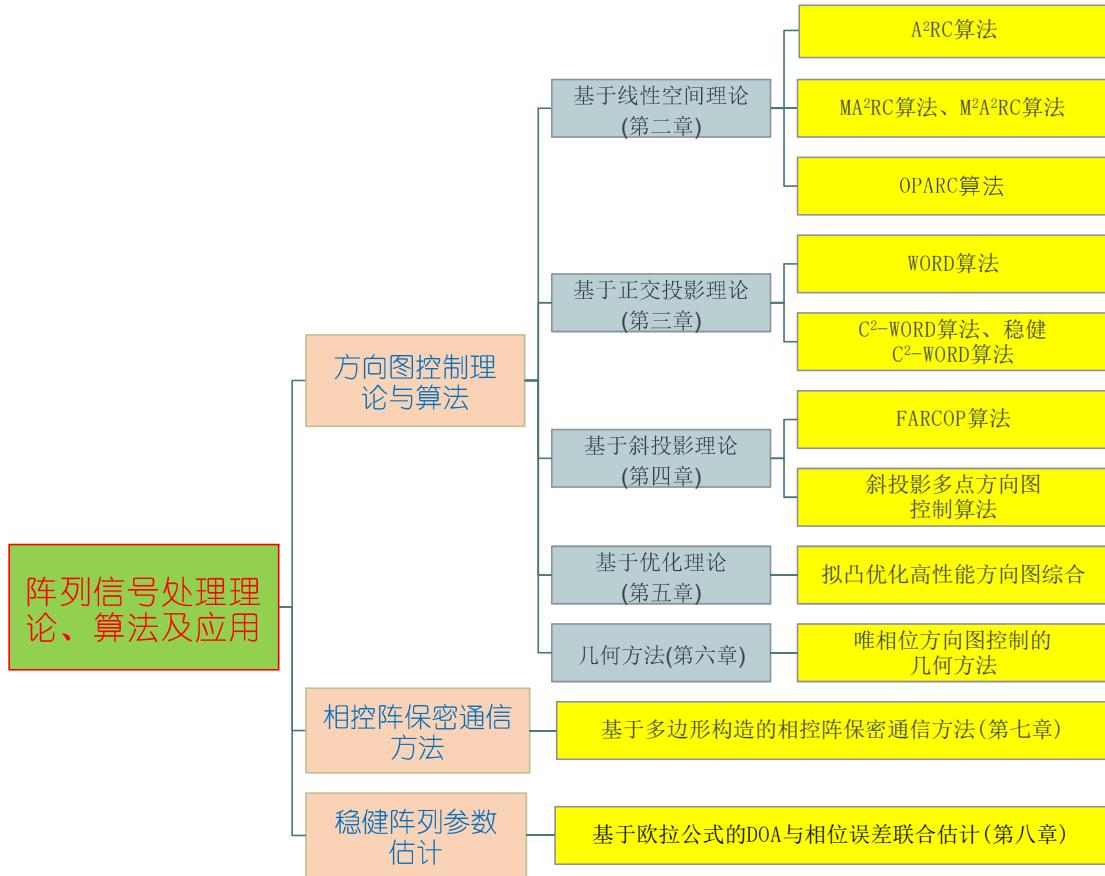


图 1-1 论文研究内容和章节分布结构图

法可以应用于多径毫米波信道，且对调制方式无限制。仿真结果证实了所提方法的有效性。

第八章研究了基于欧拉公式的DOA与相位误差联合估计方法。首先研究了等距线阵情况下的DOA与相位误差联合估计问题，提出一种基于欧拉公式和数据相加的部分校正阵列参数估计方法。在此基础上，研究了适用于任意阵列的DOA与相位误差联合估计方法。此时问题建模为包含二次约束的最小二乘问题，最后利用凹凸过程对问题进行了求解。

第九章对全文进行总结，并给出了未来可能的研究方向。

第二章 基于线性空间理论的方向图控制算法

方向图控制与综合是阵列信号处理的重要研究方向。传统基于加权的方向图控制方法^[26-28]可以提供解析解，但是这些方法只适用于特定阵列结构或特定方向图设计问题。另有基于全局优化方法的方向图综合技术，但通常运算量较大，需要花费较长时间得到满意的方向图结果。此外，基于自适应阵列原理^[32-36]的方向图控制方法通过迭代添加虚拟干扰来改变方向图形状。但此类方法需要利用经验方式选取干扰功率，无法对给定方向电平进行精确控制。需要指出的是，已有方法在期望方向图发生变化时均需要重新进行方向图设计。

本章研究基于线性空间理论的方向图控制算法。首先提出一种精确阵列响应控制算法A²RC算法，可以实现单点方向图电平的精确控制。通过迭代应用A²RC算法，实现了方向图的快速合成。在A²RC算法的基础上，提出一种多点精确阵列响应控制算法MA²RC，从而减少了方向图综合过程中的迭代次数。通过对MA²RC算法进行改进，提出一种M²A²RC算法，从而实现了无波束中心偏移的多点方向图电平控制。另外考虑了最优精确阵列响应控制问题，提出一种OPARC算法，并探讨了OPARC算法的实际应用。

2.1 方向图控制与自适应阵列理论

2.1.1 方向图控制问题描述

考虑任意结构阵列，阵元数目为N。在θ方向，阵列导向矢量可以表示为：

$$\mathbf{a}(\theta) = [g_1(\theta)e^{-j\omega\tau_1(\theta)}, \dots, g_N(\theta)e^{-j\omega\tau_N(\theta)}]^T \quad (2-1)$$

其中 $g_n(\theta)$ 表示第n个阵元的方向图， $\tau_n(\theta)$ 表示第n个阵元与参考阵元的时延， ω 为工作频率， $n = 1, \dots, N$ 。则阵列辐射方向图可以表示为：

$$f(\theta) = \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta) \quad (2-2)$$

其中 \mathbf{w} 为N维权向量。在方向图控制问题中，我们需要设置权向量 \mathbf{w} ，使得幅度方向图 $|f(\theta)|$ 满足特定要求。

2.1.2 自适应阵列理论

由上一小节可以知道，方向图控制问题不依赖于阵列接收数据。根据自适应阵列理论，方向图可以根据接收数据来自适应地合成。这种场景下得到的权向量称为自适应权。可以通过最大输出信干噪比(Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio,SINR)准则来进行最优自适应权设计。所得到的最优权可以表示为：

$$\mathbf{w}_{opt} = \alpha \mathbf{R}_{n+i}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \quad (2-3)$$

其中 α 为归一化因子， $\mathbf{a}(\theta_0)$ 为信号导向矢量， \mathbf{R}_{n+i} 为 $N \times N$ 的噪声加干扰协方差矩阵。若仅考虑单个干扰，同时假设噪声在空域上为独立于干扰的白噪声，则 \mathbf{R}_{n+i} 可以表示为：

$$\mathbf{R}_{n+i} = \sigma_n^2 \mathbf{I} + \sigma_i^2 \mathbf{a}(\theta_i) \mathbf{a}^H(\theta_i) \quad (2-4)$$

其中 σ_n^2 和 σ_i^2 分别代表噪声功率和干扰功率， $\mathbf{a}(\theta_i)$ 为干扰导向矢量。

2.2 A²RC 算法

数据依赖自适应波束形成方法可以在干扰方向形成深零陷，但是如何精确控制特定方向的方向图电平仍需要解决。本节介绍一种精确阵列响应控制算法。

2.2.1 最优权向量分析

下面首先对最优权向量 \mathbf{w}_{opt} 进行深入分析。应用矩阵求逆法则，式(2-3)的最终权向量 \mathbf{w}_{opt} 可以重新表示为：

$$\mathbf{w}_{opt} = \alpha \mathbf{R}_{n+i}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) = \frac{\alpha}{\sigma_n^2} \left(\mathbf{a}(\theta_0) - \frac{\frac{\sigma_i^2}{\sigma_n^2} \mathbf{a}(\theta_i) \mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{a}(\theta_0)}{1 + \frac{\sigma_i^2}{\sigma_n^2} \|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2} \right) \quad (2-5)$$

其中因子 α/σ_n^2 不影响最终性能，下文中将会省略。则最优权（记作 \mathbf{w}_* ）可以进一步表示为：

$$\mathbf{w}_* = \mathbf{w}_0 + \mu \mathbf{a}(\theta_i) \quad (2-6)$$

其中 \mathbf{w}_0 为静态权或初始权向量，定义为：

$$\mathbf{w}_0 \triangleq \mathbf{a}(\theta_0) \quad (2-7)$$

式(2-6)中的 μ 为复常数满足：

$$\mu = -\frac{\text{INR} \mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{a}(\theta_0)}{1 + \text{INR} \|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2} \quad (2-8)$$

其中 $\text{INR} = \sigma_i^2 / \sigma_n^2$ 表示干噪比。

由式(2-6)可以看出，最优权向量可以表示为两项求和。第一项为静态权向量 \mathbf{w}_0 ，该向量无法抑制干扰。由于最终的最优权可以认为在 \mathbf{w}_0 的基础上进行修正，我们称 \mathbf{w}_0 为初始权向量。第二项为干扰导向矢量 $\mathbf{a}(\theta_i)$ 与复常数 μ （与干噪比有关）的乘积。基于此，最优权对应的方向图功率响应（记作 $P_\star(\theta)$ ）可以表示为：

$$\begin{aligned} P_\star(\theta) &= |\mathbf{w}_\star^H \mathbf{a}(\theta)|^2 = |\mathbf{w}_0^H \mathbf{a}(\theta)|^2 + |\mu^* v(\theta, \theta_i)|^2 + 2\operatorname{Re}(\mu \mathbf{w}_0^H \mathbf{a}(\theta) v(\theta_i, \theta)) \\ &= P_i(\theta) + P_a(\theta) + P_c(\theta) \end{aligned} \quad (2-9)$$

其中 $v(\theta_i, \theta)$ 为 $\mathbf{a}(\theta_i)$ 与 $\mathbf{a}(\theta)$ 的内积，定义为：

$$v(\theta_i, \theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{a}(\theta_i) \quad (2-10)$$

式(2-9)中 $P_i(\theta) \triangleq |\mathbf{w}_0^H \mathbf{a}(\theta)|^2$ 为初始权 \mathbf{w}_0 对应的功率方向图， $P_a(\theta) \triangleq |\mu^* v(\theta, \theta_i)|^2$ 为非负项， $P_c(\theta) \triangleq 2\operatorname{Re}(\mu \mathbf{w}_0^H \mathbf{a}(\theta) v(\theta_i, \theta))$ 为交叉项，正负未知。

给定某个权向量 \mathbf{w} ，下面我们定义 θ_i 方向相对于 θ_0 方向的归一化功率方向图为：

$$L(\theta_i, \theta_0) = \frac{P(\theta_i)}{P(\theta_0)} = \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_i)|^2}{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} \quad (2-11)$$

同时称 $L(\theta_i, \theta_0)$ 的分母项为归一化功率响应的归一化因子。

基于此，初始权向量 \mathbf{w}_0 的归一化功率方向图响应可以表示为：

$$L_0(\theta_i, \theta_0) = \frac{P_i(\theta_i)}{P_i(\theta_0)} = \frac{|\mathbf{w}_0^H \mathbf{a}(\theta_i)|^2}{|\mathbf{w}_0^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} = \frac{|v(\theta_i, \theta_0)|^2}{\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^4} \quad (2-12)$$

相应地，最优权向量 \mathbf{w}_\star 的归一化方向图响应为：

$$L_\star(\theta_i, \theta_0) = \frac{P_\star(\theta_i)}{P_\star(\theta_0)} = \frac{|\mathbf{w}_\star^H \mathbf{a}(\theta_i)|^2}{|\mathbf{w}_\star^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} \quad (2-13)$$

显然，我们有 $L_\star(\theta_0, \theta_0) = L_0(\theta_0, \theta_0) = 1$ 。

由上述分析不难看出，通过添加 $\mu \mathbf{a}(\theta_i)$ 将初始权 \mathbf{w}_0 转变为 \mathbf{w}_\star ，方向 θ_i 处的归一化响应也会改变。基于此，通过比较 $L_0(\theta_i, \theta_0)$ 和 $L_\star(\theta_i, \theta_0)$ ，可以发现精确方向图控制的机制。具体地，可以将 $L_\star(\theta_i, \theta_0)$ 展开为下面形式：

$$\begin{aligned} L_\star(\theta_i, \theta_0) &= \frac{|\mathbf{w}_\star^H \mathbf{a}(\theta_i)|^2}{|\mathbf{w}_\star^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} = \frac{P_i(\theta_i) + P_a(\theta_i) + P_c(\theta_i)}{P_i(\theta_0) + P_a(\theta_0) + P_c(\theta_0)} \\ &= \frac{|v(\theta_i, \theta_0)|^2 \left(1 + \left(\frac{\sigma_i^2 \|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2}{\sigma_n^2 + \sigma_i^2 \|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2} \right)^2 - \frac{2\sigma_i^2 \|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2}{\sigma_n^2 + \sigma_i^2 \|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2} \right)}{\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^4 + \left(\frac{\sigma_i^2 |v(\theta_i, \theta_0)|^2}{\sigma_n^2 + \sigma_i^2 \|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2} \right)^2 - \frac{2\sigma_i^2 \|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2 |v(\theta_i, \theta_0)|^2}{\sigma_n^2 + \sigma_i^2 \|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2}} \\ &= \frac{|v(\theta_i, \theta_0)|^2}{((\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2 \|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2 - |v(\theta_i, \theta_0)|^2) \operatorname{INR} + \|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2)^2} \end{aligned} \quad (2-14)$$

通过比较式(2-12)和(2-14)可以发现，如果下式成立：

$$|(\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2\|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2 - |v(\theta_i, \theta_0)|^2)INR + \|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2| < \|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2 \quad (2-15)$$

则有 $L_*(\theta_i, \theta_0) > L_0(\theta_i, \theta_0)$ ，反之亦然。而且，根据柯西施瓦茨不等式，我们可以得到：

$$\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2\|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2 \geq |v(\theta_i, \theta_0)|^2 \quad (2-16)$$

进一步，如果将INR视为可正可负的实值变量，我们可以得到下面结论：

$$L_*(\theta_i, \theta_0) \begin{cases} > L_0(\theta_i, \theta_0), & \text{如果 } INR \in \mathbb{I} \\ \leq L_0(\theta_i, \theta_0), & \text{其它} \end{cases} \quad (2-17)$$

其中 $\mathbb{I} = \left(\frac{-2\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2}{\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2\|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2 - |v(\theta_i, \theta_0)|^2}, 0 \right)$.

需要注意的是，上面分析中将变量INR视为可正可负的实值变量，这与数据依赖处理算法中的概念不同。由于 $L_*(\theta_i, \theta_0)$ 依赖于INR，下面我们将 $L_*(\theta_i, \theta_0)$ 记作 $L_*(\theta_i, \theta_0, INR)$ 。不难验证，如果 $INR = 0$ 或者 $\frac{-2\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2}{\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2\|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2 - |v(\theta_i, \theta_0)|^2}$ ，可以得到 $L_*(\theta_i, \theta_0, INR) = L_0(\theta_i, \theta_0)$ 。

为了说明上述结论，我们下面考虑 $N = 16$ 阵元等距线性阵列。阵元间距为半波长。取 $\theta_0 = 0^\circ$, $\theta_i = 20^\circ$ ，可以得到 $L_*(\theta_i, \theta_0, INR)$ 和 $L_0(\theta_i, \theta_0)$ 随INR变化曲线，如图2-1所示。

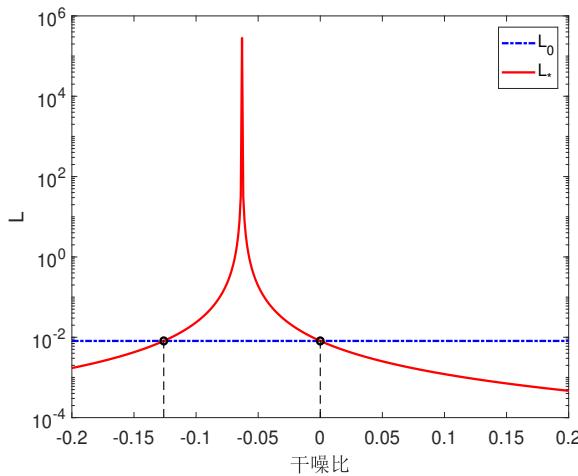


图 2-1 L_* 和 L_0 随干噪比变化曲线

由图可以看出，当 $INR > 0$ 时，有 $L_*(20^\circ, 0^\circ, INR) < L_0(20^\circ, 0^\circ)$ 。实际上，这与数据依赖波束形成方法抑制干扰的概念一致。另外发现，如果 $\mathbf{a}(\theta_0) \neq \beta\mathbf{a}(\theta_i)$ 对于任意 $\beta \in \mathbb{C}$ 均成立，则给定任意的 $\rho > 0$ ，一定存在（一个或多个）INR使得下面

结果成立：

$$L_*(20^\circ, 0^\circ, \text{INR}) = \rho \quad (2-18)$$

由此可以得到下面引理。

引理 2.2.1 任意给定 θ_0 和 θ_i , 假设 $\mathbf{a}(\theta_0) \neq \beta \mathbf{a}(\theta_i)$ 对于任意 $\beta \in \mathbb{C}$ 均成立。则对于任意 $\rho_\triangleright > 0$, 一定存在 $\text{INR}_\triangleright \in \mathbb{R}$ 使得下式成立:

$$L_*(\theta_i, \theta_0, \text{INR}_\triangleright) = \rho_\triangleright \quad (2-19)$$

证明 任意给定 θ_0 和 θ_i , 如果 $\mathbf{a}(\theta_0) \neq \beta \mathbf{a}(\theta_i)$ 对于任意 $\beta \in \mathbb{C}$ 均成立, 根据柯西施瓦茨不等式可以得到 $\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2 \|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2 > |v(\theta_i, \theta_0)|^2$ 。而且, 当 $\text{INR} \rightarrow \pm\infty$ 时, $L_*(\theta_i, \theta_0, \text{INR}) \rightarrow 0$ 。当 $\text{INR} = \frac{-\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2}{\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2 \|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2 - |v(\theta_i, \theta_0)|^2}$ 时, $L_*(\theta_i, \theta_0, \text{INR}) \rightarrow +\infty$ 。由于 $L_*(\theta_i, \theta_0, \text{INR})$ 随 INR 连续变化, 可以得出对于任意 $\rho_\triangleright > 0$, 一定存在 $\text{INR}_\triangleright \in \mathbb{R}$ 使得 $L_*(\theta_i, \theta_0, \text{INR}_\triangleright) = \rho_\triangleright$ 成立。 ■

而且, 由式(2-8)可知, μ 可视为 INR 的函数。由此, 可以得到如下引理。

引理 2.2.2 任意给定 θ_0 和 θ_i , 假设 $\mathbf{a}(\theta_0) \neq \beta \mathbf{a}(\theta_i)$ 对于任意 $\beta \in \mathbb{C}$ 均成立。则对于任意 $\rho_\triangleright > 0$, 一定存在 $\mu_\triangleright \in \mathbb{C}$ 以及对应的 $\mathbf{w}_\triangleright = \mathbf{w}_0 + \mu_\triangleright \mathbf{a}(\theta_i)$, 使得 $L_*(\theta_i, \theta_0) = \rho_\triangleright$ 。

证明 引理 2.2.2 可以由引理 2.2.1 以及式(2-8)直接得到。 ■

根据引理 2.2.2, 我们可以通过简单调节参数 μ 来控制 θ_i 处的归一化响应。为了展示上述结果的有效性, 我们延用前面的仿真参数, 得到了不同参数 μ 下的仿真结果, 如图 2-2(a) 和 2-2(b) 所示。将 μ 分别设置为 $0.0119 + j0.0573$ 和 $-0.2974 + j0.0794$, 得到 $\theta_i = 20^\circ$ 处的响应分别为 -30dB 和 -10dB 。一个自然的问题是, 如果给定 θ_i 处的期望电平值, 怎样得到相应的 μ 。下面将对这个问题进行具体讨论。

2.2.2 基于特征值分解的权向量确定

在上一小节中, 我们将 $\mathbf{a}(\theta_0)$ 视为初始权向量, 发现通过调节复参数 μ 可以改变 θ_i 方向的方向图响应。这为控制 θ_i 方向的方向图电平提供了思路。具体来讲, 给定 $\mathbf{w}_0 = \mathbf{a}(\theta_0)$, 如果需要调节 θ_1 处的归一化方向图响应至 ρ_1 , 根据引理 2.2.2, 一定存在 $\mu_1 \in \mathbb{C}$, 以及下面的权向量 \mathbf{w}_1 :

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_0 + \mu_1 \mathbf{a}(\theta_1) \quad (2-20)$$

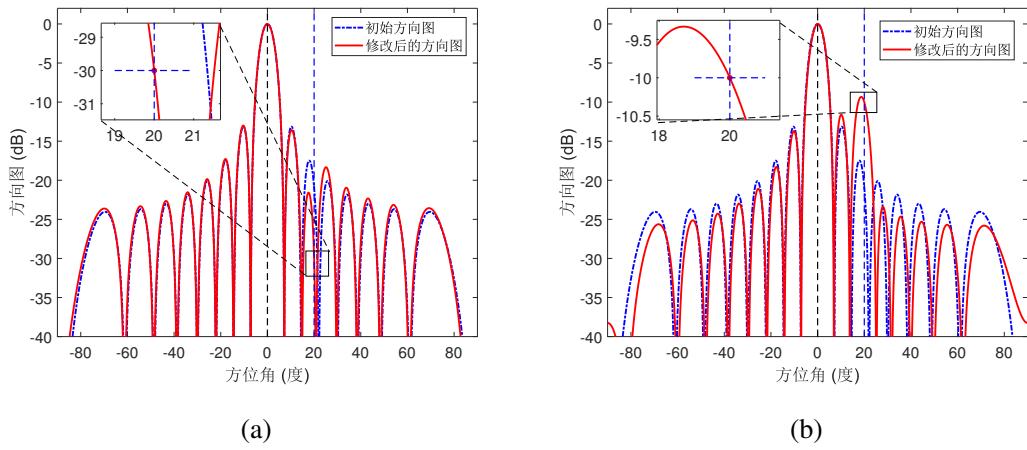


图 2-2 对 20° 方向进行电平控制。(a) $L_*(20^\circ, 0^\circ) = -30\text{dB}$;(b) $L_*(20^\circ, 0^\circ) = -10\text{dB}$

从而满足 θ_1 方向的电平要求。由于 \mathbf{w}_0 和 $\mathbf{a}(\theta_1)$ 均已知, 余下的问题就是如何找到合适的参数 μ_1 来实现给定的要求。假设 μ_1 已经得到, 我们需要继续调节另外一个方向 θ_2 处的电平至 ρ_2 。那么可以继续更新权向量为 $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + \mu_2 \mathbf{a}(\theta_2)$, 其中 μ_2 为待确定参数。用这种方式, 在第 k 步中需要找到一个合适的 \mathbf{w}_k 使得 θ_k 方向的归一化响应电平刚好等于 ρ_k 。给定第 $(k-1)$ 步得到的权向量 \mathbf{w}_{k-1} , 可以将第 k 步的权向量 \mathbf{w}_k 表示为:

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \mu_k \mathbf{a}(\theta_k) \quad (2-21)$$

上述方向图控制方法, 只需要改变当前的权向量, 而不必对权向量进行重新设计。

下面我们考虑如何确定每步权向量更新的 μ_k 。由式(2-21), θ_k 处的归一化响应可以表示为:

$$L_*^{(k)}(\theta_k, \theta_0) = \frac{(\mathbf{w}_{k-1} + \mu_k \mathbf{a}(\theta_k))^H \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) (\mathbf{w}_{k-1} + \mu_k \mathbf{a}(\theta_k))}{(\mathbf{w}_{k-1} + \mu_k \mathbf{a}(\theta_k))^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) (\mathbf{w}_{k-1} + \mu_k \mathbf{a}(\theta_k))} \quad (2-22)$$

若令 $L_*^{(k)}(\theta_k, \theta_0)$ 为 ρ_k , 即:

$$L_*^{(k)}(\theta_k, \theta_0) = \rho_k \quad (2-23)$$

结合上述式(2-22)和式(2-23)可以得到

$$\mathbf{z}_k^H \mathbf{Q}_k \mathbf{z}_k = 0 \quad (2-24)$$

其中

$$\mathbf{z}_k = [1 \ \mu_k]^T \quad (2-25)$$

\mathbf{Q}_k 为 2×2 复共轭对称矩阵，表示为：

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{k-1} & \mathbf{a}(\theta_k) \end{bmatrix}^H (\mathbf{a}(\theta_k)\mathbf{a}^H(\theta_k) - \rho_k \mathbf{a}(\theta_0)\mathbf{a}^H(\theta_0)) \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{k-1} & \mathbf{a}(\theta_k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{\star}^{(k-1)}(\theta_k) - \rho_k P_{\star}^{(k-1)}(\theta_0) & d_k \\ d_k^* & \|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^4 - \rho_k |v(\theta_k, \theta_0)|^2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2-26)$$

其中 $P_{\star}^{(k-1)}(\theta_k) = |\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2$ 和 $P_{\star}^{(k-1)}(\theta_0) = |\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2$ 分别为第 $k-1$ 步中 θ_k 角度处和 θ_0 角度处的功率方向图电平。式(2-26)中， d_k 可以表示为：

$$d_k = \mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_k) \|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^2 - \rho_k \mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_0) v(\theta_k, \theta_0) \quad (2-27)$$

其取值由 \mathbf{w}_{k-1} ， $\mathbf{a}(\theta_0)$ ， $\mathbf{a}(\theta_k)$ 以及 ρ_k 确定。

显然，如果 $\hat{\mathbf{z}}_k$ 是方程(2-24)的解，同时假设 $\hat{\mathbf{z}}_k(1) \neq 0$ ，那么可以得到：

$$\mu_k = \mathbf{z}_k(2) = \hat{\mathbf{z}}_k(2)/\hat{\mathbf{z}}_k(1) \quad (2-28)$$

其中 $\mathbf{z}_k(i)$ 表示向量 \mathbf{z}_k 的第*i*个元素。可以发现，如果 $\mathbf{Q}_k = \mathbf{O}$ ，则 $\hat{\mathbf{z}}_k$ 可以为任意向量。然而，此时有 $P_{\star}^{(k-1)}(\theta_k) - \rho_k P_{\star}^{(k-1)}(\theta_0) = 0$ ，或者等价地：

$$L_{\star}^{(k-1)}(\theta_k, \theta_0) = P_{\star}^{(k-1)}(\theta_k)/P_{\star}^{(k-1)}(\theta_0) = L_{\star}^{(k)}(\theta_k, \theta_0) = \rho_k \quad (2-29)$$

即 \mathbf{w}_{k-1} 已经满足了 θ_k 的方向处的控制要求。下面我们仅考虑 $\mathbf{Q}_k \neq \mathbf{O}$ 的情况，此时矩阵 \mathbf{Q}_k 至少存在一个非零的特征值。

实际上， $\hat{\mathbf{z}}_k$ 以及参数 μ_k 可以用 \mathbf{Q}_k 的特征向量来表示。具体来讲，可以将 \mathbf{Q}_k 的特征值分解表示为：

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{U}_k \Lambda_k \mathbf{U}_k^H \quad (2-30)$$

其中 $\Lambda_k = \text{diag}([\lambda_1, \lambda_2])$ ， λ_1 和 λ_2 为 \mathbf{Q}_k 的特征值， \mathbf{U}_k 为酉矩阵，记作：

$$\mathbf{U}_k = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \quad (2-31)$$

\mathbf{Q}_k 的行列式由下式给出：

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{Q}_k) &= \left(P_{\star}^{(k-1)}(\theta_k) - \rho_k P_{\star}^{(k-1)}(\theta_0) \right) \left(\|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^4 - \rho_k |v(\theta_k, \theta_0)|^2 \right) - |d_k|^2 \\ &= -\rho_k \left(P_{\star}^{(k-1)}(\theta_0) \|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^4 + P_{\star}^{(k-1)}(\theta_k) |v(\theta_k, \theta_0)|^2 - \right. \\ &\quad \left. 2\text{Re}(\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{w}_{k-1} \|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^2 v(\theta_k, \theta_0)) \right) \\ &= -\rho_k |\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_0) \|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^2 - \mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_k) v^*(\theta_k, \theta_0)|^2 \\ &\leq 0\end{aligned}\quad (2-32)$$

从而得到 $\lambda_1\lambda_2 = \det(\mathbf{Q}_k) \leq 0$ 。将式(2-30)代入到式(2-24), 可以得到:

$$\widehat{\mathbf{z}}_k^H \mathbf{U}_k \Lambda_k \mathbf{U}_k^H \widehat{\mathbf{z}}_k = \mathbf{y}_k^H \Lambda_k \mathbf{y}_k = \lambda_1|y_1|^2 + \lambda_2|y_2|^2 = 0 \quad (2-33)$$

其中 $\mathbf{y}_k \triangleq \mathbf{U}_k^H \widehat{\mathbf{z}}_k = [y_1 \ y_2]^T$ 。

不失一般性, 下面假设 λ_2 非零, 因此有 $|y_2/y_1| = \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$, 而 \mathbf{y}_k 可以进一步表示为:

$$\mathbf{y}_k = \kappa \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2} e^{j\phi} \end{bmatrix}^T \quad (2-34)$$

其中 κ 为非零复常数, $\phi \in \mathbb{R}$ 。所以, 式(2-24)的解可以表示为:

$$\widehat{\mathbf{z}}_k = \mathbf{U}_k \mathbf{y}_k = \kappa \begin{bmatrix} u_{11} + \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2} u_{12} e^{j\phi} \\ u_{21} + \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2} u_{22} e^{j\phi} \end{bmatrix} \quad (2-35)$$

假设 $u_{11} + \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2} u_{12} e^{j\phi} \neq 0$, 则参数 μ_k 可由下式表示:

$$\mu_k = \frac{\widehat{\mathbf{z}}_k(2)}{\widehat{\mathbf{z}}_k(1)} = \frac{u_{21} + \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2} u_{22} e^{j\phi}}{u_{11} + \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2} u_{12} e^{j\phi}} \quad (2-36)$$

记 \mathbb{F} 为 ϕ 的可行集, 如下所示:

$$\mathbb{F} = \left\{ \phi \mid u_{11} + \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2} u_{12} e^{j\phi} \neq 0 \right\} \quad (2-37)$$

则对于任意 $\phi \in \mathbb{F} \subset \mathbb{R}$, 以及式(2-36)的 μ_k , $\mathbf{z}_k = [1 \ \mu_k]^T$ 均是方程(2-24)的解。

一般来讲, 我们有 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 。由附录A.2的式(A-23)可知 $\mathbf{Q}_k(2,2) \neq 0$ 。由此可进一步得到: $|u_{11}|^2 \neq -(\lambda_1/\lambda_2)|u_{12}|^2$ 。所以, 对于任意 $\phi \in \mathbb{R}$, 可以得到

$$u_{11} + \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2} u_{12} e^{j\phi} \neq 0 \quad (2-38)$$

由式(2-26)可知, 如果 $\|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^4 \neq \rho_k |v(\theta_k, \theta_0)|^2$, 则 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 。

事实上, $\|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^4 = \rho_k |v(\theta_k, \theta_0)|^2$ 的情况在实际应用中几乎不会遇到。这是因为 $\|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^4 = \rho_k |v(\theta_k, \theta_0)|^2$ 意味着 $\rho_k = \|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^4 / |v(\theta_k, \theta_0)|^2$, 这是当权向量取为 $\mathbf{a}(\theta_k)$ 时, 归一化响应 $L_0(\theta_k, \theta_0)$ 的值。注意到此时的阵列方向图响应由 θ_0 处的输出进行归一化, 但是波束中心却指向 θ_k 方向, 所以此时一般会有 $\rho_k > 1$ 。我们说这种场景几乎不会发生, 是因为如果 θ_0 代表波束中心, 则不会调节 θ_k 的响应使得其高于 θ_0 处的值, $\theta_k \neq \theta_0$ 。

2.2.3 基于几何方法的权向量确定

由式(2-36)可知, 存在无穷个 μ_k 使得式(2-23)成立, 而 μ_k 可以由特征值分解来确定。为了进一步简化求解 μ_k 的过程, 以及利用新的视角来观察 μ_k 的分布, 下面利用一种几何方法来解 μ_k 。首先, 我们可以得到下面定理。

定理 2.2.1 任意给定 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$, 以及复数 c 满足:

$$c = \frac{a_1 + a_2 e^{j\phi}}{b_1 + b_2 e^{j\phi}} \quad (2-39)$$

其中 $\phi \in \mathbb{D} = \{\phi | b_1 + b_2 e^{j\phi} \neq 0\}$ 。设集合 \mathbb{G} 表示 $[\operatorname{Re}(c) \ \operatorname{Im}(c)]^T$ 的轨迹, 则有

$$\mathbb{G} \subseteq \mathbb{C}_0 \quad (2-40)$$

其中 \mathbb{C}_0 为复平面上圆心为 \mathbf{c}_0 , 半径为 r_c 的圆环。 \mathbf{c}_0 和 r_c 分别满足:

$$\mathbf{c}_0 = \frac{1}{h_b} \mathbf{B} \mathbf{a}_* \quad (2-41)$$

$$r_c^2 = \frac{1}{h_b^2} \mathbf{a}_*^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{a}_* - \frac{h_a}{h_b} \quad (2-42)$$

其中 $\mathbf{a}_* = [\mathbf{a}_1^T \ -\mathbf{a}_2^T]^T$, $\mathbf{a}_l = [\operatorname{Re}(a_l) \ \operatorname{Im}(a_l)]^T$, $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{P}\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{P}\mathbf{b}_2]$, $\mathbf{b}_l = [\operatorname{Re}(b_l) \ -\operatorname{Im}(b_l)]^T$ ($l = 1, 2$), $h_a = \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2$, $h_b = \mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2^T \mathbf{b}_2$, \mathbf{P} 为下面矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} \quad (2-43)$$

如果 $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, 则有 $\mathbb{G} = \mathbb{C}_0$ 。否则, $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{C}_0$ 。

证明 见附录A.1。 ■

对式(2-36)应用定理2.2.1, 我们可以得到下面定理。

定理 2.2.2 假设式(2-36)的 ϕ 可以在集合 \mathbb{F} 中取值, 则 $[\operatorname{Re}(\mu_k) \ \operatorname{Im}(\mu_k)]^T$ 的集合为圆 \mathbb{C}_μ 或 \mathbb{C}_μ 的子集。 \mathbb{C}_μ 的圆心和半径分别为:

$$\mathbf{c}_\mu = \frac{1}{\mathbf{Q}_k(2, 2)} \begin{bmatrix} -\operatorname{Re}(\mathbf{Q}_k(1, 2)) \\ \operatorname{Im}(\mathbf{Q}_k(1, 2)) \end{bmatrix} \quad (2-44)$$

$$r_\mu = \frac{\sqrt{-\det(\mathbf{Q}_k)}}{|\mathbf{Q}_k(2, 2)|} \quad (2-45)$$

证明 见附录A.2。 ■

上述定理2.2.2从几何上描述了 μ_k 的分布, 如图2-3所示。如果定义如下 g 函数

$$g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(1) + j\mathbf{v}(2) \quad (2-46)$$

其中 \mathbf{v} 为 2×1 的向量。则对任意 $\phi \in \mathbb{F}$, 可以得到满足条件(2-23)的 μ_k :

$$\begin{aligned}\mu_k &= g\left(\left[\mathbf{c}_\mu(1) + r_\mu \cos\phi \quad \mathbf{c}_\mu(2) + r_\mu \sin\phi\right]^T\right) \\ &= -\frac{\mathbf{Q}_k^*(1,2)}{\mathbf{Q}_k(2,2)} + \frac{\sqrt{-\det(\mathbf{Q}_k)}}{|\mathbf{Q}_k(2,2)|} e^{j\phi}\end{aligned}\quad (2-47)$$

需要注意的是, 上式(2-47)与式(2-36)是等价的。但是利用式(2-47)求解 μ_k 不需要进行特征值分解。除此之外, 上述结果从几何上更直观地描述了 μ_k 的分布, 这有利于分析 μ_k 的一些隐含性质和结果。

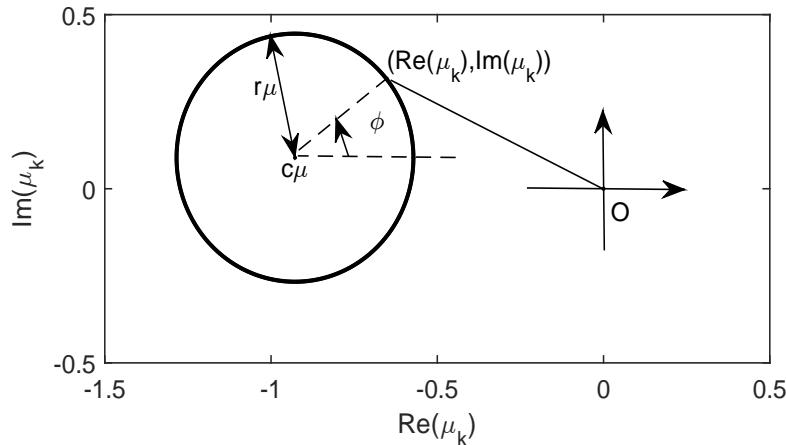


图 2-3 μ_k 的几何示意图

2.2.4 μ_k 的选择

由上节可以看出, 存在无穷多个 μ_k 使得(2-23)成立。一个很自然的问题是, 这些解的性能是否相同? 如果各个解的性能不同, 应该如何从中选择一个较好的解? 事实上, 前文分析中, 我们没有考虑将 \mathbf{w}_{k-1} 更新为 \mathbf{w}_k 时 θ_{k-1} 处波束响应的变化。设计权向量 \mathbf{w}_k (或等价地, 选择 μ_k) 的一个理想的准则, 是在保证 θ_k 的电平精确控制的情况下, 其他方向的电平保持不变。数学上, 可以描述为:

$$\begin{cases} L_\star^{(k)}(\theta, \theta_0) = \rho_k, & \theta = \theta_k \\ L_\star^{(k)}(\theta, \theta_0) = L_\star^{(k-1)}(\theta, \theta_0), & \theta \neq \theta_k \end{cases} \quad (2-48)$$

一般情况下, 由于阵列波束方向图响应是一个连续函数, 所以满足上述准则的权向量是不存在的。尽管如此, 式(2-48)为设计方向图提供了一个向导。基于此, 我们将阵列响应控制问题表述为:

$$\begin{aligned}\min_{\mu_k} \quad & \int_{\theta \neq \theta_k} \left| L_\star^{(k)}(\theta, \theta_0) - L_\star^{(k-1)}(\theta, \theta_0) \right| d\theta \\ \text{s.t.} \quad & L_\star^{(k)}(\theta_k, \theta_0) = \rho_k\end{aligned}\quad (2-49)$$

上述问题等价为

$$\begin{aligned} \min_{\mu_k} \quad & \int_{\theta \in \Omega} \left| L_{\star}^{(k)}(\theta, \theta_0) - L_{\star}^{(k-1)}(\theta, \theta_0) \right| d\theta \\ \text{s.t.} \quad & L_{\star}^{(k)}(\theta_k, \theta_0) = \rho_k \end{aligned} \quad (2-50)$$

其中 Ω 表示整个角度区间。为了更好的处理上述问题，我们将其离散化形式：

$$\begin{aligned} \min_{\mu_k} \quad & \sum_{\theta \neq \theta_k} \left| L_{\star}^{(k)}(\theta, \theta_0) - L_{\star}^{(k-1)}(\theta, \theta_0) \right| \\ \text{s.t.} \quad & L_{\star}^{(k)}(\theta_k, \theta_0) = \rho_k \end{aligned} \quad (2-51)$$

我们可以利用全局搜索来得到上述问题的最优解，即通过在 $[0, 2\pi]$ 范围内变化 ϕ 。但是，这种方式会带来较大的计算复杂度。尽管如此，全局搜索的结果可以为我们提供一些关于最优解的潜在特性，由此我们可能找到一种更简单的方式来设计 μ_k 。下面，我们设计一个实例，通过在 \mathbb{C}_{μ} 内变化 μ_k （或等价地，在 $[0, 2\pi]$ 内滑动 ϕ ），来测试最终波束方向图的性能。

具体来讲，我们考虑 16 阵元等距线阵，阵元间距为半波长，角度区域为 $\Omega = [-90^\circ, 90^\circ]$ 。初始权向量为 $\mathbf{w}_0 = \mathbf{a}(\theta_0)$ ，其中 $\theta_0 = 0^\circ$ 。我们取 $k = 1$ ，以及 $\theta_k = 20^\circ$ ，希望设计方向图满足 $L_{\star}(20^\circ, 0^\circ) = -30 \text{ dB}$ 。 μ_k 的分布见图 2-4。此时，可以计算出 $\mathbf{c}_{\mu} = [0.0183 \quad 0.0881]^T$ ， $r_{\mu} = 0.0314$ 。

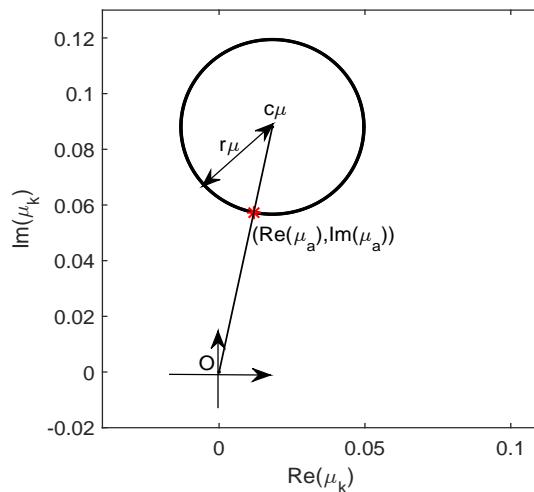


图 2-4 满足 $L_{\star}(20^\circ, 0^\circ) = -30 \text{ dB}$ 的 μ_k 的几何分布

为了衡量不同 μ_k 的性能，我们将每个 μ_k 对应的方向图离散化为 I 个点，同时定义第 k 步的代价函数为

$$J \triangleq \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left| L_{\star}^{(k)}(\theta_i, \theta_0) - L_{\star}^{(k-1)}(\theta_i, \theta_0) \right| \quad (2-52)$$

很明显，上述 J 测量了 $L_{\star}^{(k)}(\theta, \theta_0)$ 与 $L_{\star}^{(k-1)}(\theta, \theta_0)$ 的平均偏离程度。实验中，我们

将 Ω 每隔 0.02° 进行采样，因此得到 $I = 9001$ 个离散点。图2-5描述了 J 随 ϕ 的变化曲线。这里， ϕ 是相对于点($\text{Re}(\mathbf{c}_\mu)$ $\text{Im}(\mathbf{c}_\mu)$)的相位值，其几何函数如图2-3所示。

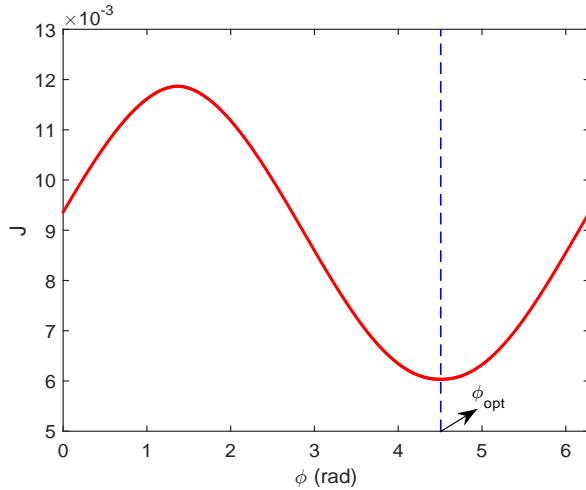


图 2-5 J 随 ϕ 的变化曲线

从图2-5可以看出， J 在 $\phi_{opt} = 4.5077\text{rad}$ 处达到最小值。不难发现，此时有 $\pi < \phi_{opt} < 1.5\pi$ 。结合图2-4，可以发现，最优值 μ_{opt} 离远点较近，其中

$$\mu_{opt} \triangleq \mu_k|_{\phi=\phi_{opt}} \quad (2-53)$$

上述观测意味着模值较小的 μ_k 可能产生相对较小的代价函数 J ，从而产生的方向图性能也会更好。

为了展示上述推断的合理性，我们比较不同模值的 μ_k 的性能。两种方式分别取 μ_k 为 $0.0119 + j0.0573$ 和 $\mu_k = 0.0247 + j0.1188$ ，对应的模值分别为 0.0586 和 0.1213 。可以验证，两种取值的 μ_k 均分布在图2-4所示的圆上。得到的波束方向图分布如图2-6(a)和图2-6(b) 所示（利用 θ_0 处的输出进行归一化）。从图中可以看出，两种参数设置均可以将 $L_*(20^\circ, 0^\circ)$ 调节到期望电平。然而，两种场景下，方向图最大值的位置均产生了偏移。具体来讲，第一种场景下所得的峰值为 $L_*(-0.04^\circ, 0^\circ) = 4 \times 10^{-4}\text{dB}$ 。第二种场景下，最大值约为 $L_*(-0.07^\circ, 0^\circ) = 1.9 \times 10^{-3}\text{dB}$ 。基于此我们推测，具有较小模值的 μ_k 会得到更小的波束畸变。因此，如果将 μ 的模值设置为最小，则所得到的波束方向图可能是最好的。下面，我们将给出此推断的更多理论解释，另外提出一种简单有效的选取参数 μ_k 的方法。

首先，由 \mathbf{w}_k 和 \mathbf{w}_{k-1} 的表达式，我们得到

$$L_*^{(k-1)}(\theta, \theta_0) = \frac{P_*^{(k-1)}(\theta)}{P_*^{(k-1)}(\theta_0)} = \frac{|\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta)|^2}{|\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} \quad (2-54)$$

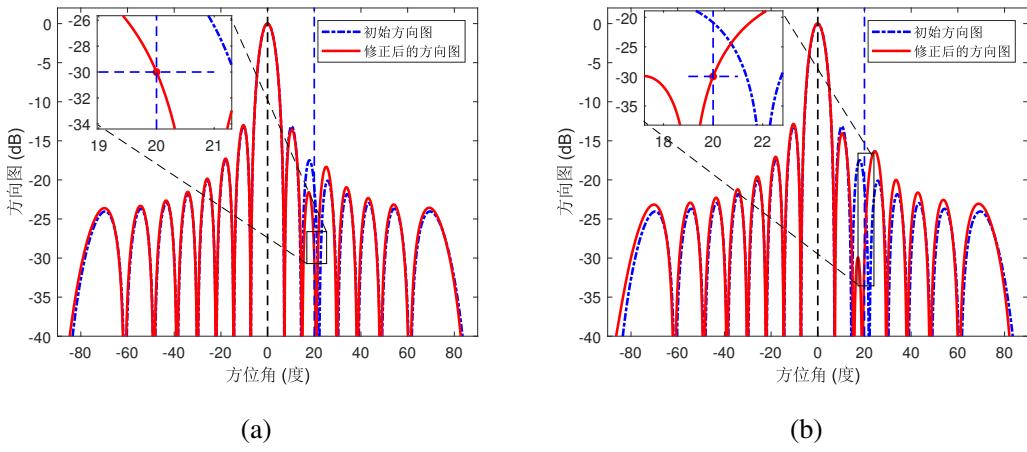


图 2-6 μ 取不同值时的方向图对比。(a) $\mu = 0.0119 + j0.0573$;(b) $\mu = -0.2974 + j0.0794$

$$L_{\star}^{(k)}(\theta, \theta_0) = \frac{P_{\star}^{(k)}(\theta)}{P_{\star}^{(k)}(\theta_0)} = \frac{|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta)|^2}{|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} = \frac{P_i^{(k)}(\theta) + P_a^{(k)}(\theta) + P_c^{(k)}(\theta)}{P_i^{(k)}(\theta_0) + P_a^{(k)}(\theta_0) + P_c^{(k)}(\theta_0)} \quad (2-55)$$

其中 $P_{\star}^{(k)}(\theta)$ 表示第 k 步时 θ 处的功率响应。式(2-55)中, $P_i^{(k)}(\theta) \triangleq |\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta)|^2$, $P_a^{(k)}(\theta) \triangleq |\mu_k^* v(\theta, \theta_k)|^2$, $P_c^{(k)}(\theta) \triangleq 2\text{Re}(\mu_k \mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta) v(\theta_k, \theta))$ 。根据式(2-54), 可以将 $L_{\star}^{(k-1)}(\theta, \theta_0)$ 重新表示为

$$L_{\star}^{(k-1)}(\theta, \theta_0) = \frac{P_i^{(k)}(\theta)}{P_i^{(k)}(\theta_0)} \quad (2-56)$$

因此, 为了使得波束畸变 (可以表示为 $|L_{\star}^{(k)}(\theta, \theta_0) - L_{\star}^{(k-1)}(\theta, \theta_0)|$) 足够小, 我们应该选择参数 μ_k 使得 $\frac{P_i^{(k)}(\theta) + P_a^{(k)}(\theta) + P_c^{(k)}(\theta)}{P_i^{(k)}(\theta_0) + P_a^{(k)}(\theta_0) + P_c^{(k)}(\theta_0)}$ 与 $\frac{P_i^{(k)}(\theta)}{P_i^{(k)}(\theta_0)}$ 接近。自然地, 此时我们只需要确保 $|P_a^{(k)}(\theta) + P_c^{(k)}(\theta)|$ 和 $|P_a^{(k)}(\theta_0) + P_c^{(k)}(\theta_0)|$ 足够小。根据 $P_a^{(k)}(\theta)$ 和 $P_c^{(k)}(\theta)$ 的定义, 这两项可以重新表示为 $P_a^{(k)}(\theta) = |\mu_k|^2 |v(\theta_k, \theta)|^2$ 和 $P_c^{(k)}(\theta) = 2|\mu_k| |v(\theta_k, \theta)| \gamma_k$, 其中 $\gamma_k = |\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta)| \cos(\varphi_k)$, $\varphi_k = \angle(\mu_k \mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta) v(\theta_k, \theta))$, 这里 $\angle(\cdot)$ 返回输入复数的相位, 其范围为 $[0, 2\pi]$ 。因此, $|P_a^{(k)}(\theta) + P_c^{(k)}(\theta)|$ 可以重新表示为

$$|P_a^{(k)}(\theta) + P_c^{(k)}(\theta)| = |v(\theta_k, \theta)|^2 \cdot \left| |\mu_k|^2 + \frac{2\gamma_k |\mu_k|}{|v(\theta_k, \theta)|} \right| \quad (2-57)$$

可以看出, 为了获得相对较小的 $|P_a^{(k)}(\theta) + P_c^{(k)}(\theta)|$ 和 $|P_a^{(k)}(\theta_0) + P_c^{(k)}(\theta_0)|$, 我们应该在 \mathbb{C}_{μ} 中选择模值最小的 μ_k 。

由图2-3可知, 圆 \mathbb{C}_{μ} 上离原点最近的点, 是圆 \mathbb{C}_{μ} 与连接圆心 \mathbf{c}_{μ} 与原点的线段的交点。定义

$$\phi_a \triangleq \text{mod}(\angle g(\mathbf{c}_{\mu}) + \pi, 2\pi), \quad \mu_a \triangleq \mu_k|_{\phi=\phi_a} \quad (2-58)$$

不难发现, \mathbb{C}_μ 中模值最小的 μ_k 可以表示为

$$\mu_a = \arg \min_{\mu_k \in \mathbb{C}_\mu} |\mu_k| = g \left(\frac{|\mathbf{c}_\mu| - r_\mu}{|\mathbf{c}_\mu|} \mathbf{c}_\mu \right) \quad (2-59)$$

μ_a 的坐标如图 2-4 中所示。

为了进一步展示选择上述 μ_a 的合理性, 图 2-7 描绘了 $|P_a^{(k)}(\theta_0) + P_c^{(k)}(\theta_0)|$ 随 ϕ 变化的曲线(参数设置同前例)。可以看出, $|P_a^{(k)}(\theta_0) + P_c^{(k)}(\theta_0)|$ 在 $\phi = \phi_a$ 处达到最小。而且, 从式(2-58)可以计算出 $\phi_a = 4.5077\text{rad}$ 。事实上, 此时 μ_a 为最优值。这与上文的理论分析一致。另外, 可以进一步计算出 $\mu_a = 0.0119 + j0.0573$, 这其实与图 2-2(a) 的参数对应。

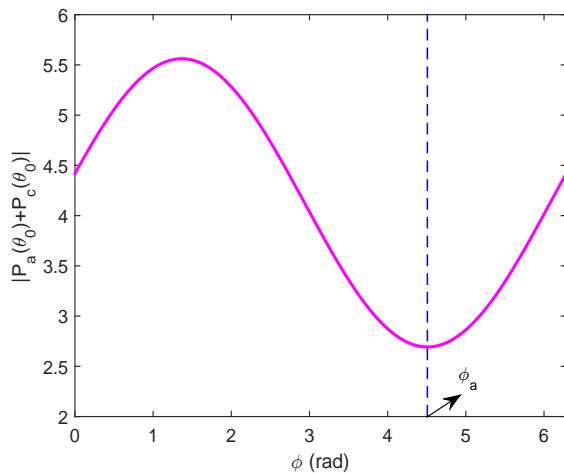


图 2-7 $|P_a(\theta_0) + P_c(\theta_0)|$ 随 ϕ 变化曲线

由上述测试和分析可以发现, 如果将 μ 取为 μ_a , 则可以得到一个满意的方向图。需要注意的是, 尽管式(2-59)的 μ_a 可能不是原问题(2-50)或(2-51) 的最优解, 但是该设置可以使得式(2-50)或(2-51)的代价函数足够小。因此, 式(2-59)中 μ_a 的选择依然是有意义的。仿真显示, 将 μ_k 设置为 μ_a 可以得到性能良好的波束方向图。

2.2.5 应用A²RC 算法实现方向图综合

下面利用A²RC方法实现方向图综合。简言之, 假设期望方向图是 $L_d(\theta)$, 则可以通过迭代地将 θ_k 角度的电平调节为 $L_d(\theta_k)$ 来实现方向图综合。

2.2.5.1 应用方向图综合时的几项注意

在讨论方向图综合的细节之前, 我们首先考虑如何选取归一化因子, 以及归一化因子是否依赖于迭代步数。为此, 将第 k 次迭代后的归一化方向图记为 $L_\star^{(k)}(\theta)$ 。理论上讲, 第 k 步中的归一化因子应该根据第 k 步之后的最大电平的位置来确定。

很显然，由于第 k 迭代尚未进行，理想的归一化因子无法得到。尽管如此，由前文中对A²RC算法的讨论可知，相邻步骤得到的方向图差异较小。因此在第 k 步中，可以近似地选取 $\theta_0^{(k-1)}$ 方向作为波束中心，并以该方向的输出作为归一化，其中 $\theta_0^{(k-1)}$ 是应用第 $(k-1)$ 步之后方向图取最大值的方向。实际上，若只需要控制方向图旁瓣，则可以将 θ_0 方向的输出作为归一化因子。

2.2.5.2 利用 A²RC算法实现方向图综合

A²RC算法具有解析解，且以类似的方式控制主瓣和旁瓣。具体来讲，对于主瓣控制，在第 k 步迭代中首先确定之前合成方向图的最大值位置，即

$$\theta_0^{(k)} = \arg \max_{\theta \in \Omega_m} L_\star^{(k-1)}(\theta) \quad (2-60)$$

其中 Ω_m 代表期望方向图的主瓣角度区域。则我们选择 θ_k 为主瓣区域内与期望方向图偏离最大的方向，即

$$\theta_k = \arg \max_{\theta \in \Omega_m} |L_\star^{(k-1)}(\theta) - L_d(\theta)| \quad (2-61)$$

在此基础上，利用A²RC算法将 θ_k 方向的电平调节为期望电平 $L_d(\theta_k)$ 。迭代上述过程直到主瓣形状满足期望要求。

对于旁瓣区域控制，在第 k 步中得到高于期望方向图电平的旁瓣区域，即

$$\tilde{\Omega}_s^{(k)} = \{\theta | L_\star^{(k-1)}(\theta) - L_d(\theta) > 0, \theta \in \Omega_s\} \quad (2-62)$$

其中 Ω_s 表示期望方向图的旁瓣区域。则我们选取 θ_k 为 Ω_s 区域内偏离期望电平最大的方向，即

$$\theta_k = \arg \max_{\theta \in \tilde{\Omega}_s^{(k)}} (L_\star^{(k-1)}(\theta) - L_d(\theta)) \quad (2-63)$$

在此基础上，利用A²RC算法将 θ_k 方向的电平调节为期望电平 $L_d(\theta_k)$ 。迭代应用上述过程直到合成理想的方向图。基于A²RC算法的方向图综合方法总结见算法1。

算法1的步骤3中，我们根据待控制区域为主瓣还是旁瓣分两种方式选取角度 θ_k 。当需要同时控制主瓣和旁瓣时，我们首先应用A²RC算法合成期望的主瓣，在此基础上再控制旁瓣区域。如果在旁瓣控制过程中主瓣区域出现了方向图畸变，再次利用A²RC算法调节主瓣区域的波束方向图。

2.2.5.3 与菲利普方法比较

由上节讨论，基于A²RC的方向图综合方法通过迭代地进行单点方向图控制来合成方向图，该方法以自适应阵列理论为基础。事实上，菲利普在文献[35]基于自适应阵列理论，通过施加虚拟干扰来合成期望方向图（将该方法称作菲利普方

算法 1 基于A²RC算法的方向图综合

- 1: 输入: $k = 0, \theta_0, \mathbf{w}_0, \Omega_m, \Omega_s, L_d(\theta), L_{\star}^{(0)}(\theta) = |\mathbf{w}_0^H \mathbf{a}(\theta)|^2 / |\mathbf{w}_0^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2$ 。
 - 2: 更新 $k = k + 1$, 利用式(2-60)找到 $L_{\star}^{(k-1)}(\theta)$ 取值最大的角度, 记为 $\theta_0^{(k-1)}$ 。
 - 3: 对于主瓣控制, 利用式(2-61)找到 $L_{\star}^{(k-1)}(\theta)$ 与期望方向图 $L_d(\theta)$ 偏离最大的角度 θ_k ; 对于旁瓣控制, 利用式(2-62)得到区间 $\tilde{\Omega}_s^{(k)}$, 在此基础上, 利用式(2-63)确定 θ_k 。
 - 4: 利用 $\theta_0^{(k)}, \theta_k, L_d(\theta_k)$ 和 \mathbf{w}_{k-1} 得到式(2-26)中的矩阵 \mathbf{Q}_k , 利用式(2-59)计算 μ_a 。
 - 5: 更新权向量为 $\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \mu_a \mathbf{a}(\theta_k)$, 并计算相应的波束方向图 $L_{\star}^{(k)}(\theta) = |\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta)|^2 / \max\{|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta)|^2\}$ 。
 - 6: 重复步骤2至步骤5直到 $L_{\star}^{(k)}(\theta)$ 满足要求。
 - 7: 输出: \mathbf{w}_k 和 $L_{\star}^{(k)}(\theta)$ 。
-

法)。然而, 菲利普方法依靠经验来确定参数, 无法实现方向图的准确控制。总结来讲, 所提的基于A²RC的方向图综合方法与菲利普方法主要区别如下:

- 所提方法可以精确地控制方向图, 菲利普方法无法实现精确控制。
- 所提方法以迭代的方式对方向图进行控制。
- 所提算法中干噪比INR可正可负, 而菲利普方法中只考虑非负的干噪比。
- 所提方法不需矩阵求逆即可实现权向量更新, 因此具有较低的运算复杂度。

2.2.6 仿真实验

本节中通过仿真来验证所提算法的有效性。所有仿真均在各向同性线性阵列下进行, 除非特别指定, 波束中心取为 $\theta_0 = 0^\circ$ 。

2.2.6.1 等电平旁瓣方向图综合

第一个实验中, 我们使用16元等距线阵, 阵元间隔为半波长。设置期望方向图具有-25dB等电平旁瓣。初始权向量取为 $\mathbf{a}(\theta_0)$ 。图2-8展示了不同步骤的结果。

第1步中, 从初始方向图中找出高于期望电平最多的峰值旁瓣角度。记该角度为 θ_1 , 有 $\theta_1 \approx -10^\circ$ 。利用A²RC算法将 θ_1 方向的电平调节为期望电平-25dB。图2-8(a)给出了电平调节之后的结果, 可以看出 θ_1 方向的电平已经为-25dB。

第2步中, 从第1步得到的方向图中找出高于期望电平最多的角度, 记为 θ_2 。此时有 $\theta_2 \approx 10^\circ$ 。应用A²RC算法可以将 θ_2 角度的电平精确地调节为-25dB, 如图2-8(b)所示。同时可以看出, θ_1 方向的电平几乎不变。实际上, 经过计算发现 θ_1 方向的电平由之前的-25dB降为了-25.5dB, 依然满足期望的旁瓣电平要求。

重复应用上述过程直到合成的方向图与期望方向图足够接近。由图2-8(c)可以看出，经过7步迭代之后所有的旁瓣电平接近于期望电平。由图2-8(d)可以看出，经过25步迭代即可得到满意的方向图，最终结果与切比雪夫方向图几乎一样。

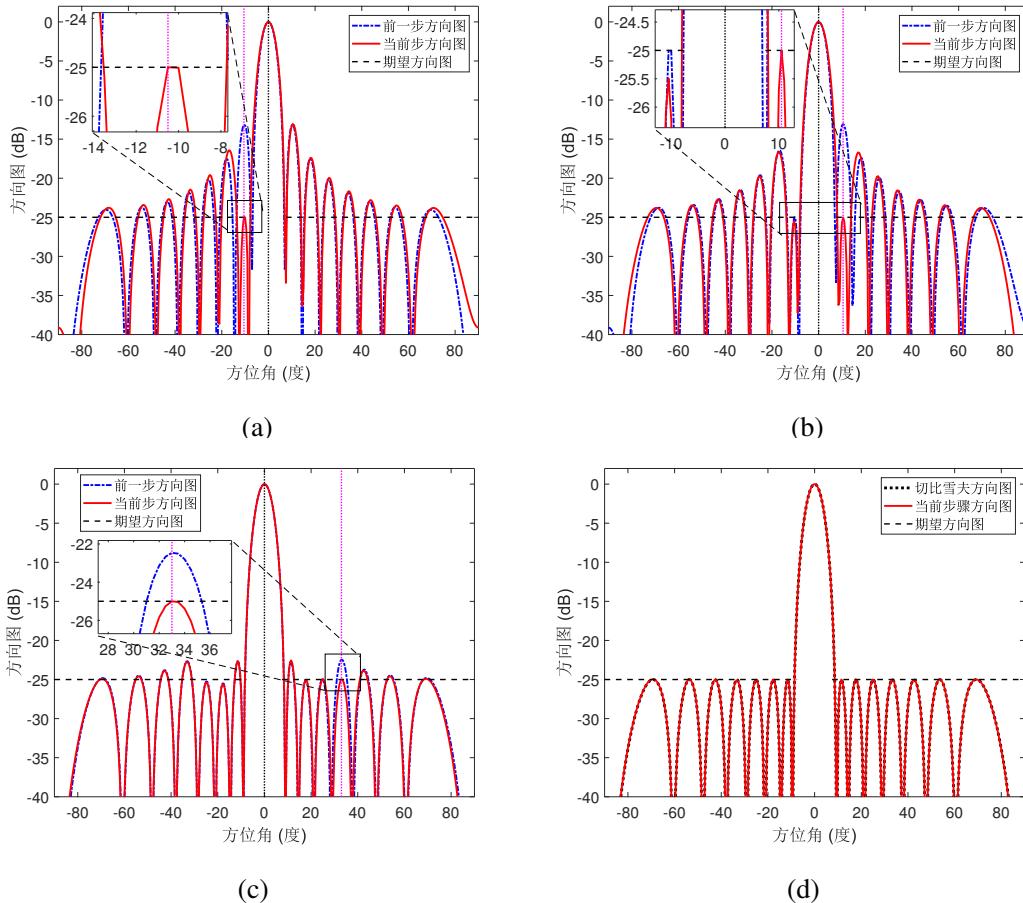


图 2-8 等旁瓣电平方向图综合结果。(a)第1步结果;(b)第2步结果;(c)第7步结果;(d)第25步结果

2.2.6.2 非等电平旁瓣方向图综合

第二个实验中，我们参照文献[32]中的实验和参数设定，考虑非等电平的期望旁瓣，即期望旁瓣电平随角度 θ 变化。所合成的方向图见图2-9，其中期望电平如虚线所示。可以看出，所提方法可以合成理想的方向图。

2.3 MA²RC 算法和M²A²RC 算法

A²RC算法中，权向量以下面方式进行更新

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_{k,*} + \mu_{k+1} \mathbf{a}(\theta_{k+1}) \quad (2-64)$$

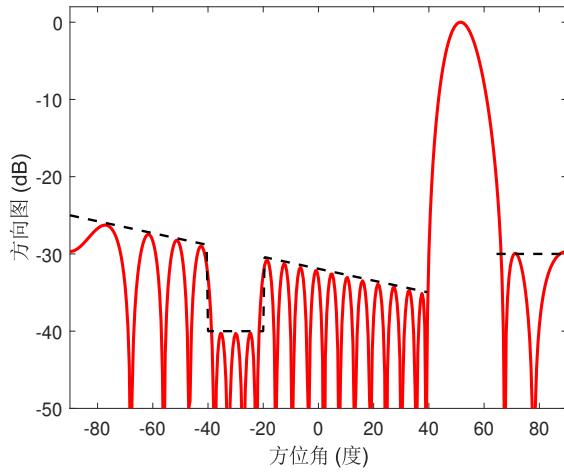


图 2-9 非等电平旁瓣方向图综合结果

其中 $\mathbf{w}_{k,*}$ 表示第 k 步的权向量, θ_{k+1} 表示第 $k+1$ 步需要调节的方向。给定 θ_{k+1} 方向的期望电平 (记作 ρ_{k+1}), 相应的参数 μ_{k+1} 满足

$$L^{(k+1)}(\theta_{k+1}, \theta_0) = \frac{|\mathbf{w}_{k+1}^H \mathbf{a}(\theta_{k+1})|^2}{|\mathbf{w}_{k+1}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} = \rho_{k+1} \quad (2-65)$$

由前文分析可知可以为圆 C_μ 上的任意点, 其中圆 C_μ 圆心和半径分别为 \mathbf{c}_μ 和 r_μ , 如图2-10所示。A²RC算法中, 最优的参数 μ_{k+1} (记作 $\mu_{k+1,*}$) 是圆 C_μ 与连接圆心与半径的线段的交点, 如图2-10中 $(\text{Re}(\mu_{k+1,*}), \text{Im}(\mu_{k+1,*}))$ 所示。实际上, 不难验证上述 $\mu_{k+1,*}$ 为下面问题的最优解

$$\min_{\mu_{k+1}} \left\| \mathbf{P}_{\mathbf{w}_{k,*}}^\perp (\mathbf{w}_{k,*} + \mu_{k+1} \mathbf{a}(\theta_{k+1})) \right\|_2^2 \quad (2-66a)$$

$$\text{subject to } \mu_{k+1} \in \mathbb{C}_\mu \quad (2-66b)$$

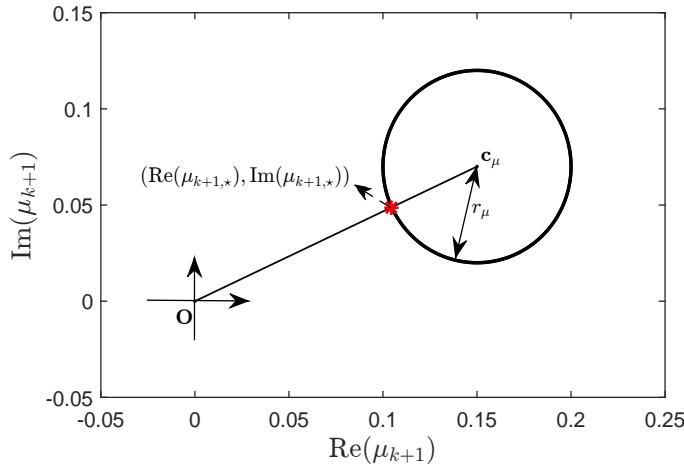
其中 $\mathbf{P}_{\mathbf{w}_{k,*}}^\perp$ 为向 $\mathbf{w}_{k,*}$ 的正交补空间投影的投影矩阵, 可以表示为

$$\mathbf{P}_{\mathbf{w}_{k,*}}^\perp = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{w}_{k,*} \mathbf{w}_{k,*}^H}{\mathbf{w}_{k,*}^H \mathbf{w}_{k,*}} \quad (2-67)$$

A²RC在单步迭代只能对单个方向的电平进行精确控制。本节通过对A²RC算法进行改进, 提出一种多点精确控制算法 (MA²RC算法)。

2.3.1 MA²RC算法

由式(2-65)不难发现, 如果将权向量 $\mathbf{w}_{k+1,*}$ 乘以某个非零常数 c , 所得到新的权向量 $c\mathbf{w}_{k+1,*}$ 不会改变 θ_{k+1} 处的归一化方向图电平。更进一步, 如果在 $c\mathbf{w}_{k+1,*}$ 的


 图 2-10 A²RC 算法中参数 μ 的分布图

基础上添加某一个同时正交于 $\mathbf{a}(\theta_{k+1})$ 和 $\mathbf{a}(\theta_0)$ 的向量 Δ_{k+1} , θ_{k+1} 处的归一化方向图电平也不会受到影响。数学上, 可以表示为

$$\frac{|(c\mathbf{w}_{k+1,*} + \Delta_{k+1})^H \mathbf{a}(\theta_{k+1})|^2}{|(c\mathbf{w}_{k+1,*} + \Delta_{k+1})^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} = \rho_{k+1} \quad (2-68)$$

其中 $c \neq 0$, $\Delta_{k+1} \perp \mathbf{a}(\theta_0)$, $\Delta_{k+1} \perp \mathbf{a}(\theta_{k+1})$ 。定义

$$\mathbf{A}(\theta_0, \theta_{k+1}) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_0) & \mathbf{a}(\theta_{k+1}) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times 2} \quad (2-69)$$

$$\mathbb{V}_{k+1} \triangleq \mathcal{R}(\mathbf{V}_{k+1}) = \mathcal{R}^\perp(\mathbf{A}(\theta_0, \theta_{k+1})) \quad (2-70)$$

其中 $\mathbf{V}_{k+1} \in \mathbb{C}^{N \times (N-2)}$ 为列满秩矩阵, 其列空间为 $\mathcal{R}^\perp(\mathbf{A}(\theta_0, \theta_{k+1}))$ 。根据式(2-68), 为了保证 θ_{k+1} 方向的输出为 ρ_{k+1} , 权向量可以是 $\mathbf{w}_{k+1,*}$ 和 \mathbb{V}_{k+1} 中某向量的任意线性组合 (这里排除 $\mathbf{w} \in \mathbb{V}_{k+1}$ 的场景)。因此, 如果定义向量集合 \mathbb{W}_{k+1} 为

$$\mathbb{W}_{k+1} \triangleq \mathcal{R}([\mathbf{V}_{k+1} \ \mathbf{w}_{k+1,*}]) \setminus \mathbb{V}_{k+1} \quad (2-71)$$

可知, 对于任意 \mathbb{W}_{k+1} 中的任意向量 \mathbf{w} (即 $\mathbf{w} \in \mathbb{W}_{k+1}$), 我们有 $L^{(k+1)}(\theta_{k+1}, \theta_0) = \rho_{k+1}$ 。这里假设 $\mathbf{w}_{k+1,*}$ 与 \mathbf{V}_{k+1} 的列向量线性无关 (即 $[\mathbf{V}_{k+1} \ \mathbf{w}_{k+1,*}]$ 为列满秩矩阵)。否则, 由 $\mathbf{w}_{k+1,*} \in \mathbb{V}_{k+1}$ 可以得到 $\mathbf{w}_{k+1,*}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 0$, $\mathbf{w}_{k+1,*}^H \mathbf{a}(\theta_{k+1}) = 0$ 。

假设第 k 步的权向量为 $\mathbf{w}_{k,*}$, 我们已经利用 A²RC 得到如下 M 个权向量

$$\mathbf{w}_{k+1,m} = \mathbf{w}_{k,*} + \mu_{k+1,m} \mathbf{a}(\theta_{k+1,m}), \quad m = 1, \dots, M \quad (2-72)$$

其中 $\mu_{k+1,m}$ 和 $\mathbf{w}_{k+1,m}$ 根据下式来计算

$$L(\theta_{k+1,m}, \theta_0) = \frac{|\mathbf{w}_{k+1,m}^H \mathbf{a}(\theta_{k+1,m})|^2}{|\mathbf{w}_{k+1,m}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} = \rho_{k+1,m} \quad (2-73)$$

对于 $\forall m \in \{1, \dots, M\}$, 相应的权向量 $\mathbf{w}_{k+1,m}$ 可以将 $\theta_{k+1,m}$ 处的电平调节至 $\rho_{k+1,m}$ 。下面我们考虑如何找到单个权向量 $\bar{\mathbf{w}}_{k+1}$, 可以同时进行多方向的电平控制, 即满足

$$L(\theta_{k+1,m}, \theta_0) = \frac{|\bar{\mathbf{w}}_{k+1}^H \mathbf{a}(\theta_{k+1,m})|^2}{|\bar{\mathbf{w}}_{k+1}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} = \rho_{k+1,m}, \quad m = 1, \dots, M \quad (2-74)$$

从前文可知, 对于任意 $\mathbf{w} \in \mathbb{W}_{k+1,m}$, 满足 $L(\theta_{k+1,m}, \theta_0) = \rho_{k+1,m}$, 其中 $\mathbb{W}_{k+1,m}$ 的定义参考式(2-71)。更具体地, 我们有

$$\mathbb{W}_{k+1,m} = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{k+1,m} & \mathbf{w}_{k+1,m} \end{bmatrix}\right) \setminus \mathbb{V}_{k+1,m} \quad (2-75)$$

其中 $\mathbb{V}_{k+1,m} = \mathcal{R}(\mathbf{V}_{k+1,m}) = \mathcal{R}^\perp(\mathbf{A}(\theta_0, \theta_{k+1,m}))$ 。因此, 使得式(2-74)中 M 个约束满足的权向量 $\bar{\mathbf{w}}_{k+1}$ 位于 M 个集合 $\mathbb{W}_{k+1,m}$ 的交集中, $m = 1, \dots, M$, 即

$$\bar{\mathbf{w}}_{k+1} \in \mathbb{M} \triangleq \bigcap_{m=1}^M \mathbb{W}_{k+1,m} \quad (2-76)$$

为了更直观地理解上述描述, 图2-11对子空间 $\mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{k+1,m} & \mathbf{w}_{k+1,m} \end{bmatrix}\right)$, $\mathbb{V}_{k+1,m}$, 以及集合 $\mathbb{W}_{k+1,1}$ 与 $\mathbb{W}_{k+1,2}$ 的交集进行了示意。

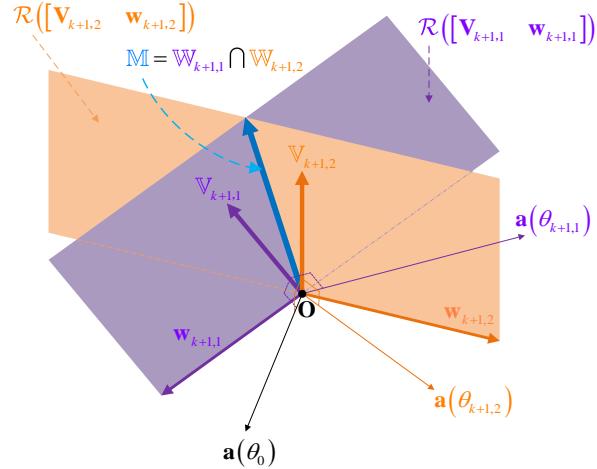


图 2-11 $\mathbb{W}_{k+1,1}$ 与 $\mathbb{W}_{k+1,2}$ 相交示意图

为了得到式(2-76)中 $\bar{\mathbf{w}}_{k+1}$ 的表达式, 下面对子空间 $\mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{k+1,m} & \mathbf{w}_{k+1,m} \end{bmatrix}\right)$ 和子空间 $\mathbb{V}_{k+1,m}$ 的基向量进行分析。具体地, 将矩阵 \mathbf{A}_m 的奇异值分解表示为

$$\mathbf{A}(\theta_0, \theta_{k+1,m}) = \mathbf{U}_m \boldsymbol{\Sigma}_m \mathbf{V}_m^H \quad (2-77)$$

其中 $\mathbf{U}_m \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 和 $\mathbf{V}_m \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ 为酉矩阵。矩阵 \mathbf{U}_m 可以划分为 $\mathbf{U}_{m1} \in \mathbb{C}^{N \times 2}$ 和

$\mathbf{U}_{m2} \in \mathbb{C}^{N \times (N-2)}$, 即

$$\mathbf{U}_m = [\underbrace{\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2}_{\mathbf{U}_{m1}} \quad \underbrace{\mathbf{u}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_N}_{\mathbf{U}_{m2}}] \quad (2-78)$$

其中 \mathbf{u}_n 为矩阵 \mathbf{U}_m 的第 n 个列向量。由线性代数理论可知, 矩阵 $\mathbf{A}(\theta_0, \theta_{k+1,m})$ 和 \mathbf{U}_{m1} 张成相同的列空间 (等于矩阵 \mathbf{U}_{m2} 的正交补空间)。更具体地, 我们有

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}_{m1}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}(\theta_0, \theta_{k+1,m})) = \mathcal{R}^\perp(\mathbf{U}_{m2}) \quad (2-79)$$

因此, 可以得到 $\mathbb{V}_{k+1,m} = \mathcal{R}^\perp(\mathbf{A}(\theta_0, \theta_{k+1,m})) = \mathcal{R}(\mathbf{U}_{m2})$ 。基于此, 可以将子空间 $\mathbb{V}_{k+1,m}$ 表示为

$$\mathbb{V}_{k+1,m} = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} = \mathbf{U}_{m2} \mathbf{b}_m, \quad \mathbf{b}_m \in \mathbb{C}^{N-2} \right\} \quad (2-80)$$

其中 \mathbf{b}_m 为系数向量。

结合等式(2-79)以及矩阵 $\mathbf{V}_{k+1,m}$ 的定义, 可取 $\mathbf{V}_{k+1,m} = \mathbf{U}_{m2}$ 。定义 \mathbf{H}_m 满足

$$\mathbf{H}_m \triangleq [\mathbf{U}_{m2} \quad \mathbf{w}_{k+1,m}] \in \mathbb{C}^{N \times (N-1)} \quad (2-81)$$

则可以得到

$$\mathcal{R}(\mathbf{H}_m) = \mathcal{R}([\mathbf{V}_{k+1,m} \quad \mathbf{w}_{k+1,m}]) = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} = \mathbf{H}_m [\mathbf{b}_m^T \quad c_m]^T \right\} \quad (2-82)$$

容易发现, 如果取 $c_m = 0$, 则子空间 $\mathcal{R}(\mathbf{H}_m)$ 退化为 $\mathbb{V}_{k+1,m}$ 。根据式(2-75)中空间 $\mathbb{W}_{k+1,m}$ 的表达式, 可以得到

$$\mathbb{W}_{k+1,m} = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} = \mathbf{H}_m \left[\mathbf{b}_m^T \quad c_m \right]^T, c_m \neq 0 \right\} \quad (2-83)$$

其中 $c_m \neq 0$ 保证所得到的向量 \mathbf{v} 不在子空间 $\mathbb{V}_{k+1,m}$ 内。

由上述分析可知, 求解式(2-76)中权向量 $\bar{\mathbf{w}}_{k+1} \in \mathbb{M}$ 的问题可以建模为求解一组系数向量 $[\mathbf{b}_m^T \quad c_m]^T$, $m = 1, \dots, M$, 满足

$$\mathbf{H}_1 [\mathbf{b}_1^T \quad c_1]^T = \mathbf{H}_2 [\mathbf{b}_2^T \quad c_2]^T = \cdots = \mathbf{H}_M [\mathbf{b}_M^T \quad c_M]^T \quad (2-84)$$

其中 $c_m \neq 0$, $m = 1, \dots, M$ 。集合 \mathbb{M} 中的权向量 $\bar{\mathbf{w}}_{k+1}$ 则可以表示为

$$\bar{\mathbf{w}}_{k+1} = \mathbf{H}_1 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_1 \\ \bar{c}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_2 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_2 \\ \bar{c}_2 \end{bmatrix} = \cdots = \mathbf{H}_M \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_M \\ \bar{c}_M \end{bmatrix} \quad (2-85)$$

其中 $[\bar{\mathbf{b}}_m^T \quad \bar{c}_m]^T$ 表示等式(2-84)的解, $m = 1, 2, \dots, M$ 。实际上, 上式(2-85)中的权

向量 $\bar{\mathbf{w}}_{k+1}$ 可以表示为

$$\bar{\mathbf{w}}_{k+1} = \bar{c}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{12} & \mathbf{w}_{k+1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-86a)$$

$$\text{subject to } \mathbf{F}\tilde{\mathbf{b}}_1 = -\mathbf{q}, \bar{c}_1 \neq 0 \quad (2-86b)$$

其中 \mathbf{F} 和 \mathbf{q} 分别满足

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_N - \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_2^\dagger) \mathbf{U}_{12} \\ (\mathbf{I}_N - \mathbf{H}_3 \mathbf{H}_3^\dagger) \mathbf{U}_{12} \\ \vdots \\ (\mathbf{I}_N - \mathbf{H}_M \mathbf{H}_M^\dagger) \mathbf{U}_{12} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N(M-1) \times (N-2)} \quad (2-87)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_N - \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_2^\dagger) \mathbf{w}_{k+1,1} \\ (\mathbf{I}_N - \mathbf{H}_3 \mathbf{H}_3^\dagger) \mathbf{w}_{k+1,1} \\ \vdots \\ (\mathbf{I}_N - \mathbf{H}_M \mathbf{H}_M^\dagger) \mathbf{w}_{k+1,1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N(M-1)} \quad (2-88)$$

假设 $\mathbf{w}_{k+1,m}^H \mathbf{a}(\theta_0) \neq 0, m = 1, 2, \dots, M$, 且 $\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_{k+1,1}), \dots, \mathbf{a}(\theta_{k+1,M})$ 线性无关, 式(2-86)的解 $\bar{\mathbf{w}}_{k+1}$ 满足

$$\bar{\mathbf{w}}_{k+1} = \bar{c}_1 \mathbf{H}_1 \begin{bmatrix} -\mathbf{F}^\dagger \mathbf{q} + \mathbf{f}_n \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{c}_1 \neq 0, \forall \mathbf{f}_n \in \mathcal{N}(\mathbf{F}) \quad (2-89)$$

式(2-86)-(2-89)的推导见附录A.3。上述MA²RC算法总结在算法2中。

为了使式(2-84)可解, $\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_{k+1,1}), \dots, \mathbf{a}(\theta_{k+1,M})$ 需要线性独立。由此可知, 最多可知控制 $N-1$ 个点。

算法 2 MA²RC算法

- 1: 输入: $\mathbf{w}_{k,*}, \theta_{k+1,m}, \rho_{k+1,m}, m = 1, 2, \dots, M$ 。
 - 2: **for** $m = 1, 2, \dots, M$ **do**
 - 3: 由式(2-66)计算 $\mu_{k+1,m}$ 使得 $L(\theta_{k+1,m}, \theta_0) = \rho_{k+1,m}$ 。
 - 4: 得到权向量 $\mathbf{w}_{k+1,m} = \mathbf{w}_{k,*} + \mu_{k+1,m} \mathbf{a}(\theta_{k+1,m})$ 。
 - 5: 对 $\mathbf{A}(\theta_0, \theta_{k+1})$ 进行奇异值分解得到 \mathbf{U}_{m2} , 记 $\mathbf{H}_m = [\mathbf{U}_{m2} \ \mathbf{w}_{k+1,m}]$ 。
 - 6: **end for**
 - 7: 分别由(2-87)和(2-88)得到 \mathbf{F} 和 \mathbf{q} 。
 - 8: 输出: $\bar{\mathbf{w}}_{k+1} = \bar{c}_1 \mathbf{H}_1 \left[(-\mathbf{F}^\dagger \mathbf{q} + \mathbf{f}_n)^T \ 1 \right]^T$, 其中 $\bar{c}_1 \neq 0, \mathbf{f}_n \in \mathcal{N}(\mathbf{F})$ 。
-

2.3.2 M²A²RC算法

MA²RC算法可以同时精确控制多个方向的方向图电平。但是MA²RC算法可能会导致波束中心偏移。设 θ_0 为期望的波束中心，式(2-89)所得到的权向量 $\bar{\mathbf{w}}_{k+1}$ 对应的波束中心可能是 θ_p (不等于 θ_0)。为了解决这个问题，下面提出一种改进的多点方向图控制算法(M²A²RC算法)。

具体地，考虑在MA²RC的基础上添加导数约束。对波束方向图的导数约束可以表示为

$$\frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad (2-90)$$

其中 $P(\theta) = \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{w}$ 表示阵列功率响应。将 $P(\theta)$ 代入式(2-90)中可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} &= \mathbf{w}^H \frac{\partial \mathbf{a}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{w} + \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta) \frac{\partial \mathbf{a}^H(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{w} \\ &= 2\operatorname{Re} \left[\mathbf{w}^H \frac{\partial \mathbf{a}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{w} \right] \end{aligned} \quad (2-91)$$

定义

$$\mathbf{d}(\theta_0) \triangleq \frac{\partial \mathbf{a}(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \quad (2-92)$$

由式(2-91)可知

$$\frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 2\operatorname{Re} [\mathbf{w}^H \mathbf{d}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}] \quad (2-93)$$

因此，施加导数约束(式(2-90))的多点方向图控制问题可以描述为

$$\text{find } \tilde{\mathbf{w}}_{k+1} \in \mathbb{M} \cap \mathbb{D} \quad (2-94)$$

其中 \mathbb{M} 的定义见式(2-76)，集合 \mathbb{D} 满足

$$\mathbb{D} = \left\{ \mathbf{w} \mid \operatorname{Re} [\mathbf{w}^H \mathbf{d}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}] = 0 \right\} \quad (2-95)$$

可以看出，不产生波束中心偏移的多点方向图控制权向量属于集合 \mathbb{M} 与 \mathbb{D} 的交集。

从上节可知，集合 \mathbb{M} 中的任意向量 \mathbf{w} 可以表示为

$$\mathbf{w} = c_1 \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{12} & \mathbf{w}_{k+1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^T & 1 \end{bmatrix}^T \quad (2-96a)$$

$$\text{subject to } \mathbf{F}\tilde{\mathbf{b}}_1 = -\mathbf{q}, c_1 \neq 0 \quad (2-96b)$$

为了保证上述 \mathbf{w} 同时位于集合 \mathbb{D} 中，结合(2-95)与(2-96a)可知下式需要满足

$$\operatorname{Re} \left[(\mathbf{U}_{12} \tilde{\mathbf{b}}_1 + \mathbf{w}_{k+1,1})^H \mathbf{d}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) (\mathbf{U}_{12} \tilde{\mathbf{b}}_1 + \mathbf{w}_{k+1,1}) \right] = 0 \quad (2-97)$$

由于 $\mathbf{a}^H(\theta_0)\mathbf{U}_{12} = \mathbf{0}$, 等式(2-97)可以简化为

$$\operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{b}}_1^H \mathbf{p}] = \beta_r \quad (2-98)$$

其中

$$\mathbf{p} = \mathbf{U}_{12}^H \mathbf{d}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{k+1,1} \in \mathbb{C}^{N-2} \quad (2-99)$$

$$\beta_r = -\operatorname{Re} [\mathbf{w}_{k+1,1}^H \mathbf{d}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{k+1,1}] \quad (2-100)$$

因此, 问题(2-94)可以重新表述为

$$\text{find } \tilde{\mathbf{w}}_{k+1} = c_1 \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{12} & \mathbf{w}_{k+1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^T & 1 \end{bmatrix}^T \quad (2-101a)$$

$$\text{subject to } \mathbf{F}\tilde{\mathbf{b}}_1 = -\mathbf{q}, c_1 \neq 0, \operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{b}}_1^H \mathbf{p}] = \beta_r \quad (2-101b)$$

为了进一步得到上述问题(2-101)的解析解, 下面考虑其实数形式。首先定义

$$\mathbf{Y} \triangleq \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\mathbf{F}) & -\operatorname{Im}(\mathbf{F}) \\ \operatorname{Im}(\mathbf{F}) & \operatorname{Re}(\mathbf{F}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N(M-1) \times 2(N-2)} \quad (2-102)$$

$$\mathbf{z} \triangleq \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{b}}_1^T) & \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{b}}_1^T) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2(N-2)} \quad (2-103)$$

$$\mathbf{r} \triangleq \begin{bmatrix} -\operatorname{Re}(\mathbf{q}^T) & -\operatorname{Im}(\mathbf{q}^T) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2N(M-1)} \quad (2-104)$$

$$\mathbf{f} \triangleq \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\mathbf{p}^T) & \operatorname{Im}(\mathbf{p}^T) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2(N-2)} \quad (2-105)$$

不难得到

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{b}}_1 = -\mathbf{q} \Leftrightarrow \mathbf{Y}\mathbf{z} = \mathbf{r} \quad (2-106)$$

$$\operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{b}}_1^H \mathbf{p}] = \beta_r \Leftrightarrow \mathbf{f}^T \mathbf{z} = \beta_r \quad (2-107)$$

则对实向量 \mathbf{z} (或复向量 $\tilde{\mathbf{b}}_1$) 的约束可以用下式表示

$$\mathbf{C}\mathbf{z} = \mathbf{k} \quad (2-108)$$

其中

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^T & \mathbf{f} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(2N(M-1)+1) \times 2(N-2)} \quad (2-109)$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^T & \beta_r \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2N(M-1)+1} \quad (2-110)$$

假设 $\mathbf{w}_{k+1,m}^H \mathbf{a}(\theta_0) \neq 0$, $m = 1, 2, \dots, M$, 且 $\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_{k+1,1}), \dots, \mathbf{a}(\theta_{k+1,M}), \mathbf{d}(\theta_0)$ 线性无关, 则方程(2-108)相容 (证明见附录A.4), 其通解可以表示为

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}^\dagger \mathbf{k} + \mathbf{z}_n, \forall \mathbf{z}_n \in \mathcal{N}(\mathbf{C}) \quad (2-111)$$

进一步，可以将满足(2-94)的权向量 $\tilde{\mathbf{w}}_{k+1}$ 表示为

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{w}}_{k+1} &= c_1 \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{12} & \mathbf{w}_{k+1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^T & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= c_1 \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\mathbf{U}_{12}) + j\operatorname{Im}(\mathbf{U}_{12}) & -\operatorname{Im}(\mathbf{U}_{12}) + j\operatorname{Re}(\mathbf{U}_{12}) & \mathbf{w}_{k+1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}^T & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= c_1 \begin{bmatrix} \Xi & \mathbf{w}_{k+1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{C}^\dagger \mathbf{k} + \mathbf{z}_n)^T & 1 \end{bmatrix}^T, \quad c_1 \neq 0, \forall \mathbf{z}_n \in \mathcal{N}(\mathbf{C})\end{aligned}\quad (2-112)$$

其中

$$\Xi \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{12} & j\mathbf{U}_{12} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times 2(N-2)} \quad (2-113)$$

最终，算法M²A²RC的总结见算法3。

算法 3 M²A²RC算法

- 1: 输入: $\mathbf{w}_{k,*}$, $\theta_{k+1,m}$, $\rho_{k+1,m}$, $m = 1, 2, \dots, M$ 。
 - 2: **for** $m = 1, 2, \dots, M$ **do**
 - 3: 由式(2-66)计算 $\mu_{k+1,m}$ 使得 $L(\theta_{k+1,m}, \theta_0) = \rho_{k+1,m}$ 。
 - 4: 得到权向量 $\mathbf{w}_{k+1,m} = \mathbf{w}_{k,*} + \mu_{k+1,m} \mathbf{a}(\theta_{k+1,m})$ 。
 - 5: 对 $\mathbf{A}(\theta_0, \theta_{k+1})$ 进行奇异值分解得到 \mathbf{U}_{m2} , 记 $\mathbf{H}_m = [\mathbf{U}_{m2} \ \mathbf{w}_{k+1,m}]$ 。
 - 6: **end for**
 - 7: 分别由(2-87)和(2-88)得到 \mathbf{F} 和 \mathbf{q} 。
 - 8: 由(2-92)计算 $\mathbf{d}(\theta_0)$ 。
 - 9: 得到 \mathbf{C} , \mathbf{k} 和 Ξ (分别见(2-109), (2-110)和(2-113))。
 - 10: 输出: $\tilde{\mathbf{w}}_{k+1} = c_1 \begin{bmatrix} \Xi & \mathbf{w}_{k+1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{C}^\dagger \mathbf{k} + \mathbf{z}_n)^T & 1 \end{bmatrix}^T$, 其中 $c_1 \neq 0$, $\mathbf{z}_n \in \mathcal{N}(\mathbf{C})$ 。
-

与MA²RC算法相比，上述M²A²RC算法中施加了额外的约束。不难得出，M²A²RC算法最多可以控制 $N - 2$ 个点。

2.3.3 M²A²RC算法最优权向量确定

由式(2-112)可知，M²A²RC算法有无穷多组解，下面考虑如何从中选出一组最优的权向量。

首先，注意到式(2-112)中的 c_1 不会对方向图产生影响。简单起见，我们令 $c_1 = 1$ ，从而可以将 $\tilde{\mathbf{w}}_{k+1}$ 表示为

$$\tilde{\mathbf{w}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \Xi & \mathbf{w}_{k+1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{C}^\dagger \mathbf{k} + \mathbf{z}_n)^T & 1 \end{bmatrix}^T \quad (2-114)$$

其中 $\mathbf{z}_n \in \mathcal{N}(\mathbf{C})$ 。除此之外，式(2-114)中的 $\mathbf{w}_{k+1,1}$ 由A²RC得到，满足

$$\mathbf{w}_{k+1,1} = \tilde{\mathbf{w}}_{k,*} + \mu_{k+1,1} \mathbf{a}(\theta_{k+1,1}) \quad (2-115)$$

其中 $\tilde{\mathbf{w}}_{k,*}$ 代表第 k 步 $\mathbf{M}^2 \mathbf{A}^2 \mathbf{R} \mathbf{C}$ 的最优权向量。

由前文讨论（式(2-66)和(2-114)）可知， $\tilde{\mathbf{w}}_{k+1}$ 的最优解（记为 $\tilde{\mathbf{w}}_{k+1,*}$ ）满足下面约束问题

$$\min_{\tilde{\mathbf{w}}_{k+1}} \left\| \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{w}}_{k,*}}^\perp \tilde{\mathbf{w}}_{k+1} \right\|_2^2 \quad (2-116a)$$

$$\text{subject to } \tilde{\mathbf{w}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \Xi & \mathbf{w}_{k+1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^\dagger \mathbf{k} + \mathbf{z}_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-116b)$$

其中 $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{w}}_{k,*}}^\perp$ 为向 $\mathcal{R}^\perp(\tilde{\mathbf{w}}_{k,*})$ 投影的正交投影矩阵，满足

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{w}}_{k,*}}^\perp = \mathbf{I} - \frac{\tilde{\mathbf{w}}_{k,*} \tilde{\mathbf{w}}_{k,*}^H}{\tilde{\mathbf{w}}_{k,*}^H \tilde{\mathbf{w}}_{k,*}} \in \mathbb{C}^{N \times N} \quad (2-117)$$

由式(2-114)可以看出，权向量的确定的关键在于如何选取参数 \mathbf{z}_n （记其最优解为 $\mathbf{z}_{n,*}$ ）。不难得到最优的 $\mathbf{z}_{n,*}$ 满足

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{n,*} &= \arg \min_{\mathbf{z}_n \in \mathcal{N}(\mathbf{C})} \left\| \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{w}}_{k,*}}^\perp \left\{ \begin{bmatrix} \Xi & \mathbf{w}_{k+1,1} \end{bmatrix} \left[(\mathbf{C}^\dagger \mathbf{k} + \mathbf{z}_n)^T \ 1 \right]^T \right\} \right\|_2^2 \\ &= \arg \min_{\mathbf{z}_n \in \mathcal{N}(\mathbf{C})} \left\| \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{w}}_{k,*}}^\perp \left\{ \begin{bmatrix} \Xi & \tilde{\mathbf{w}}_{k,*} + \mu_{k+1,1} \mathbf{a}(\theta_{k+1,1}) \end{bmatrix} \left[(\mathbf{C}^\dagger \mathbf{k} + \mathbf{z}_n)^T \ 1 \right]^T \right\} \right\|_2^2 \\ &= \arg \min_{\mathbf{z}_n \in \mathcal{N}(\mathbf{C})} \left\| \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{w}}_{k,*}}^\perp \underbrace{\Xi \mathbf{z}_n + \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{w}}_{k,*}}^\perp \Xi \mathbf{C}^\dagger \mathbf{k} + \mu_{k+1,1} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{w}}_{k,*}}^\perp \mathbf{a}(\theta_{k+1,1})}_{\mathbf{z}_d} \right\|_2^2 \\ &= [\text{basis } \{\mathcal{N}(\mathbf{C})\}] \cdot \arg \min_{\mathbf{c}_{\mathbf{z}_n}} \left\| \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{w}}_{k,*}}^\perp \underbrace{\Xi [\text{basis } \{\mathcal{N}(\mathbf{C})\}] \mathbf{c}_{\mathbf{z}_n}}_{\mathbf{z}_n} + \mathbf{z}_d \right\|_2^2 \quad (2-118a) \end{aligned}$$

$$= \mathbf{V}_{cn} \cdot \arg \min_{\mathbf{c}_{\mathbf{z}_n}} \left\| \mathbf{T} \mathbf{c}_{\mathbf{z}_n} + \mathbf{z}_r \right\|_2^2 \quad (2-118b)$$

$$= -\mathbf{V}_{cn} \mathbf{T}^\dagger \mathbf{z}_r \quad (2-118c)$$

其中 \mathbf{z}_d , \mathbf{C} , \mathbf{T} 和 \mathbf{z}_r 满足

$$\mathbf{z}_d = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{w}}_{k,*}}^\perp \Xi \mathbf{C}^\dagger \mathbf{k} + \mu_{k+1,1} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{w}}_{k,*}}^\perp \mathbf{a}(\theta_{k+1,1}) \in \mathbb{C}^N \quad (2-119)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}_c \boldsymbol{\Sigma}_c \mathbf{V}_c^H = \mathbf{U}_c \boldsymbol{\Sigma}_c \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{cr} & \mathbf{V}_{cn} \end{bmatrix}^H \quad (2-120)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \text{Re} \left(\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{w}}_{k,*}}^\perp \Xi \mathbf{V}_{cn} \right) \\ \text{Im} \left(\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{w}}_{k,*}}^\perp \Xi \mathbf{V}_{cn} \right) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times (2(N-2)-r_c)} \quad (2-121)$$

$$\mathbf{z}_r = \begin{bmatrix} \text{Re} (\mathbf{z}_d^T) & \text{Im} (\mathbf{z}_d^T) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2N} \quad (2-122)$$

需要注意到式(2-118b)中用到了下面结论

$$\text{basis } \{\mathcal{N}(\mathbf{C})\} = \mathbf{V}_{cn} \in \mathbb{R}^{2(N-2) \times (2(N-2)-r_c)} \quad (2-123)$$

上式中 \mathbf{V}_{cn} 由式(2-120)中矩阵 \mathbf{V}_c 的后 $2(N - 2) - r_c$ 个列构成，其中 $r_c = \text{rank}(\mathbf{C})$ 。另外，注意到式(2-118b)为实的最小二乘问题，其最优解由式(2-118c)得到。综上，最优的权向量 $\tilde{\mathbf{w}}_{k+1,\star}$ 可以表示为

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{w}}_{k+1,\star} &= \left[\Xi \quad \mathbf{w}_{k+1,1} \right] \left[(\mathbf{C}^\dagger \mathbf{k} + \mathbf{z}_{n,\star})^T \quad 1 \right]^T \\ &= \Xi \mathbf{C}^\dagger \mathbf{k} - \Xi \mathbf{V}_{cn} \mathbf{T}^\dagger \mathbf{z}_r + \mathbf{w}_{k+1,1}\end{aligned}\quad (2-124)$$

2.3.4 基于 $\mathbf{M}^2\mathbf{A}^2\mathbf{R}\mathbf{C}$ 的方向图综合

上节中介绍了 $\mathbf{M}\mathbf{A}^2\mathbf{R}\mathbf{C}$ 算法和 $\mathbf{M}^2\mathbf{A}^2\mathbf{R}\mathbf{C}$ 算法。下面介绍如何利用 $\mathbf{M}^2\mathbf{A}^2\mathbf{R}\mathbf{C}$ 算法实现任意阵列方向图综合，且不产生波束中心偏移。所提方向图综合算法与基于 $\mathbf{A}^2\mathbf{R}\mathbf{C}$ 算法的方向图综合思想类似。相比于 $\mathbf{A}^2\mathbf{R}\mathbf{C}$ 类方法，基于 $\mathbf{M}^2\mathbf{A}^2\mathbf{R}\mathbf{C}$ 的方向图综合方法降低了迭代次数。具体地，首先根据当前方向图与期望方向图（记为 $L_d(\theta)$ ）确定待控制角度。这些角度既可以位于旁瓣区域，也可以位于主瓣区域。对于旁瓣方向图综合，我们选取当前方向图高于期望电平值的峰值旁瓣角度。对于主瓣方向图综合，我们选取与期望电平相差较大的角度。选取一些角度后，应用 $\mathbf{M}^2\mathbf{A}^2\mathbf{R}\mathbf{C}$ 算法将相应角度的波束方向图电平调节为期望电平值，得到更新后的权向量。利用更新后的权向量继续选取新的角度，从而实现上述过程的迭代，直至得到满意的方向图电平。注意到在每次方向图控制过程中，由于导数约束的限制，波束中心不会产生偏移。

2.3.5 仿真实验

下面通过仿真来验证 $\mathbf{M}\mathbf{A}^2\mathbf{R}\mathbf{C}$ 算法和 $\mathbf{M}^2\mathbf{A}^2\mathbf{R}\mathbf{C}$ 算法的性能。实验中，取初始权向量为 $\mathbf{a}(\theta_0)$ 。

2.3.5.1 多点方向图控制

下面使用 10 阵元非等距线性阵列进行仿真。第 n 个阵元的方向图为

$$g_n(\theta) = \frac{\cos[\pi l_n \sin(\theta + \zeta_n)] - \cos(\pi l_n)}{\cos(\theta + \zeta_n)} \quad (2-125)$$

其中 ζ_n 和 l_n 分别代表阵元角度和长度。 ζ_n ， l_n 以及阵元位置 x_n 的取值见表 2-1。取波束中心为 $\theta_0 = 0^\circ$ 。考虑三个待控制方向（即 $M = 3$ ），各角度分别为 -45° ， -20° ， -6° 。期望电平分别为 -10dB ， -20dB ， -6dB 。注意到前两个角度位于旁瓣区域，而第三个角度位于主瓣区域。

图 2-12 展示了 $\mathbf{M}\mathbf{A}^2\mathbf{R}\mathbf{C}$ 算法和 $\mathbf{M}^2\mathbf{A}^2\mathbf{R}\mathbf{C}$ 算法的方向图。简单起见，取 \mathbf{f}_n 和 \mathbf{z}_n 为零向量。由图中可以看出，两种算法均可以实现预期的多点精确电平控制。注意到 $\mathbf{M}\mathbf{A}^2\mathbf{R}\mathbf{C}$ 算法的方向图波束中心偏移了约 0.2° ，而 $\mathbf{M}^2\mathbf{A}^2\mathbf{R}\mathbf{C}$ 算法没有产生波束中心偏移。上述仿真结果与理论预测相一致。

表 2-1 各向异性线性随机阵列参数

n	$x_n(\lambda)$	$l_n(\lambda)$	ζ_n (度)	n	$x_n(\lambda)$	$l_n(\lambda)$	ζ_n (度)
1	0.00	0.3	0.0	6	2.64	0.27	10
2	0.45	0.25	-4.0	7	3.09	0.23	1.0
3	0.93	0.24	5.0	8	3.55	0.24	-10
4	1.56	0.20	-32	9	4.09	0.25	0.5
5	2.04	0.26	-3.2	10	4.52	0.21	7.2

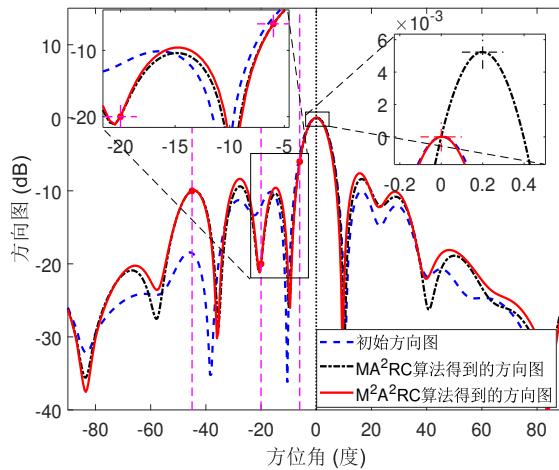


图 2-12 各向异性线性随机阵列多点方向图电平控制结果

2.3.5.2 基于M²A²RC的方向图综合

下面考虑21阵元各向同性等距线阵以及非等电平的期望旁瓣。取波束中心为 $\theta_0 = 50^\circ$ ，记每步的控制角度个数为 M 。图2-13展示了不同步骤得到的方向图。

第一步中，首先找出初始方向图的旁瓣峰值位置（记为 $\theta_{1,m}$, $m = 1, \dots, M$ ），分别取各角度的期望电平为 $\rho_{1,m} = L_d(\theta_{1,m})$ 。基于此，应用M²A²RC 得到新的权向量 $\tilde{\mathbf{w}}_{1,*}$ （参考式(2-124)）。由之前分析可知， $\tilde{\mathbf{w}}_{1,*}$ 可以将 $\theta_{1,m}$ 方向的电平调节为期望电平 $L_d(\theta_{1,m})$, $m = 1, \dots, M$ ，并且不会产生波束中心偏移。第一步得到的方向图见图2-13(a)。第二步中，从第一步产生的方向图中找出所有旁瓣峰值角度，将其记为 $\theta_{2,m}$, $m = 1, 2, \dots, M$ 。应用M²A²RC算法得到权向量 $\tilde{\mathbf{w}}_{2,*}$ ，从而将角度 $\theta_{2,m}$ 的电平调节为期望电平 $L_d(\theta_{2,m})$ 。第二步得到的方向图见图2-13(b)。注意到 $\theta_{1,m}$ 角度的电平近似不变，而且波束中心仍然保持在 θ_0 处。迭代进行上述过程

直到得到理想的方向图。仿真发现，只需要三步迭代即可得到满意的方向图。由图2-13(c)可以看出，三步迭代之后方向图旁瓣十分接近期望电平。

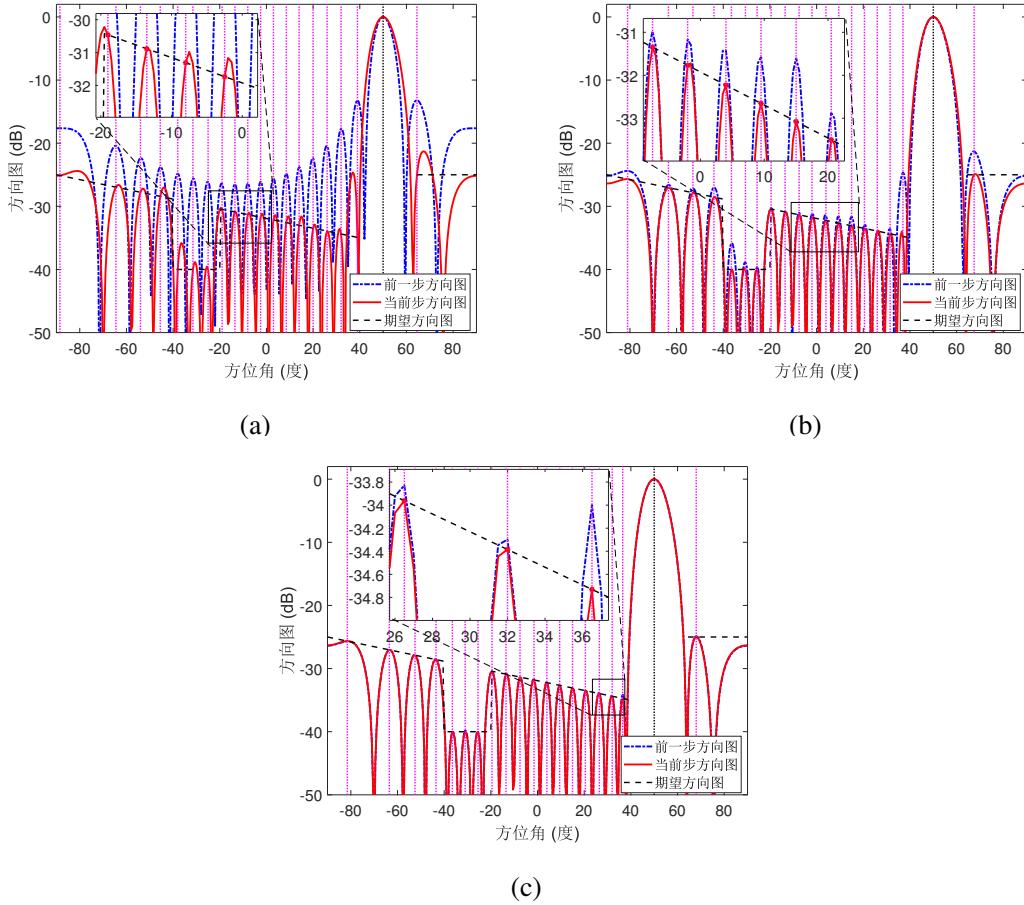


图 2-13 非等旁瓣电平方向图综合结果。(a)第1步结果;(b)第2步结果;(c)第3步结果

图2-14展示了不同方法的对比结果，由图可知 A^2RC 方法和 M^2A^2RC 方法的旁瓣性能优于菲利普方法。由图可以看出菲利普方法在 -52° 和 -43° 方向的电平高于相应期望电平约1dB。 A^2RC 方法和 M^2A^2RC 方法得到的方向图相似，且两者的旁瓣电平与期望电平接近。需要注意的是，菲利普方法和 A^2RC 使波束中心发生了偏移，而 M^2A^2RC 方法方向图的波束中心仍为 θ_0 ，这与理论预测是一致的。

2.4 OPARC 算法

前文介绍了单点精确响应控制算法和多点精确响应控制算法，但这些算法没有考虑阵列增益。本节介绍一种最优准确阵列响应控制 (Optimal and Precise Array Response Control, OPARC) 算法。

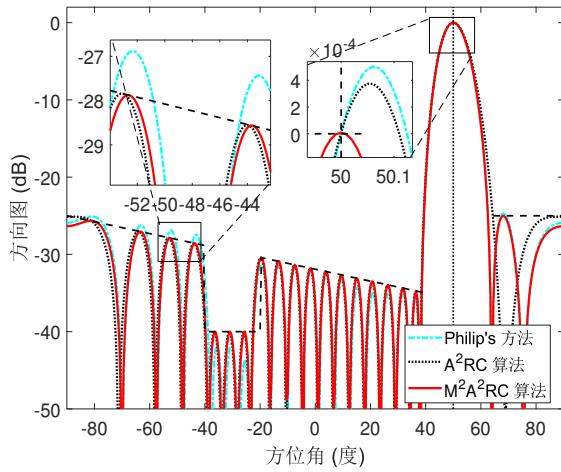


图 2-14 非等旁瓣电平方向图控制结果对比

2.4.1 自适应阵列理论

考虑 N 元阵列，阵列观测向量 $\mathbf{x}(t)$ 可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}(\theta_0)s_0(t) + \sum_{\ell=1}^k \mathbf{a}(\theta_\ell)s_\ell(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2-126)$$

其中 $\mathbf{n}(t)$ 为噪声分量， k 为干扰个数， θ_0 为期望信号的角度， $s_0(t)$ 为信号波形， θ_ℓ 和 $s_\ell(t)$ 分别代表第 ℓ 个干扰的角度和波形。考虑白噪声，同时假设噪声与干扰独立，则可以将 $N \times N$ 维的噪声加干扰协方差矩阵表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{n+i} &= E \left\{ \left(\sum_{\ell=1}^k \mathbf{a}(\theta_\ell)s_\ell(t) + \mathbf{n}(t) \right) \left(\sum_{\ell=1}^k \mathbf{a}(\theta_\ell)s_\ell(t) + \mathbf{n}(t) \right)^H \right\} \\ &= \sigma_n^2 \mathbf{I} + \sum_{\ell=1}^k \sigma_\ell^2 \mathbf{a}(\theta_\ell) \mathbf{a}^H(\theta_\ell) \end{aligned} \quad (2-127)$$

其中 σ_n^2 和 σ_ℓ^2 分别表示噪声和干扰的功率。

窄带波束形成的输出可以表示为

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \quad (2-128)$$

其中 t 表示时间， \mathbf{w} 为 $N \times 1$ 维权向量。为了抑制干扰和噪声，可以设计权向量 \mathbf{w} 最大化如下的输出信干噪比(signal-to-interference-plus-noise ratio,SINR)

$$\text{SINR} = \frac{\sigma_s^2 |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{n+i} \mathbf{w}} \quad (2-129)$$

其中 $\sigma_s^2 = E\{|s_0(t)|^2\}$ 表示信号功率。众所周知，最大化SINR的最优权向量 \mathbf{w}_{opt} 可以表示为

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_{n+i}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \quad (2-130)$$

注意到式(2-129)中的SINR可以表示为 $G \cdot \sigma_s^2 / \sigma_n^2$ ，其中 G 定义为

$$G = \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{\mathbf{w}^H \mathbf{T}_{n+i} \mathbf{w}} \quad (2-131)$$

上式中 $\mathbf{T}_{n+i} \triangleq \mathbf{R}_{n+i} / \sigma_n^2$ 代表归一化的噪声加干扰协方差矩阵，即

$$\mathbf{T}_{n+i} = \frac{\mathbf{R}_{n+i}}{\sigma_n^2} = \mathbf{I} + \sum_{\ell=1}^k \beta_\ell \mathbf{a}(\theta_\ell) \mathbf{a}^H(\theta_\ell) \quad (2-132)$$

其中 $\beta_\ell \triangleq \sigma_\ell^2 / \sigma_n^2$ 代表干噪比。实际上， G 表示对输入信噪比的放大倍数，该参数被称作阵列增益。最优权向量可以实现阵列增益的最大化。

2.4.2 最优权的更新

由式(2-130)–(2-132)可以看出，最优权 \mathbf{w}_{opt} 依赖于 \mathbf{R}_{n+i} 或 \mathbf{T}_{n+i} 。考虑非数据依赖的阵列响应控制，此时给定导向矢量 $\mathbf{a}(\theta)$ 和波束中心 θ_0 ，需要设计权向量 \mathbf{w} 使得归一化波束方向图 $L(\theta, \theta_0) \triangleq |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)|^2 / |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2$ 满足某些要求。这里考虑如何实现单个方向的精确电平控制。此时由于 \mathbf{R}_{n+i} 或 \mathbf{T}_{n+i} 不可用，可以通过设计虚拟的噪声加干扰协方差矩阵(virtual covariance matrix, VCM)来实现。记VCM为 \mathbf{T}_k ，需要注意的是这里的 \mathbf{T}_k 不是由真实数据产生的，所以其可能不具有真实的物理含义。另外，我们不假设 \mathbf{T}_k 为正定矩阵或共轭对称矩阵。利用VCM的概念，数据依赖自适应阵列理论可以应用到数据独立波束形成中。下面讨论如何施加虚拟干扰(即设计虚拟干扰的INR)，从而最优地将权向量 $\mathbf{w}_{k-1, \text{opt}} = \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$ 更新为权向量 $\mathbf{w}_{k, \text{opt}}$ ，使得 θ_k 处的波束响应达到期望值 ρ_k 。

具体来讲，假设已有 $k-1$ 个方向的波束响应电平通过添加 $k-1$ 个虚拟干扰进行了控制，相应的VCM记为 \mathbf{T}_{k-1} 。对于给定的方向 θ_k 以及期望电平 ρ_k ，我们在 θ_k 处添加第 k 个虚拟干扰，并最优地设计其干噪比 β_k 。由式(2-132)可知，此时虚拟的噪声加干扰协方差矩阵VCM更新表达式为

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_{k-1} + \beta_k \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) \quad (2-133)$$

利用矩阵求逆法则可知

$$\mathbf{T}_k^{-1} = \mathbf{T}_{k-1}^{-1} - \frac{\beta_k \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{T}_{k-1}^{-1}}{1 + \beta_k \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_k)} \quad (2-134)$$

相应地，最优权可以表示为 $\mathbf{w}_{k,\text{opt}} = \mathbf{T}_k^{-1}\mathbf{a}(\theta_0)$ 。利用式(2-130)和(2-134)，可以将权向量 $\mathbf{w}_{k,\text{opt}}$ 表示为

$$\mathbf{w}_{k,\text{opt}} = \mathbf{w}_{k-1,\text{opt}} + \gamma_k \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_k) \quad (2-135)$$

其中 $\mathbf{w}_{k-1,\text{opt}} = \mathbf{T}_{k-1}^{-1}\mathbf{a}(\theta_0)$ 代表之前的最优权， γ_k 满足

$$\gamma_k = -\frac{\beta_k \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{1 + \beta_k \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_k)} \triangleq \Psi_k(\beta_k) \quad (2-136)$$

上式中的 $\Psi_k(\cdot)$ 为从 β_k 到 γ_k 的映射。

式(2-135)–(2-136)给出了最优化SINR时的权向量更新形式。然而，式(2-135)所得到的权向量 $\mathbf{w}_{k,\text{opt}}$ 并不能将 θ_k 方向的电平调节至期望值 ρ_k 。为了实现对 θ_k 方向的电平控制要求，下面首先考虑对于给定的 $\mathbf{w}_{k-1,\text{opt}} = \mathbf{T}_{k-1}^{-1}\mathbf{a}(\theta_0)$ ，是否存在 γ_k （或等价地 β_k ），使得 θ_k 方向的电平准确地调为 ρ_k ？如果存在，其值是多少？为了回答上述问题，我们将权向量表示为

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \gamma_k \mathbf{v}_k \quad (2-137)$$

简单起见，上式中省略了下标 $(\cdot)_{\text{opt}}$ ，式中 \mathbf{v}_k 定义为

$$\mathbf{v}_k \triangleq \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_k) \quad (2-138)$$

数学上， θ_k 方向的电平约束可以表述为

$$L(\theta_k, \theta_0) = |\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 / |\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 = \rho_k \quad (2-139)$$

其中期望电平值满足 $\rho_k \leq 1$ 。结合式(2-137)与式(2-139)可以得到

$$\mathbf{z}_k^H \mathbf{H}_k \mathbf{z}_k = 0 \quad (2-140)$$

其中 \mathbf{z}_k 和 \mathbf{H}_k 分别定义为

$$\mathbf{z}_k \triangleq [1 \ \gamma_k]^T \quad (2-141a)$$

$$\mathbf{H}_k \triangleq [\mathbf{w}_{k-1} \ \mathbf{v}_k]^H (\mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) - \rho_k \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0)) [\mathbf{w}_{k-1} \ \mathbf{v}_k] \quad (2-141b)$$

将式(2-140)展开可以得到下面定理。

定理 2.4.1 假设 γ_k 满足(2-140)，如果 $\mathbf{H}_k(2,2) = 0$ ， $[\Re(\gamma_k) \ \Im(\gamma_k)]^T$ 的轨迹是下面直线：

$$\Re[\mathbf{H}_k(1,2)]\Re(\gamma_k) - \Im[\mathbf{H}_k(1,2)]\Im(\gamma_k) = -\mathbf{H}_k(1,1)/2 \quad (2-142)$$

如果 $\mathbf{H}_k(2,2) \neq 0$ ， $[\Re(\gamma_k) \ \Im(\gamma_k)]^T$ 的轨迹为复平面的圆 \mathbb{C}_γ ：

$$\mathbb{C}_\gamma = \left\{ [\Re(\gamma_k) \ \Im(\gamma_k)]^T \mid \|[\Re(\gamma_k) \ \Im(\gamma_k)]^T - \mathbf{c}_\gamma\|_2 = R_\gamma \right\}$$

其中圆心为

$$\mathbf{c}_\gamma = \frac{1}{\mathbf{H}_k(2,2)} \begin{bmatrix} -\Re[\mathbf{H}_k(1,2)] \\ \Im[\mathbf{H}_k(1,2)] \end{bmatrix} \quad (2-143)$$

半径为

$$R_\gamma = \sqrt{-\det(\mathbf{H}_k)}/|\mathbf{H}_k(2,2)| \quad (2-144)$$

证明 参考定理2.2.2的证明。 ■

从上述定理可知，对于给定的权向量 $\mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$ ，存在无穷多个 γ_k 使得 θ_k 方向的电平为 ρ_k 。这表明，通过添加虚拟干扰并设计参数 γ_k （或干噪比），可以实现电平的精确控制。

显然，如果 $\mathbf{H}_k(2,2) = 0$ ，则有

$$\rho_k = \frac{|(\mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_k))^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2}{|(\mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_k))^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} \quad (2-145)$$

此时通常有 $\rho_k > 1$ ，这与 $\rho_k \leq 1$ 的假设矛盾。鉴于此，下文仅考虑 $\mathbf{H}_k(2,2) \neq 0$ 的情况，此时 $[\Re(\gamma_k) \ \Im(\gamma_k)]^T$ 的轨迹为圆，如图2-15所示。下面考虑如何选取最优的 γ_k 或 β_k 使得阵列增益最大。

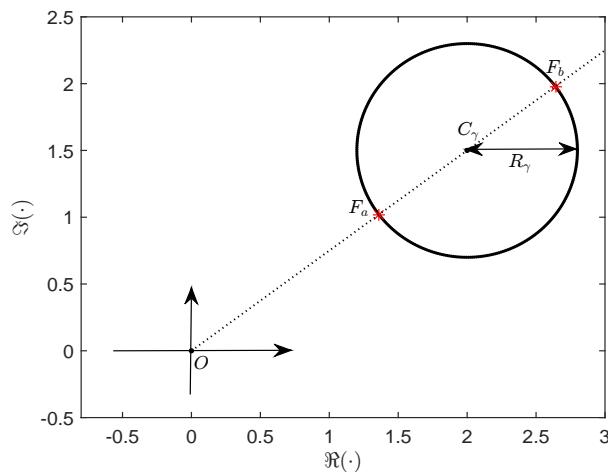


图 2-15 γ_k 的轨迹示意图

2.4.3 γ_k 的最优选取

参数 γ_k 的选择可以用下面最优精确阵列控制问题表述:

$$\underset{\gamma_k}{\text{maximize}} \quad G_k \triangleq |\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 / |\mathbf{w}_k^H \mathbf{T}_k \mathbf{w}_k| \quad (2-146a)$$

$$\text{subject to} \quad L(\theta_k, \theta_0) = \rho_k \quad (2-146b)$$

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \gamma_k \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_k) \quad (2-146c)$$

上式(2-146a)中, 阵列增益 G_k 期望获得最大值。另外, 除了电平约束(2-146b)之外, 上述OPARC问题中同时添加了约束(2-146c), 这可以使得所得到的 \mathbf{w}_k 为最优权。

若 γ_k 满足式(2-136), 约束(2-146c)满足 $\mathbf{w}_k = \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$ 。为了解问题(2-146), 我们将 $\mathbf{w}_k = \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$ 代入到目标函数中, 得到

$$G_k = \frac{\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{T}_k^{-H} \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{|\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{T}_k^{-H} \mathbf{T}_k \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)|} = |\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)| \quad (2-147)$$

上式中利用了

$$(\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{T}_k^{-H} \mathbf{a}(\theta_0))^H = \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \quad (2-148a)$$

$$|\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{T}_k^{-H} \mathbf{a}(\theta_0)| = |\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)| \quad (2-148b)$$

再次注意式(2-147)的推导中, \mathbf{T}_k 不一定为复共轭对称矩阵。然后, 由式(2-134)和式(2-136), 可以将 G_k 重新表示为

$$G_k = |\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) + \gamma_k \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_k)| = |\tilde{\xi}_c| \cdot |\xi_0 / \tilde{\xi}_c + \gamma_k| \quad (2-149)$$

其中 ξ_0 , ξ_k , ξ_c 和 $\tilde{\xi}_c$ 分别定义如下

$$\xi_0 \triangleq \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \quad (2-150a)$$

$$\xi_k \triangleq \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_k) \quad (2-150b)$$

$$\xi_c \triangleq \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \quad (2-150c)$$

$$\tilde{\xi}_c \triangleq \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_k) \quad (2-150d)$$

结合定理2.4.1, 问题(2-146)可以表示为

$$\underset{\gamma_k}{\text{maximize}} \quad |\xi_0 / \tilde{\xi}_c + \gamma_k| \quad (2-151a)$$

$$\text{subject to} \quad [\Re(\gamma_k) \ \Im(\gamma_k)]^T \in \mathbb{C}_\gamma \quad (2-151b)$$

尽管问题(2-151)非凸, 但是其有解析形式解, 详见下述定理。

定理 2.4.2 将圆 \mathbb{C}_γ 与连接原点 $\mathbf{O} = [0, 0]^T$ 与圆心 \mathbf{c}_γ (见式(2-143)) 的直线的两个交点分别记为 $F_a \triangleq [\Re(\gamma_{k,a}) \ \Im(\gamma_{k,a})]^T$ 和 $F_b \triangleq [\Re(\gamma_{k,b}) \ \Im(\gamma_{k,b})]^T$ 。假设 $|\gamma_{k,a}| <$

$|\gamma_{k,b}|$ 。如果 \mathbf{T}_{k-1} 为复共轭对称矩阵，则式(2-151)的最优解满足

$$\gamma_{k,\star} = \begin{cases} \gamma_{k,a}, & \text{如果 } \zeta > 0 \\ \gamma_{k,b}, & \text{否则} \end{cases} \quad (2-152)$$

其中

$$\zeta \triangleq \text{sign}[\mathbf{c}_\gamma(1)] \cdot \text{sign}[\Re(d) - \mathbf{c}_\gamma(1)] \quad (2-153)$$

上式中 d 满足

$$d \triangleq -\xi_0 / \xi_c^* \quad (2-154)$$

此外，式(2-152)中的 $\gamma_{k,a}$ 和 $\gamma_{k,b}$ 满足

$$\gamma_{k,a} = -\frac{(\|\mathbf{c}_\gamma\|_2 - R_\gamma) \chi \xi_c}{\|\mathbf{c}_\gamma\|_2 \mathbf{H}_k(2, 2)}, \quad \gamma_{k,b} = -\frac{(\|\mathbf{c}_\gamma\|_2 + R_\gamma) \chi \xi_c}{\|\mathbf{c}_\gamma\|_2 \mathbf{H}_k(2, 2)}$$

其中 $\chi = \xi_k - \rho_k \xi_0 \in \mathbb{R}$, \mathbf{c}_γ 和 R_γ 的定义见定理2.4.1。

证明 见附录A.5。 ■

更直观地，图2-15描述了 $\gamma_{k,a}$ 和 $\gamma_{k,b}$ 的位置。显然，得到最优的 $\gamma_{k,\star}$ 后，权向量可以更新为

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \gamma_{k,\star} \mathbf{v}_k \quad (2-155)$$

这就实现了第 k 步的权向量更新。

2.4.4 VCM逆矩阵的更新

由于 $\gamma_{k,\star}$ 的计算需要对VCM求逆（即计算 \mathbf{T}_{k-1}^{-1} ），下面讨论如何更新 \mathbf{T}_k^{-1} ，从而使得下一步的方向图控制可行。同样地，这里假设 \mathbf{T}_{k-1} 为复共轭对称矩阵，且最优的 $\gamma_{k,\star}$ 已经由定理2.4.2得到。则由式(2-136)可得

$$-\beta_{k,\star} / (1 + \beta_{k,\star} \xi_k) = \gamma_{k,\star} / \xi_c \quad (2-156)$$

其中 $\beta_{k,\star} = \Psi_k^{-1}(\gamma_{k,\star})$ 表示第 k 步中 $\gamma_{k,\star}$ 对应的干噪比。结合式(2-134)与式(2-156)得到

$$\mathbf{T}_k^{-1} = \mathbf{T}_{k-1}^{-1} + \frac{\gamma_{k,\star} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H}{\xi_c} \quad (2-157)$$

因此，得到 $\gamma_{k,\star}$ 后即可直接计算 \mathbf{T}_k^{-1} ，而不需要先计算 \mathbf{T}_k 再进行矩阵求逆。

为了进一步探讨 \mathbf{T}_k 的共轭对称性，首先由定理2.4.2可以得到

$$\frac{\gamma_{k,\star}}{\xi_c} = -\frac{(\|\mathbf{c}_\gamma\|_2 \pm R_\gamma) \chi}{\|\mathbf{c}_\gamma\|_2 \mathbf{H}_k(2, 2)} \in \mathbb{R} \quad (2-158)$$

不难看出，只要 \mathbf{T}_{k-1} 为复共轭对称，所得到的 \mathbf{T}_k 也为复共轭对称矩阵。因此，如果取 $\mathbf{T}_0 = \mathbf{I}$ ，则有 \mathbf{T}_i 均为复共轭对称矩阵， $i = 1, 2, \dots, k$ 。最终，OPARC算法总结见算法4。

算法 4 OPARC 算法

- 1: 输入： $\mathbf{w}_0 = \mathbf{a}(\theta_0)$, $\mathbf{T}_0 = \mathbf{I}$, θ_k 以及相应的期望电平值 ρ_k , $k = 1, 2, \dots$ 。
 - 2: **for** $k = 1, 2, \dots$, **do**
 - 3: 由式(2-152)计算 $\gamma_{k,*}$, 由式(2-138)得到 \mathbf{v}_k 。
 - 4: 更新 \mathbf{w}_k : $\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \gamma_{k,*}\mathbf{v}_k$ 。
 - 5: 更新 \mathbf{T}_k^{-1} : $\mathbf{T}_k^{-1} = \mathbf{T}_{k-1}^{-1} + \gamma_{k,*}\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^H/\xi_c$ 。
 - 6: **end for**
 - 7: 输出：权向量 \mathbf{w}_k 。
-

2.4.5 OPARC性质

下面分析OPARC算法的一些性质，包括最优 β_k 的选取，VCM正定性等。

2.4.5.1 β_k 的几何分布

由式(2-136)可知， γ_k 为 β_k 的映射，而且 β_k 可以用 γ_k 表示为

$$\beta_k = -\gamma_k / (\xi_c + \gamma_k \xi_k) = \Psi_k^{-1}(\gamma_k) \quad (2-159)$$

其中 $\Psi_k^{-1}(\cdot)$ 为式(2-136)中 $\Psi_k(\cdot)$ 的逆函数。因此，一旦 γ_k 得到，即可计算出相应的 β_k 。从 β_k 的轨迹可知，如果 θ_k 的电平等于 ρ_k ，则有定理2.4.1可以将 γ_k 表示为

$$\gamma_k = \mathbf{c}_\gamma(1) + j\mathbf{c}_\gamma(2) + R_\gamma e^{j\varphi} \quad (2-160)$$

其中 \mathbf{c}_γ 和 R_γ 的定义参考定理2.4.1， φ 可以为任意实数。将式(2-160)代入(2-159)中可以得到

$$\beta_k = (p_1 + p_2 e^{j\varphi}) / (q_1 + q_2 e^{j\varphi}) \quad (2-161)$$

其中 p_l 和 q_l 为复数， $l = 1, 2$ ，满足

$$p_1 = -\mathbf{c}_\gamma(1) - j\mathbf{c}_\gamma(2), \quad p_2 = -R_\gamma \quad (2-162a)$$

$$q_1 = \xi_c + (\mathbf{c}_\gamma(1) + j\mathbf{c}_\gamma(2))\xi_k, \quad q_2 = R_\gamma \xi_k \quad (2-162b)$$

经过计算，不难得到底面定理

定理 2.4.3 若 β_k 满足式(2-161)，则 $[\Re(\beta_k) \ \Im(\beta_k)]^T$ 的轨迹为圆 C_β ，其中圆心为

$$\mathbf{c}_\beta = [\xi_0 / (|\xi_c|^2 - \xi_0 \xi_k), 0]^T \quad (2-163)$$

半径为

$$R_\beta = |\xi_c| / [\sqrt{\rho_k} \cdot | |\xi_c|^2 - \xi_0 \xi_k |] \quad (2-164)$$

即 β_k 可以表示为

$$\beta_k = \mathbf{c}_\beta(1) + j\mathbf{c}_\beta(2) + R_\beta e^{j\phi} \quad (2-165)$$

其中 ϕ 为任意实数。

证明 见附录A.6。 ■

与 γ_k 类似，圆上所有的 β_k 均可以将 θ_k 处的电平响应调节为 ρ_k 。注意到，如果利用 γ_k 实现电平响应控制，则 \mathbf{c}_β 和 R_β 的计算不需要知道权向量 \mathbf{w}_{k-1} 。这意味着不需要知道任何权向量即可得到所有的 β_k 。与此相反， γ_k 的确定则依赖于之前的权向量 \mathbf{w}_{k-1} 。

除此之外，由定理2.4.3可知， $[\Re(\beta_k) \ \Im(\beta_k)]^T$ 轨迹的圆心位于实数轴，且圆心与期望电平值 ρ_k 无关。

2.4.5.2 最优 β_k 的确定

在所有可用的 β_k （可以将 θ_k 方向的电平调节为 ρ_k ）中，最优的 β_k 获得最大的阵列增益。因此，可以建立下面约束问题来求解最优的 β_k

$$\underset{\beta_k}{\text{maximize}} \quad G_k = |\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 / |\mathbf{w}_k^H \mathbf{T}_k \mathbf{w}_k| \quad (2-166a)$$

$$\text{subject to} \quad L(\theta_k, \theta_0) = \rho_k \quad (2-166b)$$

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \Psi_k(\beta_k) \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_k) \quad (2-166c)$$

其中 γ_k 被 $\Psi_k(\beta_k)$ 取代，如式(2-166c)所描述。上述问题(2-166)与前述问题(2-146)等价。因此，问题(2-166)的最优解（记为 $\beta_{k,\star}$ ）可以由下面映射得到

$$\beta_{k,\star} = \Psi_k^{-1}(\gamma_{k,\star}) \quad (2-167)$$

结合式(2-152)中 $\gamma_{k,\star}$ 的结果，可以计算得到 $\beta_{k,\star}$ 的解析表达式，如下面定理所述。

定理 2.4.4 问题(2-166)的最优解为

$$\beta_{k,*} = \begin{cases} \beta_{k,r}, & -1/\xi_k > \xi_0 / (|\xi_c|^2 - \xi_0 \xi_k) \\ \beta_{k,l}, & -1/\xi_k \leq \xi_0 / (|\xi_c|^2 - \xi_0 \xi_k) \end{cases} \quad (2-168)$$

其中 $\beta_{k,r}$ 和 $\beta_{k,l}$ 为圆 C_β 与实数轴 $\Im(\cdot) = 0$ 的交点，满足

$$\beta_{k,r} = R_\beta + \xi_0 / (|\xi_c|^2 - \xi_0 \xi_k) \quad (2-169)$$

$$\beta_{k,l} = -R_\beta + \xi_0 / (|\xi_c|^2 - \xi_0 \xi_k) \quad (2-170)$$

尽管由定理2.4.3得出的 β_k 可以取复数，但由式(2-168)不难看出，最优的 $\beta_{k,*}$ 为实数。然而，由前文可知， β_k 的物理含义是信噪比（参考式(2-132)），在现实世界中其值应为非负。由式(2-168)-(2-170)，所得到的 $\beta_{k,*}$ 可以为负值，其原因可能是这里并未假设 \mathbf{T}_{k-1} 为非负定矩阵。另外，如果 \mathbf{T}_{k-1} 为复共轭对称矩阵，由于 $\beta_{k,*}$ 为实数，则 $\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_{k-1} + \beta_{k,*} \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k)$ 也为复共轭对称矩阵。这与前文中式(2-158)下的推断一致。显然，式(2-168)得到的最优 $\beta_{k,*}$ 不依赖于之前的权向量。

一旦最优的 $\beta_{k,*}$ 得到，我们可以将当前的VCM更新为

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_{k-1} + \beta_{k,*} \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) \quad (2-171)$$

取 $\mathbf{T}_0 = \mathbf{I}$ 为初始VCM，将所有的虚拟干扰考虑在内，则将可以 \mathbf{T}_k 表示为

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{I} + \mathbf{A}_k \Sigma_k \mathbf{A}_k^H \quad (2-172)$$

其中 $\mathbf{A}_k \triangleq [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_k)]$ ， Σ_k 为由所有虚拟干扰的干噪比构成的对角矩阵，即

$$\Sigma_k = \text{Diag}([\beta_{1,*}, \beta_{2,*}, \dots, \beta_{k,*}]) \quad (2-173)$$

相应地，我们有 $\mathbf{w}_k = \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$ 。上述OPARC算法变种总结在算法5中。由于省略了中间向量的计算，算法更加简单。

算法 5 OPARC算法（等价实现形式）

- 1: 输入： $\mathbf{a}(\theta_0)$ ，待控制角度 θ_k 及其期望电平 ρ_k ， $k = 1, 2, \dots$ 。
 - 2: 取 $\mathbf{T}_0 = \mathbf{I}$ 。
 - 3: **for** $k = 1, 2, \dots$, **do**
 - 4: 利用式(2-168)计算 $\beta_{k,*}$ 。
 - 5: 更新矩阵 \mathbf{T}_k : $\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_{k-1} + \beta_{k,*} \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k)$ 。
 - 6: **end for**
 - 7: 输出: $\mathbf{w}_k = \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$ 。
-

下面以几何视角分析 γ_k 和 β_k 的关系。不难看出，式(2-168)中的条件 $-1/\xi_k > \xi_0 / (|\xi_c|^2 - \xi_0 \xi_k)$ 等价于式(2-152)中的 $\zeta > 0$ ，当且仅当 $\rho_k \xi_0 < \xi_k$ 。更具体地，我们有

$$\begin{cases} \gamma_{k,a} = \Psi_k(\beta_{k,r}), \gamma_{k,b} = \Psi_k(\beta_{k,l}), & \text{如果 } \rho_k \xi_0 < \xi_k \\ \gamma_{k,a} = \Psi_k(\beta_{k,l}), \gamma_{k,b} = \Psi_k(\beta_{k,r}), & \text{否则} \end{cases} \quad (2-174)$$

函数映射 $\Psi_k(\cdot)$ 的示意图见图2-16，其中 J_r ， J_l ， F_a 和 F_b 分别代表 $[\Re(\beta_{k,r}) \Im(\beta_{k,r})]^T$ ， $[\Re(\beta_{k,l}) \Im(\beta_{k,l})]^T$ ， $[\Re(\gamma_{k,a}) \Im(\gamma_{k,a})]^T$ 和 $[\Re(\gamma_{k,b}) \Im(\gamma_{k,b})]^T$ 。

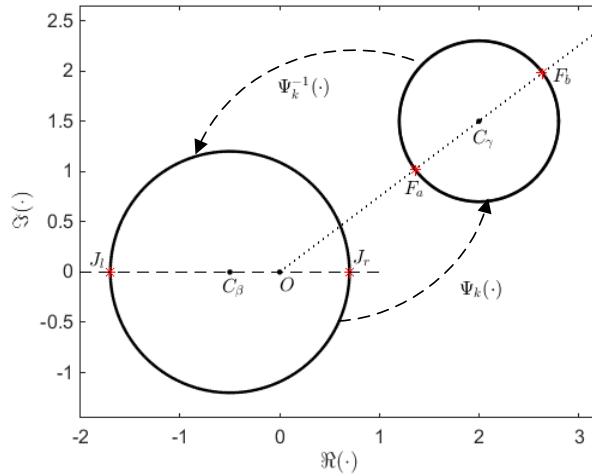


图 2-16 函数映射 $\Psi_k(\cdot)$ 的示意图

2.4.5.3 虚拟协方差矩阵的正定性

首先可以得到下面定理，从而可以简化 $\beta_{k,*}$ 的选择。

定理 2.4.5 如果 $\mathbf{T}_{k-1} \in \mathbb{S}_{++}^N$ (\mathbb{S}_{++}^N 为 $N \times N$ 维正定矩阵的集合)，则

$$\beta_{k,*} = \beta_{k,r} = (|\xi_c| - \sqrt{\rho_k} \xi_0) / [\sqrt{\rho_k} (\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2)] \quad (2-175)$$

而且，如果 $\mathbf{T}_{k-1} \in \mathbb{S}_{++}^N$ ，则 $\mathbf{T}_k \in \mathbb{S}_{++}^N$ 成立，当且仅当 $\rho_k < \xi_k^2 / |\xi_c|^2$ 。

证明 见附录A.7。 ■

一般情况下 $\xi_k^2 / |\xi_c|^2$ 大于1，另外假设 $\rho_k \leq 1$ ，则有 $\rho_k < \xi_k^2 / |\xi_c|^2$ 。因此，只要 $\mathbf{T}_{k-1} \in \mathbb{S}_{++}^N$ ，则每步权向量更新后均满足 $\mathbf{T}_k \in \mathbb{S}_{++}^N$ ， $\beta_{k,*} = \beta_{k,r}$ 。由于算法中取 $\mathbf{T}_0 = \mathbf{I}$ 作为初始VCM，我们可以得到 $\mathbf{T}_k \in \mathbb{S}_{++}^N$ ， $\beta_{k,*} = \beta_{k,r}$ 。

定理 2.4.6 如果 $\mathbf{T}_{k-1} \in \mathbb{S}_{++}^N$, 则

$$\beta_{k,*} \geq 0 \Leftrightarrow |\xi_c| \geq \sqrt{\rho_k} \xi_0 \quad (2-176a)$$

$$\beta_{k,*} < 0 \Leftrightarrow |\xi_c| < \sqrt{\rho_k} \xi_0 \quad (2-176b)$$

将 ξ_c 和 ξ_0 的定义代入式(2-176), 同时结合 $\mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$, 得到

$$\beta_{k,*} \geq 0 \Leftrightarrow \rho_k \leq |\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 / |\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \quad (2-177a)$$

$$\beta_{k,*} < 0 \Leftrightarrow \rho_k > |\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 / |\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \quad (2-177b)$$

注意到上式中的 $|\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 / |\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2$ 代表权向量为 \mathbf{w}_{k-1} 时 θ_k 处的归一化电平。从式(2-177)可以看出, 所得到的 $\beta_{k,*}$ 非负当且仅当期望电平 ρ_k 低于权向量为 \mathbf{w}_{k-1} 时 θ_k 处的电平值。否则, 所得到的 $\beta_{k,*}$ 为负值, 从而可以提升 θ_k 处的电平值。可以看出, 与传统的实际干扰的概念不同, 虚拟干扰取负值的 $\beta_{k,*}$ 仍然具有意义。除了上述两个定理, 可以得到下面定理。

定理 2.4.7 如果 $\mathbf{T}_{k-1} \in \mathbb{S}_{++}^N$, 则问题(2-166)与下面问题具有相同的最优解

$$\underset{\beta_k}{\text{maximize}} \quad \frac{|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{\mathbf{w}_k^H \mathbf{T}_{k-1} \mathbf{w}_k} \quad (2-178a)$$

$$\text{subject to} \quad L(\theta_k, \theta_0) = \rho_k \quad (2-178b)$$

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \Psi_k(\beta_k) \mathbf{v}_k. \quad (2-178c)$$

证明 见附录A.8。 ■

由定理2.4.7可知, 在相同的约束 (式(2-166b)和式(2-166c)) 下, 问题(2-166)的最优 β_k 可以最大化之前的阵列增益 (其计算考虑了之前的 \mathbf{T}_{k-1} 而不是当前的 \mathbf{T}_k)。

2.4.6 与 A²RC 算法对比

下面对 A²RC 算法和本节的 OPARC 算法从两方面进行对比。

2.4.6.1 权向量更新形式对比

A^2RC 算法中，权向量更新形式为

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \mu_k \mathbf{a}(\theta_k) \quad (2-179)$$

其中 μ_k 为待优化的超参数。为了最小化相邻两步方向图变化，同时避免低效的全局搜索， A^2RC 中经验地选取 $\mu_{k,a}$ 为最优值，其中 $\mu_{k,a}$ 为下面问题的最优解

$$\underset{\mu_k}{\text{minimize}} \quad |\mu_k| \quad (2-180a)$$

$$\text{subject to} \quad [\Re(\mu_k) \quad \Im(\mu_k)]^T \in \mathbb{C}_\mu \quad (2-180b)$$

其中 \mathbb{C}_μ 为圆

$$\mathbb{C}_\mu = \left\{ [\Re(\mu_k) \quad \Im(\mu_k)]^T \mid \|[\Re(\mu_k) \quad \Im(\mu_k)]^T - \mathbf{c}_\mu\|_2 = R_\mu \right\}$$

上式中，圆心 \mathbf{c}_μ 满足

$$\mathbf{c}_\mu = \frac{1}{\mathbf{Q}_k(2,2)} \begin{bmatrix} -\Re[\mathbf{Q}_k(1,2)] \\ \Im[\mathbf{Q}_k(1,2)] \end{bmatrix} \quad (2-181)$$

半径 R_μ 满足

$$R_\mu = \sqrt{-\det(\mathbf{Q}_k)} / |\mathbf{Q}_k(2,2)| \quad (2-182)$$

其中 \mathbf{Q}_k 定义为

$$\mathbf{Q}_k = [\mathbf{w}_{k-1} \quad \mathbf{a}(\theta_k)]^H (\mathbf{a}(\theta_k)\mathbf{a}^H(\theta_k) - \rho_k \mathbf{a}(\theta_0)\mathbf{a}^H(\theta_0)) [\mathbf{w}_{k-1} \quad \mathbf{a}(\theta_k)] \quad (2-183)$$

需要指出的是，上述经验式地参数选取方式可能导致波束方向图畸变。

$OPARC$ 算法中，权向量更新见式(2-146c)。不同于 A^2RC 算法， $OPARC$ 算法在 \mathbf{w}_{k-1} 的基础上添加 $\mathbf{T}_{k-1}^{-1}\mathbf{a}(\theta_k)$ 的缩放（即 $\gamma_k \mathbf{T}_{k-1}^{-1}\mathbf{a}(\theta_k)$ ），这使得所得到的权向量为最优权。除此之外， $OPARC$ 算法中优化参数 γ_k 使得在满足电平约束的条件下阵列增益最大化。

为了得到与 A^2RC 类似的权向量更新形式，由附录A.9可以将式(2-146c)重新表述为

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k &= \mathbf{w}_{k-1} + \gamma_k \mathbf{A}(\theta_k, \dots, \theta_1) \mathbf{d}_k \\ &= \mathbf{w}_{k-1} + \gamma_k \mathbf{a}(\theta_k) + \gamma_k \mathbf{A}(\theta_{k-1}, \dots, \theta_1) \bar{\mathbf{d}}_k \end{aligned} \quad (2-184)$$

其中 $\mathbf{A}(\theta_k, \dots, \theta_1) \triangleq [\mathbf{a}(\theta_k), \dots, \mathbf{a}(\theta_1)]$ ， θ_i 表示之前第*i*步添加干扰的方向， $1 \leq i \leq k-1$ ， \mathbf{d}_k 为 $k \times 1$ 维向量，其首元素为1， $\bar{\mathbf{d}}_k$ 为 $(k-1) \times 1$ 维向量，通过从向量 \mathbf{d}_k 中剔除首元素得到。由式(2-184)可知， \mathbf{w}_k 中在 \mathbf{w}_{k-1} 上的添加量是所有干扰导向矢量

(既包含当前步的 $\mathbf{a}(\theta_k)$ 也包含之前的 $\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_{k-1})$) 的线性组合。与此不同, A²RC算法中的相应添加量为当前干扰导向矢量(即 $\mathbf{a}(\theta_k)$)的缩放。而且, 可以得到如下关于定理2.4.2的推论。

推论 2.4.1 第一步权向量更新(即 $\mathbf{w}_0 = \mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{T}_0 = \mathbf{I}$)中, 如果 ρ_1 满足 $\rho_1 \leq \|\mathbf{a}(\theta_1)\|_2^2 / \|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2$, 则 $\mu_{1,\star} = \gamma_{1,\star}$, 否则 $\mu_{1,\star} = \gamma_{1,\times}$, 其中 $\gamma_{1,\times} = \{\gamma_{1,a}, \gamma_{1,b}\} \setminus \gamma_{1,\star}$ 。

证明 见附录A.10。 ■

由推论2.4.1可知, 如果 $\rho_1 \leq \|\mathbf{a}(\theta_1)\|_2^2 / \|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2$, 则A²RC第一步权向量更新结果与OPARC算法相同, 否则, A²RC将选取次优参数 $\gamma_{1,\times}$ 。对于其它步的权向量更新(即 $k > 1$), OPARC选取最优参数, 因此性能优于A²RC。

2.4.6.2 虚拟干扰干噪比对比

下面从虚拟干扰干噪比方面进行对比。首先将A²RC算法的第 k 步更新表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k &= \mathbf{a}(\theta_0) + \mu_1 \mathbf{a}(\theta_1) + \cdots + \mu_k \mathbf{a}(\theta_k) \\ &= \mathbf{a}(\theta_0) + \mathbf{A}_k \mathbf{b}_k \end{aligned} \quad (2-185)$$

其中 $\mathbf{b}_k \triangleq [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k]^T$ 。从上面权向量更新公式可知, A²RC算法不需要求虚拟协方差矩阵。然而, 为了比较虚拟干扰的干噪比, 需要将式(2-185)与某个虚拟协方差矩阵进行关联。为此, 将权向量表示为

$$\mathbf{w}_k = \check{\mathbf{T}}_k^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) = \mathbf{a}(\theta_0) - \mathbf{A}_k \left(\mathbf{I} + \check{\Sigma}_k \mathbf{A}_k^H \mathbf{A}_k \right)^{-1} \check{\Sigma}_k \mathbf{A}_k^H \mathbf{a}(\theta_0) \quad (2-186)$$

其中 $\check{\mathbf{T}}_k = \mathbf{I} + \mathbf{A}_k \check{\Sigma}_k \mathbf{A}_k^H$ 为对应的虚拟协方差矩阵, $\check{\Sigma}_k = \text{Diag}([\check{\beta}_{k,1}, \check{\beta}_{k,2}, \dots, \check{\beta}_{k,k}])$ 表征了当第 k 步权向量更新完成时, 在各角度 θ_i 方向累计添加干扰的干噪比, 其中 $i = 1, \dots, k$ 。前 $k-1$ 步权向量更新不会再 θ_k 方向添加干扰。由附录A.11可知, A²RC算法第 k 步权向量更新时, θ_k 方向虚拟干扰的干噪比为

$$\check{\beta}_{k,k} = -\frac{\mu_k}{\mathbf{a}^H(\theta_k) \check{\mathbf{w}}_{k-1} + \mu_k \|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^2} \quad (2-187)$$

除此之外, $k-1$ 个新干扰添加在之前的方向 $\theta_1, \dots, \theta_{k-1}$ 上。记第 k 步权向量更新时在 θ_i 方向添加新干扰的干噪比为 $\check{\Delta}_{k,i}$, $1 \leq i \leq k-1$ 。不难发现, $\check{\Delta}_{k,i}$ 满足

$$\check{\Delta}_{k,i} = \check{\beta}_{k,i} - \check{\beta}_{k-1,i} \quad (2-188)$$

由附录A.11可进一步得到

$$\check{\Delta}_{k,i} = \frac{\mu_k \mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{a}(\theta_k) \check{\beta}_{k-1,i}^2}{\mu_i - \mu_k \mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{a}(\theta_k) \check{\beta}_{k-1,i}} \quad (2-189)$$

A^2RC 算法第 k 步权向量更新时新添加干扰的干噪比（包括 $\check{\beta}_{k,k}$ 和 $\check{\Delta}_{k,i}$, $1 \leq i \leq k-1$ ）一般为复数，这一点与OPARC算法不同。而且，上述分析表明， A^2RC 算法第 k 步更新需要在之前控制方向（即方向 $\theta_1, \dots, \theta_{k-1}$ ）添加虚拟干扰，而OPARC只在当前控制角度 θ_k 方向添加虚拟干扰。由于第 k 步的目的是调节 θ_k 方向的电平，之前控制方向 $\theta_1, \dots, \theta_{k-1}$ 上的干扰会带来非理想的方向图变化。根据上面符号定义， A^2RC 算法的虚拟协方差矩阵满足

$$\check{\mathbf{T}}_k = \check{\mathbf{T}}_{k-1} + \mathbf{A}_k \text{Diag}([\check{\Delta}_{k,1}, \dots, \check{\Delta}_{k,k-1}, \check{\beta}_{k,k}]) \mathbf{A}_k^H \quad (2-190)$$

这与OPARC算法的协方差矩阵更新（式(2-171)）不同。

2.4.7 多点OPARC算法

下面将OPARC算法扩展到多点场景。介绍多点OPARC算法之前，首先对最优权向量进行分析。

2.4.7.1 多干扰最优波束形成器

考虑 N 元阵元，最优权向量可以表示为：

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{T}_{n+i}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \quad (2-191)$$

其中 \mathbf{T}_{n+i} 表示归一化协方差矩阵，可以表示为

$$\mathbf{T}_{n+i} = \frac{\mathbf{R}_{n+i}}{\sigma_n^2} = \mathbf{I} + \sum_{l=1}^Q \beta_l \mathbf{a}(\theta_l) \mathbf{a}^H(\theta_l) \quad (2-192)$$

其中 $\beta_l \triangleq \sigma_l^2 / \sigma_n^2$ 为干噪比， Q 为干扰个数， $\mathbf{a}(\theta_l)$ 为第 l 个干扰的导向矢量， σ_s^2 为信号功率， σ_n^2 和 σ_l^2 分别代表噪声功率和干扰功率。

类似上节的分析思路，假设已经添加了 $(k-1)$ 次干扰，干扰总数累计为 Q_{k-1} ，第 $(k-1)$ 步时总的虚拟协方差矩阵为 \mathbf{T}_{k-1} 。相应地，第 $(k-1)$ 步的最优权可以表示为

$$\mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \quad (2-193)$$

下面进行第 k 步操作，此时分配 M_k 个虚拟干扰。各干扰的方向和干噪比分别记为 $\theta_{k,m}$ 和 $\beta_{k,m}$, $m = 1, \dots, M_k$ 。则有，

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k &= \mathbf{T}_{k-1} + \sum_{m=1}^{M_k} \beta_{k,m} \mathbf{a}(\theta_{k,m}) \mathbf{a}^H(\theta_{k,m}) \\ &= \mathbf{T}_{k-1} + \mathbf{A}_k \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{A}_k^H \end{aligned} \quad (2-194)$$

其中 $\mathbf{A}_k = [\mathbf{a}(\theta_{k,1}), \dots, \mathbf{a}(\theta_{k,M_k})]$, $\boldsymbol{\Sigma}_k = \text{Diag}([\beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,M_k}])$ 。 \mathbf{T}_k 为执行第 k 步干扰分配后得到的虚拟协方差矩阵。为了使后续讨论有意义，这里假设矩阵 \mathbf{A}_k 为列满秩矩阵。

由矩阵求逆引理可得：

$$\mathbf{T}_k^{-1} = \mathbf{T}_{k-1}^{-1} - \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{A}_k \left(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{A}_k^H \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{A}_k \right)^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{A}_k^H \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \quad (2-195)$$

相应地，最优权向量满足：

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) = \mathbf{w}_{k-1} + \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{A}_k \mathbf{h}_k \quad (2-196)$$

其中 $\mathbf{h}_k \in \mathbb{C}^{M_k}$ 可以表示为

$$\mathbf{h}_k = - \left(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{A}_k^H \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{A}_k \right)^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{A}_k^H \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \quad (2-197)$$

由式(2-196)可以发现，通过对 \mathbf{w}_{k-1} 进行修正，可以得到当前权向量 \mathbf{w}_k 。

由自适应阵列理论可知，权向量 \mathbf{w}_k 可以最大化阵列增益 G_k ，其中 G_k 定义为：

$$G_k \triangleq |\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 / |\mathbf{w}_k^H \mathbf{T}_k \mathbf{w}_k| \quad (2-198)$$

但是最优权无法将给定角度 $\theta_{k,m}$ 的电平调节至理想电平， $m = 1, \dots, M_k$ 。为了将角度 $\theta_{k,m}$ 的电平调节至理想电平 $\rho_{k,m}$ ，需要设计干扰比 $\beta_{k,m}$ ， $m = 1, \dots, M_k$ 。或等价地，设计对角矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_k$ 。与此同时，需要最大化 G_k 。注意到式(2-197)中的 \mathbf{h}_k 为 $\boldsymbol{\Sigma}_k$ 的映射，可以将 $\boldsymbol{\Sigma}_k$ 表示为

$$\boldsymbol{\Sigma}_k = \text{Diag}(-\mathbf{h}_k \oslash (\mathbf{A}_k^H \mathbf{T}_{k-1}^{-1} (\mathbf{a}(\theta_0) + \mathbf{A}_k \mathbf{h}_k))) \quad (2-199)$$

2.4.7.2 多点OPARC问题描述

首先将多点OPARC问题描述为：

$$\max_{\boldsymbol{\Sigma}_k} G_k = |\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 / |\mathbf{w}_k^H \mathbf{T}_k \mathbf{w}_k| \quad (2-200a)$$

$$\text{subject to } L(\theta_{k,m}, \theta_0) = \rho_{k,m}, m = 1, \dots, M_k \quad (2-200b)$$

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1,\star} + \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{A}_k \mathbf{h}_k \quad (2-200c)$$

其中 $\mathbf{w}_{k-1,*}$ 为第 $(k-1)$ 步得到的权向量，向量 \mathbf{h}_k 的定义见式(2-197)。一旦得到最优 $\Sigma_{k,*}$ ，可以将最终的权向量 $\mathbf{w}_{k,*}$ 表示为

$$\mathbf{w}_{k,*} = \mathbf{w}_{k-1,*} - \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{A}_k (\mathbf{I} + \Sigma_{k,*} \mathbf{A}_k^H \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{A}_k)^{-1} \Sigma_{k,*} \mathbf{A}_k^H \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \quad (2-201)$$

下面用迭代算法进行求解。

前小节的OPARC算法可以在单个方向进行最优准确地电平调节，因此可以考虑通过迭代应用OPARC算法来实现 M_k 点OPARC算法。具体来说，对于给定的 $k > 0$ ，迭代应用OPARC算法 M_k 次。在第 m 次过程中，利用OPARC实现 $L(\theta_{k,m}, \theta_0) = \rho_{k,m}$ ， $m = 1, \dots, M_k$ 。然而，OPARC算法会影响已控制角度的电平，即当将 $\theta_{k,m}$ 角度的电平调节为其期望电平 $\rho_{k,m}$ 时，角度 $\theta_{k,i}$ 处的电平会发生变化， $2 \leq m \leq M_k$ ， $i = 1, \dots, m-1$ 。为了减小已控制角度的方向图变化，迭代应用 M_k 点OPARC算法若干次，直到满足某终止条件。取首次迭代中的初始变量为 $\Xi = \mathbf{T}_{k-1}$ ， $\Sigma_k = \mathbf{0}$ ，并在每次迭代中应用一次 M_k 点OPARC算法。具体地，第 m 步中，在 $\theta_{k,m}$ 方向添加虚拟干扰并计算干扰功率 $\beta_{k,m,*}$ ，从而将该方向电平准确地调节为 $\rho_{k,m}$ ， $m = 1, \dots, M_k$ 。同时进行更新相应的虚拟协方差矩阵为 $\Xi = \Xi + \beta_{k,m,*} \mathbf{a}(\theta_{k,m}) \mathbf{a}^H(\theta_{k,m})$ 。一次迭代（即应用 M_k 步OPARC）完成后，将 $\beta_{k,m,*}$ 加入到 Σ_k 的第 m 个对角矩阵上，另外取得到的 Ξ 作为下次迭代的初始虚拟协方差矩阵。另外注意到 $\mathbf{T}_0 = \mathbf{I}$ 。

自然地，可以将待控制角度 $\theta_{k,m}$ 的电平是否足够接近各自期望电平来作为迭代终止条件。上述迭代方式求解问题的步骤总结见算法6，其中 β_ϵ 代表某小的容限参数。除此之外，可以将最终的 $\Sigma_{k,*}$ 表示为：

$$\Sigma_{k,*} = \text{Diag}([\bar{\beta}_{k,1,*}, \dots, \bar{\beta}_{k,M_k,*}]) \quad (2-202)$$

其中 $\bar{\beta}_{k,m,*}$ 代表第 k 步中在 $\theta_{k,m}$ 方向添加虚拟干扰的干噪比之和，其等于给定 m 时所有 $\beta_{k,m,*}$ 的和。一旦得到最优的 $\Sigma_{k,*}$ ，可以利用式(2-194)得到虚拟协方差矩阵 \mathbf{T}_k ，利用(2-197)和(2-200c)更新 \mathbf{h}_k ，进而由式(2-201)计算 $\mathbf{w}_{k,*}$ 。

2.4.8 多点OPARC算法的应用

2.4.8.1 阵列方向图综合

设主瓣波束中心为 θ_0 ，阵列方向图综合中考虑如何找到合适的权向量使得其对应的方向图满足特定要求。记期望方向图为 $L_d(\theta)$ ，下面分两种情况进行讨论。

(1). 适用于一般阵列的通用方法

下面介绍适用于一般阵列的通用方法。首先初始化 $k = 0$ ，并取初始权向量为 $\mathbf{w}_{0,*} = \mathbf{a}(\theta_0)$ 。当 $k > 0$ 时，对比期望方向图 $L_d(\theta)$ 与归一化方向图 $L_{k-1}(\theta, \theta_0)$ ：

$$L_{k-1}(\theta, \theta_0) \triangleq |\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta)|^2 / |\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \quad (2-203)$$

算法 6 求解问题(2-200)的迭代算法

```

1: 输入:  $\mathbf{a}(\theta_0)$ ,  $\theta_{k,m}$ ,  $\rho_{k,m}$ ,  $m = 1, \dots, M_k$ ,  $\mathbf{A}_k$ ,  $\beta_\epsilon > 0$ ,  $\beta_{\text{MAX}} > \beta_\epsilon$ ,  $\Xi = \mathbf{T}_{k-1}$ ,  $\Sigma_k = \mathbf{0}$ 。
2: while  $\beta_{\text{MAX}} > \beta_\epsilon$  do
3:   for  $m = 1, \dots, M_k$  do
4:     利用OPARC算法实现 $L(\theta_{k,m}, \theta_0) = \rho_{k,m}$ , 计算相应的 $\beta_{k,m,\star}$ 。
5:     更新虚拟协方差矩阵:  $\Xi = \Xi + \beta_{k,m,\star} \mathbf{a}(\theta_{k,m}) \mathbf{a}^H(\theta_{k,m})$ 。
6:   end for
7:   更新 $\Sigma_k$ :  $\Sigma_k = \Sigma_k + \text{Diag}([\beta_{k,1,\star}, \dots, \beta_{k,M_k,\star}])$ 。
8:   得到 $\beta_{\text{MAX}} = \max_{1 \leq m \leq M_k} |\beta_{k,m,\star}|$ 。
9: end while
10: 输出:  $\Sigma_{k,\star} = \Sigma_k$ 。

```

来选取多个待控制角度。这些角度即可以位于旁瓣区域也可以位于主瓣区域。对于旁瓣方向图综合，只选取如下集合中的峰值角度：

$$\Omega_{k,S} = \{\theta \mid L_{k-1}(\theta, \theta_0) > L_{k-1}(\theta - \varepsilon, \theta_0), L_{k-1}(\theta, \theta_0) > L_{k-1}(\theta + \varepsilon, \theta_0), \theta \in \Omega_S\}$$

其中 ε 为小的正整数常数， Ω_S 代表期望方向图的旁瓣区域。与A²RC方法的角度选取方式不同，这里选取的角度方向其电平值可能低于期望电平。对于主瓣方向图综合，选取几个方向图电平与期望值差别较大的角度，并记主瓣区域选取的角度集合为 $\Omega_{k,M}$ 。取

$$\Omega_k = \Omega_{k,S} \cup \Omega_{k,M} \triangleq \{\theta_{k,1}, \dots, \theta_{k,M_k}\} \quad (2-204)$$

其中 $M_k = \text{card}(\Omega_k)$ 。则可以应用多点OPARC算法将角度 $\theta_{k,m}$ 的电平值调节为期望电平 $\rho_{k,m} = L_d(\theta_{k,m})$, $m = 1, \dots, M_k$, 进而得到当前迭代的方向图 $L_k(\theta, \theta_0)$ 。更新 $k = k + 1$ 并重复上述过程，直到得到满意的方向图结果。上述基于多点OPARC的阵列方向图综合算法总结见算法7。前文提到，集合 Ω_k 需要满足 $\text{card}(\Omega_k) < N$ 。否则，需要对 Ω_k 进行修改从而使得 $\text{card}(\Omega_k)$ 成立。

(2). 针对大规模阵列的方向图综合

前文提到过，多点OPARC算法在 N 维空间的 M_k 维子空间进行。这为低运算量大规模阵列的方向图综合提供了可能。

具体地，对于某大规模阵列和已确定的式(2-204)中的角度集合 Ω_k （其元素个数接近 N ），构造如下新的角度集合 Θ_k :

$$\Theta_k = \{\bar{\theta}_{k,1}, \bar{\theta}_{k,2}, \dots, \bar{\theta}_{k,C_k}\} \quad (2-205)$$

算法 7 基于多点OPARC的阵列方向图综合算法

```

1: 输入:  $L_d(\theta)$ ,  $\mathbf{w}_{0,*} = \mathbf{a}(\theta_0)$ ,  $k = 1$ ,  $\mathbf{T}_0 = \mathbf{I}$ ,  $\varepsilon > 0$ 。
2: while 1 do
3:   由式(2-204)得到集合 $\Omega_k$ 。
4:   利用多点OPARC算法实现  $L_k(\theta, \theta_0) = L_d(\theta)$ ,  $\theta \in \Omega_k$ , 并更新 $\mathbf{w}_{k,*}$ 和 $\mathbf{T}_k$ 。
5:   if  $L_k(\theta, \theta_0)$ 满足要求 then
6:     跳出循环。
7:   end if
8:   更新 $k = k + 1$ 。
9: end while
10: 输出:  $\mathbf{w}_{k,*}$ 和 $L_k(\theta, \theta_0)$ 。

```

其中 C_k 为某提前指定的远小于 N 的常数, $\bar{\theta}_{k,c}$, $c = 1, \dots, C_k$, 为如下向量的第 c 个元素:

$$\text{Sort}(\Omega_k) \in \mathbb{R}^{\text{card}(\Omega_k)} \quad (2-206)$$

其中 $\text{card}(\cdot)$ 返回集合元素的个数, $\text{Sort}(\Omega_k)$ 对集合 Ω_k 的元素进行重新排列, 使得 $|L_{k-1}(\bar{\theta}, \theta_0) - L_d(\bar{\theta})|$ ($\bar{\theta} \in \Omega_k$)取值越大, $\bar{\theta}$ 在 $\text{Sort}(\Omega_k)$ 中越靠前, 从而使得 $\bar{\theta}$ 越有可能被选为式(2-205)中角度集合 Θ_k 的元素。

选定新的角度集合 Θ_k 之后, 可以应用多点OPARC算法实现 $L_k(\bar{\theta}, \theta_0) = L_d(\bar{\theta})$, 其中 $\bar{\theta} \in \Theta_k$ 。之后更新 $k = k + 1$, 并重复上述过程直到得到满意的方向图结果。需要注意的是, 上述过程中集合 Θ_k 的元素个数 C_k 可以随迭代次数变化。综上, 只需将算法7中第3行的集合 Ω_k 替换为式(2-205) 中的 Θ_k , 即可得到针对大规模阵列的方向图综合算法流程。

上述算法以迭代的方式对旁瓣峰值进行调整, 旁瓣电平可以得到有效控制。然而, 上述方法仅适用于非自适应(数据独立)场景。当存在干扰, 无法对干扰进行自适应抑制。下面讨论如何应用多点OPARC算法进行自适应波束形成。

2.4.8.2 多约束自适应波束形成

线性约束最小方差无畸变(Linearily Constrained Minimum Variance,LCMV)波束形成^[130-132]可用来增强阵列系统的稳健性。LCMV波束形成中, 在某些线性约束条件下对总输出功率进行最小化, 如下面问题所描述:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{n+i} \mathbf{w} \quad (2-207a)$$

$$\text{subject to } \mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{g} \quad (2-207b)$$

其中 \mathbf{C} 为约束矩阵，包含 D 个空域导向矢量（对应 D 个约束方向， $\theta_d, d = 0, \dots, D-1$ ），即 $\mathbf{C} = [\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_{D-1})]$ ， \mathbf{g} 为某 D 维向量，通常满足 $(\mathbf{g})_1 = 1$ 。上述问题(2-207)的解由下式给出：

$$\mathbf{w}_{\text{LCMV}} = \mathbf{R}_{n+i}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{R}_{n+i}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g} \quad (2-208)$$

由(2-207b)可以看出，LCMV中对 $\theta_d, d = 0, \dots, D-1$ ，方向的阵列输出的增益和相位均进行了约束。实际上，由于相位约束可忽略，可以考虑如下二次约束最小方差无畸变(Quadratically Constrained Minimum Variance,QCMV)波束形成

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{n+i} \mathbf{w} \quad (2-209a)$$

$$\text{subject to } |(\mathbf{C}^H \mathbf{w})_d|^2 = |(\mathbf{g})_d|^2, d = 1, \dots, D \quad (2-209b)$$

与上式(2-209)的QCMV相比，可以看出式(2-207)中的LCMV限制了权向量优化的自由度（尽管LCMV可以得到解析解）。所以，LCMV波束形成可能产生性能损失，或造成波束畸变。

下面利用多点OPARC算法来辅助求解问题(2-209)，以此希望得到性能提升（相比于LCMV）。注意到如果 $D = 1$ ，即(2-209b)中只有一个限制 $|\mathbf{a}^H(\theta_0)\mathbf{w}|^2 = 1$ ，此时式(2-209)的最优解为：

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{R}_{n+i}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{n+i}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)} \quad (2-210)$$

如果 $D > 1$ ，基于第一个约束 $|\mathbf{a}^H(\theta_0)\mathbf{w}|^2 = 1$ ，可以得到 $L(\theta_{d-1}, \theta_0) = |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_{d-1})|^2$ 。则可以通过添加如下限制来实现额外的 $(D-1)$ 个约束：

$$L(\theta_{d-1}, \theta_0) = |(\mathbf{g})_d|^2, d = 2, \dots, D \quad (2-211)$$

问题转换为如何在给定式(2-210)的初始最优权向量的基础上，进一步实现上述多点方向图控制要求。为了应用多点OPARC算法，将式(2-210)中的权向量 \mathbf{w} 重新表示为：

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\sigma_n^2 \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{n+i}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)} \mathbf{T}_{n+i}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \triangleq c \mathbf{w}_0 \quad (2-212)$$

其中 c 为常数满足 $c = (\sigma_n^2 \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{n+i}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0))^{-1}$ ， \mathbf{T}_{n+i} 和 $\mathbf{w}_0 = \mathbf{T}_{n+i}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$ 分别作为多点OPARC算法中的初始虚拟协方差矩阵和虚拟权向量。可以利用多点OPARC算法来实现式(2-211)的约束要求，从而得到最终的QCMV权向量（记为 \mathbf{w}_{QC} ）。

注意到在实际应用中， \mathbf{R}_{n+i} 通常由数据 $\mathbf{x}(t)$ 估计得到：

$$\hat{\mathbf{R}}_{n+i} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \quad (2-213)$$

其中 T 表示快拍数。除此之外，式中的噪声功率 σ_n^2 可由下式估计得到^[119]

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{N - J_r} \sum_{n=J+1}^N \lambda_n \quad (2-214)$$

其中 J_r 为干扰个数， $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$ 为数据协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_{n+i}$ 的特征值。将协方差矩阵 \mathbf{R}_{n+i} 和噪声功率 σ_n^2 分别替换为 $\hat{\mathbf{R}}_{n+i}$ 和 $\hat{\sigma}_n^2$ ，即可实现数据依赖QCMV波束形成，其算法描述见算法8。

算法8 基于多点OPARC的多约束自适应波束形成

- 1: 输入：干扰个数 J_r ，约束矩阵 \mathbf{C} ，约束向量 \mathbf{g} 。
 - 2: 分别利用式(2-213)和(2-214) 估计 $\hat{\mathbf{R}}_{n+i}$ 和 $\hat{\sigma}_n^2$ ，计算 $\mathbf{T}_{n+i} = \hat{\mathbf{R}}_{n+i}/\hat{\sigma}_n^2$ 和 $\mathbf{w}_0 = \mathbf{T}_{n+i}^{-1}\mathbf{a}(\theta_0)$ 。
 - 3: 利用多点OPARC算法实现 $L(\theta_{d-1}, \theta_0) = |(\mathbf{g})_d|^2$ ， $d = 2, \dots, D$ ，得到权向量 \mathbf{w}_{QC} ，其中初始协方差矩阵和初始权向量分别取为 \mathbf{T}_{n+i} 和 \mathbf{w}_0 。
 - 4: 输出：权向量 \mathbf{w}_{QC} 。
-

为了更好地理解上述应用，将权向量 \mathbf{w}_{QC} 的虚拟协方差矩阵表示为 \mathbf{T}_{QC} 。由多点OPARC的性质可知， \mathbf{w}_{QC} 和 \mathbf{T}_{QC} 满足

$$\mathbf{w}_{QC} = \mathbf{T}_{QC}^{-1}\mathbf{a}(\theta_0) \quad (2-215)$$

从中可以看出，在满足约束(2-209b)的条件下，最终得到的权向量 \mathbf{w}_{QC} 最小化总的功率 $\mathbf{w}^H \mathbf{T}_{QC} \mathbf{w}$ ，而非最小化 $\mathbf{w}^H \mathbf{T}_{n+i} \mathbf{w}$ 或其等价形式 $\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{n+i} \mathbf{w}$ 。然而，由定理2.4.7可知，OPARC算法得到的权向量同时可以最小化前一步的输出功率。因此，当 $D = 2$ 时， \mathbf{w}_{QC} 是问题(2-209)的最优解，此时仅有额外限制 $|\mathbf{a}^H(\theta_0)\mathbf{w}|^2 = 1$ 。除此之外，如果在 θ_{d-1} 方向施加零陷约束，则 \mathbf{w}_{QC} 也是对应问题的最优解， $d = 2, \dots, D$ 。此时由于 $|(\mathbf{g})_d|^2 = 0$ ， $d = 2, \dots, D$ ，所以可以得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{QC}^H \mathbf{T}_{QC} \mathbf{w}_{QC} &= \mathbf{w}_{QC}^H \left(\mathbf{T}_{n+i} + \sum_{d=2}^D \beta_{d-1} \mathbf{a}(\theta_{d-1}) \mathbf{a}^H(\theta_{d-1}) \right) \mathbf{w}_{QC} \\ &= \mathbf{w}_{QC}^H \mathbf{T}_{n+i} \mathbf{w}_{QC} + \underbrace{|\mathbf{w}_{QC}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \left(\sum_{d=2}^D \beta_{d-1} |(\mathbf{g})_d|^2 \right)}_{=0} \\ &= \mathbf{w}_{QC}^H \mathbf{T}_{n+i} \mathbf{w}_{QC} \\ &= \mathbf{w}_{QC}^H \mathbf{R}_{n+i} \mathbf{w}_{QC} / \sigma_n^2 \end{aligned} \quad (2-216)$$

上式中利用到了如下结果

$$\frac{|\mathbf{w}_{\text{QC}}^H \mathbf{a}(\theta_{d-1})|^2}{|\mathbf{w}_{\text{QC}}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} = |(\mathbf{g})_d|^2 = 0, d = 2, \dots, D \quad (2-217)$$

以及

$$\mathbf{T}_{\text{QC}} = \mathbf{T}_{n+i} + \sum_{d=2}^D \beta_{d-1} \mathbf{a}(\theta_{d-1}) \mathbf{a}^H(\theta_{d-1}) \quad (2-218)$$

其中 β_{d-1} 表示在 θ_{d-1} 方向添加虚拟干扰的干噪比。由式(2-216)可知， \mathbf{w}_{QC} 也可以使得 $\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{n+i} \mathbf{w}$ 最小化。

而且，由式(2-215)和(2-218)可以看出，权向量 \mathbf{w}_{QC} 对应于在初始 \mathbf{T}_{n+i} 上进行归一化协方差矩阵加载（对角加载的扩展）。加载量由多点OPARC算法确定，满足

$$\Delta = \sum_{d=2}^D \beta_{d-1} \mathbf{a}(\theta_{d-1}) \mathbf{a}^H(\theta_{d-1}) \quad (2-219)$$

不难发现，上式中的加载量 Δ 依赖于式(2-209b)中的约束以及接收数据。

2.4.8.3 静态方向图控制

自适应波束形成中，权向量以数据依赖的方式进行设计。然而，传统的自适应波束形成方法通常产生较高的旁瓣。为了在自适应阵列中得到满意的低旁瓣，文献[133] 通过结合自适应波束形成和静态波束形成，引入了静态方向图控制的概念。简言之，当自适应阵列在白噪声环境中工作时，所对应的权向量被称为静态权向量，与之对应的方向图为静态方向图。沿用文献[133–135]中静态方向图控制的概念，静态方向图控制中需要设计权向量使得干扰可以被抑制，同时当仅存在白噪声时获得满足特定要求的静态方向图。

注意到式(2-208)中LCMV波束形成的静态权向量为 $\mathbf{w}_q = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g}$ ，该结果可以通过代入 $\mathbf{R}_{n+i} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ 直接得到。然而，由于通常需要对静态方向图进行形状约束，很难通过设计 \mathbf{C} 和 \mathbf{g} 来得到满意的静态方向图。本节介绍一种基于归一化协方差矩阵加载的静态方向图控制方法。具体来讲，对于给定的期望静态方向图 $L_d(\theta)$ ，首先利用多点OPARC算法进行方向图综合得到理想的静态方向图，参考算法 7。将所得到的静态权，相应的虚拟协方差矩阵以及静态方向图分别记为 \mathbf{w}_q ， \mathbf{T}_q 和 $L_q(\theta, \theta_0)$ 。不难发现

$$\mathbf{w}_q = \mathbf{T}_q^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \quad (2-220)$$

前文提到，得到的 $L_q(\theta, \theta_0)$ 可以保持期望静态方向图 $L_d(\theta)$ 的形状，而静态权向量 \mathbf{w}_q 无法抑制潜在干扰和噪声。静态方向图中需要找到某权向量，使得其在白噪

声环境下可以保持期望方向图 $L_d(\theta)$ 的形状，另外可以抑制潜在的实际干扰和噪声。由自适应阵列理论，需要在 \mathbf{T}_q 的基础上添加某数据依赖的加载量 Δ ，从而使得潜在的干扰和噪声被抑制。而且，白噪声环境下，加载量 Δ 应该退化为零，从而使得得到的权向量可以退化为式(2-220)中的静态权向量 \mathbf{w}_q 。为了实现上述目的，我们将实际数据考虑在内，并对协方差 \mathbf{T}_q 进行协方差矩阵加载，其中加载量 Δ 取为

$$\Delta = -\mathbf{I} + \mathbf{T}_{n+i} \quad (2-221)$$

其中 $\mathbf{T}_{n+i} = \mathbf{R}_{n+i}/\sigma_n^2$ 。最终的自适应权可以由下式计算得到

$$\mathbf{w}_a = (\mathbf{T}_q - \mathbf{I} + \mathbf{T}_{n+i})^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \quad (2-222)$$

由此可进一步计算相应的方向图 $L_a(\theta, \theta_0)$ 。

不难看出有两部分成分可以被式(2-222)中的权向量 \mathbf{w}_a 抑制。第一部分成分为 $\mathbf{T}_q - \mathbf{I}$ ，其用来保持期望静态方向图 $L_d(\theta)$ 的形状。第二部分成分为 \mathbf{T}_{n+i} ，其包含需要被抑制的干扰和噪声分量。在噪声环境下，如果 $\mathbf{R}_{n+i} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ 或 $\mathbf{T}_{n+i} = \mathbf{I}$ ，加载量 Δ 自动变为零，得到的权向量变为式(2-220)中的静态权向量 \mathbf{w}_q 。因此，式(2-220)中的权向量 \mathbf{w}_q 和相应的波束方向图 $L_q(\theta, \theta_0)$ 刚好对应于静态权向量和静态方向图。另外，实际应用中需要将未知的 \mathbf{R}_{n+i} 和 σ_n^2 分别替换为式(2-213)中的 $\hat{\mathbf{R}}_{n+i}$ 和式(2-214)中的 $\hat{\sigma}_n^2$ ，同时取 $\mathbf{T}_{n+i} = \hat{\mathbf{R}}_{n+i}/\hat{\sigma}_n^2$ 。基于多点OPARC的静态方向图控制算法描述见算法9。

算法 9 基于多点OPARC的静态方向图控制算法

- 1: 输入： $L_d(\theta)$ 。
 - 2: 利用算法7合成期望的静态方向图 $L_q(\theta, \theta_0)$ ，得到 \mathbf{w}_q 和 \mathbf{T}_q 。
 - 3: 利用式(2-213)和(2-214)分别估计 $\hat{\mathbf{R}}_{n+i}$ 和 $\hat{\sigma}_n^2$ ，取 $\mathbf{T}_{n+i} = \hat{\mathbf{R}}_{n+i}/\hat{\sigma}_n^2$ 。
 - 4: 输出：式(2-222)中的自适应权向量 \mathbf{w}_a 。
-

2.4.9 实验仿真

下面通过实验仿真验证OPARC算法，多点OPARC算法及其应用。为了证实所提OPARC算法的优越性，同时测试另一种精确阵列响应控制算法 (Precise Array Response Control,PARC)^[136]。PARC算法中，参数 γ_k 选为

$$\gamma_k = \gamma_{k,\times} \triangleq \{\gamma_{k,a}, \gamma_{k,b}\} \setminus \gamma_{k,\star} \quad (2-223)$$

其余步骤均与OPARC算法相同。记 $\beta_{k,\times} = \Psi_k^{-1}(\gamma_{k,\times})$ 。注意到 $\gamma_{1,\times}$ 与推论2.4.1中的标记相同。显然，PARC算法也可以实现精确方向图控制了，但其 γ_k 的选取

与OPARC不同。除了OPARC和PARC外，同时比较文献[137]中的A²RC算法。取 $\omega = 6\pi \times 10^8$ rad/s，对应于 $\lambda = 2\pi c/\omega = 1$ m，其中c为光速。除非特别指定，实验中使用11阵元非等距线性阵列，各阵元各向异性。表2-2给出了阵元位置 x_n 和各阵元方向图 $g_n(\theta)$ ， $n = 1, \dots, N$ 。除此之外，取初始权向量为 $\mathbf{a}(\theta_0)$ ，其中波束轴中心取为 $\theta_0 = 20^\circ$ 。

表 2-2 非等距线阵阵元位置和阵元方向图

n	x_n	$g_n(\theta)$	n	x_n	$g_n(\theta)$
1	0.00	$1.00\cos(1.00\theta)$	7	3.05	$1.02\cos(1.00\theta)$
2	0.45	$0.98\cos(0.85\theta)$	8	3.65	$1.08\cos(0.90\theta)$
3	1.00	$1.05\cos(0.98\theta)$	9	4.03	$0.96\cos(0.75\theta)$
4	1.55	$1.10\cos(0.70\theta)$	10	4.60	$1.09\cos(0.92\theta)$
5	2.10	$0.90\cos(0.85\theta)$	11	5.00	$1.02\cos(0.80\theta)$
6	2.60	$0.93\cos(0.69\theta)$			

理想的阵列方向图控制在控制 θ_k 方向电平的同时保持其它方向电平不变。然而，由于方向图函数的连续性，上述理想情况是无法实现的。事实上，好的阵列方向图控制结果在已控制角度方向产生较小的变化。基于此，引入两个衡量阵列响应控制的指标函数。第一个指标定义为

$$D_k \triangleq |L_k(\theta_{k-1}, \theta_0) - L_{k-1}(\theta_{k-1}, \theta_0)| \quad (2-224)$$

其中 $L_k(\theta, \theta_0)$ 代表第 k 步权向量更新后的归一化方向图。由于角度 θ_{k-1} 处的电平已经在第 $(k-1)$ 步调节为期望电平 ρ_{k-1} ， D_k 可重新表示为 $D_k = |L_k(\theta_{k-1}, \theta_0) - \rho_{k-1}|$ 。可以看出， D_k 测量了第 k 步方向图控制之后，前一步控制方向 θ_{k-1} 处与期望电平的偏差。第二个指标函数定义为：

$$J_k \triangleq \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} |L_k(\theta_i, \theta_0) - \rho_i| \quad (2-225)$$

用来衡量第 k 步方向图控制之后，已控制方向 θ_i 处与期望电平的平均偏差， $i = 1, \dots, k-1$ 。显然， D_k 和 J_k 越小，方向图控制性能越好。除此之外， D_k 和 J_k 的测量时应该取 $k \geq 2$ 。当 $k = 2$ 时，不难发现 $D_k = J_k$ ，此时仅考虑指标 D_k 。

2.4.9.1 方向图变化仿真

第一个例子中，我们测试不同方法的旁瓣控制性能。考虑两步阵列方向图响

应控制，记两个待控制角度分别为 θ_1 和 θ_2 。更具体地，取 $\theta_1 = -45^\circ$, $\theta_2 = -5^\circ$ ，两个方向的期望电平分别为 $\rho_1 = -40\text{dB}$, $\rho_2 = -30\text{dB}$ 。

第一步方向图控制中可以计算得到 $\mathbf{c}_\gamma = [-0.1704, -0.0315]^\text{T}$, $d = -8.5231 - j1.5766$, $\gamma_{1,a} = -0.1559 - j0.0288$, $\gamma_{1,b} = -0.1849 - j0.0342$ 。在此基础上得到 $\zeta = 1 > 0$ ，根据(2-152)和(2-223)，OPARC方法选择 $\gamma_{1,*} = \gamma_{1,a}$, PARC方法选择 $\gamma_{1,*} = \gamma_{1,b}$ 。除此之外，可以计算得到 $\mathbf{c}_\beta = [-0.1488, 0]^\text{T}$, $R_\beta = 1.7171$ 。对于OPARC算法我们取 $\beta_{1,*} = \beta_{1,r} = 1.5683$ ，对于PARC取 $\beta_{1,*} = \beta_{1,l} = -1.8659$ 。

对于A²RC算法，可以计算得到 $\mu_1 = \gamma_{1,*} = -0.1559 - j0.0288$ ，这与推论2.4.1一致。同时可以得到 $\check{\beta}_{1,1} = \beta_{1,*} = 1.5683$ 。图2-17展示了不同方法完成第一步对 θ_1 角度方向图控制后的效果。由图中可以看出，三种方法均可以实现精确地方向图控制。另外注意到A²RC方法与 OPARC方法的方向图完全重合。

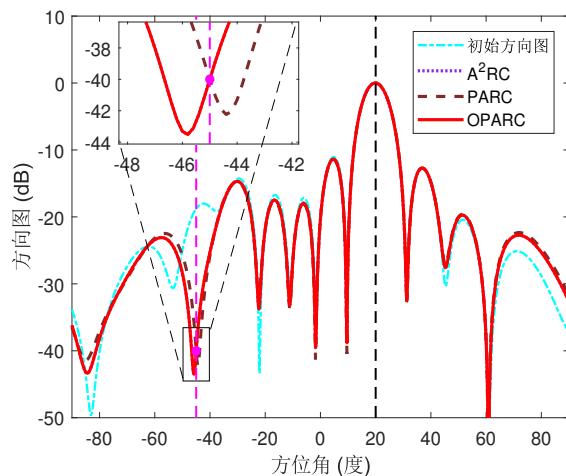


图 2-17 第一步方向图控制得到的结果

在第二步中，可以类似计算得到 $\gamma_{2,*} = -0.0685 - j0.0399$, $\beta_{2,*} = 0.2504$, $\gamma_{2,x} = -0.1148 - j0.0695$, $\beta_{2,x} = -0.4277$, $\mu_2 = -0.0674 - j0.0393$ 。图2-18给出了控制完 θ_2 角度的电平后三种方法的方向图。对于OPARC方法，可以验证 $\beta_{k,*}$ 取为 $\beta_{k,r}$, $k = 1, 2$ 。事实上，这与定理2.4.5的结论一致。可以看出此时 $\beta_{1,*}$ 和 $\beta_{2,*}$ 均为正数，这与定理2.4.6 的结论一致。

为了进一步测试算法性能，下面考察 D_2 。A²RC方法，PARC方法和OPARC方法得到的 D_2 分别为5.05dB, 0.86dB和0.51dB。由图2-18可以看出，A²RC在 θ_1 方向产生了较大的方向图变化（约为5dB）。事实上，除了在 θ_2 方向添加虚拟干扰外，A²RC也会在 θ_1 方向添加虚拟干扰。可以计算得到 $\check{\beta}_{2,2} = 0.2465 + j0.0001$, $\check{\Delta}_{2,1} = -0.4120 + j2.5879$ （代表第二步中在 θ_1 方向添加虚拟干扰的干噪比）。同时注意到 $\check{\beta}_{2,2}$ 和 $\check{\Delta}_{2,1}$ 均为复数，这与OPARC方法不同。

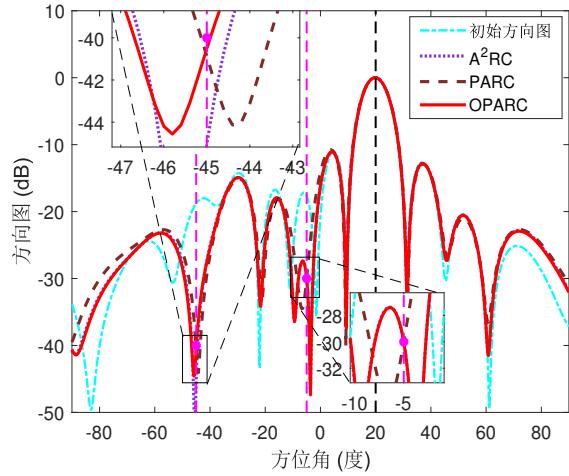
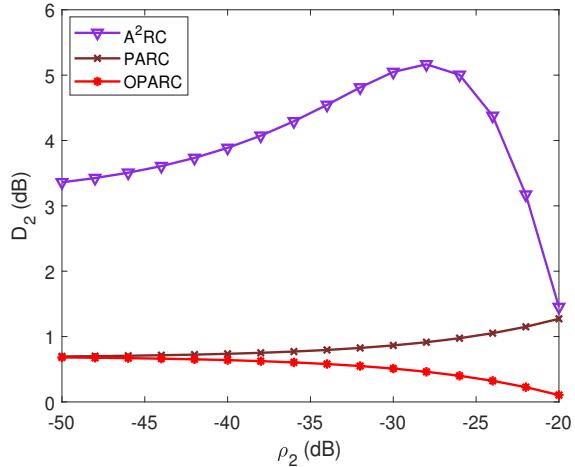


图 2-18 第二步方向图控制得到的结果（旁瓣控制）

由于 D_2 取决于 θ_2 方向的期望电平 ρ_2 ，下面将 ρ_2 由-50dB变化值-20dB，同时计算相应的 D_2 值。图2-19给出了 D_2 随 ρ_2 的变化曲线，从中看出OPARC可以得到最为理想的 D_2 值。结合 D_k 的定义，图2-19意味着OPARC算法完成第二步方向图控制之后，在 θ_1 产生的扰动最小。相比之下，A²RC方法第二步控制后在 θ_1 方向产生较大的扰动。

图 2-19 D_2 随 ρ_2 变化曲线（旁瓣控制）

第二个例子中，沿用前例中对 θ_1 和 ρ_1 的参数设定，变化第二个方向和其期望电平分别为 $\theta_2 = 23^\circ$, $\rho_2 = 0$ dB。注意到 θ_2 位于主瓣区域，且需要抬高 θ_2 方向的电平。

显然，第一步方向图控制后三种方法的结果与完全前例相同，而第二步方向图控制后对于参数发生了变化。对于A²RC算法，可以计算得到 $\mu_2 = -0.5931 +$

$j0.8040$, $\beta_{2,2} = -0.3923 - j0.4011$, $\Delta_{2,1} = -1.8001 + j0.0334$ 。对于PARC算法有 $\gamma_{2,x} = -0.7108 + j0.7171$, $\beta_{2,x} = -0.8522$ 。OPARC算法有 $\gamma_{2,*} = \gamma_{2,b} = 0.8352 - j0.8438$, $\beta_{2,*} = \beta_{2,r} = -0.0577$ 。需要注意的是, OPARC算法选择了 γ_b 作为最终的 $\gamma_{2,*}$, 这与第一步中选择 γ_a 作为最终参数不同。OPARC方法对参数近似灵活选取, 从而避免了方向图畸变。为了展示OPARC方法的优势, 图2-20对比了上述参数设定下不同方法的方向图结果。由图可以看出, θ_2 方向的电平均满足期望电平要求, 但是A²RC和PARC方法的方向图发生了严重畸变。另外, 当 ρ_2 从-20dB变化至0dB时, 所得到的 D_2 随 ρ_2 变化曲线如图2-21所示。从图中发现, OPARC性能优于另外两种方法。

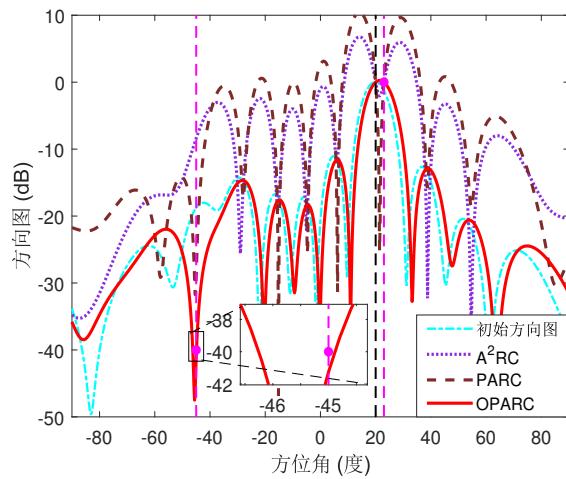
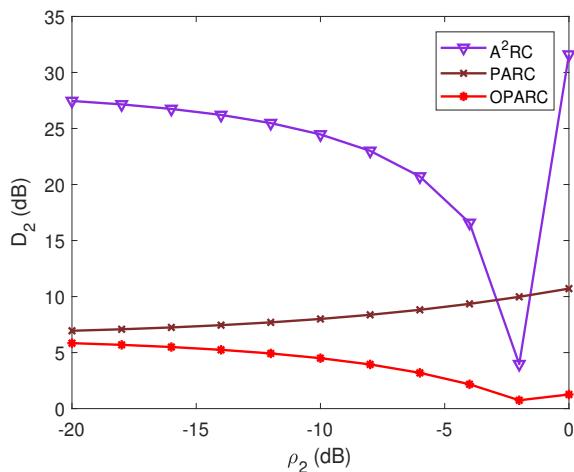


图 2-20 第二步方向图控制得到的结果（主瓣控制）

图 2-21 D_2 随 ρ_2 变化曲线（主瓣控制）

2.4.9.2 基于多点OPARC的阵列方向图综合仿真

下面通过实验仿真来验证多点OPARC算法在方向图综合中的应用。

(1). 非等电平旁瓣方向图综合

首先考虑非等电平旁瓣方向图综合。为了进行实验对比，同时测试文献[35]中的菲利普方法，文献[43]中的凸优化方法(convex programming,CP)，文献[137]中的A²RC方法。图2-22对比了不同方法的仿真结果，从图中可以看出菲利普方法，凸优化方法和A²RC方法得到的旁瓣电平均无法和期望旁瓣电平对齐。

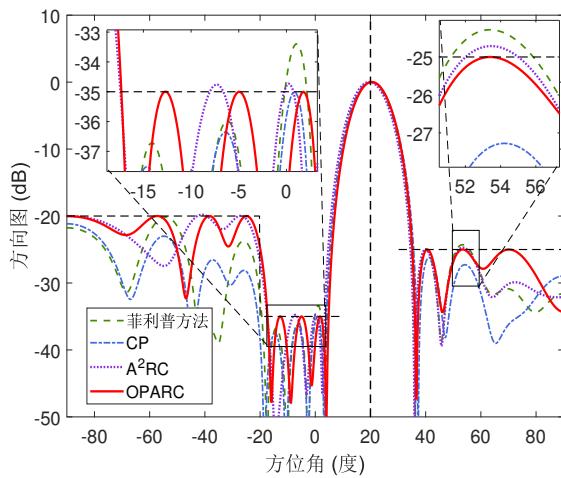


图 2-22 方向图综合结果对比

(2). 大规模阵列方向图综合

下面考虑 $N = 80$ 各向同性阵元等距线阵的方向图综合，阵元间距为半波长，主瓣波束中心指向 $\theta_0 = 50^\circ$ 。期望方向图为非等电平旁瓣，旁瓣区域 $[-90^\circ, 50^\circ]$ 的电平上限为 -35dB ，其它旁瓣区域的电平上限为 -25dB 。

图2-23展示了基于多点OPARC算法的方向图综合结果。每步控制中，取 $C_k = 20$ 个旁瓣峰值角度（参考式(2-205)和(2-206)），然后将各选定角度的电平调节到期望电平。仿真结果显示只需要11步迭代（即 $k = 11$ ）即可得到满意的方向图结果，最终的方向图见图2-23(c)。

2.4.9.3 基于多点OPARC的多约束自适应波束形成算法

下面仿真验证基于多点OPARC的多约束自适应波束形成算法。简单起见，假设数据协方差矩阵精确已知。

(1). 旁瓣约束

首先考虑包含旁瓣约束的自适应波束形成。具体地，使用4个旁瓣约束点，各约束角度分别为 $-20^\circ, -18^\circ, -16^\circ, -14^\circ$ ，约束电平均为 -40dB 。另外，两

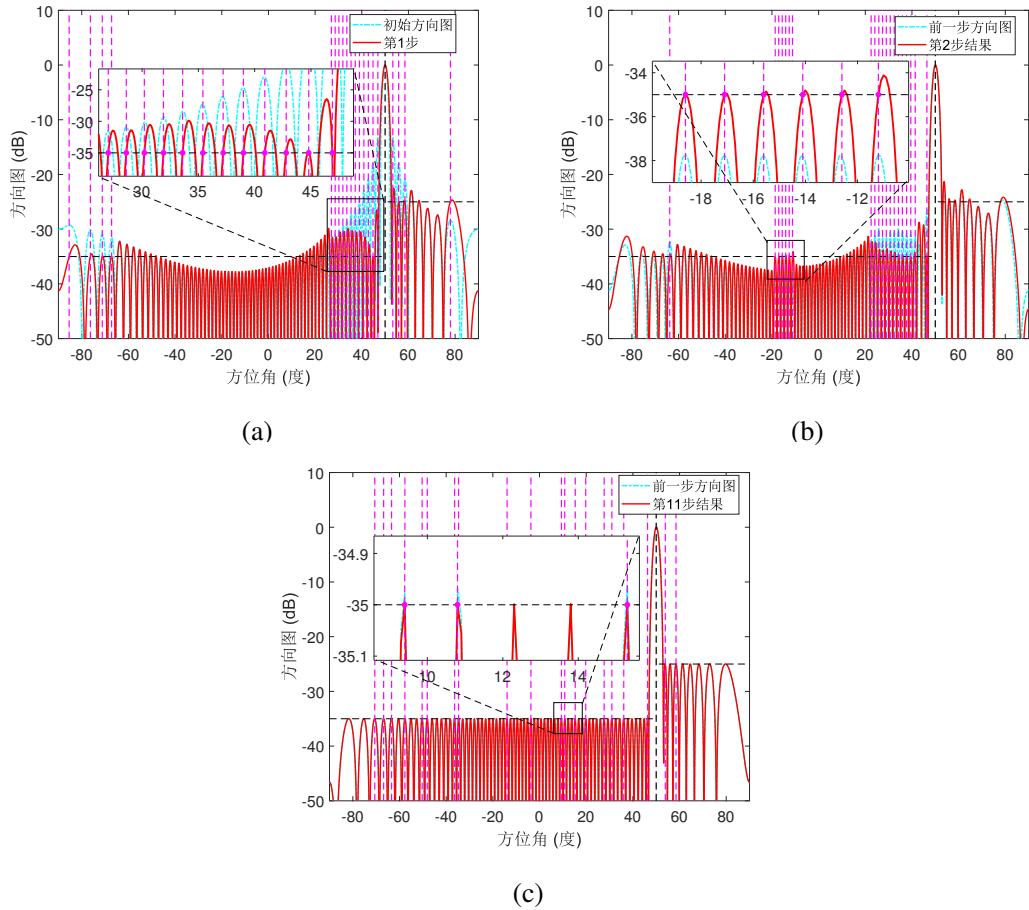


图 2-23 大规模阵列等旁瓣电平方向图综合结果。(a)第1步结果;(b)第2步结果;(c)第3步结果

个干扰方向分别为 -40° 和 -28° ，干噪比为30dB和25dB。图2-24对比了不包含旁瓣约束时的最优波束形成方向图，文献[130]中LCMV方法的方向图，以及基于多点OPARC方法的自适应波束形成方向图结果。从图中可以看出，LCMV方法和多点OPARC方法在真实干扰方向均可以形成深零陷，且两种方法均满足给定的旁瓣约束要求。LCMV方法和多点OPARC方法的输出信干噪比分别为19.5601dB和19.6906dB。由此可以看出，相比于LCMV方法，多点OPARC算法在输出信干噪比方面具有性能提升。

(2). 主瓣约束

下面考虑具有主瓣约束的自适应方向图综合。两个约束方向分别为 19° 和 21° ，期望电平均为0dB。三个干扰方向分别为 -32° ， 50° 和 60° ，干噪比均为30dB。图2-25为实验对比结果，从中可以发现尽管LCMV方法满足主瓣电平约束要求，但其方向图出现了严重畸变，相应的输出信干噪比为11.1767dB。多点OPARC方法可以得到满意的方向图结果，且满足给定的主瓣电平控制要求。而且，多点OPARC算

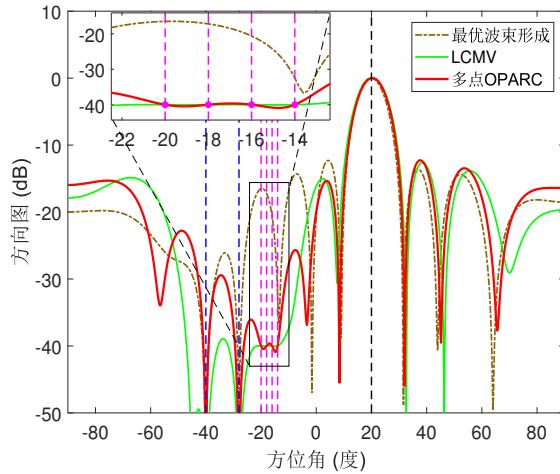


图 2-24 多约束自适应波束形成结果对比（旁瓣约束）

法的输出信干噪比为17.1260dB，远高于LCMV方法的对应值。

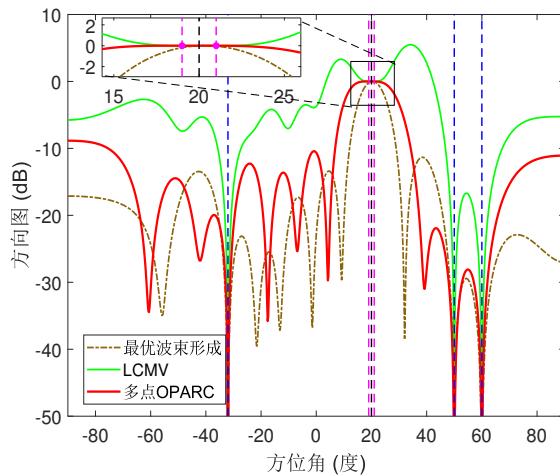


图 2-25 多约束自适应波束形成结果对比（主瓣约束）

2.4.9.4 基于多点OPARC方法的静态方向图控制

下面测试多点OPARC方法在静态方向图控制中的应用。期望的静态方向图具有非等电平旁瓣，如图2-22中的黑色虚线所示。

所提方法首先进行静态方向图设计，参考图2-22的结果。假设两个干扰方向分别为 -55° 和 -49° ，信噪比均为30dB。图2-26展示了得到的自适应方向图结果，从中可以看出在两个干扰方向形成了深零陷，且其它区域方向图与期望的静态方向图接近。另外，计算得到所提方法的输出信干噪比为19.2984dB。

为了进行实验对比，下面与文献[133]中的线性约束静态方向图控制(Linearly-Constraint based Quiescent Pattern Control,LC-QPC)方法进行对比。图2-26展示了LC-QPC方法的结果，相比于期望结果，可以发现在 $[-15^\circ, 0^\circ]$ 区域出现了较大扰动。另外LC-QPC方法的输出信干噪比为19.2161dB，低于基于多点OPARC方法的静态方向图控制算法。

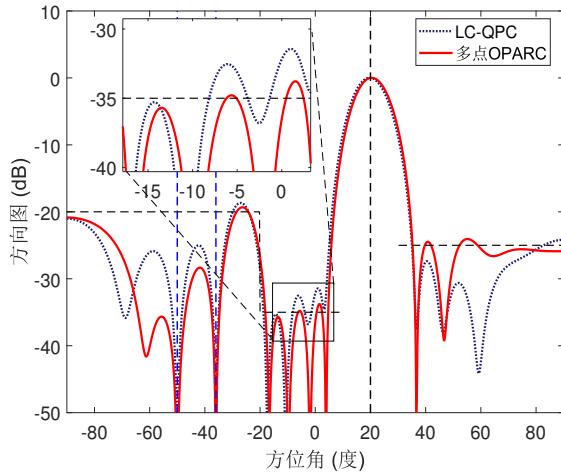


图 2-26 静态方向图控制结果对比

2.5 本章小结

本章首先介绍了一种精确的阵列响应控制算法，简称A²RC算法。该算法可以精确地控制给定方向的方向图电平。经过参数的设计和选择，所提算法可以有效避免波束畸变。除此之外，通过连续应用A²RC算法实现了方向图综合。

另外考虑了多点方向图控制问题，基于A²RC算法提出两种多点方向图控制算法。首先由A²RC算法结合子空间理论导出了MA²RC算法，实现了同时多点的方向图控制。进一步，为了避免MA²RC算法可能产生的波束中心偏移，通过对方向图施加导数约束得到了改进算法M²A²RC。在此基础上，介绍了M²A²RC算法在方向图综合中的应用。由于A²RC、MA²RC以及M²A²RC对初始权向量没有限制，所以增强了实际系统方向图控制的灵活性。

最后介绍了最优精确阵列响应算法（简称为OPARC算法）。首先分析了增加干扰时自适应权向量的变化规律，在此基础上得到了干噪比与方向图电平的关系，并进一步通过最大化阵列增益来进行参数选取。通过迭代运算得到一种多点OPARC算法。另外讨论了多点OPARC算法的应用，为实际阵列系统数据依赖或数据独立波束形成提供了技术支撑。

第三章 基于正交投影理论的方向图控制

由前文可知, A²RC以经验方式进行参数选取, 这导致该方法可能出现方向图畸变现象。本章首先对自适应波束形成最优权进行重新表示, 提出一种基于权向量正交分解的单点方向图电平控制算法 (WORD算法)。相比于A²RC算法, WORD算法的参数选取方式更加灵活。在WORD算法的基础上, 提出一种复系数权向量正交分解算法 (C²-WORD算法)。C²-WORD算法以阵列增益最大化作为优化准则, 且有解析解。基于C²-WORD, 进一步提出一种稳健C²-WORD算法。稳健C²-WORD算法可以在阵列存在误差时进行旁瓣控制。

3.1 WORD算法

3.1.1 最优权向量的正交投影解释

将 $\mathbf{a}(\theta_i)$ 的列空间表示为 $\mathcal{R}(\mathbf{a}(\theta_i))$, 则向 $\mathcal{R}(\mathbf{a}(\theta_i))$ 投影的正交投影矩阵可以表示为

$$\mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\theta_i)]} = \mathbf{a}(\theta_i)(\mathbf{a}^H(\theta_i)\mathbf{a}(\theta_i))^{-1}\mathbf{a}^H(\theta_i) = \frac{\mathbf{a}(\theta_i)\mathbf{a}^H(\theta_i)}{\|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2} \quad (3-1)$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 表示欧氏范数。相应地, 向 $\mathcal{R}(\mathbf{a}(\theta_i))$ 的正交子空间 (即 $\mathcal{R}^\perp(\mathbf{a}(\theta_i))$) 投影的正交投影矩阵为

$$\mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\theta_i)]}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\theta_i)]} \quad (3-2)$$

现在考虑式(2-4)中的协方差矩阵 \mathbf{R}_{n+i} , 利用矩阵求逆法则可以将 \mathbf{R}_{n+i}^{-1} 表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{n+i}^{-1} &= \frac{1}{\sigma_n^2} \left(\mathbf{I} - \frac{\sigma_i^2 \|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2}{\sigma_n^2 + \sigma_i^2 \|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2} \cdot \frac{\mathbf{a}(\theta_i)\mathbf{a}^H(\theta_i)}{\|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_n^2} \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\theta_i)]} + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \sigma_i^2 \|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2} \mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\theta_i)]} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_n^2} \left(\mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\theta_i)]}^\perp + \beta \mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\theta_i)]} \right) \end{aligned} \quad (3-3)$$

其中 β 为实数, 其由 σ_n^2 , σ_i^2 和 $\mathbf{a}(\theta_i)$ 确定。更具体地, β 可以表示为

$$\beta = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \sigma_i^2 \|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2} \quad (3-4)$$

由式(3-3)可知, \mathbf{R}_{n+i}^{-1} 是投影矩阵 $\mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\theta_i)]}^\perp$ 和 $\mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\theta_i)]}$ 的线性组合。因此, 式(2-6)中最优权向量可以重写表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_* &= \left(\mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\theta_i)]}^\perp + \beta \mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\theta_i)]} \right) \mathbf{a}(\theta_0) = \mathbf{w}_{(0)\perp} + \beta \mathbf{w}_{(0)\parallel} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{(0)\perp} & \mathbf{w}_{(0)\parallel} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (3-5)$$

注意到上述中我们省略了公共因子 $1/\sigma_n^2$, 因为其不影响波束形成的性能。在上式(3-5)中, $\mathbf{w}_{(0)\perp}$ 和 $\mathbf{w}_{(0)\parallel}$ 满足

$$\mathbf{w}_{(0)\perp} = \mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\theta_i)]}^\perp \mathbf{w}_{(0)} \quad (3-6a)$$

$$\mathbf{w}_{(0)\parallel} = \mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\theta_i)]} \mathbf{w}_{(0)} \quad (3-6b)$$

其中 $\mathbf{w}_{(0)}$ 代表静态权向量, 即

$$\mathbf{w}_{(0)} = \mathbf{a}(\theta_0) \quad (3-7)$$

实际上, 上式中的 $\mathbf{w}_{(0)}$ 对应只存在白噪声时的最优权向量, 此时 $\sigma_i^2 = 0$, $\beta = 1$ 。

式(3-5)给出了最优权向量的等价表示形式, 从中可以看出, \mathbf{w}_* 是一组正交向量 $\mathbf{w}_{(0)\perp}$ 和 $\mathbf{w}_{(0)\parallel}$ 的线性组合, 组合系数分别为 1 和 β 。通过设置参数 β , 可以在 θ_i 处形成零陷。实际上, β 与 θ_i 处的归一化响应电平存在一定的关系, 调节 β 可实现方向图电平调节的目的。

3.1.2 阵列方向图响应与 β 的关系

为了探索式(3-5)中的 β 如何影响 θ_i 处的电平, 我们首先将两个复向量 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 之间的角度表示为 $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in [0, \pi/2]$, 并定义

$$\cos(\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \triangleq \frac{|\mathbf{u}^H \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2} \quad (3-8)$$

同时, 定义权向量 \mathbf{w} 对应的归一化功率响应为

$$L(\theta, \theta_0) \triangleq \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)|^2}{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} \quad (3-9)$$

将式(3-5)中的 \mathbf{w}_* 带入到 $L(\theta_i, \theta_0)$ 中, 可以得到

$$L_*(\theta_i, \theta_0) = \frac{\|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2 \cdot \cos^2(\varphi(\mathbf{w}_*, \mathbf{a}(\theta_i)))}{\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2 \cdot \cos^2(\varphi(\mathbf{w}_*, \mathbf{a}(\theta_0)))} \quad (3-10)$$

可以看出, θ_i 处的响应依赖于 \mathbf{w}_* , $\mathbf{a}(\theta_i)$ 以及两者之间的夹角。而且, 根据式(3-5)可知, $L_*(\theta_i, \theta_0)$ 是待确定参数 β 的函数。

图3-1为 \mathbf{w}_\star 以及各分量的几何示意图，其中 φ_i 和 φ_0 定义为

$$\varphi_i \triangleq \varphi(\mathbf{w}_\star, \mathbf{a}(\theta_i)) = \varphi(\mathbf{w}_{(0)\perp} + \beta \mathbf{w}_{(0)\parallel}, \mathbf{a}(\theta_i)) \quad (3-11a)$$

$$\varphi_0 \triangleq \varphi(\mathbf{w}_\star, \mathbf{a}(\theta_0)) = \varphi(\mathbf{w}_{(0)\perp} + \beta \mathbf{w}_{(0)\parallel}, \mathbf{a}(\theta_0)) \quad (3-11b)$$

从图中可以看出， $\mathbf{w}_{(0)\parallel}$ 是将向量 $\mathbf{w}_{(0)}$ 向 $\mathbf{a}(\theta_i)$ 方向正交投影得到的分量， $\mathbf{w}_{(0)\perp}$ 是向量 $\mathbf{w}_{(0)}$ 向子空间 $\mathcal{R}^\perp(\mathbf{a}(\theta_i))$ 进行正交投影得到的分量。而且， φ_i 和 φ_0 随着 β 的改变而改变。例如，如果 $\beta = 1$ ，可以得到 $\varphi_0 = 0$ ， $\varphi_i = \varphi_q$ ，其中 φ_q 表示 \mathbf{w}_0 与 $\mathbf{a}(\theta_i)$ 之间的夹角，即 $\varphi_q \triangleq \varphi(\mathbf{w}_0, \mathbf{a}(\theta_i))$ 。此时我们有 $\mathbf{w}_\star = \mathbf{w}_0$ ，并可以得到

$$L_\star(\theta_i, \theta_0) \Big|_{\beta=1} = \frac{|\mathbf{w}_0^H \mathbf{a}(\theta_i)|^2}{|\mathbf{w}_0^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} \triangleq L_q \quad (3-12)$$

其中 L_q 表示 θ_i 处的静态功率方向图响应。

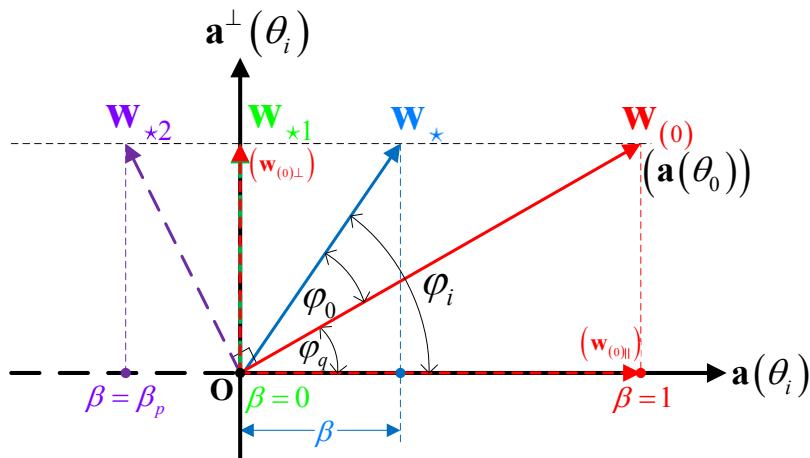


图 3-1 权向量正交分解示意图

当尝试从取值1减小 β 的值，可以看出 φ_i 和 φ_0 同时增加。特别地，当 $\beta = 0$ 时， φ_i 达到其最大值 $\pi/2$ ，相应的最优权向量（如图3-1中 $\mathbf{w}_{\star 1}$ 所示）与 $\mathbf{a}(\theta_i)$ 正交，因此有

$$L_\star(\theta_i, \theta_0) \Big|_{\beta=0} = 0 \quad (3-13)$$

此时 θ_i 处将会形成零陷。

下面考虑 $\beta < 0$ 时的情况。图3-1中的 $\mathbf{w}_{\star 2}$ 给出了一种特例，此时 $\mathbf{w}_{\star 2}$ 与 $\mathbf{a}(\theta_0)$ 垂直，可以得到 $\beta = \beta_p < 0$ 。由 $|\beta_p| \cdot \|\mathbf{w}_{(0)\parallel}\|_2 / \|\mathbf{w}_{(0)\perp}\|_2 = \|\mathbf{w}_{(0)\perp}\|_2 / \|\mathbf{w}_{(0)\parallel}\|_2$ 可以推出 $\beta_p = -\|\mathbf{w}_{(0)\perp}\|_2^2 / \|\mathbf{w}_{(0)\parallel}\|_2^2$ 。不难验证 $\mathbf{w}_\star^H \mathbf{a}(\theta_0) = (\mathbf{w}_{(0)\perp} + \beta_p \mathbf{w}_{(0)\parallel})^H (\mathbf{w}_{(0)\perp} + \mathbf{w}_{(0)\parallel}) = 0$ 。因此，我们得到

$$L_\star(\theta_i, \theta_0) \Big|_{\beta=\beta_p} = +\infty \quad (3-14)$$

除了上述两种情况下，我们下面考虑 β 趋于 $+\infty$ 和 $-\infty$ 的情况。从图3-1可以看出， $\beta \rightarrow \pm\infty$ 时， $\varphi_i = 0$, $\varphi_0 = \varphi_q$ 。将 $\varphi_i = 0$ 和 $\varphi_0 = \varphi_q$ 代入式(3-10)，可以得到

$$L_{\star}(\theta_i, \theta_0) \Big|_{\beta \rightarrow \pm\infty} = \frac{\|\mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2}{L_q \|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2} \triangleq L_{\infty} \quad (3-15)$$

表3-1总结了上述考虑的四种情况。

表 3-1 β 取不同值时各参数对比

β	φ_0	φ_i	$L_{\star}(\theta_i, \theta_0)$
1	0	φ_q	L_q
0	$\text{atan}(-1/\beta_p)$	$\pi/2$	0
β_p	$\pi/2$	$\pi/2 - \varphi_q$	$+\infty$
$\pm\infty$	φ_q	0	L_{∞}

为了进一步探索 $L_{\star}(\theta_i, \theta_0)$ 关于 β 的变化特性，下面考虑的 $L_{\star}(\theta_i, \theta_0)$ 的单调性问题。数学推导（详见附录B.1）表明，如果 $\mathbf{a}^H(\theta_0)\mathbf{a}(\theta_i) \neq 0$ 成立，则有

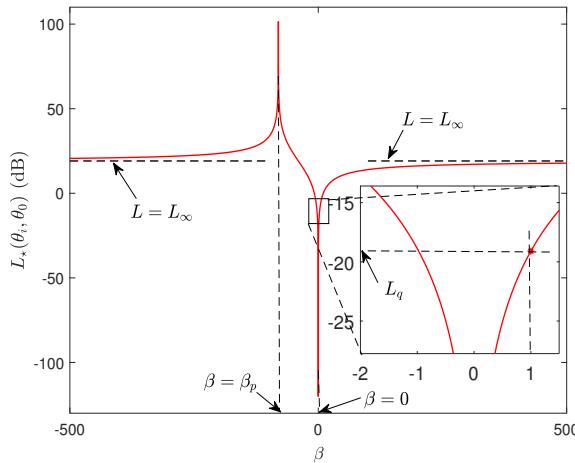
$$\frac{\partial L_{\star}(\theta_i, \theta_0)}{\partial \beta} \begin{cases} > 0, & \beta \in (-\infty, \beta_p) \cup (0, +\infty) \\ < 0, & \beta \in (\beta_p, 0) \end{cases} \quad (3-16)$$

上述结论表明， $L_{\star}(\theta_i, \theta_0)$ 在区间 $(-\infty, \beta_p)$ 或 $(0, +\infty)$ 内单调递增，在区间 $(\beta_p, 0)$ 内单调递减。由前文讨论可知，当 $\beta = \beta_p$ 时，归一化响应电平 $L_{\star}(\theta_i, \theta_0)$ 趋于无穷，而当 $\beta = 0$ 时，该值降为零。这表明，通过在实数范围内调节 β ， $L_{\star}(\theta_i, \theta_0)$ 可以取得任意非负值。

为了验证上述结果，下面使用 $N = 10$ 全向阵元的等距线阵（阵元间距为半波长）进行说明。我们取 $\theta_0 = 0^\circ$, $\theta_i = 45^\circ$ 。图3-2描绘了 $L_{\star}(\theta_i, \theta_0)$ 随 β 的变化曲线。可以计算出 $L_q = -19.1$ dB, $L_{\infty} = 19.1$ dB, $\beta_p = -80.3$ 。从图3-2可以看出，当 β 趋于无穷时， $L_{\star}(\theta_i, \theta_0)$ 趋于 L_{∞} 。当 $\beta = \beta_p$ 时，曲线形成峰值，此时 $L_{\star}(\theta_i, \theta_0)$ 为正无穷。而且，从图3-2可以看出，当 $\beta = 0$ 时 $L_{\star}(\theta_i, \theta_0)$ 取得最小值，而当 $\beta = 1$ 时， $L_{\star}(\theta_i, \theta_0) = L_q$ 。除此之外，图3-2所示的 $L_{\star}(\theta_i, \theta_0)$ 的单调性与前文相符。

需要指出的是，上述结果在 $\mathbf{w}_{\text{pre}} = \mathbf{a}(\theta_0)$ 才成立。此时可以通过在实数范围内调节 β 达到任意调节（0到正无穷范围内） θ_i 处方向图电平的目的。然而，由下文讨论可知，当 \mathbf{w}_{pre} 不为 $\mathbf{a}(\theta_0)$ ，无法实现 θ_i 处任意电平的调节。考虑实际应用中，任意角度的电平应该满足

$$0 \leq L(\theta, \theta_0) \leq 1 \quad (3-17)$$

图 3-2 $L_*(\theta, \theta_0)$ 随 β 变化曲线

下文讨论中，将在上述条件下进行讨论。

3.1.3 基于WORD算法的方向图控制

这一节中，我们使用WORD算法对方向图进行控制。根据式(3-5)，可以看出 \mathbf{w}_* 是在 \mathbf{w}_0 的基础上进行更新（使用参数 β ）得到的。因此可以将 \mathbf{w}_* 和 \mathbf{w}_0 分别视为当前权向量和之前的权向量。基于这种思想，给定某个已有的权向量 $\mathbf{w}_{(k-1)}$ ，将某个方向 θ_k 处的电平调节至某电平值（如 ρ_k ）的期望权向量 $\mathbf{w}_{(k)}$ 可以由下式更新得到

$$\mathbf{w}_{(k)} = [\mathbf{w}_{(k-1)\perp} \quad \mathbf{w}_{(k-1)\parallel}] \begin{bmatrix} 1 & \beta \end{bmatrix}^T \quad (3-18)$$

其中 $\mathbf{w}_{(k-1)\perp}$ 和 $\mathbf{w}_{(k-1)\parallel}$ 根据式(3-6)中定义推广得到，两者满足

$$\mathbf{w}_{(k-1)\perp} = \mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\theta_k)]}^\perp \mathbf{w}_{(k-1)} \quad (3-19a)$$

$$\mathbf{w}_{(k-1)\parallel} = \mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\theta_k)]} \mathbf{w}_{(k-1)} \quad (3-19b)$$

式(3-18)中的 β 可以由下式计算得到

$$L_{(k)}(\theta_k, \theta_0) = \frac{|\mathbf{w}_{(k)}^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2}{|\mathbf{w}_{(k)}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} = \rho_k \quad (3-20)$$

为了解上述关于 β 的问题，我们首先将式(3-18)代入到式(3-20)的分子分母中，得到

$$|\mathbf{w}_{(k)}^H \mathbf{a}(\theta_\tau)|^2 = \begin{bmatrix} 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_\tau) \\ \mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_\tau) \\ \mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_\tau) \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

其中 $\tau \in \{0, k\}$, $\mathbf{w}_\perp \triangleq \mathbf{w}_{(k-1)\perp}$, $\mathbf{w}_\parallel \triangleq \mathbf{w}_{(k-1)\parallel}$ 。

经过一些操作运算，问题(3-20)可以重新表示为

$$\mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z} = 0 \quad (3-22)$$

其中 $\mathbf{z} \triangleq [1 \ \beta]^T$, \mathbf{B} 为如下的 2×2 维复共轭对称矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_k) \\ \mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_k) \\ \mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k) \end{bmatrix}^H - \rho_k \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0) \\ \mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0) \\ \mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0) \end{bmatrix}^H \\ &= \begin{bmatrix} -\rho_k |\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 & -\rho_k \mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_\parallel \\ -\rho_k \mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_\perp & |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 - \rho_k |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-23)$$

上式中，我们使用了等式 $\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_k) = 0$ 。

实际上，如果 $0 \leq \rho_k \leq 1$, 且 $\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k) > |\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_0)|$, 则式(3-22)有下面两个解

$$\beta_a = \frac{-\Re(\mathbf{B}(1,2)) + d}{\mathbf{B}(2,2)} \quad (3-24a)$$

$$\beta_b = \frac{-\Re(\mathbf{B}(1,2)) - d}{\mathbf{B}(2,2)} \quad (3-24b)$$

其中 $d = \sqrt{\Re^2(\mathbf{B}(1,2)) - \mathbf{B}(1,1)\mathbf{B}(2,2)}$ 。式(3-24)的推导见附录B.2。

3.1.4 β 的选择

由上节分析可知，式(3-24)中的 β_a 和 β_b 均可以将 θ_k 方向的电平调节为期望电平 ρ_k 。为此，需要从中选择一个合适的 β 使得方向图可以被更好地控制。理想情况下，相邻两次方向图控制的响应变化应该较小。两次迭代间的方向图变化可以由下式衡量：

$$\begin{aligned} F(\beta) &= \left\| \mathbf{P}_{[\mathbf{w}_{(k-1)}]}^\perp \frac{\mathbf{w}(k)}{\|\mathbf{w}(k)\|_2} \right\|_2^2 \\ &= \left\| \mathbf{P}_{[\mathbf{w}_{(k-1)}]}^\perp \frac{\mathbf{w}_{(k-1)\perp} + \beta \mathbf{w}_{(k-1)\parallel}}{\sqrt{\|\mathbf{w}_{(k-1)\perp}\|_2^2 + \beta^2 \|\mathbf{w}_{(k-1)\parallel}\|_2^2}} \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (3-25)$$

所以，可以从 β_a 和 β_b 选择使 $F(\beta)$ 取值较小的参数。记 β_\star 为最终的 β 选取值，则权向量 $\mathbf{w}(k)$ 可以由下式进行计算

$$\mathbf{w}(k) = [\mathbf{w}_{(k-1)\perp} \ \mathbf{w}_{(k-1)\parallel}] [1 \ \beta_\star]^T \quad (3-26)$$

从上述分析可以看出，WORD 算法的参数选取与 A²RC 算法不同。WORD 算法的参数备选值为实数，且最后参数的确定过程简单。

3.1.5 基于WORD的方向图综合

由上分析可知，WORD算法只能对单个点进行精确控制。类似于应用A²RC实现方向图综合，通过迭代应用WORD算法也可以实现方向图综合。具体描述可参考2.2.5节基于A²RC的方向图综合。

3.1.6 实验仿真

本节对WORD算法及在方向图综合中的应用进行仿真，如无特别说明，均取初始权向量 $\mathbf{w}_{(0)}$ 为静态权向量 $\mathbf{a}(\theta_0)$ 。为了进行实验对比，同时测试A²RC方法^[137]，以及文献[43]或[45]中的优化类方法。具体来讲，如果对期望方向图没有下限约束，则对比文献[43]中的凸优化方法。否则，当问题非凸时，对比文献[45]中的半正定松弛方法(SemiDefinite Relaxation, SDR)。

3.1.6.1 等距线阵方向图响应控制仿真

本例中采用16阵元等距线阵结构，各阵元各向同性，波束中心指向 $\theta_0 = 20^\circ$ 。为了说明WORD算法的灵活性，取初始权向量 $\mathbf{w}_{(0)}$ 为具有-25dB等电平旁瓣衰落的切比雪夫权。在此基础上，依次调节 $\theta_1 = -10^\circ$ 和 $\theta_2 = 17^\circ$ 方向的电平为0dB，同时对比A²RC算法和WORD算法的性能。除此之外，为了测量式(2-51)中的函数J，对区间 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 每隔0.1°进行采样，得到1801个采样点。

第一步控制过程中，可以计算得到 $\beta_a = 27.1619$, $\beta_b = -25.4210$, $F(\beta_a) = 0.4590$, $F(\beta_b) = 0.4988$ 。由于 $F(\beta_a) < F(\beta_b)$ ，所以WORD算法选取 β_a 来计算最终的权向量。计算式(2-51)中的函数J可以得到 $J(\beta_a) = 0.0479 < J(\beta_b) = 0.0488$ ，这与 $F(\beta_a)$ 和 $F(\beta_b)$ 之间的大小关系一致。对于A²RC算法，可以计算得到 $\mu_a = 0.6515 - j0.2880$ 。有趣的是，此时可验证WORD方法和A²RC方法得到相同的权向量 $\mathbf{w}_{(1)}$ 。图3-3给出了两种方法最终得到的方向图，从中可以发现WORD算法和A²RC算法的方向图重合且无畸变，两者均实现了 $L_{(1)}(\theta_1, \theta_0) = 0$ dB。

在第一步方向图控制的基础上，下面来实现 $L_{(2)}(\theta_2, \theta_0) = 0$ dB。可以计算得到 $\beta_a = 2.5907$, $\beta_b = -0.3520$, $F(\beta_a) = 0.1959$, $F(\beta_b) = 0.4553$ 。由于 $F(\beta_a) < F(\beta_b)$ ，此时WORD算法选取 β_a 来计算最终的权向量。计算式(2-51)中J可以得到 $J(\beta_a) = 0.0551 < J(\beta_b) = 0.9392$ ，与 $F(\beta_a) < F(\beta_b)$ 一致。另一方面，A²RC方法计算得到 $\mu_a = -0.2827 - j0.6668$, $\phi_a = 4.3114$ （定义见文献[137]的公式(51)）。为了说明 μ_a 选取的不合理性，图3-4给出了J随 ϕ （见文献[137]的公式(40)）的变化曲线。从图中可以发现，J在 $\phi = \phi_a$ 时达到最大值。图3-5对比了两种算法最终的方向图结果，可以看出两种方法均实现了精确的电平控制。然而，由于A²RC方法参

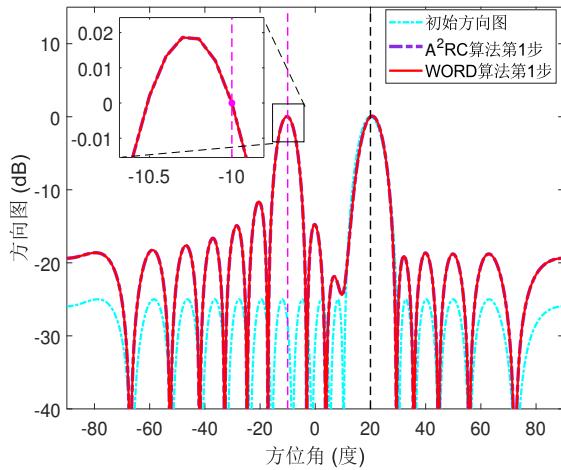
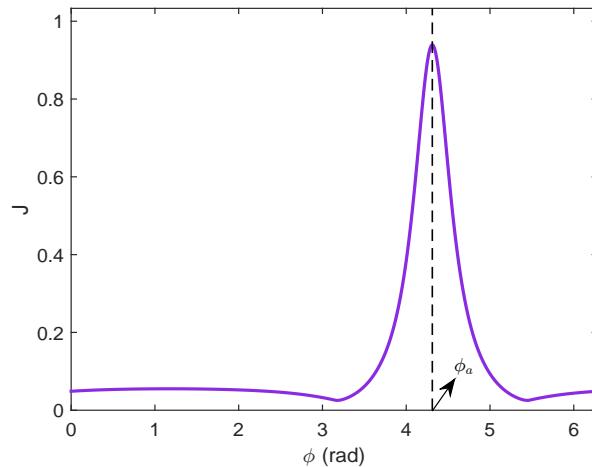


图 3-3 第一步方向图控制结果

数选取的缺陷，其最终的方向图已经发生畸变。对于WORD方法，由于参数选取的合理性，其最终得到的方向图优于A²RC算法。

图 3-4 J 随 ϕ 的变化曲线

3.1.6.2 非等距线性阵列多波束方向图综合

本例中利用WORD算法对16阵元非等距线性阵列进行多波束方向图综合，各阵元位置取值见表3-2。考虑两波束，波束指向分别为30°和−10°。取初始权向量为 $a(30^\circ)$ ，之后应用WORD算法将−10°方向的归一化电平调节为0dB。在此基础上，利用WORD算法将旁瓣电平调节至低于−25dB水平。经过50步迭代，可以得到满意的两波束方向图结果，最终的权向量取值见表3-2。

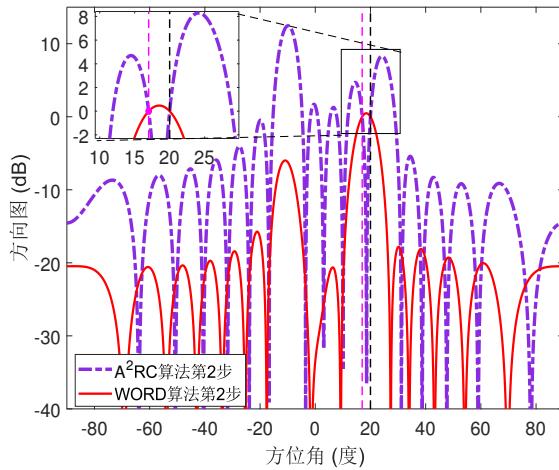


图 3-5 第二步方向图控制结果

表 3-2 非等距线阵阵元位置及得到的权向量结果

n	$x_n(\lambda)$	w_n	n	$x_n(\lambda)$	w_n
1	0.00	$0.3729e^{+j0.0629}$	9	3.99	$0.5389e^{+j1.0138}$
2	0.47	$0.2710e^{+j0.4647}$	10	4.48	$0.9496e^{+j1.4446}$
3	1.01	$0.1708e^{-j2.1372}$	11	4.96	$0.4097e^{+j2.0121}$
4	1.47	$0.6945e^{-j1.6171}$	12	5.43	$0.4452e^{-j0.6784}$
5	1.97	$0.5003e^{-j1.0681}$	13	5.94	$0.7115e^{-j0.1635}$
6	2.54	$0.5006e^{+j2.6699}$	14	6.49	$0.1974e^{+j0.2931}$
7	3.06	$1.0000e^{+j3.1288}$	15	6.98	$0.3151e^{-j2.3056}$
8	3.53	$0.3728e^{-j2.5715}$	16	7.46	$0.3057e^{-j1.7021}$

图3-6对比了WORD算法， A^2RC 算法，以及凸优化算法最终得到的方向图结果。从图中可以看出，WORD算法在旁瓣和主瓣区域均得到满意的方向图结果。 A^2RC 方法由于参数确定依赖于经验，其方向图显得不规则。

3.1.6.3 等距线阵平顶方向图综合

参照文献[45]的例子，这里使用20阵元等距线阵（阵元间距为0.45波长）进行仿真，且期望方向图具有平顶主瓣。具体来讲，主瓣区域 $[-40^\circ, 40^\circ]$ 的期望电平为 0dB，所有旁瓣的电平上限均为 -25 dB。图3-7给出了初始方向图和各算法得到的方向图。由图中可以看出，WORD算法和半正定松弛方法均可以得到满意的方

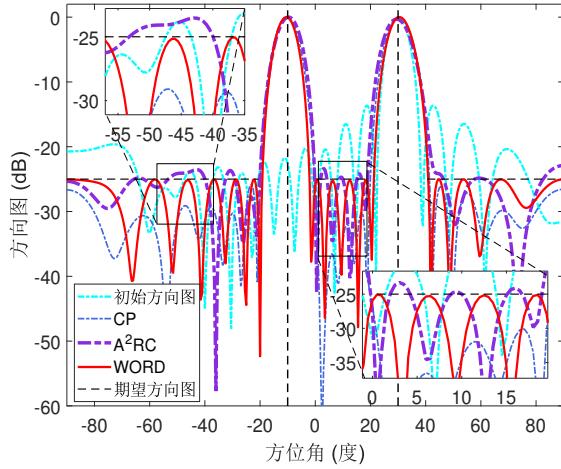


图 3-6 非等距线阵多波束方向图结果

向图结果。然而，实验发现，半正定松弛方法的执行时间约为1分钟，时长远多于WORD算法（执行时间短于1秒）。

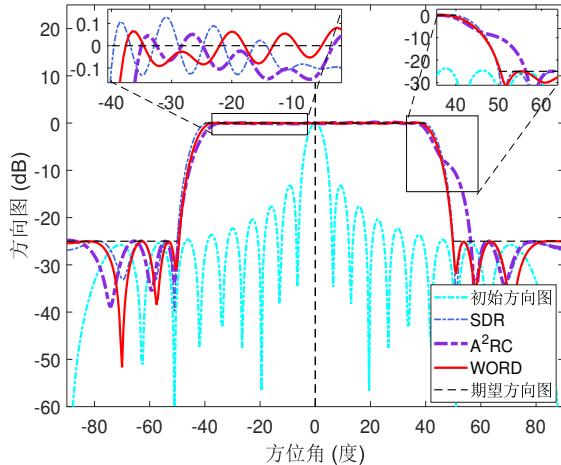


图 3-7 等距线阵平顶方向图结果

3.1.6.4 二维阵列方向图综合

为了说明WORD算法的广泛适用性，下面考虑二维阵列的方向图综合。不失一般性，这里使用 16×16 各向同性矩形阵列，相邻阵元间距为半波长。图3-8给出了期望方向图，其中 $u = \sin(\theta_e)\cos(\theta_a)$, $v = \sin(\theta_e)\sin(\theta_a)$ θ_e 和 θ_a 分别代表俯仰角和方位角。期望方向图主瓣指向 $(u_0, v_0) = (0.3, 0.3)$ ，主瓣区域为 $\Theta_M = \{(u, v) | |u - u_0| + |v - v_0| \leq 0.3\}$ 。旁瓣区域 $\Theta_S = \{(u, v) | -0.8 \leq u \leq -0.5\}$ 的电平上限为 -35 dB，其余旁瓣区域电平上限为 -15 dB。

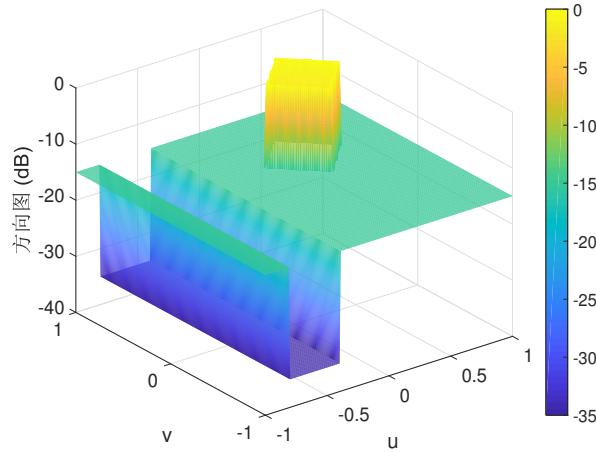
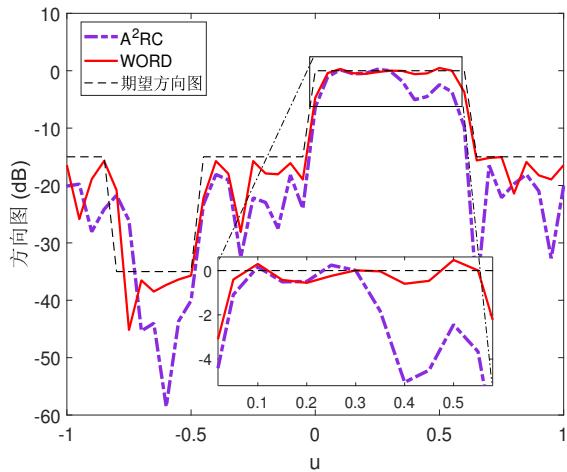


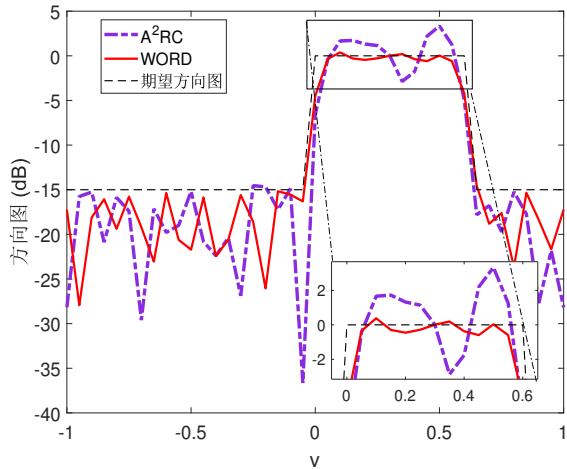
图 3-8 二维期望方向图

图3-9 展示了 $v = v_0$ 时 u 维切面方向图，图3-10 为 $u = u_0$ 时的 v 维切面方向图。由上述两图可以发现，WORD方法性能明显优于A²RC方法。另外，由于半正定松弛方法在上述场景下运算量极大，所以这里没有展示其结果。

图 3-9 $v = v_0$ 时的 u 维切面方向图

3.2 C²-WORD算法与稳健C²-WORD算法

上节介绍了一种WORD算法，可以对任意阵列方向图进行精确电平控制。需要注意的，WORD算法对阵列误差敏感。当存在阵列误差时，WORD算法无法进行精确方向图电平控制。为此，本节首先将WORD算法扩展到复数域，在此基础上提出一种稳健的方向图电平控制算法。

图 3-10 $u = u_0$ 时的 v 维切面方向图

3.2.1 C²-WORD算法

下面通过对权向量正交分解算法WORD进行改进，介绍一种复系数的权向量正交分解算法C²-WORD。

3.2.1.1 C²-WORD

介绍C²-WORD之前，先介绍下面引理。

引理 3.2.1 对于 $\forall \beta_k \in \mathbb{R}$ 和式(3-18)中相应的权向量 \mathbf{w}_k ，一定存在 $\tilde{\beta}_k \in \mathbb{C}$ 下面权向量 $\tilde{\mathbf{w}}_k$

$$\tilde{\mathbf{w}}_k = [\mathbf{w}_{\perp} \quad \mathbf{w}_{\parallel}] [1 \quad \tilde{\beta}_k]^T \quad (3-27)$$

使得

$$L_k(\theta_k, \theta_0)|_{\mathbf{w}=\tilde{\mathbf{w}}_k} = L_k(\theta_k, \theta_0)|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_k} \quad (3-28)$$

而且， $\tilde{\beta}_k$ 为非平凡的复数，即通常有 $\tilde{\beta}_k \notin \mathbb{R}$ 。

证明 见附录B.3。 ■

引理3.2.1表明一定存在复数 $\tilde{\beta}_k$ 可以与实值的 β_k 在 θ_k 处获得相同的电平响应。因此，在WORD算法中考虑复数的 β_k 更具合理性。这将引出下文的复系数权向量正交分解算法（C²-WORD算法）。

具体来讲，对于给定的权向量 \mathbf{w}_{k-1} ，为了将 θ_k 的电平调节到期望电平 ρ_k ，我们提出如下权向量更新表达式

$$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp & \mathbf{w}_\parallel \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_k \end{bmatrix}^T, \quad \beta_k \in \mathbb{C} \quad (3-29)$$

其中 \mathbf{w}_k 为新的权向量。尽管使用了相同的符号，但与式(3-18)中WORD算法的权向量更新形式不同，式(3-29)中的 β_k 可以取为复数。

为了实现 θ_k 处的电平控制要求，即

$$L_k(\theta_k, \theta_0) = \rho_k \quad (3-30)$$

下面首先找出式(3-29)中所有可能的 β_k 。为此，我们将(3-29)代入式(3-30)中，得到 $\mathbf{z}_k^H \mathbf{B}_k \mathbf{z}_k = 0$ ，其中 $\mathbf{z}_k \triangleq [1 \ \beta_k]^T$ ， \mathbf{B}_k 为 2×2 复共轭对称矩阵，其表达式见(B-82)。经过计算，可以得到 β_k 的几何分布，如下面定义所述。

定理 3.2.1 假设 β_k 是式(3-29)和(3-30)的解，则 β_k 的轨迹是圆 C_{β_k} ：

$$C_{\beta_k} = \left\{ \beta_k \mid \|[\Re(\beta_k), \Im(\beta_k)]^T - \mathbf{c}_{\beta_k}\|_2 = R_{\beta_k} \right\} \quad (3-31)$$

其中圆心为

$$\mathbf{c}_{\beta_k} = \frac{1}{\mathbf{B}_k(2, 2)} \begin{bmatrix} -\Re(\mathbf{B}_k(1, 2)) \\ \Im(\mathbf{B}_k(1, 2)) \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

半径为

$$R_{\beta_k} = \sqrt{-\det(\mathbf{B}_k)} / |\mathbf{B}_k(2, 2)| \quad (3-33)$$

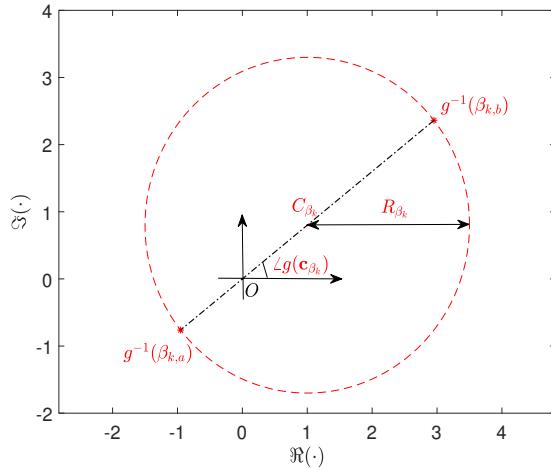
证明 类似定理2.2.2证明。 ■

图3-11更直观地描绘了 β_k 分布。容易看出，WORD算法从 C_{β_k} 中的实元素中选取 β_k 。对于 C^2 -WORD算法，我们将 β_k 可行集扩展到复数域。由于可行集的扩大，将有可能得到更合理的 β_k 。

实际上，定理3.2.1建立在 $\mathbf{B}_k(2, 2) \neq 0$ 的基础上。不难发现， $\mathbf{B}_k(2, 2) \neq 0$ 等价于 $\rho_k |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \neq |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2$ ，或者更简洁地， $\rho_k |\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \neq |\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k)|^2$ 。事实上，如果 $\rho_k |\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_0)|^2 = |\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k)|^2$ ，可以得到

$$\rho_k = |\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k)|^2 / |\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \triangleq \tilde{\rho}_k \quad (3-34)$$

不难发现，如果设置 $\rho_k \in [0, 1]$ ，通常有 $\rho_k \neq \tilde{\rho}_k$ 或者等价地 $\mathbf{B}_k(2, 2) \neq 0$ 。


 图 3-11 β_k 几何分布示意图

3.2.1.2 β_k 的选取

由定理3.2.1可以看出，存在无穷多个复值的 β_k 可以将 θ_k 方向的电平调节为 ρ_k 。鉴于此，需要选取最优的 $\beta_{k,*}$ 来实现阵列响应控制任务(3-30)。

本文中，我们通过最大化白噪声增益^[10, 138, 139]来优化参数 β_k 。白噪声增益 G 定义为

$$G(\mathbf{w}) \triangleq \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{\|\mathbf{w}\|_2^2} \quad (3-35)$$

上述白噪声增益衡量了信噪比的提高程度，其等于白噪声背景下输出信噪比与输入信噪比的比值。结合式(3-29)和定理3.2.1，我们建立如下约束问题来求解最终的 $\beta_{k,*}$ ：

$$\max_{\beta_k} G(\mathbf{w}_k) = \frac{|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{\|\mathbf{w}_k\|_2^2} \quad (3-36a)$$

$$\text{subject to } \mathbf{w}_k = [\mathbf{w}_\perp \ \mathbf{w}_\parallel] \begin{bmatrix} 1 & \beta_k \end{bmatrix}^T \quad (3-36b)$$

$$\beta_k \in \mathbb{C}_{\beta_k} \quad (3-36c)$$

其中 \mathbb{C}_{β_k} 的定义见(3-31)。尽管上述问题(3-36)非凸，其最优解可以解析得到，如下定理所述。

定理 3.2.2 问题(3-36)的最优解 $\beta_{k,*}$ 满足

$$\beta_{k,*} = \beta_{k,l} \triangleq \arg \max_{\beta_k \in \mathbb{C}_{\beta_k}} |\beta_k| = (|\mathbf{c}_{\beta_k}| + R_{\beta_k}) e^{j\angle g(\mathbf{c}_{\beta_k})} \quad (3-37)$$

其中 $g(\cdot)$ 满足 $g(\mathbf{c}) = \mathbf{c}(1) + j\mathbf{c}(2)$ ， \mathbf{c} 为输入向量。

证明 见附录B.4。 ■

由定理3.2.2可知最优的 $\beta_{k,*}$ 具有最大模值，如图3-11中的 $g^{-1}(\beta_{k,l})$ 所示。得到最优 $\beta_{k,*}$ 之后，可以将C²-WORD的权向量更新表示为

$$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp & \mathbf{w}_\parallel \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_{k,*} \end{bmatrix}^T \quad (3-38)$$

此外，式(3-38)中的 \mathbf{w}_k 满足下面性质，如定理3.2.3所描述。

定理 3.2.3 如取 $\mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{a}(\theta_0)$ ，且假设 $\mathbf{a}^H(\theta_k)\mathbf{a}(\theta_0) \neq 0$ ，则式(3-38)中的权向量 \mathbf{w}_k 是下面问题的最优解

$$\max_{\mathbf{w} \in \mathbb{C}^N} G(\mathbf{w}) \quad (3-39a)$$

$$\text{subject to } |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 / |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 = \rho_k \quad (3-39b)$$

证明 见附录B.5。 ■

注意在问题3-39中没有施加权向量正交分解约束（即约束(3-36b)）。由于 $\beta_{k,*}$ 可能为复数，定理3.2.3的结论对于传统的WORD可能并不成立。最终，C²-WORD算法的总结见算法10。

3.2.2 C²-WORD与A²RC的关系

上节中对WORD算法进行了扩展，提出复加权系数的C²-WORD算法。相比于WORD算法，C²-WORD扩大了参数 β 的寻优区间，因此会得到更满意的性能。下面讨论C²-WORD与A²RC的关系。

首先，我们将C²-WORD算法的权向量更新（即式(3-29)）表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp & \mathbf{w}_\parallel \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_k \end{bmatrix}^T \\ &= \mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\theta_k)]}^\perp \mathbf{w}_{k-1} + \beta_k \mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\theta_k)]} \mathbf{w}_{k-1} \\ &= \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{a}(\theta_k)\mathbf{a}^H(\theta_k)}{\mathbf{a}^H(\theta_k)\mathbf{a}(\theta_k)} \right) \mathbf{w}_{k-1} + \frac{\beta_k \mathbf{a}(\theta_k)\mathbf{a}^H(\theta_k)}{\mathbf{a}^H(\theta_k)\mathbf{a}(\theta_k)} \mathbf{w}_{k-1} \\ &= \mathbf{w}_{k-1} + T(\beta_k) \cdot \mathbf{a}(\theta_k) \end{aligned} \quad (3-40)$$

其中变换 $T(\beta_k)$ 定义为

$$T(\beta_k) \triangleq \frac{(\beta_k - 1)\mathbf{a}^H(\theta_k)\mathbf{w}_{k-1}}{\mathbf{a}^H(\theta_k)\mathbf{a}(\theta_k)} \quad (3-41)$$

可以发现C²-WORD与A²RC具有类似的更新形式，只是参数选取方式不一样。此外，注意到子空间 $\mathcal{R}^\perp(\mathbf{a}(\theta_k))$ 中的分量不影响 θ_k 方向的输出，但是会影响其它非

算法 10 C²-WORD 算法

-
- 1: 输入: $\theta_0, k, \mathbf{w}_{k-1}, \theta_k$ 和 ρ_k 。
 - 2: 由(3-37)得到最优的 $\beta_{k,*}$ 。
 - 3: 得到式(3-38)中的权向量 \mathbf{w}_k 。
 - 4: 输出: 权向量 \mathbf{w}_k 。
-

控制点的电平响应。由式(3-40)可以看出, 在 \mathbf{w}_{k-1} 上的添加量不包含冗余成分。所带来的好处可能是在非控制区域产生小的方向图畸变。

事实上, 一一映射 $T(\cdot)$ 可以在 C²-WORD 算法的 β_k 与 A²RC 算法的 μ_k 之间相互转换。而且, 不难发现

$$\{T(\beta_k) | L(\theta_k, \theta_0) = \rho_k\} = \{T(\beta_k) | \beta_k \in \mathbb{C}_{\beta_k}\} = \mathbb{C}_{\mu_k} \quad (3-42)$$

除此之外, 某种条件下 C²-WORD 与 A²RC 将得到相同的结果。为了说明这点, 我们定义

$$\mu_{k,l} \triangleq \arg \max_{\mu_k \in \mathbb{C}_{\mu_k}} |\mu_k| \quad (3-43)$$

则可以得到下面定理。

定理 3.2.4 对于给定的 $\mathbf{w}_{k-1}, \theta_k$ 和 ρ_k , 我们有 $T(\beta_{k,*}) = \mu_{k,s} = \mu_{k,*}$ 当且仅当

$$\mathbf{c}_{\beta_k}(2) = 0, \quad \mathbf{c}_{\beta_k}(1) \in [0, 1] \quad (3-44)$$

其中 \mathbf{c}_{β_k} 的表达式见(3-32)。同时, $T(\beta_{k,*}) = \mu_{k,l}$ 当且仅当

$$\mathbf{c}_{\beta_k}(2) = 0, \quad \mathbf{c}_{\beta_k}(1) \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \quad (3-45)$$

此外, 如果 $T(\beta_{k,*}) \in \{\mu_{k,s}, \mu_{k,l}\}$, 则 $\beta_{k,*} \in \mathbb{R}$ 。

证明 见附录B.6。 ■

根据定理3.2.4, 如果式(3-44)满足, 则 C²-WORD 与 A²RC 得到相同的结果。否则, C²-WORD 将优于 A²RC (在白噪声增益方面)。而且, 一定条件下参数 $\mu_{k,l}$ (定义见(3-43)) 对应于 C²-WORD 中的 $\beta_{k,*}$, 但 A²RC 算法中不会选择 $\mu_{k,l}$ 。另外, 从定理3.2.4 可以发现如果 $\mathbf{c}_{\beta_k}(2) = 0$, 则 C²-WORD 可能与 WORD 得到相同的结果。定理3.2.4 总结了 C²-WORD 与 A²RC 等价的条件。然而, 仍然不确定两个算法在哪些具体场景下得到相同的结果。回答这个问题之前, 我们定义

$$\bar{\rho}_k \triangleq |\mathbf{a}^H(\theta_k)\mathbf{a}(\theta_k)|^2 / |\mathbf{a}^H(\theta_0)\mathbf{a}(\theta_0)|^2 = \|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^4 / \|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^4 \quad (3-46a)$$

$$\check{\rho}_k \triangleq |\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k)| / |\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{a}(\theta_k)| \quad (3-46b)$$

则可以得到定理3.2.4 的两个推论, 如下所述。

推论 3.2.1 如果取 $\mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{a}(\theta_0)$, 则对于 $\theta_k \neq \theta_0$ 和满足下式的 ρ_k

$$0 \leq \rho_k \leq \min \{\tilde{\rho}_k, \bar{\rho}_k\}, \quad \rho_k \neq \tilde{\rho}_k \quad (3-47)$$

我们有 $T(\beta_{k,*}) = \mu_{k,s} = \mu_{k,*}$ 。换言之, 上述情况下 C²-WORD 与 A²RC 得到相同的权向量 \mathbf{w}_k 。

证明 见附录B.7。 ■

由推论3.2.1可知, 如果取 $\mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{a}(\theta_0)$, 且 ρ_k 满足特定要求 (即式(3-47)), 则 C²-WORD 与 A²RC 得到相同的 \mathbf{w}_k 。注意到推论3.2.1对阵列形状没限制。

此外, 可以得到定理3.2.4的第二个推论。该推论与中心对称阵列^[140-142]有关。简言之, 如果各阵元对称分布且各对称的阵元对具有相同的特性, 则该阵列称为对称阵列。下面首先定义共轭中心对称向量集合 \mathbb{V}

$$\mathbb{V} \triangleq \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{N \times 1} \mid \mathbf{v}(i) = \mathbf{v}^*(N-i+1), \forall i = 1, \dots, N \right\} \quad (3-48)$$

对于中心对称阵列, 如果以对称中心为参考, 则阵列导向矢量为共轭中心对称向量, 即 $\mathbf{a}(\theta) \in \mathbb{V}$ 。基于此, 可以得到下面定理3.2.4的推论。

推论 3.2.2 考虑中心对称阵列, 如果 $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{V}$, 且对于 $k = 1, 2, \dots$ 均有

$$0 \leq \rho_k \leq \min \{\tilde{\rho}_k, \check{\rho}_k\}, \quad \rho_k \neq \tilde{\rho}_k \quad (3-49a)$$

$$\mathbf{w}_\perp^\text{H} \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^\text{H}(\theta_0) \mathbf{w}_\parallel \geq 0 \quad (3-49b)$$

则 C²-WORD 与 A²RC 获得相同的 \mathbf{w}_k , $k = 1, 2, \dots$, 即此时两个算法完全等价。

证明 见附录B.8。 ■

上述推论3.2.2 给出了 C²-WORD 与 A²RC 等价的一个特例。此时, A²RC 算法的参数选择也是最优的 (在最大化白噪声增益方面)。

通常可以得到 $\mathbf{a}^\text{H}(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k) > |\mathbf{a}^\text{H}(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_0)|$ 。则条件 $0 \leq \rho_k < \tilde{\rho}_k$ 可以保证只要 $0 \leq \rho_k \leq 1$ 。而且, 为了使条件 $0 \leq \rho_k \leq \check{\rho}_k$ 成立, 只要限制期望电平 ρ_k 低于 \mathbf{w}_{k-1} 对应的 θ_k 的电平, 即 $0 \leq \rho_k \leq |\mathbf{w}_{k-1}^\text{H} \mathbf{a}(\theta_k)| / |\mathbf{w}_{k-1}^\text{H} \mathbf{a}(\theta_0)| = L_{k-1}(\theta_k, \theta_0)$ 。一般情况下, $L_{k-1}(\theta_k, \theta_0)$ 不超过 1。因此, 条件(3-49a)容易满足只要 $0 \leq \rho_k \leq L_{k-1}(\theta_k, \theta_0)$ 。

3.2.3 稳健旁瓣控制问题描述

上节中的C²-WORD算法在不存在导向矢量误差时可以精确控制某方向的电平响应。为了实现阵列导向矢量存在误差时的阵列响应控制，下面对稳健旁瓣控制问题进行描述。为了便于后文推导，首先定义归一化幅度响应

$$V_a(\theta) = |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)| / |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)| \quad (3-50)$$

需要注意，上述的 $V_a(\theta)$ 与前文的归一化功率响应 $L(\theta, \theta_0)$ 不同，两者满足 $V_a^2(\theta) = L(\theta, \theta_0)$ 。

式(3-50)中的 $V_a(\theta)$ 描述了不存在阵列误差时的阵列幅度响应。实际中，导向矢量一般会受到天线阵列的影响而存在各种误差，如幅相误差、阵元位置误差、天线互耦等。考虑误差后，实际的导向矢量 $\mathbf{b}(\theta)$ 可以表示为

$$\mathbf{b}(\theta) = \mathbf{a}(\theta) + \Delta(\theta) \quad (3-51)$$

其中 $\Delta(\theta)$ 代表未知的导向矢量扰动，其值可能依赖于角度 θ 。实际的归一化幅度响应（记为 $V_b(\theta)$ ）可以表示为

$$V_b(\theta) = |\mathbf{w}^H \mathbf{b}(\theta)| / |\mathbf{w}^H \mathbf{b}(\theta_0)| \quad (3-52)$$

显然， $V_b(\theta)$ 通常与 $V_a(\theta)$ 不同。注意到在式(3-52)中，仍然使用 θ_0 方向的输出作为归一化因子，尽管实际的波束中心可能会因为导向矢量误差的影响而偏离理想的 θ_0 。稳健旁瓣控制中，我们考虑在旁瓣区域内如何使得实际的幅度响应 $V_b(\theta)$ 低于某特定电平值。

3.2.4 阵列波束响应的界限分析

下面首先对实际的幅度波束响应 $V_b(\theta)$ 进行界限分析。为此，我们合理地假设扰动向量 $\Delta(\theta)$ 的范数满足

$$\|\Delta(\theta)\|_2 \leq \varepsilon(\theta) \quad (3-53)$$

其中 $\varepsilon(\theta)$ 为 $\Delta(\theta)$ 的范数上限，其值已知。则根据三角不等式可以得到

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}^H \mathbf{b}(\theta)| &= |\mathbf{w}^H (\mathbf{a}(\theta) + \Delta(\theta))| \\ &\leq |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)| + |\mathbf{w}^H \Delta(\theta)| \\ &\leq |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)| + \|\mathbf{w}\|_2 \cdot \|\Delta(\theta)\|_2 \\ &\leq |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)| + \varepsilon(\theta) \|\mathbf{w}\|_2 \end{aligned} \quad (3-54)$$

类似地,

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{w}^H \mathbf{b}(\theta)| &= |\mathbf{w}^H (\mathbf{a}(\theta) + \Delta(\theta))| \\
 &\geq |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)| - |\mathbf{w}^H \Delta(\theta)| \\
 &\geq |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)| - \|\mathbf{w}\|_2 \cdot \|\Delta(\theta)\|_2 \\
 &\geq |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)| - \varepsilon(\theta) \|\mathbf{w}\|_2
 \end{aligned} \tag{3-55}$$

结合式(3-54)和(3-55), 不难得到

$$\begin{aligned}
 V_b(\theta) &= \frac{|\mathbf{w}^H (\mathbf{a}(\theta) + \Delta(\theta))|}{|\mathbf{w}^H (\mathbf{a}(\theta_0) + \Delta(\theta_0))|} \\
 &\leq \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)| + \varepsilon(\theta) \|\mathbf{w}\|_2}{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)| - \varepsilon(\theta_0) \|\mathbf{w}\|_2} \\
 &= \frac{V_a(\theta) + \varepsilon(\theta) \cdot \|\mathbf{w}\|_2 / |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|}{1 - \varepsilon(\theta_0) \cdot \|\mathbf{w}\|_2 / |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|} \\
 &\triangleq V_u(\theta)
 \end{aligned} \tag{3-56}$$

以及

$$\begin{aligned}
 V_b(\theta) &\geq \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)| - \varepsilon(\theta) \|\mathbf{w}\|_2}{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)| + \varepsilon(\theta_0) \|\mathbf{w}\|_2} \\
 &= \frac{V_a(\theta) - \varepsilon(\theta) \cdot \|\mathbf{w}\|_2 / |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|}{1 + \varepsilon(\theta_0) \cdot \|\mathbf{w}\|_2 / |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|} \\
 &\triangleq V_l(\theta)
 \end{aligned} \tag{3-57}$$

综合式(3-56)和(3-57), 可知 $V_b(\theta)$ 满足

$$0 \leq V_l(\theta) \leq V_b(\theta) \leq V_u(\theta) \tag{3-58}$$

其中 $V_u(\theta)$ 和 $V_l(\theta)$ 分别表示幅度响应的最差上界和最差下界。根据式(3-58), 实际的幅度方向图 $V_b(\theta)$ 可以在区间 $[V_l(\theta), V_u(\theta)]$ 内变化。除此之外, 式(3-56)中已经隐含地假设

$$|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)| - \varepsilon(\theta_0) \|\mathbf{w}\|_2 > 0 \tag{3-59}$$

否则会有 $V_u(\theta) < 0$, 式(3-56)不再成立。

3.2.5 稳健的单点旁瓣响应控制问题描述

上节中, 我们对存在阵列误差时的波束响应界限进行了分析。下面考虑稳健的单点旁瓣控制问题, 即在阵列存在未知误差的情况下如何确定权向量使得某旁瓣方向的实际波束电平低于特定值。

更具体地，将期望的幅度响应记为 $V_d(\theta)$ 。给定某权向量 \mathbf{w}_{k-1} 以及待控制的旁瓣角度 θ_k ，其中下标 k 表示第 k 步。此时需要找到某权向量 \mathbf{w}_k 使得 θ_k 处的实际幅度波束电平低于 $V_d(\theta_k)$ 。为了简化符号，下面沿用上两节中 $V_a(\theta)$, $V_b(\theta)$, $V_u(\theta)$, $V_l(\theta)$ 的标记和含义，用以描述 \mathbf{w}_k 的相应幅度方向图。则单点的稳健旁瓣控制问题可以描述为

$$\text{find } \mathbf{w}_k \quad (3-60\text{a})$$

$$\text{subject to } V_b(\theta_k) \leq V_d(\theta_k) \quad (3-60\text{b})$$

注意到 $V_b(\theta_k)$ 中包含未知的扰动向量（参考式(3-51)）。

为了解决问题(3-60)，我们基于不等式(3-58)建立如下更保守的问题

$$\text{find } \mathbf{w}_k \quad (3-61\text{a})$$

$$\text{subject to } V_u(\theta_k) \leq V_d(\theta_k) \quad (3-61\text{b})$$

上面问题中，我们约束 θ_k 方向的最大可能值（即 $V_u(\theta_k)$ ）低于 $V_d(\theta_k)$ 。由于 $V_b(\theta_k)$ 小于或等于 $V_u(\theta_k)$ ，不难发现只要(3-61b)满足，则原始的约束(3-60b)也满足。

一种使得约束(3-61b)成立的可能方式是将 $V_u(\theta_k)$ 取为其最小值（其取值可能接近零）。考虑到限制(3-58)，由此得到的实际响应 $V_b(\theta_k)$ 也可能趋于零，从而可能加宽主瓣或产生较低的白噪声增益。为了缓解这个缺陷，我们期望在条件 $V_b(\theta_k)$ 满足的前提下获得的 $V_b(\theta_k)$ 。由前文可知， $V_b(\theta_k)$ 在 $[V_l(\theta_k), V_u(\theta_k)]$ 范围内波动，则增大 $V_b(\theta_k)$ 取值的一种可能方式是同时抬升下界电平 $V_l(\theta_k)$ 和上界电平 $V_u(\theta_k)$ 。根据式(3-61b)， $V_u(\theta_k)$ 最大可以取为 $V_d(\theta_k)$ 。由此，可以在 $V_u(\theta_k)$ 固定为 $V_d(\theta_k)$ 的前提下，通过解下述问题来抬高 $V_b(\theta_k)$ 的整体电平

$$\max_{\mathbf{w}_k} V_l(\theta_k) \quad (3-62\text{a})$$

$$\text{subject to } V_u(\theta_k) = V_d(\theta_k) \quad (3-62\text{b})$$

对于给定的 $V_a(\theta_k)$, $\varepsilon(\theta_0)$ 以及 $\varepsilon(\theta_k)$ ，不难从式(3-56) 和 式(3-57) 得到

$$V_u(\theta_k) - V_l(\theta_k) \propto \frac{\|\mathbf{w}_k\|_2}{|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|} \quad (3-63)$$

则可以将问题(3-62)重新表述为

$$\max_{\mathbf{w}_k} G(\mathbf{w}_k) = \frac{|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{\|\mathbf{w}_k\|_2^2} \quad (3-64\text{a})$$

$$\text{subject to } V_u(\theta_k) = V_d(\theta_k) \quad (3-64\text{b})$$

其中 $G(\mathbf{w}_k)$ 表示不存在阵列误差时的白噪声增益，其在前文问题(3-36)中用到。由于 $\|\mathbf{w}_k\|_2 / |\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|$ 正比于方向图波动（即 $V_u(\theta_k) - V_a(\theta_k)$ 和 $V_a(\theta_k) - V_l(\theta_k)$ ），可以

看出对于给定的 $\varepsilon(\theta_0)$ 和 $\varepsilon(\theta_k)$, 问题(3-64)可以获得小的方向图波动。

由(3-56)中 $V_u(\theta_k)$ 的定义, 可以将稳健单点旁瓣控制问题(3-64)重新表述为

$$\max_{\mathbf{w}_k} G(\mathbf{w}_k) = \frac{|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{\|\mathbf{w}_k\|_2^2} \quad (3-65a)$$

$$\text{subject to } V_a(\theta_k) = V_{\mathbf{w}}(\theta_k) \quad (3-65b)$$

其中 $V_{\mathbf{w}}(\theta)$ 定义为

$$V_{\mathbf{w}}(\theta) \triangleq V_d(\theta) - \gamma(\theta) \|\mathbf{w}_k\|_2 / |\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)| \quad (3-66)$$

$\gamma(\theta)$ 定义为 $\gamma(\theta) \triangleq V_d(\theta)\varepsilon(\theta_0) + \varepsilon(\theta)$ 。很明显, 非凸问题(3-65)在对 θ_k 方向理想电平进行约束的前提下最大化白噪声增益, 这与前文中不存在阵列误差时的阵列响应控制问题类似。然而, 与前文问题不同的是, 上述问题中约束(3-65b)的等式右边(即 $V_{\mathbf{w}}(\theta_k)$)也与优化变量 \mathbf{w}_k 有关。除此之外, 问题(3-65)中没有考虑之前的权向量 \mathbf{w}_{k-1} , 所以直接解(3-65)可能在非控制区域产生较大的方向图变化(相比于之前的方向图)。由于前文的C²-WORD算法在电平约束下最大化白噪声增益且在非控制区域产生小的方向图畸变, 这启发我们借助C²-WORD 算法来实现单点的旁瓣电平控制。

3.2.6 稳健C²-WORD算法

下面介绍一种稳健C²-WORD算法来实现阵列存在误差时的稳健单点旁瓣电平控制。该算法建立在前文C²-WORD 的基础上, 可以提供解析形式解并在非控制区域产生小的波束变化。

首先, 回忆前文C²-WORD算法, 我们在问题(3-65)中添加新的约束, 将问题表述为

$$\max_{\beta_k} G(\mathbf{w}_k) \quad (3-67a)$$

$$\text{subject to } V_a(\theta_k) = V_{\mathbf{w}}(\theta_k) \quad (3-67b)$$

$$\mathbf{w}_k = [\mathbf{w}_{\perp} \quad \mathbf{w}_{\parallel}] [1 \quad \beta_k]^T, \beta_k \in \mathbb{C} \quad (3-67c)$$

其中(3-67c)为新添加的正交分解约束。上述问题(3-67)的优化变量为 β_k , 一旦得到最优的 $\beta_{k,\star}$, 则最终的权向量 \mathbf{w}_k 可以表示为

$$\mathbf{w}_k = [\mathbf{w}_{\perp} \quad \mathbf{w}_{\parallel}] [1 \quad \beta_{k,\star}]^T \quad (3-68)$$

需要强调的是, 式(3-68)中得到的权向量可能不是(3-65)的全局最优解, 这是因为在问题(3-67) 中添加了新的约束。尽管如此, 仿真表明式(3-68)中的 \mathbf{w}_k 在稳健旁瓣控制方法性能良好。余下的问题就是如何得到问题(3-67)的最优 $\beta_{k,\star}$ 。

为了便于后文描述，首先定义

$$\rho_a \triangleq V_a^2(\theta_k) \quad (3-69)$$

上述 ρ_a 表示最终的 θ_k 方向理想功率方向图电平。则对于给定的 $\theta_0, \theta_k, \mathbf{w}_{k-1}, V_d(\theta_k), \varepsilon(\theta_0)$ 和 $\varepsilon(\theta_k)$ ，可以通过间接求解 ρ_a 来确定问题(3-67)的最优解 $\beta_{k,*}$ 。

经过计算（详见附录B.9），问题(3-67)得解时，相应的 ρ_a 满足下面一元四次方程

$$A^2\rho_a^4 + (2AC - B^2)\rho_a^3 + (2AE - 2BD + C^2)\rho_a^2 + (2CE - D^2)\rho_a + E^2 = 0 \quad (3-70)$$

其中系数 A, B, C, D, E 满足

$$\begin{aligned} A &= (|\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 - \gamma^2(\theta_k) \|\mathbf{w}_\parallel\|_2^2) \cdot |\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \cdot |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \\ &\quad - \gamma^2(\theta_k) \|\mathbf{w}_\perp\|_2^2 \cdot |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)|^4 \end{aligned} \quad (3-71a)$$

$$\begin{aligned} B &= 2 \left((|\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 - \gamma^2(\theta_k) \|\mathbf{w}_\parallel\|_2^2) - V_d(\theta_k) \cdot |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)| \cdot |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)| \right) \cdot \\ &\quad |\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \cdot |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)| \cdot |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)| \end{aligned} \quad (3-71b)$$

$$\begin{aligned} C &= V_d^2(\theta_k) |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 \cdot |\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \cdot |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 + (|\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 - \gamma^2(\theta_k) \|\mathbf{w}_\parallel\|_2^2) \cdot \\ &\quad |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 \cdot |\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 - 4V_d(\theta_k) |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^3 \cdot |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)| \cdot |\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 + \\ &\quad 2\gamma^2(\theta_k) \|\mathbf{w}_\perp\|_2^2 \cdot |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 \cdot |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \end{aligned} \quad (3-71c)$$

$$D = 2V_d(\theta_k) |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^3 \cdot |\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \cdot (V_d(\theta_k) |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)| - |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|) \quad (3-71d)$$

$$E = |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^4 \cdot (V_d^2(\theta_k) |\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 - \gamma^2(\theta_k) \cdot \|\mathbf{w}_\perp\|_2^2) \quad (3-71e)$$

实际上，方程(3-70)最多有四个候选解。为了得到各解的解析表达式，首先介绍下面引理。

引理 3.2.2 考虑下面关于 x 的一元四次方程

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, (a \neq 0) \quad (3-72)$$

其最多存在四个解，且各解（记为 x_i , $i = 1, 2, 3, 4$ ）可以解析地表示为

$$x_1 = -\frac{b}{4a} + S + \frac{\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}}}{2} \quad (3-73a)$$

$$x_2 = -\frac{b}{4a} + S - \frac{\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}}}{2} \quad (3-73b)$$

$$x_3 = -\frac{b}{4a} - S + \frac{\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}}}{2} \quad (3-73c)$$

$$x_4 = -\frac{b}{4a} - S - \frac{\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}}}{2} \quad (3-73d)$$

其中

$$p \triangleq \frac{8ac - 3b^2}{8a^2} \quad (3-74a)$$

$$q \triangleq \frac{b^3 - 4abc + 8a^2d}{8a^3} \quad (3-74b)$$

$$S \triangleq \frac{\sqrt{-\frac{2}{3}p + \frac{1}{3a}\left(Q + \frac{\zeta_0}{Q}\right)}}{2} \quad (3-74c)$$

式(3-74c)中， Q ， ζ_0 和 ζ_1 分别满足

$$Q \triangleq \sqrt[3]{\left(\zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 - 4\zeta_0^3}\right)/2} \quad (3-75a)$$

$$\zeta_0 \triangleq c^2 - 3bd + 12ae \quad (3-75b)$$

$$\zeta_1 \triangleq 2c^3 - 9bcd + 27b^2e + 27ad^2 - 72ace \quad (3-75c)$$

证明 见文献[143]。 ■

根据引理3.2.2中的式(3-73)，可以得到方程(3-70)的四个解，将其分别记作 $\rho_{a,1}$ ， $\rho_{a,2}$ ， $\rho_{a,3}$ ， $\rho_{a,4}$ 。由之前讨论，注意到满足条件的 ρ_a 应为实数且满足

$$\rho_a \in [0, V_d^2(\theta_k)) \quad (3-76)$$

除此之外，由式(3-66)中 $V_w(\theta)$ 的表达式可知 ρ_a 正比于 $G(w_k)$ 。因此，可以通过解下面简单问题来得到最优的 $\rho_{a,*}$

$$\max_{\rho_a} \rho_a \quad (3-77a)$$

$$\text{subject to } \rho_a \in \{\rho_{a,1}, \rho_{a,2}, \rho_{a,3}, \rho_{a,4}\} \quad (3-77b)$$

$$\rho_a \in [0, V_d^2(\theta_k)) \quad (3-77c)$$

得到最优的 $\rho_{a,\star}$ 之后，可以去掉约束(3-67b)从而将问题(3-67)表述为

$$\max_{\beta_k} G(\mathbf{w}_k) \quad (3-78a)$$

$$\text{subject to } L_k(\theta_k, \theta_0) = \rho_{a,\star} \quad (3-78b)$$

$$\mathbf{w}_k = [\mathbf{w}_\perp \ \mathbf{w}_\parallel] \begin{bmatrix} 1 & \beta_k \end{bmatrix}^T, \beta_k \in \mathbb{C} \quad (3-78c)$$

上述问题(3-78)具有解析表达式，参考前文问题(3-36)和解(3-37)。由此即可得到最优的 $\beta_{k,\star}$ 以及式(3-68)中相应的权向量 \mathbf{w}_k 。综上，稳健C²-WORD算法总结见算法11。

算法 11 稳健C²-WORD算法

- 1: 输入: $\theta_0, k, \mathbf{w}_{k-1}, \theta_k, V_d(\theta_k), \varepsilon(\theta_0), \varepsilon(\theta_k)$ 。
- 2: 构建一元四次方程(3-70)，并根据引理3.2.2得到解 $\rho_{a,1}, \rho_{a,2}, \rho_{a,3}, \rho_{a,4}$ 。
- 3: 解问题(3-77)得到最终的 $\rho_{a,\star}$ 。
- 4: 应用C²-WORD算法将 θ_k 的电平调节为 $\rho_{a,\star}$ ，参考算法10。
- 5: 输出: 式(3-68)的权向量 \mathbf{w}_k 。

3.2.7 $V_d(\theta_k)$ 与 $\varepsilon(\theta_k)$ 的限制关系

上节中，我们利用稳健C²-WORD算法实现了 θ_k 方向的稳健方向图电平控制。需要指出的是，在最低可达到的上界电平 $V_d(\theta_k)$ 与导向矢量范数界 $\varepsilon(\theta_k)$ 存在隐含的限制关系。下面对该限制关系进行具体分析。

首先注意到 $V_a(\theta_k) \geq 0$ 。由于 $V_a(\theta_k)$ 近似正比于 $V_u(\theta_k)$ ，则可以令 $V_a(\theta_k) = 0$ 来得到最小可达的 $V_d(\theta_k)$ （将其值记为 $\bar{V}_d(\theta_k)$ ）。回忆式(3-66)和式(3-67b)，另外注意到当 $V_a(\theta_k) = 0$ 时， $\beta_\star = 0, \mathbf{w}_k = \mathbf{w}_\perp$ ，由此可知 $\bar{V}_d(\theta_k)$ 满足

$$\begin{aligned} \bar{V}_d(\theta_k) &= \gamma(\theta_k) \|\mathbf{w}_k\|_2 / |\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)| \\ &= (\bar{V}_d(\theta_k) \varepsilon(\theta_0) + \varepsilon(\theta_k)) \cdot \|\mathbf{w}_k\|_2 / |\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)| \\ &= (\bar{V}_d(\theta_k) \varepsilon(\theta_0) + \varepsilon(\theta_k)) \cdot \|\mathbf{w}_\perp\|_2 / |\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)| \end{aligned} \quad (3-79)$$

由式(3-79)可知， $V_d(\theta_k)$ 的取值应该满足

$$V_d(\theta_k) \geq \bar{V}_d(\theta_k) = \frac{\varepsilon(\theta_k) \|\mathbf{w}_\perp\|_2}{|\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)| - \varepsilon(\theta_0) \|\mathbf{w}_\perp\|_2} \quad (3-80)$$

上式明确了给定 $\varepsilon(\theta_0)$ 和 $\mathbf{a}(\theta_0)$ 条件下 $V_d(\theta_k)$ 和 $\varepsilon(\theta_k)$ 的限制关系。显然， $\varepsilon(\theta_k)$ 值越小， $V_d(\theta_k)$ 的取值可以越低。

此外，由式(3-80)可知，最低可达到的 $V_d(\theta_k)$ 与之前权向量 \mathbf{w}_{k-1} 有关。利用柯西-施瓦茨不等式 $\|\mathbf{w}_\perp\|_2 \|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2 \geq |\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)|$ ，可以进一步得到

$$V_d(\theta_k) \geq \bar{V}_d(\theta_k) \geq \frac{\varepsilon(\theta_k)}{\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2 - \varepsilon(\theta_0)} \triangleq \chi(\theta_k) \quad (3-81)$$

上式中的 $\chi(\theta_k)$ 为 $\bar{V}_d(\theta_k)$ 的一个更低的下界，且 $\chi(\theta_k)$ 与之前的权向量无关。注意到式(3-81)的 $\chi(\theta_k)$ 近似测量了 $V_d(\theta_k)$ 的最低可达到电平，对于任意给定的权向量 \mathbf{w}_{k-1} ，可能无法实现期望值低于 $\chi(\theta_k)$ 的控制要求。

除此之外，根据式(3-80) 可知，如果 $V_d(\theta_k)$ 满足

$$V_d(\theta_k) \geq \frac{\varepsilon(\theta_k) \|\mathbf{w}_\perp\|_2}{|\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)| - \varepsilon(\theta_0) \|\mathbf{w}_\perp\|_2} \quad (3-82)$$

则一定存在满足式(3-70) 的 ρ_a 落在 $[0, V_d^2(\theta_k))$ 内（如式(3-76)所描述），证明过程详见附录B.10。如果 $V_d(\theta_k)$ 取值太低（比如低于式 (3-81) 中的 $\chi(\theta_k)$ ），不能保证 $[0, V_d^2(\theta_k))$ 范围内存在可行的 ρ_a 。

3.2.8 实际考虑

上节中介绍了稳健C²-WORD 算法。如前所述，稳健C²-WORD算法需要已知扰动向量 $\Delta(\theta)$ 的范数上界 $\varepsilon(\theta)$ 。为了增强稳健C²-WORD算法的实用性，下面在合理假设的情况下，研究如何确定 $\Delta(\theta)$ 以及相应的 $\varepsilon(\theta)$ 。

假设阵列含有阵元幅相误差、位置误差、互耦误差或者各误差的混合，则式(3-51)中的实际导向矢量 $\mathbf{b}(\theta)$ 可以建模为

$$\mathbf{b}(\theta) = \mathbf{C}(\theta) \mathbf{a}(\theta) = \mathbf{a}(\theta) + \underbrace{[\mathbf{C}(\theta) - \mathbf{I}] \mathbf{a}(\theta)}_{\Delta(\theta)} \quad (3-83)$$

其中 $\mathbf{C}(\theta)$ 为某误差矩阵，其元素值可能依赖于角度 θ 。定义

$$\mathbf{E}(\theta) \triangleq \mathbf{C}(\theta) - \mathbf{I} \quad (3-84)$$

根据式(3-83)，可以得到 $\Delta(\theta) = \mathbf{E}(\theta) \mathbf{a}(\theta)$ ，进一步有

$$\|\Delta(\theta)\|_2 = \|\mathbf{E}(\theta) \mathbf{a}(\theta)\|_2 \leq \|\mathbf{E}(\theta)\|_2 \|\mathbf{a}(\theta)\|_2 \quad (3-85)$$

其中 $\|\mathbf{E}(\theta)\|_2$ 代表矩阵 $\mathbf{E}(\theta)$ 的谱范数，满足

$$\|\mathbf{E}(\theta)\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{E}^H(\theta) \mathbf{E}(\theta))} \quad (3-86)$$

显然，如果矩阵 $\mathbf{E}(\theta)$ 已知或可以估计得到，则式(3-53)中的 $\varepsilon(\theta)$ 可以表示为

$$\varepsilon(\theta) = \|\mathbf{E}(\theta)\|_2 \|\mathbf{a}(\theta)\|_2 \quad (3-87)$$

然而, 由于 $\mathbf{E}(\theta)$ (或 $\mathbf{C}(\theta)$) 通常为随机矩阵, 其元素值服从某种统计分布模型, 无法准确得到。此时, 可以将 $\varepsilon(\theta)$ 取为

$$\varepsilon(\theta) = \|\mathbf{a}(\theta)\|_2 \cdot \max \|\mathbf{E}(\theta)\|_2 \quad (3-88)$$

下面讨论几种特定情况, 并利用式(3-88)来解析表示 $\varepsilon(\theta)$ 。简单起见, 仅考虑线性阵列, 应用更复杂阵列模型时可以类似地扩展。

3.2.8.1 通道幅相误差

首先, 我们考虑通道幅相误差^[113, 127, 144]。以第一个阵元为参考, 可以得到

$$\mathbf{C}(\theta) = \text{Diag}([1, g_2 e^{j\varphi_2}, \dots, g_N e^{j\varphi_N}]) \quad (3-89)$$

其中 g_n 和 φ_n 分别表示第 n 个阵元的幅度误差和相位误差, $n = 2, \dots, N$ 。相应地, $\mathbf{E}(\theta)$ 可以表示为

$$\mathbf{E}(\theta) = \text{Diag}([0, g_2 e^{j\varphi_2} - 1, \dots, g_N e^{j\varphi_N} - 1]) \quad (3-90)$$

利用式(3-86)不难得到

$$\max \|\mathbf{E}(\theta)\|_2 = \max_{n=2, \dots, N} |g_n e^{j\varphi_n} - 1|. \quad (3-91)$$

假设 g_n 和 φ_n 在某区间内随机分布, 即

$$g_n \in [g_{n,l}, g_{n,u}], \varphi_n \in [\varphi_{n,l}, \varphi_{n,u}], n = 2, \dots, N \quad (3-92)$$

其中 g_l , g_u , φ_l , φ_u 表示相应的边界, 其值已知。则由式(3-91)可以得到

$$\max \|\mathbf{E}(\theta)\|_2 = \max_{n \in \{2, \dots, N\}, \tau \in \{l, u\}, \varsigma \in \{l, u\}} |g_{n,\tau} e^{j\varphi_{n,\varsigma}} - 1| \triangleq \delta_1 \quad (3-93)$$

根据式(3-88), 此时可以取 $\varepsilon(\theta)$ 为

$$\varepsilon(\theta) = \|\mathbf{a}(\theta)\|_2 \cdot \delta_1 \quad (3-94)$$

3.2.8.2 阵元位置误差

下面考虑存在阵元位置误差^[145]时, 如何确定 $\Delta(\theta)$ 以及相应的 $\varepsilon(\theta)$ 。同样以第一个阵元作参考, 此时矩阵 $\mathbf{C}(\theta)$ 可以表示为

$$\mathbf{C}(\theta) = \text{Diag}([1, e^{j2\pi\alpha_2 \sin(\theta)/\lambda}, \dots, e^{j2\pi\alpha_N \sin(\theta)/\lambda}]) \quad (3-95)$$

其中 λ 代表波长, α_n 代表第 n 个阵元偏离其理想位置 d_n 的位置偏差, $n = 2, \dots, N$ 。根据式(3-84), 可以将 $\mathbf{E}(\theta)$ 表示为

$$\mathbf{E}(\theta) = \text{Diag}([0, e^{j2\pi\alpha_2 \sin(\theta)/\lambda} - 1, \dots, e^{j2\pi\alpha_N \sin(\theta)/\lambda} - 1]) \quad (3-96)$$

假设 α_n 在某范围内随机分布，即

$$\alpha_n \in [\alpha_{n,l}, \alpha_{n,u}], n = 2, \dots, N \quad (3-97)$$

其中 $\alpha_{n,l}$ 和 $\alpha_{n,u}$ 为已知边界。则可进一步得到如下关于 $\mathbf{E}(\theta)$ 的结果

$$\max \|\mathbf{E}(\theta)\|_2 = \max_{n \in \{2, \dots, N\}, \tau \in \{l, u\}} |e^{j2\pi\alpha_{n,\tau}\sin(\theta)/\lambda} - 1| \triangleq \delta_2(\theta) \quad (3-98)$$

与前一小节中的 δ_1 不同，由上式可以看出 $\delta_2(\theta)$ 依赖于角度 θ 。最终，根据式(3-88)，可以将 $\varepsilon(\theta)$ 设置为

$$\varepsilon(\theta) = \|\mathbf{a}(\theta)\|_2 \cdot \delta_2(\theta) \quad (3-99)$$

3.2.8.3 互耦误差

下面考虑互耦误差，并分析相应的扰动向量及其范数上界 $\varepsilon(\theta)$ 。参照文献[146]，我们仅考虑相邻阵元的互耦效应，并将互耦矩阵 $\mathbf{C}(\theta)$ 表示为

$$\mathbf{C}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \xi \cdot z_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \xi \cdot z_{2,1} & 1 & \xi \cdot z_{2,3} & \ddots & \vdots \\ 0 & \xi \cdot z_{3,2} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \xi \cdot z_{N-1,N} \\ 0 & \cdots & 0 & \xi \cdot z_{N,N-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (3-100)$$

注意到 $\mathbf{C}(\theta)$ 为复对称矩阵。 $\mathbf{C}(\theta)$ 中的 ξ 表征通道间的互耦强度， $z_{i,j}$ 为复随机变量满足 $|z_{i,j}| = 1$ 。由式(3-84)可以得到

$$\mathbf{E}(\theta) = \xi \cdot \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ z_{2,1} & 0 & z_{2,3} & \ddots & \vdots \\ 0 & z_{3,2} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & z_{N-1,N} \\ 0 & \cdots & 0 & z_{N,N-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3-101)$$

利用盖氏圆定理^[147]，即

$$|\lambda_{\max}(\mathbf{D})| \leq \max_{p=1, \dots, P} \sum_{l=1}^L |\mathbf{D}(p, l)| \quad (3-102)$$

其中 \mathbf{D} 为 $P \times L$ 维矩阵，不难得到

$$\max \|\mathbf{E}(\theta)\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{E}^H(\theta)\mathbf{E}(\theta))} \leq 2\xi \triangleq \delta_3 \quad (3-103)$$

由式(3-88)，可取 $\varepsilon(\theta)$ 满足

$$\varepsilon(\theta) = \|\mathbf{a}(\theta)\|_2 \cdot \delta_3 = 2\xi \|\mathbf{a}(\theta)\|_2 \quad (3-104)$$

可以看出，只需要已知 ξ 即可确定 $\varepsilon(\theta)$ ， $z_{i,j}$ 的值不必要已知。

3.2.9 稳健的旁瓣方向图综合

本节利用稳健C²-WORD算法实现存在阵列误差时的旁瓣方向图综合。总体思想与应用WORD算法实现方向图综合类似。然而，与WORD方法不同，稳健旁瓣合成中逐点调节旁瓣最差上界幅度响应(即 $V_u(\theta)$)，而不是理想的方向图响应 $V_d(\theta)$ 。下文中在符号 $V_a(\theta)$ 和 $V_u(\theta)$ 中添加下标 k ，使用符号 $V_{a,k}(\theta)$ 和 $V_{u,k}(\theta)$ 分别表示 \mathbf{w}_k 对应的理想幅度方向图和幅度方向图上界。

具体地，给定 $\varepsilon(\theta)$ 和初始权向量 \mathbf{w}_0 ，首先计算理想方向图 $V_{a,0}(\theta)$ 和最差上限方向图 $V_{u,0}(\theta)$ 。然后依照WORD算法的角度选择方式，选择旁瓣角度 θ_1 ，其中 θ_1 表示 $V_{u,0}(\theta)$ 的某旁瓣峰角度，且 θ_1 处 $V_{u,0}(\theta)$ 与理想方向图 $V_d(\theta)$ 的偏离值最大。接下来，使用稳健C²-WORD算法实现电平调节 $V_{u,1}(\theta_1) = V_d(\theta_1)$ ，同时将权向量更新为 \mathbf{w}_1 。利用 \mathbf{w}_1 计算 $V_{u,1}(\theta)$ 并以同样方式选取旁瓣角度 θ_2 。在此基础上，应用稳健C²-WORD算法实现 $V_{u,2}(\theta_2) = V_d(\theta_2)$ ，得到更新后的权向量 \mathbf{w}_2 。上述步骤迭代进行直到上限方向图 $V_{u,k}(\theta)$ 满足期望要求。上述稳健旁瓣方向图综合算法总结见算法12。

算法 12 稳健旁瓣方向图综合算法

- 1: 输入： θ_0 , $\varepsilon(\theta)$, $V_d(\theta)$, \mathbf{w}_0 , $V_{u,0}(\theta)$, 取 $k = 0$ 。
 - 2: **while** $V_{u,k}(\theta)$ 不满足要求 **do**
 - 3: 更新 $k = k + 1$ 。
 - 4: 通过比较 $V_{u,k-1}(\theta)$ 和 $V_d(\theta)$ 来选择待控制角度 θ_k 。
 - 5: 应用稳健C²-WORD算法（见算法11）实现 $V_{u,k}(\theta_k) = V_d(\theta_k)$ 。
 - 6: 得到式(3-68)中的权向量 \mathbf{w}_k 以及相应的 $V_{u,k}(\theta)$ 。
 - 7: **end while**
 - 8: 输出： \mathbf{w}_k 。
-

3.2.10 仿真实验

本小节对稳健C²-WORD进行仿真验证。除非特别指定，实验中取 $\mathbf{a}(\theta_0)$ 为初始权向量。

3.2.10.1 稳健旁瓣方向图控制

下面测试稳健C²-WORD算法在给定旁瓣角度上的电平控制性能。第一个例子中，考虑12阵元非等距分布线性阵列，参考表3-3阵元位置参数。波束中心角度取 $\theta_0 = -30^\circ$ ，导向矢量扰动的范数上界取 $\varepsilon(\theta) = 0.16$ 。另外，取旁瓣角度 $\theta_1 = 40^\circ$ ，设该角度的实际电平低于期望电平 $V_d(\theta_1) = -25\text{dB}$ 。图3-12(a)展示了初始权向量 $\mathbf{w}_0 = \mathbf{a}(\theta_0)$ 的理想方向图 $V_a(\theta)$ ，最差上限方向图 $V_u(\theta)$ 以及最差下限方向图 $V_l(\theta)$ 。

表 3-3 非等距线阵的阵元位置坐标

n	$x_n(\lambda)$	n	$x_n(\lambda)$	n	$x_n(\lambda)$	n	$x_n(\lambda)$
1	0.00	4	1.55	7	3.05	10	4.55
2	0.45	5	2.10	8	3.65	11	5.05
3	1.00	6	2.60	9	4.10	12	5.50

应用稳健C²-WORD算法，可以计算得到 $\rho_{a,\star} = -42.7746\text{dB}$, $\beta_{1,\star} = 0.077$ 。图3-12(b)展示了权向量 \mathbf{w}_1 的各方向图。可以看出 θ_1 处的上限电平（即 $V_u(\theta_1)$ ）已经被精确调节为期望电平 $V_d(\theta_1) = -25\text{dB}$ 。由于 $V_u(\theta)$ 为旁瓣电平的最差上限，所以只要 $\|\Delta(\theta)\|_2 \leq \varepsilon(\theta)$ ， θ_1 处的实际电平总低于 $V_u(\theta_1) = -25\text{dB}$ 。除此之外，与图3-12(a)中各方向图相比，图3-12(b)的方向图在非控制角度（即当 $\theta \neq \theta_1$ 时）几乎不变。

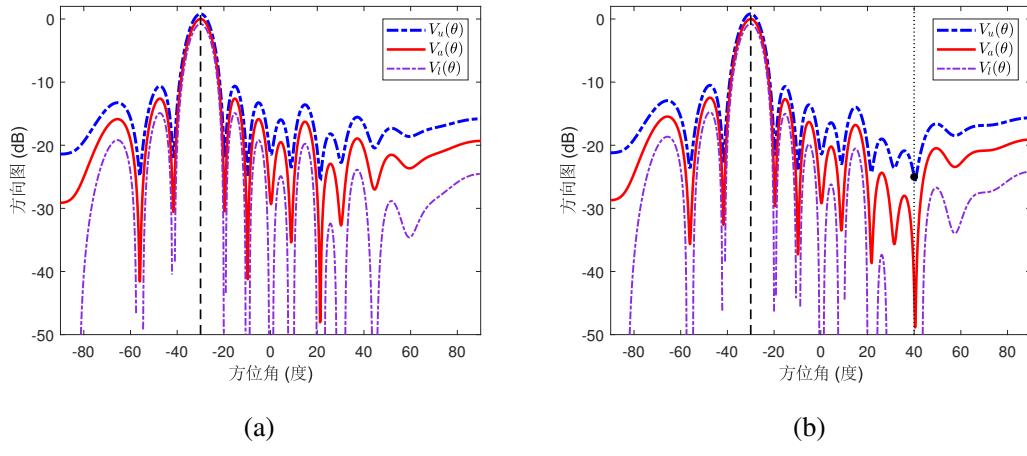


图 3-12 非等距线阵方向图控制结果。(a)控制之前;(b)控制之后

为了说明稳健C²-WORD算法对任意给定初始权向量均有效，下面考虑12阵元等距线阵，波束中心角度为 $\theta_0 = 20^\circ$ ，取 $\varepsilon(\theta) = 0.1$ ，初始权向量为 -20dB 切比雪夫

权向量。旁瓣控制角度取为 $\theta_1 = -23^\circ$, 期望电平为 $V_d(\theta_1) = -25\text{dB}$ 。图3-13(a)展示了初始权向量的各方向图, 包括 $V_u(\theta)$, $V_a(\theta)$ 和 $V_l(\theta)$ 。应用稳健C²-WORD算法, 得到 $\rho_{a,*} = -31.9987\text{dB}$, $\beta_{1,*} = 0.2506$ 。最终得到的各方向图见图3-13(b), 从中可以看出 $V_u(\theta_1)$ 刚好等于期望电平 $V_d(\theta_1) = -25\text{dB}$ 。

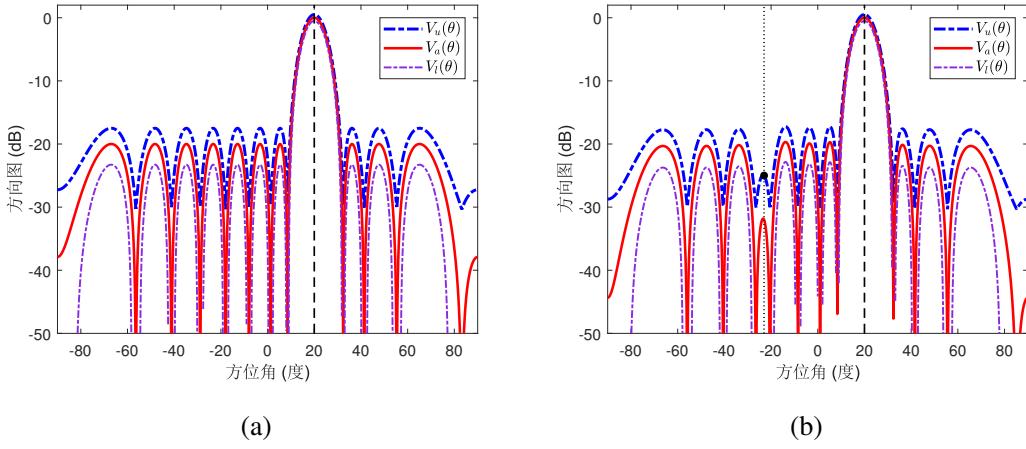


图 3-13 等距线阵方向图控制结果。(a)控制之前;(b)控制之后

3.2.10.2 基于稳健C²-WORD算法的旁瓣方向图综合

下面测试稳健C²-WORD算法在旁瓣方向图综合方面的性能。

(1). 等距线阵等旁瓣方向图综合

考虑16阵元等距线阵, 波束中心指向为 $\theta_0 = -30^\circ$, 取 $\varepsilon(\theta) = 0.1$ 。期望方向图具有 -25dB 等电平旁瓣。图3-14展示了使用稳健C²-WORD进行旁瓣方向图综合的中间结果。第一步中, 通过比较 $V_{u,0}(\theta)$ 和 $V_d(\theta)$ 来选取待控制角度 θ_1 。此时得到 $\theta_1 = -18.7^\circ$ 。应用稳健C²-WORD算法, 可以计算出 $\rho_{a,*} = -30.6544\text{dB}$, $\beta_{1,*} = 0.1276$ 。第一步得到的方向图见图3-14(a), 可以看出 $V_{u,1}(\theta_1)$ 已经被准确地调节为期望值(即 -25dB)。基于 \mathbf{w}_1 和 $V_{u,1}(\theta)$, 进行第二步控制, 计算得到 $\theta_2 = -43.1^\circ$, $\rho_{a,*} = -30.8132\text{dB}$, $\beta_{1,*} = 0.1245$ 。方向图结果见图3-14(b), 可以验证 $V_{u,2}(\theta_2) = -25\text{dB}$ 。通过迭代应用稳健C²-WORD算法, 上限方向图 $V_u(\theta)$ 的包络逐渐接近于 $V_d(\theta)$, 此时停止迭代过程得到最终的权向量。

为了测试稳健旁瓣方向图综合的收敛性, 定义 D_k

$$D_k \triangleq \max_{\theta \in \Omega_s^k} (V_{u,k}(\theta) - V_d(\theta)) \quad (3-105)$$

上述 D_k 测量了第 k 步时各峰值旁瓣处(记为集合 Ω_s^k)偏离期望值的最大值。 D_k 随迭代步数 k 的变化曲线见图3-15。可以看出 D_k 随迭代的进行逐级降低。经过50次的迭代, 所得的 D_k 近似等于0, 迭代停止。表3-4为最终的权向量数据。

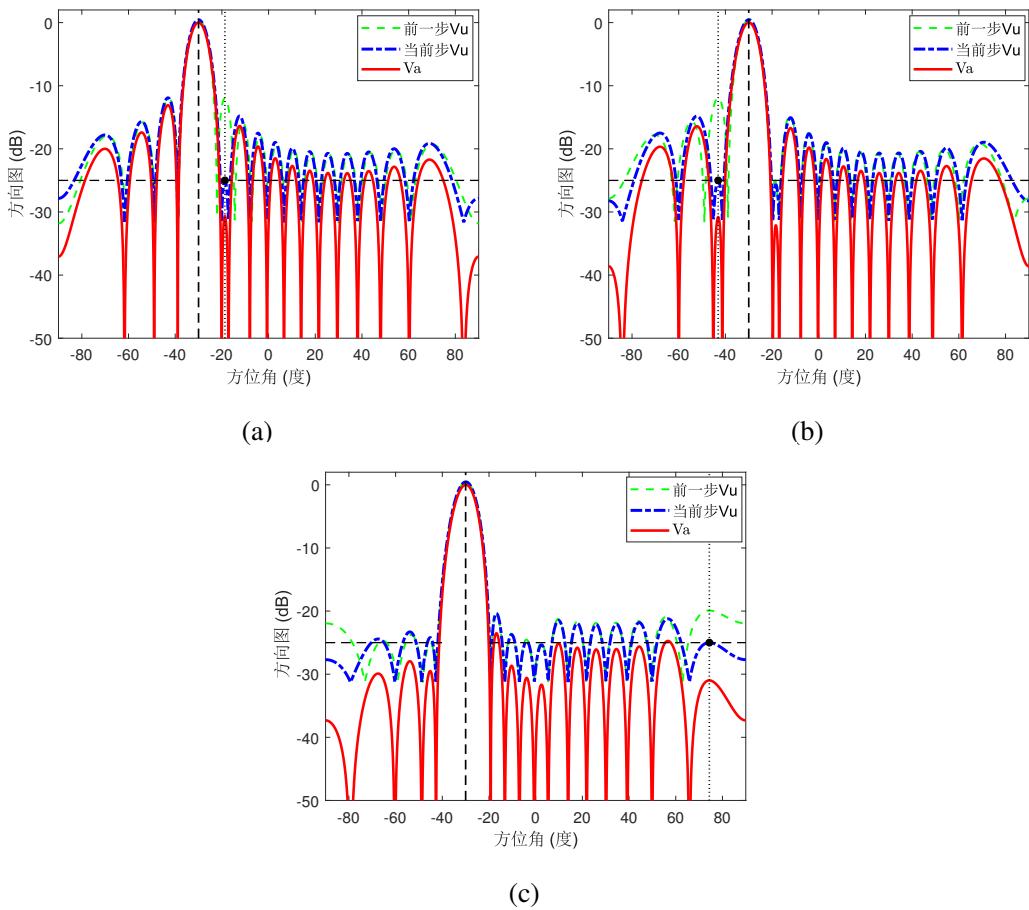
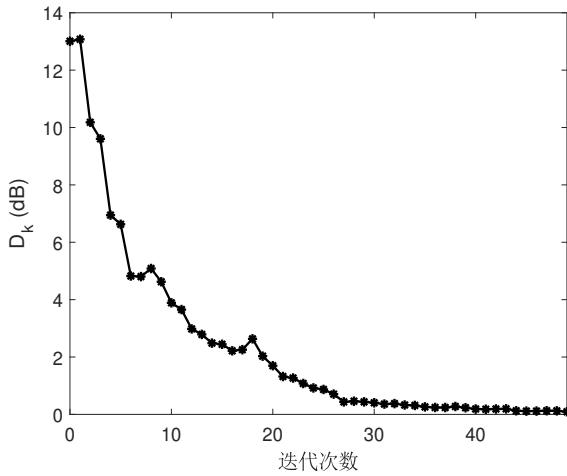


图 3-14 等旁瓣电平稳健方向图综合结果。(a)第1步结果;(b)第2步结果;(c)第9步结果

最终得到的方向图见图3-16，从中可以看出稳健C²-WORD算法的最差上限方向图 $V_u(\theta)$ 对期望旁瓣电平对齐。对于文献[54]的凸优化方法，取其主瓣区域为 $[-42^\circ, -18^\circ]$ ，可以得到具有等电平旁瓣的 $V_u(\theta)$ ，如图3-16所示。凸优化方法得到的 $V_u(\theta)$ 的旁瓣区域最大值为 -24dB ，高于稳健C²-WORD算法。事实上，凸优化方法在主瓣宽度和旁瓣深度方面需要进行折衷考虑。而且，对于给定的旁瓣电平，凸优化方法需要利用经验信息来确定主瓣宽度。除此之外，稳健C²-WORD算法的运行时间为 0.03 秒，比凸优化方法的 0.61 秒要短。

(2). 考虑幅相误差时的等电平旁瓣综合

下面考虑各向异性16阵元扇形阵列，参考文献[148]的图8，其中相邻阵元间距为半波长，取 $\theta_c = 60^\circ$ 。波束中心为 $\theta_0 = 0^\circ$ ，旁瓣电平期望低于 -20dB 。考虑阵元幅相误差，相位误差 φ_n 和幅度误差 g_n 分布均匀分布于区间 $[-0.035, 0.035]$ 和 $[0.98, 1.02]$ ， $n = 2, \dots, N$ 。根据前文分析，可以计算出 $\delta_1 = 0.039$ ，由式(3-94)可以计算出 $\varepsilon(\theta)$ 。

图 3-15 D_k 随迭代次数变化曲线表 3-4 稳健C²-WORD算法得到的权向量（对等距线阵实现等旁瓣电平综合）

n	w_n	n	w_n	n	w_n
1	$0.09e^{-j0.80}$	7	$0.34e^{+j2.35}$	13	$0.21e^{-j0.78}$
2	$0.11e^{-j2.37}$	8	$0.36e^{+j0.78}$	14	$0.16e^{-j2.35}$
3	$0.16e^{+j2.35}$	9	$0.36e^{-j0.78}$	15	$0.11e^{+j2.37}$
4	$0.21e^{+j0.78}$	10	$0.34e^{-j2.35}$	16	$0.09e^{+j0.80}$
5	$0.26e^{-j0.79}$	11	$0.31e^{+j2.36}$		
6	$0.31e^{-j2.36}$	12	$0.26e^{+j0.79}$		

图3-17(a)展示了稳健C²-WORD算法经过20次迭代后得到的方向图 $V_u(\theta)$ 。由图3-17(a)可以看出 $V_u(\theta)$ 的包络与 $V_d(\theta)$ 对齐。为了对比不同算法性能，图3-17(a)也展示了实际的方向图 $V_b(\theta)$ 。可以看出稳健C²-WORD算法和凸优化方法的实际方向图满足期望要求，而WORD算法的方向图不满足要求。另外，稳健C²-WORD算法的运行时间为0.06秒，凸优化方法的运行时间为3.69秒。

(3). 存在阵元位置误差的等电平旁瓣综合

下面测试存在阵元位置误差时的等电平旁瓣综合。考虑12阵元各向同性非等距间隔线性阵列，表3-3列出了理想的阵元位置参数。波束中心取为 $\theta_0 = -20^\circ$ ，期望的旁瓣电平上限为-20dB。假设各阵元位置误差在区间 $[-0.5\%\lambda, 0.5\%\lambda]$ 内均匀分布。上述参数下，可以根据式(3-99)计算相应的 $\varepsilon(\theta)$ 。

图3-17(b)展示了应用50步稳健C²-WORD算法后得到的方向图。由图3-17(b)可以看出上限方向图 $V_u(\theta)$ 满足预先设定要求。为了展示算法的优越性，图3-17(b)也

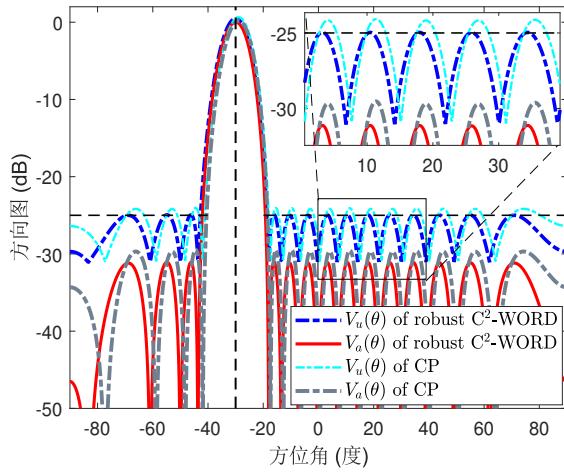


图 3-16 等旁瓣电平稳健方向图综合结果对比

对比了各算法的实际方向图 $V_b(\theta)$ 。可以看出凸优化方法和WORD算法的实际方向图不满足期望要求。对于稳健C²-WORD算法，得到的实际方向图 $V_b(\theta)$ 电平约为-25dB，低于期望电平。除此之外，稳健C²-WORD算法的运行时间为0.08秒，比凸优化方法的3.36秒要短。

(4). 存在互耦误差的非等电平旁瓣综合

下面考虑20阵元等距线阵，波束中心为 $\theta_0 = -30^\circ$ 。按照互耦误差模型，考虑相邻阵元间的互耦误差，并取 $\xi = -35\text{dB}$ 。根据式(3-104)，可以计算出范数上界 $\varepsilon(\theta)$ 。与之前仿真不同，该实验中假设 $V_d(\theta)$ 具有非等电平旁瓣。具体地，旁瓣区间 $[40^\circ, 60^\circ]$ 的期望电平为-27dB，其余旁瓣区间的期望电平为-22dB。

图3-17(c)展示了经过80次迭代后稳健C²-WORD得到的上界方向图 $V_u(\theta)$ 。尽管期望旁瓣不是等电平，由图3-17(c)可以看出 $V_u(\theta)$ 仍然满足设定的要求。图3-17(c)同时展示了稳健C²-WORD算法，凸优化方法，WORD方法得到的实际方向图 $V_b(\theta)$ 。可以看出稳健C²-WORD的实际方向图具有非等电平的旁瓣包络且满足期望的要求。凸优化方法的实际方向图具有等电平旁瓣，其在凹口区域不满足设定要求。对于WORD算法， $V_b(\theta)$ 的最大旁瓣约为-13dB，高于期望电平。除此之外，凸优化方法的运行时间为3.41秒，长于稳健C²-WORD算法的0.08秒。

3.3 本章小结

本章首先介绍了一种基于权向量正交分解算法（简称为WORD算法）的精确方向图控制，并讨论了其在方向图综合中的应用。WORD算法具有解析解，可对任意阵列进行方向图调整，且不会产生方向图畸变现象。另外介绍了一种复系

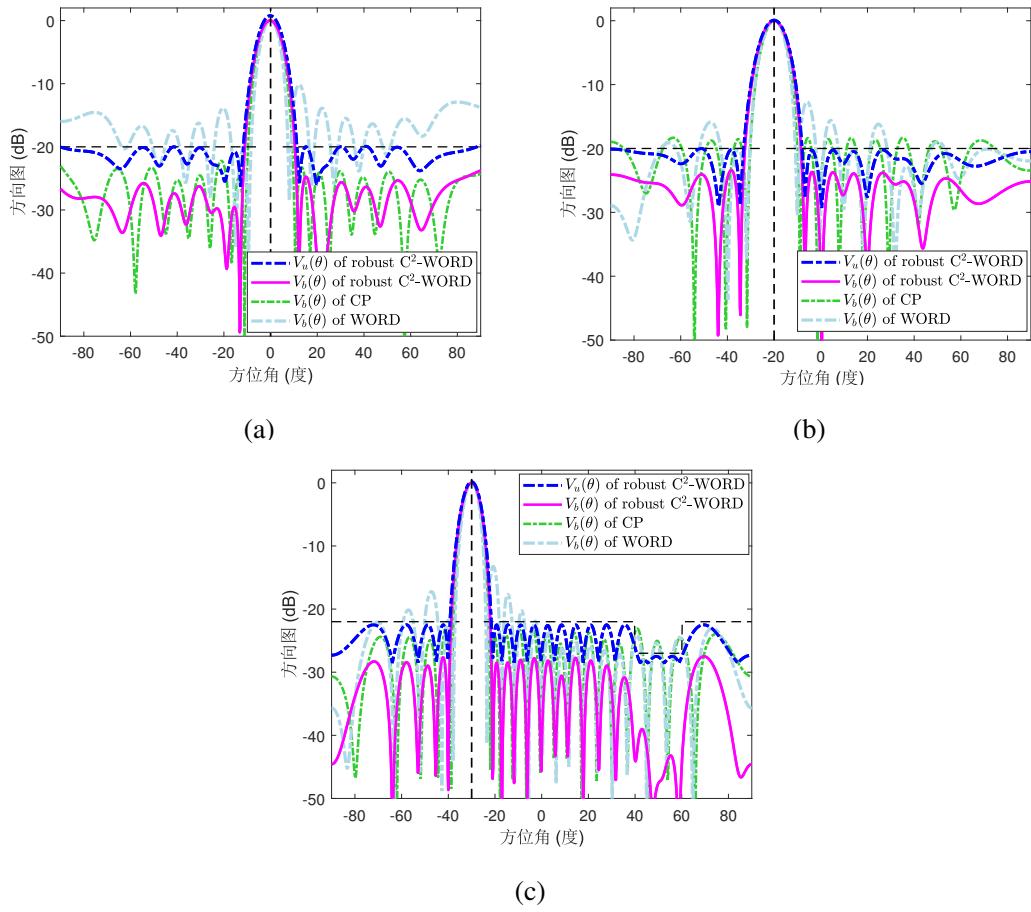


图 3-17 稳健旁瓣方向图综合结果对比。(a)考虑阵元幅相误差;(b)考虑阵元位置误差;(c)考虑互耦误差

数权向量正交分解算法 (C^2 -WORD算法)。 C^2 -WORD算法是WORD算法的改进，可以实现对任意阵列单点方向图电平的精确控制。基于 C^2 -WORD算法，进一步提出稳健 C^2 -WORD算法，可以在阵列存在误差时进行稳健旁瓣控制。假设导向矢量误差满足特定范数约束，稳健 C^2 -WORD算法可以将给定旁瓣的最差上界调节为期望电平。另外，稳健 C^2 -WORD算法具有解析解，且运行时间短于传统的凸优化算法，为实际阵列系统的稳健方向图控制提供了技术支撑。本章同时讨论了如何确定导向矢量误差的范数上限，增强了算法的实用性。仿真实验证实了所提算法的有效性。

第四章 基于斜投影理论的灵活方向图控制算法

已有的方向图控制算法无法对多个角度方向图电平进行独立控制。本章对自适应波束形成最优权进行重新表示，提出FARCOP算法。FARCOP算法可以实现对多个角度方向图电平的独立控制。另外分别考虑了基于斜投影的多点方向图控制算法和基于斜投影的波束中心无偏移的多点控制算法。此外，对所提算法的性质进行了分析。

4.1 斜投影定义

假设列满秩矩阵 $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{m \times (p+l)}$ 可以按列划分为 $\mathbf{Z} = [\mathbf{G} \quad \mathbf{S}]$ ，其中 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{m \times p}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{m \times l}$ 。可知，列空间为 $\mathcal{R}(\mathbf{Z})$ 的正交投影矩阵为

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}(\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^H \quad (4-1)$$

相应地，列空间为 $\mathcal{R}^\perp(\mathbf{Z})$ 的正交投影算子为 $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ 。

非正交的投影操作被称作斜投影，对应的投影矩阵叫做斜投影矩阵。具体来讲，我们可以将式(4-1)中的 $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ 分解为

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Z}} = \mathbf{P}_{[\mathbf{G} \quad \mathbf{S}]} = \mathbf{E}_{\mathbf{G}|\mathbf{S}} + \mathbf{E}_{\mathbf{S}|\mathbf{G}} \quad (4-2)$$

其中 $\mathbf{E}_{\mathbf{G}|\mathbf{S}}$ 和 $\mathbf{E}_{\mathbf{S}|\mathbf{G}}$ 为斜投影矩阵，满足

$$\mathbf{E}_{\mathbf{G}|\mathbf{S}} = [\mathbf{G} \quad \mathbf{0}] (\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^H = \mathbf{G} (\mathbf{G}^H \mathbf{P}_{\mathbf{S}}^\perp \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^H \mathbf{P}_{\mathbf{S}}^\perp \quad (4-3a)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{S}|\mathbf{G}} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{S}] (\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^H = \mathbf{S} (\mathbf{S}^H \mathbf{P}_{\mathbf{G}}^\perp \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^H \mathbf{P}_{\mathbf{G}}^\perp \quad (4-3b)$$

不难验证，上述斜投影矩阵满足

$$\mathbf{E}_{\mathbf{G}|\mathbf{S}} \mathbf{G} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{E}_{\mathbf{G}|\mathbf{S}} \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (4-4a)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{S}|\mathbf{G}} \mathbf{S} = \mathbf{S}, \quad \mathbf{E}_{\mathbf{S}|\mathbf{G}} \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (4-4b)$$

如图4-1所示，投影矩阵 $\mathbf{E}_{\mathbf{G}|\mathbf{S}}$ 沿着空间 $\mathcal{R}(\mathbf{S})$ 将向量投影至空间 $\mathcal{R}(\mathbf{G})$ 。类似地，投影矩阵 $\mathbf{E}_{\mathbf{S}|\mathbf{G}}$ 沿着空间 $\mathcal{R}(\mathbf{G})$ 将向量投影至空间 $\mathcal{R}(\mathbf{S})$ 。可以验证，投影矩阵是幂等矩阵，但不是复共轭对称矩阵。

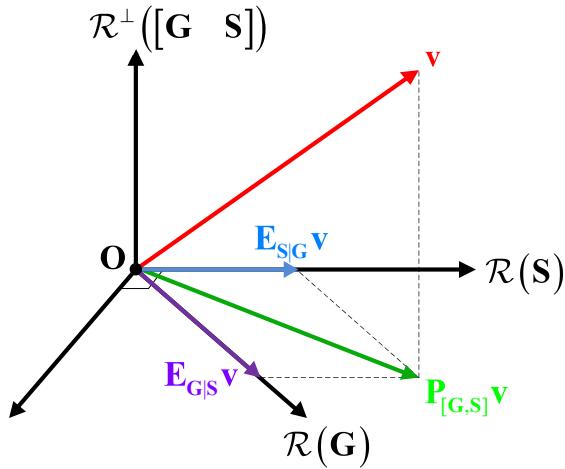


图 4-1 斜投影示意图

4.2 FAR COP 算法

4.2.1 自适应阵列理论

自适应波束形成中，输出信干噪比最大化的最优权向量可以表示为

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \alpha \mathbf{R}_{n+i}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \quad (4-5)$$

考虑空域白噪声，以及 Q 个相互独立的干扰，则归一化噪声加干扰协方差矩阵可以表示为

$$\boldsymbol{\Xi}_{n+i} \triangleq \frac{\mathbf{R}_{n+i}}{\sigma_n^2} = \mathbf{I} + \sum_{q=1}^Q \beta_q \mathbf{a}(\theta_q) \mathbf{a}^H(\theta_q) \quad (4-6)$$

其中 σ_n^2 为噪声功率， $\beta_q \triangleq \sigma_q^2 / \sigma_n^2$ ， σ_q^2 和 θ_q 分别表示第 q 个干扰的干噪比，功率和方向。则最优权向量可以等价地表示为

$$\mathbf{w}_* = \boldsymbol{\Xi}_{n+i}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \quad (4-7)$$

上述权向量与式(4-5)中的 \mathbf{w}_{opt} 得到相同的输出信干噪比。

可以看出，最优权 \mathbf{w}_* 依赖于矩阵 $\boldsymbol{\Xi}_{n+i}$ （或 \mathbf{R}_{n+i} ）。然而，在设计非数据依赖的阵列方向图响应时，该矩阵是无法得到的。此时需要设计权向量 \mathbf{w} 使得如下方向图满足特定要求

$$L(\theta, \theta_0) \triangleq \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)|^2}{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} \quad (4-8)$$

为了得到相应的数据矩阵，文献[136]提出虚拟归一化噪声加干扰协方差矩阵的概念。分析表明，可以通过施加虚拟干扰来调节某些方向的方向图电平。然而，当对多个方向的电平进行控制时，很难计算相应虚拟干扰的功率。这主要因为多点

方向的阵列方向图响应与干噪比不是一一对应的，而是交互影响。为了避免上述缺陷，下面对最优权向量重新表示，并提出一种灵活的方向图控制算法。

4.2.2 最优权的等价表示

下面将最优权进行等价表示。首先，可以将式(4-6)中的归一化协方差矩阵表示为

$$\Xi_{n+i} = \mathbf{I} + \mathbf{A}(\theta_1, \dots, \theta_Q) \Sigma \mathbf{A}^H(\theta_1, \dots, \theta_Q) \quad (4-9)$$

其中 $\mathbf{A}(\theta_i, \dots, \theta_j)$ 和 Σ 分别定义为

$$\mathbf{A}(\theta_i, \dots, \theta_j) \triangleq [\mathbf{a}(\theta_i), \dots, \mathbf{a}(\theta_j)] \quad (4-10a)$$

$$\Sigma = \text{Diag}([\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_Q]) \quad (4-10b)$$

将式(4-9)代入式(4-7)中，并对 Ξ_{n+i} 应用矩阵求逆引理^[149]可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_* &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}(\theta_1, \dots, \theta_Q) \Sigma \mathbf{A}^H(\theta_1, \dots, \theta_Q))^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \\ &= \underbrace{[\mathbf{a}(\theta_0) \quad \mathbf{A}(\theta_1, \dots, \theta_Q)]}_{\triangleq \check{\mathbf{A}}} \left[\begin{matrix} 1 & \mathbf{u}^T \end{matrix} \right]^T \end{aligned} \quad (4-11)$$

其中 $\check{\mathbf{A}} \triangleq \mathbf{A}(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_Q) \in \mathbb{C}^{N \times (Q+1)}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^Q$ 由下式表示

$$\mathbf{u} = -(\mathbf{I} + \Sigma \mathbf{A}^H(\theta_1, \dots, \theta_Q) \mathbf{A}(\theta_1, \dots, \theta_Q))^{-1} \Sigma \mathbf{A}^H(\theta_1, \dots, \theta_Q) \mathbf{a}(\theta_0) \quad (4-12)$$

由式(4-11)可以发现，最优权向量 $\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_Q)$ 的线性组合，其组合系数由 \mathbf{u} 确定。很明显，并不能通过简单地调节干噪比 β_q 来调节 θ_q 处的电平，而使得其余 $Q-1$ 个方向的电平不变。这是因为 θ_q 与所有方向的干噪比 β_1, \dots, β_Q 相关，而不仅仅依赖于 β_q 。因此，很难通过直接调节干噪比来精确调节多个方向图的电平。

尽管如此，我们可以对多个方向的电平进行独立控制。为了说明原理，首先定义

$$v(i, j) \triangleq \mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{a}(\theta_j) \quad (4-13)$$

可以得到下面定理，从而将式(4-11)中的 \mathbf{w}_* 进行重新表示。

定理 4.2.1 假设 $\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_Q)$ 线性独立，同时对于任意 $q \in \{1, \dots, Q\}$ ，满足 $v(q, 0) \neq 0$ 。则对于给定的 β_1, \dots, β_Q ，存在 η_1, \dots, η_Q 使得式(4-11)中的权向量 \mathbf{w}_* 满足

$$\mathbf{w}_{\text{OP}} = \left(\left(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_0 \mid 0}^H \right) + \sum_{q=1}^Q \eta_q \mathbf{E}_{q \mid \check{\mathbf{A}}_{q-}}^H \right) \mathbf{a}(\theta_0) = c \mathbf{w}_* \quad (4-14)$$

其中 c 为常数， $\mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_{0-}|0}$ 和 $\mathbf{E}_{q|\check{\mathbf{A}}_{q-}}$ 为投影矩阵，满足

$$\mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_{0-}|0} \triangleq \mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_{0-}|\mathbf{a}(\theta_0)} \quad (4-15a)$$

$$\mathbf{E}_{q|\check{\mathbf{A}}_{q-}} \triangleq \mathbf{E}_{\mathbf{a}(\theta_q)|\check{\mathbf{A}}_{q-}}, q = 1, \dots, Q \quad (4-15b)$$

其中 $\check{\mathbf{A}}_{i-}$ 为从矩阵 $\check{\mathbf{A}}$ 中剔除列向量 $\mathbf{a}(\theta_i)$ 后得到的矩阵，即

$$\check{\mathbf{A}}_{i-} \triangleq \mathbf{A}(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_Q) \in \mathbb{C}^{N \times Q}, i = 0, 1, \dots, Q \quad (4-16)$$

证明 见附录C.1。 ■

由定理4.2.1可以发现，给定角度的方向图电平可以借助式(4-14)同时设计新的参数 η_q （而不是干噪比 β_q ）来实现， $q = 1, \dots, Q$ 。

为了更好地解释定理4.2.1，下面考虑 $N = 10$ 阵元等距线阵，波束中心固定为 $\theta_0 = 20^\circ$ 。考虑 $Q = 3$ 个干扰，方向分别为 $\theta_1 = -35^\circ$ ， $\theta_2 = -20^\circ$ ， $\theta_3 = -10^\circ$ 。第一种配置下，干噪比分别取为 $\beta_1 = 0.7559$ (-1.2155 dB)， $\beta_2 = 1.2226$ (0.8730 dB)， $\beta_3 = 1.5186$ (1.8145 dB)。对应最优权向量 \mathbf{w}_* 的方向图见图4-2(a)，从中可以看出 θ_1 ， θ_2 和 θ_3 方向的电平均被调节为 -40 dB。对应地，如果取 $\eta_1 = 0.1022$ ， $\eta_2 = 0.0908$ ， $\eta_3 = 0.0747$ ，则得到的权向量 \mathbf{w}_{OP} 与最优权 \mathbf{w}_* 的方向图完全重合，参考图4-2(a)。事实上，可以验证 $\mathbf{w}_{OP} = c\mathbf{w}_*$ ，其中 $c = 1.0412$ 。

为了进一步解释定理4.2.1，下面考虑第二种参数配置。此时将干噪比分别改为 $\beta_1 = 0.1689$ (-7.7238 dB)， $\beta_2 = 1.2507$ (0.9717 dB)和 $\beta_3 = 1.5199$ (1.8182 dB)，其它参数均不变。此时，如图4-2(b)所示，最优权 \mathbf{w}_* 在三个方向 θ_1 ， θ_2 和 θ_3 的电平分别为 -30 dB， -40 dB和 -40 dB。注意到相比于第一种参数配置， θ_1 方向的电平由 -40 dB变为 -30 dB，另外两个方向 θ_2 和 θ_3 的电平不变，而三个干扰的干噪比均发生了变化。此时，可以得到 $\eta_1 = 0.3231$ ， $\eta_2 = 0.0908$ 和 $\eta_3 = 0.0747$ ，且有 $\mathbf{w}_{OP} = c\mathbf{w}_*$ ，其中 $c = 1.0394$ 。而且，相比于第一种参数配置只有 η_1 发生了变化，而参数 η_2 和 η_3 均未改变。上述观察表明， θ_1 方向的电平似乎只受 η_1 影响而与参数 η_2 和 η_3 无关。而且，改变 η_1 不影响 θ_2 和 θ_3 方向的电平。事实上，上述结果并非偶然。下面从理论上进行解释，并提出FARCOP算法。

4.2.2.1 FARCOP算法

上小节中借助斜投影操作得到了最优权的等价表示，并进行了仿真验证。下面对权向量参数化表述进一步扩展，并提出FARCOP算法。

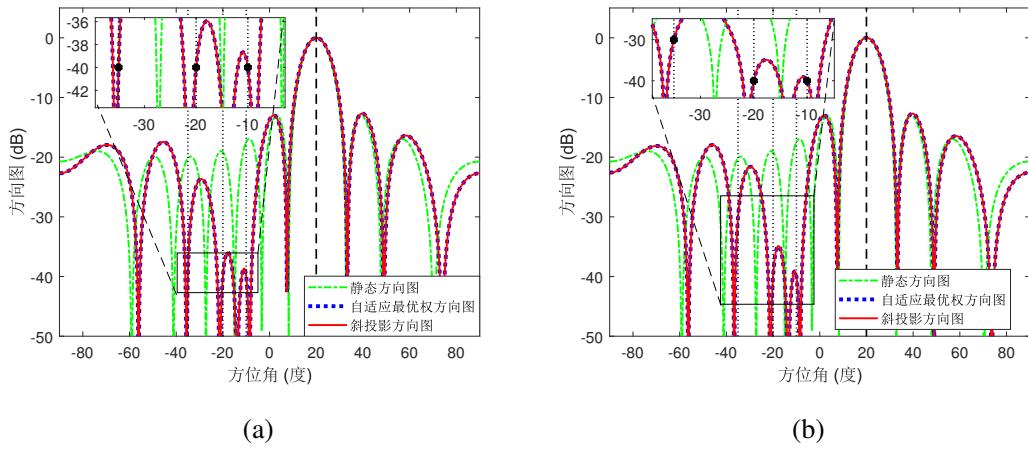


图 4-2 定理4.2.1验证结果。(a)第一种参数配置;(b)第二种参数配置

为了简化符号, 首先定义

$$\Psi(\boldsymbol{\eta}) \triangleq \left(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{A}}_{0-}|0}^H \right) + \sum_{q=1}^Q \eta_q \mathbf{E}_{q|\tilde{\mathbf{A}}_{q-}}^H \quad (4-17)$$

其中 $\boldsymbol{\eta}$ 定义为

$$\boldsymbol{\eta} \triangleq [1, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_Q]^T \in \mathbb{C}^{Q+1} \quad (4-18)$$

由定理4.2.1得到

$$\mathbf{w}_{OP} = \Psi(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{a}(\theta_0) \quad (4-19)$$

由上式可知通过对静态权向量 $\mathbf{a}(\theta_0)$ 进行线性变换得到 \mathbf{w}_{OP} 或 \mathbf{w}_* , 并实现对角度 $\theta_1, \dots, \theta_Q$ 的电平调节。下面考虑如下两个问题: 一、上述线性变换是否可以扩展为对任意给定权向量的线性变换? 二、是否可以实现当调节某些方向电平时, 保持其它某些特定角度的电平不变?

式(4-19)为多点阵列响应控制提供了新的视角, 该式表明可以通过对给定权向量进行线性变换来实现特定角度的电平控制。基于式(4-19), 下面介绍FARCOP算法, 从而实现基于任意给定权向量 \mathbf{w}_{pre} 的方向图控制。

具体地, 对于给定的 \mathbf{w}_{pre} , 下面考虑如何找到新的权向量 \mathbf{w}_{new} 从而使得角度 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q$ 的电平依次被调节为 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_Q$ 。为了便于下文讨论, 这里假设 $\mathbf{w}_{pre}^H \mathbf{a}(\theta_i) \neq 0, i = 0, 1, \dots, Q$ 。FARCOP算法中, 对 \mathbf{w}_{pre} 进行线性变换, 利用下式构造新的权向量 \mathbf{w}_{new}

$$\mathbf{w}_{new} = \Psi(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{w}_{pre} \quad (4-20)$$

其中变换矩阵 $\Psi(\boldsymbol{\eta})$ 的定义见(4-17), η_q 为待定参数, $q = 1, \dots, Q$ 。

为了展示式(4-20)的优势, 利用斜投影性质得到

$$\mathbf{E}_{q|\check{\mathbf{A}}_{q-}} \mathbf{a}(\theta_0) = \mathbf{0}, q = 1, \dots, Q \quad (4-21)$$

$$\mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_{0-}|0} \mathbf{a}(\theta_0) = \mathbf{0} \quad (4-22)$$

则式(4-20)中的权向量 \mathbf{w}_{new} 满足

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_0) &= \mathbf{w}_{\text{pre}}^H \Psi^H(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{a}(\theta_0) \\ &= \mathbf{w}_{\text{pre}}^H \left((\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_{0-}|0}) + \sum_{q=1}^Q \eta_q^* \mathbf{E}_{q|\check{\mathbf{A}}_{q-}} \right) \mathbf{a}(\theta_0) \\ &= \mathbf{w}_{\text{pre}}^H \mathbf{a}(\theta_0) \end{aligned} \quad (4-23)$$

换言之, 线性变换不改变 θ_0 处的输出, 这更利于归一化电平的调整。

更重要的是, 对于给定的 i 和 q , $i, q = 1, 2, \dots, Q$, 可以验证

$$\mathbf{E}_{i|\check{\mathbf{A}}_{i-}} \mathbf{a}(\theta_q) = \begin{cases} \mathbf{a}(\theta_q), & i = q \\ \mathbf{0}, & i \neq q \end{cases} \quad (4-24)$$

以及

$$(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_{0-}|0}) \mathbf{a}(\theta_q) = \mathbf{0}, \forall q = 1, \dots, Q \quad (4-25)$$

因此, 式(4-20)中的权向量 \mathbf{w}_{new} 满足

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_q) &= \mathbf{w}_{\text{pre}}^H \Psi^H(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{a}(\theta_q) \\ &= \mathbf{w}_{\text{pre}}^H \left((\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_{0-}|0}) + \sum_{i=1}^Q \eta_i^* \mathbf{E}_{i|\check{\mathbf{A}}_{i-}} \right) \mathbf{a}(\theta_q) \\ &= \eta_q^* \mathbf{w}_{\text{pre}}^H \mathbf{a}(\theta_q), q = 1, \dots, Q \end{aligned} \quad (4-26)$$

由式(4-26)可知, $\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_q)$ 是 $\mathbf{w}_{\text{pre}}^H \mathbf{a}(\theta_q)$ 的简单缩放, 缩放因子为 η_q^* 。

结合(4-23)和(4-26), 可以得到

$$\begin{aligned} L_{\text{new}}(\theta_q, \theta_0) &= \frac{|\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_q)|^2}{|\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} \\ &= |\eta_q^*|^2 \frac{|\mathbf{w}_{\text{pre}}^H \mathbf{a}(\theta_q)|^2}{|\mathbf{w}_{\text{pre}}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} \\ &= |\eta_q|^2 \cdot L_{\text{pre}}(\theta_q, \theta_0), q = 1, \dots, Q \end{aligned} \quad (4-27)$$

其中 $L_{\text{pre}}(\theta, \theta_0)$ 表示 \mathbf{w}_{pre} 的归一化方向图响应。显然, 式(4-27)表明权向量 \mathbf{w}_{pre} 经过线性变换 $\Psi(\boldsymbol{\eta})$, θ_q 方向的电平将被放大 $|\eta_q|^2$ 倍, $q = 1, \dots, Q$ 。因此, 如果希望

调节 θ_q 的电平使其满足

$$L_{\text{new}}(\theta_q, \theta_0) = \rho_q, q = 1, \dots, Q \quad (4-28)$$

则只需选择满足下式的参数 η_q

$$|\eta_q| = \sqrt{\frac{\rho_q}{L_{\text{pre}}(\theta_q, \theta_0)}}, q = 1, \dots, Q \quad (4-29)$$

显然, 如果希望保持 θ_p 处电平不变, 则应该取 $|\eta_q| = 1$ 。除此之外, 为了使导向矢量 $\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_Q)$ 线性独立, 应该取 $Q \leq N - 1$, 即最多可控制 $N - 1$ 个点。

为了展示上述结果, 下面再次使用10阵元等距线阵进行说明。取 $\theta_0 = 20^\circ$ 和三个待控制点 $\theta_1 = -35^\circ, \theta_2 = -20^\circ, \theta_3 = -10^\circ$ 。此时取 w_{pre} 为-25dB切比雪夫权。第一种场景下, 设置各控制点期望电平均为-40dB。根据式(4-29)可以得到 $|\eta_1| = 0.1851, |\eta_2| = 0.1798, |\eta_3| = 0.1859$ 。由于 η 的相位可以任意设定, 考虑两组 $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ 的参数配置。第一种配置下, 取 $\eta_1 = 0.1851, \eta_2 = 0.1798, \eta_3 = 0.1859$, 对应的方向图如图4-3(a)中蓝色实线所示。第二种配置取 $\eta_1 = 0.1851e^{j\pi}, \eta_2 = 0.1798e^{j\pi/3}, \eta_3 = 0.1859e^{j\pi/4}$, 对应的方向图如图4-3(a)中红色虚线所示。可以看出, 两组参数选择均可以将 $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ 方向的电平调节为期望电平, 但两种配置下非控制角度的方向图是不一样的。

第二种场景下, 将 θ_1 方向的期望电平(即 ρ_1)设置为-30dB, 其它参数不变。相比于第一种场景, 此时可以计算得到 $|\eta_1| = 0.5854$, 而 $|\eta_2|$ 和 $|\eta_3|$ 均保持不变。沿用第一种场景下 η_2 和 η_3 的取值, 分别检验当取 $\eta_1 = 0.5854$ 和 $\eta_1 = 0.5854e^{j\pi/2}$ 时的方向图。如图4-3(b)所示, 两种参数设置下均可以实现预先的方向图控制任务, 而两个方向图是有区别的。

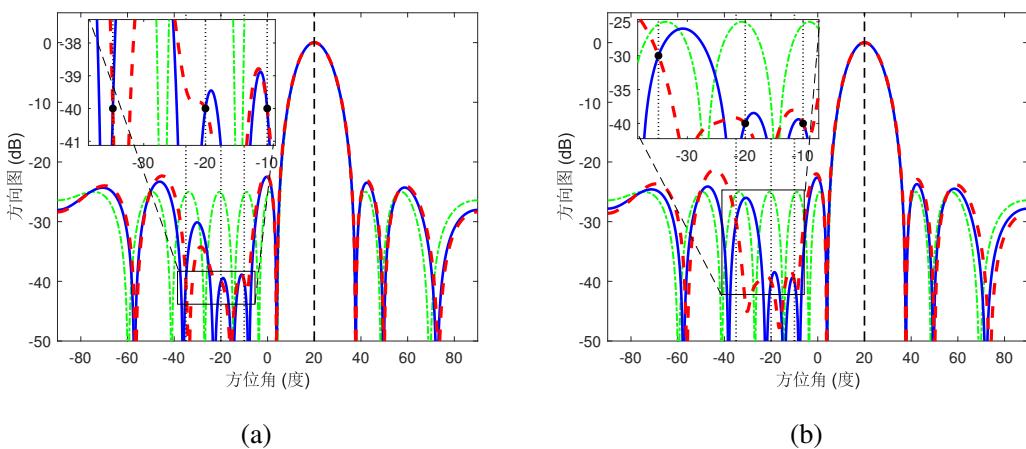


图 4-3 不同相位得到的方向图对比。(a)第一种场景得到的结果;(b)第二种场景得到的结果

由上述讨论和仿真可知, 通过调节式(4-29)中 $|\eta_q|$ 的取值, 可以独立地控制 θ_q 方

向的电平。而且, η_q 的相位不改变 θ_q 的电平值 (即 $L_{\text{new}}(\theta_q, \theta_0)$), 但影响非控制点的波束形状。鉴于此, 下面讨论如何选取 η_q 的相位, $q = 1, \dots, Q$ 。

4.2.2.2 参数确定

下面考虑在给定权向量 \mathbf{w}_{pre} , 待控制角度 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q$ 以及相应的期望电平 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_Q$ 的基础上, 如何确定式 $\mathbf{w}_{\text{new}} = \Psi(\boldsymbol{\eta})\mathbf{w}_{\text{pre}}$ 中的参数向量 $\boldsymbol{\eta}$ (包括各元素的幅度和相位)。首先定义向量 \mathbf{r} 为

$$\mathbf{r} \triangleq [r_0, r_1, \dots, r_Q]^T \quad (4-30)$$

其中 $r_0 = 1$, $r_q \triangleq |\eta_q|$, $q = 1, \dots, Q$ 。

由前文可知, η_q 的模值 (即 $|\eta_q|$) 可由式 (4-29) 得到, 下面考虑如何确定 η_q 的相位, $q = 1, \dots, Q$ 。事实上, 如何优化 $\boldsymbol{\eta}$ 的相位取决于具体应用。下面通过最大化白噪声增益来优化 $\boldsymbol{\eta}$ 的相位, 其它形式的目标函数同理。

首先定义白噪声增益 G 为

$$G = \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{\mathbf{w}^H \mathbf{w}} \quad (4-31)$$

给定 \mathbf{w}_{pre} , θ_q 和 ρ_q , $q = 1, \dots, Q$, 可以建立下面优化问题

$$\underset{\mathbf{w}_{\text{new}}, \boldsymbol{\eta}}{\text{maximize}} \quad \frac{|\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{w}_{\text{new}}} \quad (4-32a)$$

$$\text{subject to} \quad L_{\text{new}}(\theta_q, \theta_0) = \rho_q, \quad q = 1, \dots, Q \quad (4-32b)$$

$$\mathbf{w}_{\text{new}} = \Psi(\boldsymbol{\eta})\mathbf{w}_{\text{pre}} \quad (4-32c)$$

$$\mathbf{e}_1^T \boldsymbol{\eta} = 1 \quad (4-32d)$$

其中 \mathbf{e}_1 为 $(Q + 1) \times 1$ 维向量, 其首元素为一, 其余元素为零。由式(4-23)可知, 如果 $\mathbf{w}_{\text{new}} = \Psi(\boldsymbol{\eta})\mathbf{w}_{\text{pre}}$, 则 $|\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2$ 为常数。而且, 注意到 $\mathbf{w}_{\text{new}} = \Psi(\boldsymbol{\eta})\mathbf{w}_{\text{pre}}$ 可以重新整理为

$$\mathbf{w}_{\text{new}} = \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} \quad (4-33)$$

其中 \mathbf{B} 定义为

$$\mathbf{B} \triangleq \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_0 - |0\rangle}^H \right) \mathbf{w}_{\text{pre}}, \mathbf{E}_{1|\check{\mathbf{A}}_1 -}^H \mathbf{w}_{\text{pre}}, \dots, \mathbf{E}_{Q|\check{\mathbf{A}}_Q -}^H \mathbf{w}_{\text{pre}} \right] \quad (4-34)$$

由于约束(4-32b)可以被替换为 $|\eta_q| = r_q, q = 1, \dots, Q$, 因此问题(4-32)可以重新表述为

$$\underset{\boldsymbol{\eta}}{\text{minimize}} \quad \boldsymbol{\eta}^H \mathbf{B}^H \mathbf{B} \boldsymbol{\eta} \quad (4-35a)$$

$$\text{subject to} \quad \boldsymbol{\eta}(1) = 1 \quad (4-35b)$$

$$|\boldsymbol{\eta}(q+1)| = r_q, q = 1, \dots, Q \quad (4-35c)$$

解问题(4-35)之前, 首先考虑下面问题

$$\underset{\mathbf{y}}{\text{minimize}} \quad \mathbf{y}^H \mathbf{B}^H \mathbf{B} \mathbf{y} \quad (4-36a)$$

$$\text{subject to} \quad |\mathbf{y}(i+1)| = r_i, i = 0, 1, \dots, Q \quad (4-36b)$$

注意到在问题(4-36)中, 约束 $\mathbf{y}(1) = 1$ 被替换为 $|\mathbf{y}(1)| = 1$ 。假设 \mathbf{y}_* 是问题(4-36)的最优解, 则问题(4-35)的最优解可以表示为

$$\boldsymbol{\eta}_* = \mathbf{y}_*/\mathbf{y}_*(1) \quad (4-37)$$

相应地, 问题(4-32)的最终权向量可以表示为

$$\mathbf{w}_{\text{new},*} = \mathbf{B}\boldsymbol{\eta}_* = \mathbf{B}\mathbf{y}_*/\mathbf{y}_*(1) \quad (4-38)$$

由上述分析可知, 权向量确定的关键是如何解问题(4-36)。由于包含恒模约束(4-36b), 问题(4-36)非凸。为了解非凸问题(4-36), 下面采用梯度投影算法。梯度投影具有运算量低的优点, 且其收敛性可以保证。

梯度投影或者投影的梯度下降法是传统梯度下降方法的改进, 该方法已在文献[150]中解决恒模最小二乘问题。按照文献[150], 问题(4-36)的梯度投影算法的步骤描述见算法13, 其中 ε 为步长。注意到算法13包含与梯度下降类似的步骤, 以及向非凸可行集投影的额外操作。由于向恒模约束可行集的投影具有解析解, 所以梯度投影每步执行非常高效。

算法 13 解问题(4-36)的梯度投影算法

- 1: 输入: $j = 0, \delta \in (0, 1), \mathbf{y}_0 = \mathbf{r}, \varepsilon = \delta/\lambda_{\max}(\mathbf{B}^H \mathbf{B})$ 。
 - 2: **while** 不收敛 **do**
 - 3: 得到 $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{y}_j - \varepsilon \cdot \mathbf{B}^H \mathbf{B} \mathbf{y}_j$ 。 —————— (梯度下降)
 - 4: 更新 $\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{r} \odot e^{j \angle \boldsymbol{\nu}}$ 。 —————— (向可行集投影)
 - 5: 取 $j = j + 1$ 。
 - 6: **end while**
 - 7: 输出: $\mathbf{y}_* = \mathbf{y}_j$ 。
-

实际上，梯度投影每步迭代可以降低目标函数，而且，文献[150]得到关于算法13的下面结论：

- 全局收敛性：解序列 $\{\mathbf{y}_j\}$ 收敛到集合 \mathcal{K} ，其中 \mathcal{K} 包含问题(4-36)的所有Karush-Kuhn-Tucker (KKT)解。
- 迭代复杂度：算法13至少以子线性速度收敛到KKT点。

因此，梯度投影算法以可观的复杂度收敛到一个有意义的解。最终，FARCOP算法的总结见算法14。

算法 14 FARCOP 算法

- 1: 输入： θ_0 , \mathbf{w}_{pre} , $L_{\text{pre}}(\theta, \theta_0)$, θ_q , ρ_q , $q = 1, 2, \dots, Q$ 。
 - 2: 得到式(4-34)中的矩阵 \mathbf{B} 。
 - 3: 由(4-29)计算 r_q , 得到(4-30)中的 \mathbf{r} 。
 - 4: 利用梯度投影算法（参考算法13）解问题(4-36)，得到(4-37)中 $\boldsymbol{\eta}_*$ 。
 - 5: 输出：式(4-38)中的权向量 $\mathbf{w}_{\text{new},*}$ 。
-

如果 \mathbf{w}_{pre} 和 $\mathbf{a}(\theta_i)$, $i = 0, 1, \dots, Q$, 均为共轭中心对称向量，不难验证 $\mathbf{B}^H \mathbf{B}$ 为实矩阵。则问题(4-35)的解应该为实向量。事实上，上述条件下如果取 $\mathbf{y}_0 = \mathbf{r}$ 则算法13中 $\boldsymbol{\nu}$ 收敛至实向量。而且，取 $\mathbf{y}_0 = \mathbf{r}$, $\delta \in (0, 1)$ ，大量仿真显示算法13中的序列中间结果 \mathbf{y}_{j+1} 总等于 \mathbf{r} 。这是因为如果 $\delta \in (0, 1)$ ，则 $\mathbf{I} - \varepsilon \cdot \mathbf{B}^H \mathbf{B}$ 近似为对角矩阵，且对角元素为正。进一步有，向量 $\boldsymbol{\nu}$ 元素的符号与向量 \mathbf{y}_j 各元素符号相同。因此，对于共轭中心对称的 \mathbf{w}_{pre} 和 $\mathbf{a}(\theta_i)$, $i = 0, 1, \dots, Q$, 可以取 $\boldsymbol{\eta}_*$ 为

$$\boldsymbol{\eta}_* = \mathbf{r} \quad (4-39)$$

而且，共轭中心对称的假设下，不难验证 $\mathbf{w}_{\text{new},*} = \mathbf{B} \boldsymbol{\eta}_*$ 也为共轭中心对称向量，这方便了FARCOP算法的迭代。另外，对于中心对称阵列，其导向矢量具有共轭中心对称结构。

前文讨论中，假设待控制角度精确已知。事实上，FARCOP算法可以扩展到控制角度非精确已知的情况。这使得利用FARCOP算法进行干扰抑制成为可能，其中干扰方向不是精确已知的。该场景下，将斜投影构造中的导向矢量 $\mathbf{a}(\theta_q)$ 替换为向量 \mathbf{v}_q ，其中 \mathbf{v}_q 表示矩阵 \mathbf{R} 的第 q 个主特征向量， $q = 1, \dots, Q$ ， \mathbf{R} 由下式计算得到

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) d\theta \quad (4-40)$$

其中 Ω 为干扰的可能区间， \mathbf{R} 可以由求和操作近似得到。由于 \mathbf{v}_q 提取了 \mathbf{R} 的主要成分，将 $\mathbf{a}(\theta_q)$ 替换为 \mathbf{v}_q ，取 $\eta_{q,*} = 0$ 并应用FARCOP算法即可在区间 Ω 形成宽凹

口, $q = 1, \dots, Q$ 。注意到上述场景下, Q 可以根据 \mathbf{R} 的特征分解结果灵活确定。

4.2.2.3 计算复杂度

下面对FARCOP算法的计算复杂度进行分析。对于中心对称阵列, FARCOP算法主要计算量在于斜投影算子 $\mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_0-|0}$ 和 $\mathbf{E}_{q|\check{\mathbf{A}}_q-}$ 的计算。对于每个斜投影算子, 其计算复杂度为 $O(N^3)$ 。因此该场景下FARCOP算法的计算复杂度为 $O(N^3)$ 。对于一般阵列, FARCOP算法需要额外的梯度投影操作进行参数确定。梯度投影算法每步的计算复杂度为 $O(N)$, 阶数低于斜投影算子的计算量阶数。综上可知, 对于中心对称阵列和一般阵列, 所提FARCOP算法的计算复杂度均为 $O(N^3)$ 。

4.2.3 MA²RC与FARCOP比较

对于给定的 \mathbf{w}_{pre} , MA²RC算法可以实现多点精确方向图控制。MA²RC算法中, 权向量更新形式为

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}} = \mathbf{Z}_1 \left[(-\mathbf{F}^\dagger \mathbf{b} + \mathbf{f}_n)^T, 1 \right]^T, \forall \mathbf{f}_n \in \mathcal{N}(\mathbf{F}) \quad (4-41)$$

其中 \mathbf{F} 和 \mathbf{b} 分别满足

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_2}^\perp \mathbf{U}_{1,2} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_3}^\perp \mathbf{U}_{1,2} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_Q}^\perp \mathbf{U}_{1,2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_2}^\perp \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_3}^\perp \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_Q}^\perp \mathbf{w}_1 \end{bmatrix} \quad (4-42)$$

\mathbf{Z}_q 定义为

$$\mathbf{Z}_q \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{q,2} & \mathbf{w}_q \end{bmatrix}, q = 1, \dots, Q \quad (4-43)$$

其中 \mathbf{w}_q 由 A²RC 算法得到, 表示为 $\mathbf{w}_q = \mathbf{w}_{\text{pre}} + \mu_q \mathbf{a}(\theta_q)$, μ_q 由 ρ_q 确定。式(4-42)中矩阵 $\mathbf{U}_{q,2}$ 为 \mathbf{U}_q 的子矩阵, 满足

$$\mathbf{U}_q = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{u}_1}_{\mathbf{U}_{q,1}} \quad \underbrace{\mathbf{u}_2}_{\mathbf{U}_{q,2}} & \underbrace{\mathbf{u}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_N}_{\mathbf{U}_{q,2}} \end{bmatrix} \quad (4-44)$$

其中 \mathbf{U}_q 为矩阵 $[\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_q)]$ 的左奇异向量构成的矩阵, 即 $[\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_q)] = \mathbf{U}_q \Sigma_q \mathbf{V}_q^H$ 。不难将MA²RC算法的权向量 $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}$ 展开为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{1,2} & \mathbf{w}_1 \end{bmatrix} \left[(-\mathbf{F}^\dagger \mathbf{b} + \mathbf{f}_n)^T, 1 \right]^T \\ &= \mathbf{U}_{1,2} (-\mathbf{F}^\dagger \mathbf{b} + \mathbf{f}_n) + \mathbf{w}_{\text{pre}} + \mu_1 \mathbf{a}(\theta_1) \\ &= \mathbf{w}_{\text{pre}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{1,2} & \mathbf{a}(\theta_1) \end{bmatrix} \left[(-\mathbf{F}^\dagger \mathbf{b} + \mathbf{f}_n)^T, \mu_1 \right]^T}_{\triangleq \tilde{\Delta}} \end{aligned} \quad (4-45)$$

其中 $\tilde{\Delta}$ 为添加在 \mathbf{w}_{pre} 上的向量。

对于FARCOP算法，由附录C.1中的(C-10)和(C-11)的推导可知

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{q|\check{\mathbf{A}}_{q-}}^H \mathbf{w}_{\text{pre}} &= \xi_q (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{q-}}) \mathbf{a}(\theta_q) \mathbf{a}^H(\theta_q) \mathbf{w}_{\text{pre}} \\ &= \xi_q \mathbf{a}^H(\theta_q) \mathbf{w}_{\text{pre}} \check{\mathbf{A}} \mathbf{h}_q, q = 1, \dots, Q\end{aligned}\quad (4-46)$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_0-|0}^H) \mathbf{w}_{\text{pre}} &= (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}}^H + \mathbf{E}_{0|\check{\mathbf{A}}_0}^H) \mathbf{w}_{\text{pre}} \\ &= \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}}^\perp \mathbf{w}_{\text{pre}} + \xi_0 \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\text{pre}} \check{\mathbf{A}} \mathbf{h}_0\end{aligned}\quad (4-47)$$

其中 ξ_i 和 \mathbf{h}_i , $i = 0, 1, \dots, Q$, 定义见附录C.1的(C-2), (C-9), (C-13), (C-14)。则不难将(4-20)中的 \mathbf{w}_{new} 重新表示为

$$\mathbf{w}_{\text{new}} = \Psi(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{w}_{\text{pre}} = \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}}^\perp \mathbf{w}_{\text{pre}} + \check{\mathbf{A}} \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda}_{\text{pre}} \boldsymbol{\eta} \quad (4-48)$$

其中的 \mathbf{H} 的定义见附录C.1的(C-17), $\boldsymbol{\Lambda}_{\text{pre}} \in \mathbb{C}^{(Q+1) \times (Q+1)}$ 类似于(C-18)中 $\boldsymbol{\Lambda}_0$ 的定义, 满足

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\text{pre}} = \text{Diag}([\xi_0 \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\text{pre}}, \dots, \xi_Q \mathbf{a}^H(\theta_Q) \mathbf{w}_{\text{pre}}]) \quad (4-49)$$

由(4-48), 可以进一步FARCOP的权向量 \mathbf{w}_{new} 展开为

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{\text{new}} &= \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}}^\perp \mathbf{w}_{\text{pre}} + \check{\mathbf{A}} \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda}_{\text{pre}} \boldsymbol{\eta} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}}) \mathbf{w}_{\text{pre}} + \check{\mathbf{A}} \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda}_{\text{pre}} \boldsymbol{\eta} \\ &= \mathbf{w}_{\text{pre}} + \underbrace{\check{\mathbf{A}} \left(\mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda}_{\text{pre}} \boldsymbol{\eta} - (\check{\mathbf{A}}^H \check{\mathbf{A}})^{-1} \check{\mathbf{A}}^H \mathbf{w}_{\text{pre}} \right)}_{\triangleq \Delta}\end{aligned}\quad (4-50)$$

其中 Δ 表示添加到 \mathbf{w}_{pre} 的成分。

由(4-45)和(4-50), 不难得到

$$\tilde{\Delta} \in \left[\mathcal{R}^\perp([\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_1)]) \oplus \mathcal{R}(\mathbf{a}(\theta_1)) \right] \quad (4-51a)$$

$$\Delta \in \mathcal{R}(\check{\mathbf{A}}) \quad (4-51b)$$

上述结果表明, MA²RC算法和FARCOP算法中添加到权向量 \mathbf{w}_{pre} 上的成分位于不同的空间。对于FARCOP算法有 $\mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}}^\perp \Delta = \mathbf{0}$, 而类似的结论对MA²RC算法不一定满足。由于 $\mathcal{R}^\perp(\check{\mathbf{A}})$ 中的成分不影响待控制点的电平, 可以看出FARCOP算法中没有在 \mathbf{w}_{pre} 中添加冗余分量(即 $\mathcal{R}^\perp(\check{\mathbf{A}})$ 中的分量)。所带来的的好处是在非控制角度产生较小的波束变化。

而且, 对于给定的待控制角度, 如果期望电平变化, MA²RC算法需要重新计算权向量, 且运算量较大, 而 FARCOP算法只需要进行简单的参数更新操作。另

外， MA^2RC 算法通过优化向量 \mathbf{f}_n 来得到较小的方向图变化，而FARCOP算法通过设计参数向量 $\boldsymbol{\eta}$ 来最大化白噪声增益。

总结来讲，FARCOP算法和 MA^2RC 算法的主要区别包括：

- 两种算法使用不同的权向量更新形式。
- 期望电平改变时，FARCOP算法可以通过调节参数 $\boldsymbol{\eta}$ 实现灵活地方向图控制，而 MA^2RC 则需要重新计算。
- FARCOP算法计算量较低，其计算复杂度为 $\mathcal{O}(N^3)$ ， MA^2RC 算法计算量较高，其计算复杂度为 $\mathcal{O}(QN^3)$ 。
- FARCOP算法中引入了白噪声增益进行参数优化，而 MA^2RC 算法没有。

4.2.4 基于FARCOP的方向图综合

本节介绍FARCOP算法在方向图综合中的应用。总体来说，这里采用的方式与基于 MA^2RC 的方向图综合方法类似。相比于 MA^2RC ，FARCOP在运算量和灵活性方面均有所改善。

具体地，记期望方向图为 $L_d(\theta)$ 。首先指定某初始权向量 \mathbf{w}_0 ，同时取 $k = 1$ 。比较 \mathbf{w}_{k-1} 的方向图（记作 $L_{k-1}(\theta, \theta_0)$ ）与期望方向图 $L_d(\theta)$ ，并选取 Q 个待控制角度。之后利用FARCOP算法将待控制角度处的电平调节至期望电平，并更新权向量。取 $k = k + 1$ 并重复上述过程，直到获得满意的方向图结果。基于FARCOP的方向图综合算法总结见算法15。

4.2.5 实验仿真

本小节对FARCOP算法及其在方向图综合中的应用进行仿真。如无特别说明，取 MA^2RC 中的权向量 \mathbf{f}_n 为零向量。

4.2.5.1 FARCOP算法方向图控制性能验证

(1). 给定泰勒权的精确方向图控制

考虑 $N = 16$ 阵元各向同性等距线阵，阵元间距为半波长。波束中心取为 $\theta_0 = -45^\circ$ ，同时取权向量 \mathbf{w}_{pre} 为 -20dB 旁瓣衰落的泰勒权。该场景下， $\mathbf{a}(\theta)$ 和 \mathbf{w}_{pre} 均为共轭中心对称向量。我们使用梯度投影算法对FARCOP参数向量进行优化，并将最终的方向图与 MA^2RC 算法进行对比。

第一种场景下，考虑三个待控制角度，分别为 $\theta_1 = -10^\circ$ ， $\theta_2 = 5^\circ$ 和 $\theta_3 = 60^\circ$ ，三个角度的期望电平均为 -40dB 。图4-4展示了 MA^2RC 算法和FARCOP算法的方向图结果。由图中可以看出给定三个方向的电平已经被精确调节到期望电平，且

算法 15 基于FARCOP的方向图综合算法

```

1: 输入:  $\theta_0$ , 期望方向图  $L_d(\theta)$ , 初始权向量  $\mathbf{w}_0$  以及相应的归一化方向图  $L_0(\theta, \theta_0)$ , 取  $k = 1$ 。
2: while 1 do
3:   通过比较  $L_{k-1}(\theta, \theta_0)$  与  $L_d(\theta)$  来选取  $Q_k$  个待控制角度。
4:   应用FARCOP算法 (见算法14) 实现  $L_k(\theta_q, \theta_0) = L_d(\theta_q)$ ,  $q = 1, \dots, Q_k$ 。
5:   得到更新后的权向量  $\mathbf{w}_k$  及相应方向图  $L_k(\theta, \theta_0)$ 。
6:   if  $L_k(\theta, \theta_0)$  满足条件 then
7:     取  $k = k + 1$ 。
8:   else
9:     退出。
10:  end if
11: end while
12: 输出:  $\mathbf{w}_k$  和  $L_k(\theta, \theta_0)$ 。

```

非控制区域具有较小的方向图变化。对于FARCOP算法, 此时得到 $\eta_{1,\star} = r_1 = 0.2051$, $\eta_{2,\star} = r_2 = 0.2205$, $\eta_{3,\star} = r_3 = 0.1242$ 。有趣的是, MA²RC和FARCOP算法此时得到相同的方向图结果。

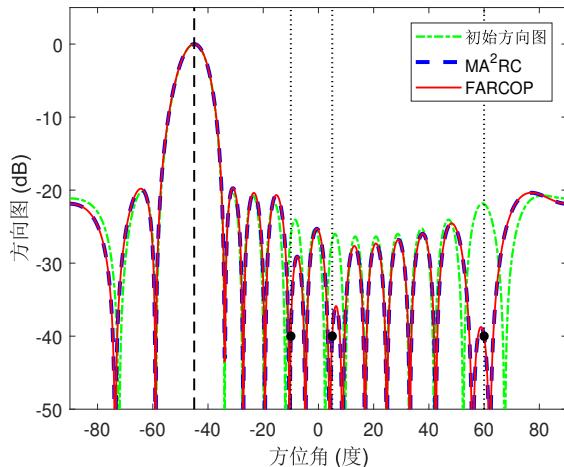


图 4-4 方向图控制结果对比 (场景一)

为了进一步对比, 我们保持初始权向量和待控制角度不变, 将三个方向的期望电平设定为 $\rho_1 = -40\text{dB}$, $\rho_2 = -40\text{dB}$ 和 $\rho_3 = 0\text{dB}$ 。注意到 ρ_1 和 ρ_2 均和前例一样。此时得到的方向图对比见图4-5, 从中可以看出测试的两种算法均完成了给定的方向图控制任务。FARCOP算法此时得到的参数为 $\eta_{1,\star} = r_1 = 0.2051$, $\eta_{2,\star} = r_2 =$

0.2205和 $\eta_{3,*} = r_3 = 12.4240$ 。更重要的是，相比于场景一，只有参数 $\eta_{3,*}$ 发生了变化。这说明FARCOP算法中，各点阵列方向图响应可以灵活独立地进行控制。由图4-5可以看出，MA²RC方法得到的主瓣比FARCOP算法要宽。

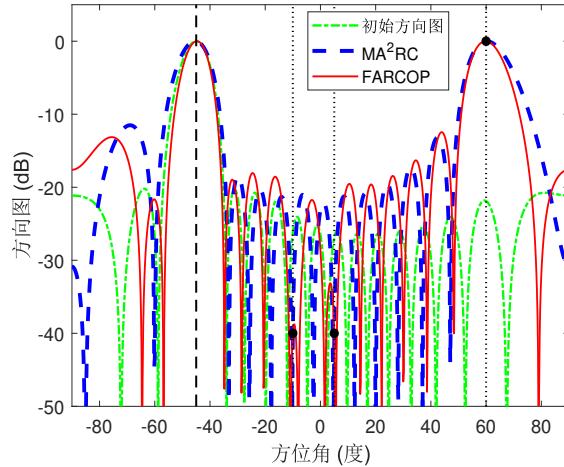


图 4-5 方向图控制结果对比（场景二）

为了说明FARCOP算法在控制角度个数较多时仍然有效，下面取 $Q = N - 1 = 15$ （各角度值如表4-1所示），取各角度的期望电平为-40dB。图4-6展示了得到的方向图结果，表4-1列出了得到的参数。由图4-6可以看出，所提算法可以将所有待控制点电平调制到期望电平。除此之外，由表4-1可以看出 $\eta_{q,*} = r_q$, $q = 1, \dots, Q$ 。

表 4-1 角度设定与得到的参数（初始权为泰勒权向量）

q	θ_q	r_q	$\eta_{q,*}$	q	θ_q	r_q	$\eta_{q,*}$
1	-10°	0.2051	0.2051	9	-3°	0.2617	0.2617
2	5°	0.2205	0.2205	10	12°	0.2449	0.2449
3	60°	0.1242	0.1242	11	20°	0.2204	0.2204
4	-80°	0.1414	0.1414	12	30°	0.2242	0.2242
5	-70°	0.3123	0.3123	13	40°	0.3004	0.3004
6	-28°	0.5207	0.5207	14	50°	0.2421	0.2421
7	-23°	0.1140	0.1140	15	70°	0.2981	0.2981
8	16°	0.1233	0.1233				

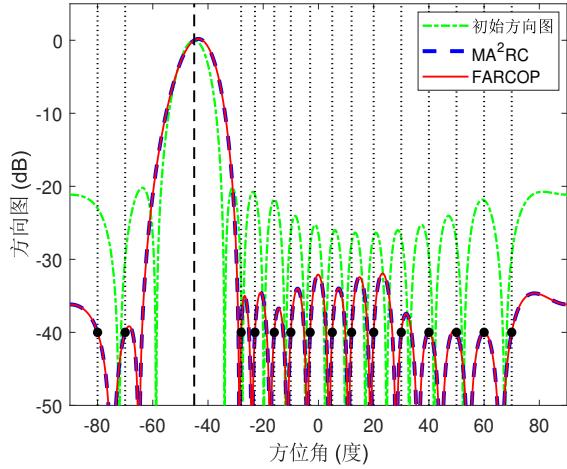


图 4-6 控制点数增加时方向图结果对比

(2). 基于汉明权向量的宽凹口方向图综合

为了验证FARCOP算法对任意给定权向量均有效，下面考虑 $N = 16$ 各向同性阵元等距线阵，取 $\mathbf{w}_{\text{pre}} = \mathbf{a}(\theta_0) \odot \mathbf{w}_h$ ，其中 $\theta_0 = 15^\circ$ 为主波束轴， \mathbf{w}_h 代表 16 点汉明窗。与之前仿真中待控制角度准确设定不同，这里假设干扰方向（对应于待控制角度区域）粗略已知。具体地，假设所有可能的干扰均位于角度区间 $\Omega = [\theta_1 - 2^\circ, \theta_1 + 2^\circ] \cup [\theta_2 - 2^\circ, \theta_2 + 2^\circ]$ 内，其中 $\theta_1 = -30^\circ$ ， $\theta_2 = 45^\circ$ 。此时期望在 Ω 区域内得到宽凹口，而在 Ω 区域外产生较小的方向图变化（相比于 \mathbf{w}_{pre} 的方向图）。此时取 $Q = 6$ ，最终得到的方向图如图4-7所示。可以看出FARCOP算法可以在 Ω 区域内得到两个宽凹口，而MA²RC方法仅在 θ_1 和 θ_2 两方向上产生两个窄凹口。

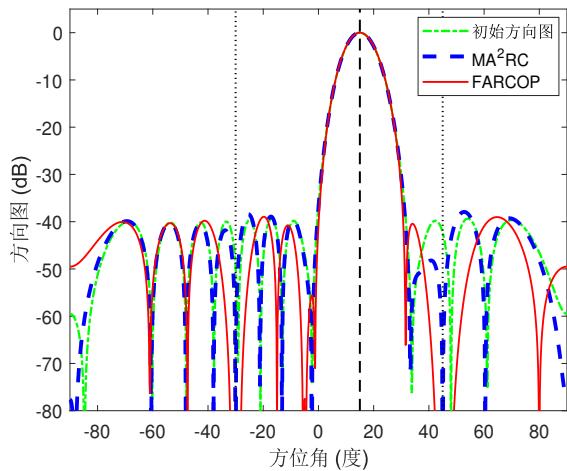


图 4-7 宽凹口置零结果对比

4.2.5.2 基于FARCOP的方向图综合仿真

本节仿真验证FARCOP算法的方向图综合效果。为了进行实验对比，同时展示凸优化方法(convex programming,CP)^[43]，A²RC方法^[137]，MA²RC方法^[148]以及多点OPARC方法^[151]得到的方向图结果。

(1). 大规模等距线阵非等电平旁瓣综合

下面考虑 $N = 100$ 维大规模阵列的旁瓣综合，主波束中心为 $\theta_0 = 60^\circ$ 。期望方向图具有不等电平旁瓣，其中 $[-20^\circ, 30^\circ]$ 区域的电平上限为 -45dB ，而其它区域的电平上限为 -35dB 。明显可以看出，期望方向图与 -35dB 旁瓣的切比雪夫方向图类似。因此，取初始权向量为 -35dB 旁瓣衰落的切比雪夫权。

该场景下，每步取 $Q_k = 41$ 个旁瓣峰值角度并利用FARCOP算法将各角度的电平调节为期望电平。由于 $Q \ll N$ ，每步迭代的运算量大大降低。而且，不难发现等距线阵导向矢量和初始权均具有共轭中心对称结构。可以由式(4-39)计算最优参数向量 η_* ，从而得到解析的权向量更新形式，从而可进一步降低所提方法的运算复杂度。图4-8展示了方向图合成的中间结果，从中可以看出只需要9步即可得到满意的方向图。

为了进行公平比较，MA²RC算法和多点OPARC算法进行同样的迭代步数，两种算法每步的控制角度均取为 $Q_k = 41$ 。从图4-9可以看出，凸优化方法的旁瓣包络不能与期望方向图包络对齐。MA²RC算法和FARCOP算法表现良好，两算法的方向图均优于A²RC方法的方向图（经过300次迭代）。

(2). 各向异性阵元非等旁瓣电平方向图综合

考虑21阵元各向异性阵元线性随机阵列，第 n 元阵列方向图表示为：

$$g_n(\theta) = [\cos(\pi l_n \sin(\theta + \zeta_n)) - \cos(\pi l_n)] / \cos(\theta + \zeta_n) \quad (4-52)$$

其中 ζ_n 和 l_n 分别表示阵元方向和长度，其具体取值以及阵元位置参数见表4-2。主瓣波束中心为 $\theta_0 = 20^\circ$ ，期望电平具有 -25dB 等电平旁瓣。取 $\mathbf{a}(\theta_0)$ 为初始权向量，并执行 $k = 30$ 步迭代，FARCOP算法可得到满意的方向图，其权向量如表4-2所示。

各算法的方向图对比如图4-10所示，从中可以看出A²RC算法（经过200次迭代）和多点OPARC算法（迭代次数与FARCOP算法相同）在某些区间得到的方向图电平高于期望值。凸优化方法得到的旁瓣电平远远低于期望的设定值。FARCOP算法可以得到满意的方向图控制结果，且其旁瓣包络与期望电平对齐。

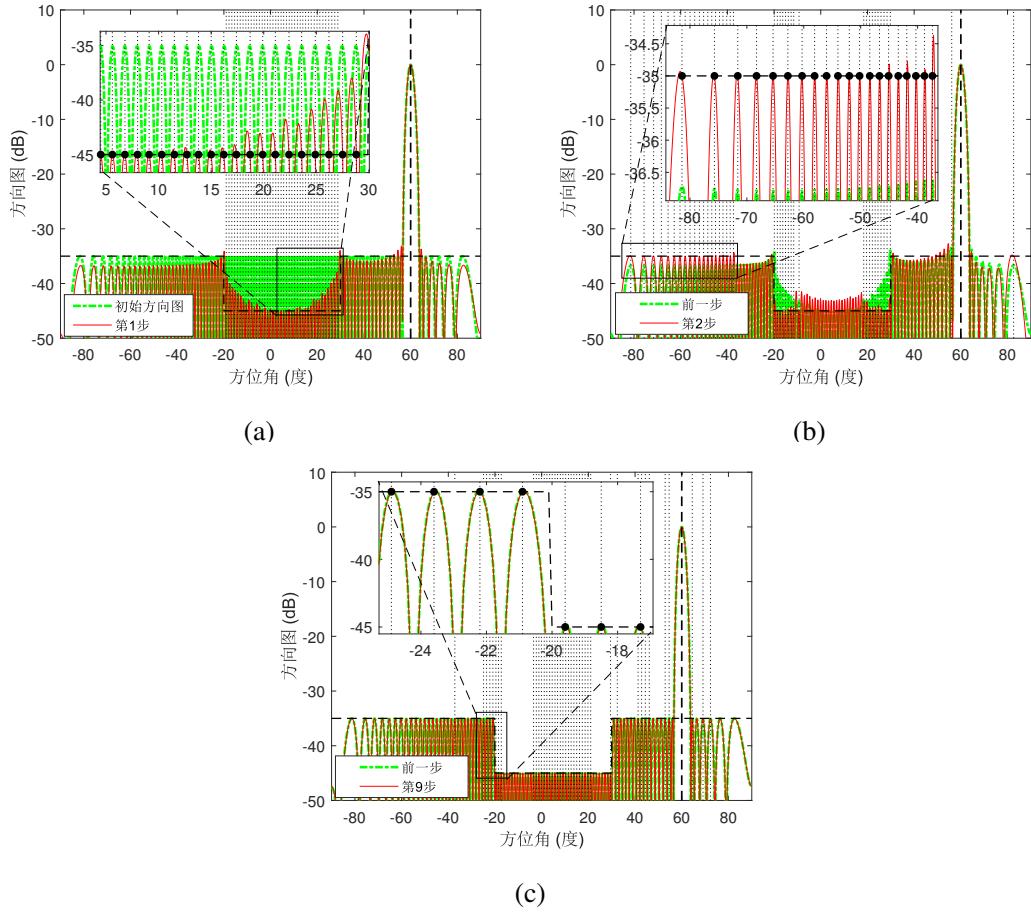


图 4-8 非等旁瓣电平方向图综合结果。(a)第1步结果;(b)第2步结果;(c)第9步结果

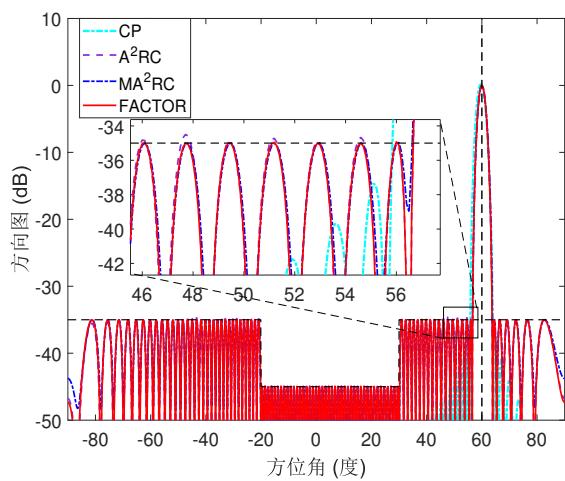


图 4-9 大规模阵非等电平旁瓣方向图综合结果对比

表 4-2 各向异性随机阵列参数及FARCOP算法得到的权向量

n	$x_n(\lambda)$	$l_n(\lambda)$	ζ_n	w_n
1	0.00	0.30	0.0	$0.2286e^{-j0.5077}$
2	0.45	0.25	-4.0	$0.4067e^{+j1.1104}$
3	0.95	0.24	5.0	$0.2989e^{+j2.2288}$
4	1.50	0.20	-32	$0.5605e^{+j3.1325}$
5	2.04	0.26	-3.2	$0.4971e^{-j1.9015}$
6	2.64	0.27	10	$0.6629e^{-j0.6966}$
7	3.09	0.23	1.0	$0.5781e^{+j0.6136}$
8	3.55	0.24	-10	$0.6496e^{+j1.2708}$
9	4.05	0.25	0.0	$0.7850e^{+j2.3602}$
10	4.55	0.21	7.0	$1.0000e^{-j2.6879}$
11	5.06	0.20	5.0	$0.9296e^{-j1.6905}$
12	5.50	0.20	5.0	$0.9463e^{-j0.7415}$
13	6.01	0.29	4.0	$0.6760e^{+j0.3764}$
14	6.53	0.20	5.0	$0.7157e^{+j1.6457}$
15	7.07	0.26	-9.0	$0.6158e^{+j2.6468}$
16	7.52	0.21	7.0	$0.6295e^{-j2.8228}$
17	8.00	0.25	10	$0.4447e^{-j1.7589}$
18	8.47	0.21	6.0	$0.5811e^{-j0.5151}$
19	8.98	0.20	-8.0	$0.3871e^{+j0.5235}$
20	9.53	0.26	0.0	$0.2498e^{+j1.3010}$
21	10.01	0.25	5.0	$0.2517e^{+j2.8088}$

4.3 基于斜投影的多点方向图控制算法

这一节中，我们将给出两种基于斜投影的多点方向图控制算法。为了清晰起见，我们将待控制角度表示为 $\theta_1, \dots, \theta_Q$ ，同时用 ρ_1, \dots, ρ_Q 表示相应的期望电平。之前的权向量表示为 \mathbf{w}_{pre} ，假设满足 $\mathbf{w}_{\text{pre}}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1$ 。只要 $\mathbf{w}_{\text{pre}}^H \mathbf{a}(\theta_0) \neq 0$ ，上述条件总是可以通过缩放而成立。为了简洁起见，我们记 $\mathbf{A}(\theta_i, \dots, \theta_j) \triangleq [\mathbf{a}(\theta_i), \dots, \mathbf{a}(\theta_j)]$ 。

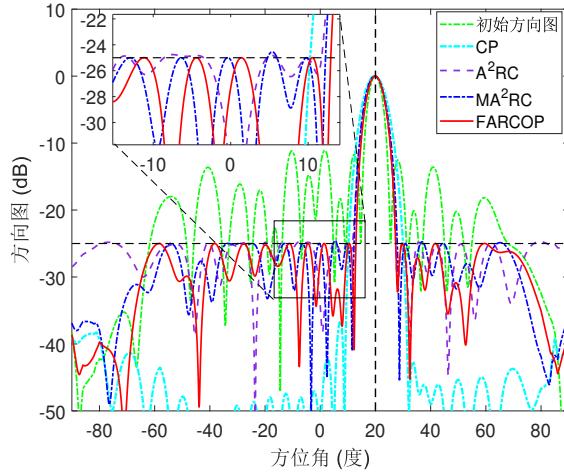


图 4-10 各向异性阵列方向图综合结果对比

4.3.1 基于斜投影的多点方向图控制算法

给定权向量 \mathbf{w}_{pre} , 我们考虑如何找到一个新的权向量 \mathbf{w}_{new} 满足

$$L_{\text{new}}(\theta_q, \theta_0) = \rho_q, q = 1, \dots, Q \quad (4-53)$$

其中 $L_{\text{new}}(\theta, \theta_0)$ 表示 \mathbf{w}_{new} 对应的波束方向图。除此之外, 在非控制点上, 我们期望获得较小的波束变化。

由前文可知, WORD 算法可以在指定方向调节阵列方向图响应。因此, 对于任意 $q \in \{1, \dots, Q\}$, 可以得到新的权向量 $\check{\mathbf{w}}_{\text{new},q}$ 可以将 θ_q 处的电平调节到理想的电平 ρ_q , 即 $|\check{\mathbf{w}}_{\text{new},q}^H \mathbf{a}(\theta_q)|^2 / |\check{\mathbf{w}}_{\text{new},q}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 = \rho_q$ 。权向量 $\check{\mathbf{w}}_{\text{new},q}$ 可以表示为

$$\check{\mathbf{w}}_{\text{new},q} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{q,\perp} & \mathbf{w}_{q,\parallel} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_q \end{bmatrix}^T \quad (4-54)$$

其中 $\mathbf{w}_{q,\perp} = \mathbf{P}_{\mathbf{a}(\theta_q)}^\perp \mathbf{w}_{\text{pre}}$, $\mathbf{w}_{q,\parallel} = \mathbf{P}_{\mathbf{a}(\theta_q)} \mathbf{w}_{\text{pre}}$ 。为了便于下文讨论, 我们将式(4-54)中的 $\check{\mathbf{w}}_{\text{new},q}$ 缩放为

$$\mathbf{w}_{\text{new},q} = \check{\mathbf{w}}_{\text{new},q} / (\mathbf{a}^H(\theta_0) \check{\mathbf{w}}_{\text{new},q}), q = 1, \dots, Q. \quad (4-55)$$

对于任意 $q \in \{1, \dots, Q\}$, 容易验证上式中的 $\mathbf{w}_{\text{new},q}$ 满足

$$\mathbf{w}_{\text{new},q}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1 \quad (4-56)$$

$$|\mathbf{w}_{\text{new},q}^H \mathbf{a}(\theta_q)|^2 = \rho_q \quad (4-57)$$

为了实现式(4-53)的阵列响应控制任务, 下面利用已有的 $\mathbf{w}_{\text{new},1}, \dots, \mathbf{w}_{\text{new},Q}$ 来

构造满足要求的新的权向量 \mathbf{w}_{new} 。具体来讲，新的权向量 \mathbf{w}_{new} 需要满足

$$\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1 \quad (4-58a)$$

$$\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_q) = e^{j\varphi_q} \mathbf{w}_{\text{new},q}^H \mathbf{a}(\theta_q), q = 1, \dots, Q \quad (4-58b)$$

或等价地，

$$\check{\mathbf{A}}^H \mathbf{w}_{\text{new}} = \mathbf{f} \quad (4-59)$$

其中

$$\check{\mathbf{A}} \triangleq \mathbf{A}(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_Q) \in \mathbb{C}^{N \times (Q+1)}$$

$$\mathbf{f} \triangleq [1, e^{j\varphi_1} \mathbf{w}_{\text{new},1}^H \mathbf{a}(\theta_1), \dots, e^{j\varphi_Q} \mathbf{w}_{\text{new},Q}^H \mathbf{a}(\theta_Q)]^H \in \mathbb{C}^{Q+1}$$

实值相位 φ_q ，可以取任意值， $q = 1, \dots, Q$ 。可以验证，满足(4-59)的权向量 \mathbf{w}_{new} 即可满足阵列方向图控制任务(4-53)。明显地，当 $Q = N - 1$ 时，我们有 $\mathbf{w}_{\text{new}} = \check{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{f}$ 。然而，当 $Q < N - 1$ 时，关于 \mathbf{w}_{new} 的线性方程(4-59)是欠定的，因此有无穷多个解。下面提出一种基于斜投影的权向量构造方式。

首先，我们将矩阵 $\check{\mathbf{A}}$ 中的列向量 $\mathbf{a}(\theta_i)$ ，并定义所得到的矩阵为 $\check{\mathbf{A}}_{i-}$ ，即

$$\check{\mathbf{A}}_{i-} \triangleq \mathbf{A}(\theta_0, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_Q) \in \mathbb{C}^{N \times Q} \quad (4-60)$$

相应地，定义

$$\mathbf{T}_0 \triangleq \mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_{0-} | \mathbf{a}(\theta_0)}^H \quad (4-61a)$$

$$\mathbf{T}_q \triangleq \mathbf{E}_{\mathbf{a}(\theta_q) | \check{\mathbf{A}}_{q-}}^H, q = 1, \dots, Q \quad (4-61b)$$

其中 $\mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_{0-} | \mathbf{a}(\theta_0)}$ 和 $\mathbf{E}_{\mathbf{a}(\theta_q) | \check{\mathbf{A}}_{q-}}$ 为斜投影矩阵，满足

$$\mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_{0-} | \mathbf{a}(\theta_0)} = \check{\mathbf{A}}_{0-} \left(\check{\mathbf{A}}_{0-}^H \mathbf{P}_{\mathbf{a}(\theta_0)}^\perp \check{\mathbf{A}}_{0-} \right)^{-1} \check{\mathbf{A}}_{0-}^H \mathbf{P}_{\mathbf{a}(\theta_0)}^\perp \quad (4-62)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{a}(\theta_q) | \check{\mathbf{A}}_{q-}} = \mathbf{a}(\theta_q) \left(\mathbf{a}^H(\theta_q) \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{q-}}^\perp \mathbf{a}(\theta_q) \right)^{-1} \mathbf{a}^H(\theta_q) \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{q-}}^\perp \quad (4-63)$$

不难发现

$$\mathbf{T}_i^H \mathbf{a}(\theta_j) = \begin{cases} \mathbf{a}(\theta_i), & j = i \\ \mathbf{0}, & j \neq i \end{cases} \quad (4-64)$$

其中 $i, j = 0, 1, \dots, Q$ 。由上式可知，当 $j \neq i$ 时，线性变换 \mathbf{T}_i^H 不改变向量 $\mathbf{a}(\theta_i)$ ，同时将向量 $\mathbf{a}(\theta_j)$ 变换为零向量。

利用上述性质，通过对权向量 \mathbf{w}_{pre} 和 $\mathbf{w}_{\text{new},q}$ 进行变换和线性组合来得到

新的权向量 \mathbf{w}_{new} 。具体来讲，考虑到 $\mathbf{w}_{\text{pre}}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1$ ，同时结合式(4-64)，可以得到

$$\mathbf{w}_{\text{pre}}^H \mathbf{T}_0^H \mathbf{a}(\theta_j) = \begin{cases} \mathbf{w}_{\text{pre}}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1, & j = 0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases} \quad (4-65)$$

以及

$$\mathbf{w}_{\text{new},q}^H \mathbf{T}_q^H \mathbf{a}(\theta_j) = \begin{cases} \mathbf{w}_{\text{new},q}^H \mathbf{a}(\theta_q), & j = q \\ 0, & j \neq q \end{cases} \quad (4-66)$$

根据式(4-65)和式(4-66)，我们可以得到如下满足要求的权向量 \mathbf{w}_{new}

$$\mathbf{w}_{\text{new}} = \mathbf{T}_0 \mathbf{w}_{\text{pre}} + \sum_{q=1}^Q e^{-j\varphi_q} \mathbf{T}_q \mathbf{w}_{\text{new},q} \quad (4-67)$$

不难验证

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_0) &= \mathbf{w}_{\text{pre}}^H \mathbf{T}_0^H \mathbf{a}(\theta_0) + \sum_{q=1}^Q e^{j\varphi_q} \mathbf{w}_{\text{new},q}^H \mathbf{T}_q^H \mathbf{a}(\theta_0) \\ &= \mathbf{w}_{\text{pre}}^H \mathbf{a}(\theta_0) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (4-68)$$

以及

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_q) &= \mathbf{w}_{\text{pre}}^H \mathbf{T}_0^H \mathbf{a}(\theta_q) + \sum_{i=1}^Q e^{j\varphi_i} \mathbf{w}_{\text{new},i}^H \mathbf{T}_i^H \mathbf{a}(\theta_q) \\ &= e^{j\varphi_q} \mathbf{w}_{\text{new},q}^H \mathbf{a}(\theta_q), \quad q = 1, \dots, Q \end{aligned} \quad (4-69)$$

因此，式(4-67)中的 \mathbf{w}_{new} 是线性方程 (4-59) 的解，即 \mathbf{w}_{new} 可满足式(4-53)中所描述的多点控制要求。

从(4-69)不难发现，(4-67)所得到的 \mathbf{w}_{new} 可以通过简单更新权向量 $\mathbf{w}_{\text{new},q}$ 来分别调节 θ_q 处的响应， $q = 1, \dots, Q$ 。用这种方式，其它控制点方向的电平（即 θ_i 处， $i = 1, \dots, Q, i \neq q$ ）保持不变，而 \mathbf{w}_{new} 不需要完全重新计算。因此，上述算法可以灵活地调节阵列方向图响应，特别是当只有一些预先设定的方向的期望电平变化时。

4.3.2 基于斜投影的波束中心无偏移多点控制算法

上一节中，我们介绍了一种基于斜投影的多点方向图控制算法。该算法具有解析解，且可以独立控制各方向电平。然而，上述算法可能导致波束中心偏移，使得得到的波束中心偏离原始的波束中心 θ_0 。为了解决波束中心偏移的缺陷，下面通过添加导数约束来对上节算法进行改进。

同样地，给定一个权向量 \mathbf{w}_{pre} （满足 $\mathbf{w}_{\text{pre}}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1$ ），待控制方向 θ_q 及其期望电平 ρ_q , $q = 1, \dots, Q$ 。为了实现波束中心无偏移阵列响应控制，最终的权向量应该满足式(4-53)，以及下面约束：

$$\theta_0 = \arg \max_{\theta} |\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta)| \quad (4-70)$$

为了确保上式(4-70)中的新约束成立，可以施加下面的导数约束：

$$\frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad (4-71)$$

其中 $P(\theta) = \mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{w}_{\text{new}}$ 代表 \mathbf{w}_{new} 的阵列功率响应， θ_0 是期望的波束中心。将 $P(\theta)$ 代入式(4-71)可以得到：

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} &= \mathbf{w}_{\text{new}}^H \frac{\partial \mathbf{a}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{w}_{\text{new}} + \mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta) \frac{\partial \mathbf{a}^H(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{w}_{\text{new}} \\ &= 2\Re \left(\mathbf{w}_{\text{new}}^H \frac{\partial \mathbf{a}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{w}_{\text{new}} \right) \end{aligned} \quad (4-72)$$

进一步有

$$\frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 2\Re \left(\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{d}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\text{new}} \right) \quad (4-73)$$

其中 $\mathbf{d}(\theta_0)$ 定义为

$$\mathbf{d}(\theta_0) \triangleq \frac{\partial \mathbf{a}(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \quad (4-74)$$

因此，为了实现满足式(4-53)且不产生波束中心偏移，新的权向量 \mathbf{w}_{new} 应该满足

$$\Re \left(\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{d}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\text{new}} \right) = 0 \quad (4-75a)$$

$$|\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_q)|^2 / |\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 = \rho_q, q = 1, \dots, Q \quad (4-75b)$$

根据前一节算法，等式(4-75)一定成立如果 \mathbf{w}_{new} 满足

$$\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1 \quad (4-76a)$$

$$\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_q) = e^{j\phi_q} \mathbf{w}_{\text{new},q}^H \mathbf{a}(\theta_q), q = 1, \dots, Q \quad (4-76b)$$

$$\Re \left(\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{d}(\theta_0) \right) = 0 \quad (4-76c)$$

其中 ϕ_q 可以为任意实数，式(4-76b)中的 $\mathbf{w}_{\text{new},q}$ 由WORD算法得到，参见式(4-55)。

下面考虑如何找到满足式(4-76)的 \mathbf{w}_{new} 。首先注意到

$$\Re \left(\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{d}(\theta_0) \right) = \Re(\mathbf{w}_{\text{new}}^T) \Re(\mathbf{d}(\theta_0)) + \Im(\mathbf{w}_{\text{new}}^T) \Im(\mathbf{d}(\theta_0)) \quad (4-77)$$

基于此，我们可以将(4-76c)等价地表示为

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}^T \tilde{\mathbf{d}}(\theta_0) = 0 \quad (4-78)$$

其中 $\tilde{\mathbf{x}} \triangleq [\Re(\mathbf{x}^T), \Im(\mathbf{x}^T)]^T$ 。另一方面，容易得到

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta) &= [\Re(\mathbf{w}_{\text{new}}^T), \Im(\mathbf{w}_{\text{new}}^T)] \left[\begin{pmatrix} \Re[\mathbf{a}(\theta)] \\ \Im[\mathbf{a}(\theta)] \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} \Im[\mathbf{a}(\theta)] \\ -\Re[\mathbf{a}(\theta)] \end{pmatrix} \right] \\ &= \tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}^T [\tilde{\mathbf{a}}(\theta) + j \boldsymbol{\Upsilon} \tilde{\mathbf{a}}(\theta)]\end{aligned}\quad (4-79)$$

其中矩阵 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 定义为

$$\boldsymbol{\Upsilon} \triangleq \begin{bmatrix} & \mathbf{I}_N \\ -\mathbf{I}_N & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N} \quad (4-80)$$

根据式(4-79)，约束(4-76a)可以重新表述为

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}^T \tilde{\mathbf{a}}(\theta_0) = 1, \quad \tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}^T \boldsymbol{\Upsilon} \tilde{\mathbf{a}}(\theta_0) = 0 \quad (4-81)$$

而且，通过定义如下的 \mathbf{u}_q

$$\mathbf{u}_q \triangleq e^{-j\phi_q} \mathbf{w}_{\text{new},q} \quad (4-82)$$

可以将式(4-76b)表示为

$$\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_q) = (e^{-j\phi_q} \mathbf{w}_{\text{new},q})^H \mathbf{a}(\theta_q) = \mathbf{u}_q^H \mathbf{a}(\theta_q) \quad (4-83)$$

基于此，可以将限制(4-76b)表示为

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}^T \tilde{\mathbf{a}}(\theta_q) = \tilde{\mathbf{u}}_q^T \tilde{\mathbf{a}}(\theta_q), \quad \tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}^T \boldsymbol{\Upsilon} \tilde{\mathbf{a}}(\theta_q) = \tilde{\mathbf{u}}_q^T \boldsymbol{\Upsilon} \tilde{\mathbf{a}}(\theta_q) \quad (4-84)$$

其中 q 可以取为 $1, \dots, Q$ 。

结合式(4-78)，(4-81)和(4-84)，等式组(4-76)可以等价地表示为

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}^T \tilde{\mathbf{a}}(\theta_0) = 1 \quad (4-85a)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}^T \boldsymbol{\Upsilon} \tilde{\mathbf{a}}(\theta_0) = 0 \quad (4-85b)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}^T \tilde{\mathbf{a}}(\theta_q) = \tilde{\mathbf{u}}_q^T \tilde{\mathbf{a}}(\theta_q), \quad q = 1, \dots, Q \quad (4-85c)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}^T \boldsymbol{\Upsilon} \tilde{\mathbf{a}}(\theta_q) = \tilde{\mathbf{u}}_q^T \boldsymbol{\Upsilon} \tilde{\mathbf{a}}(\theta_q), \quad q = 1, \dots, Q \quad (4-85d)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}^T \tilde{\mathbf{d}}(\theta_0) = 0 \quad (4-85e)$$

或者可以更紧凑地表示为

$$\breve{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}} = \mathbf{g} \quad (4-86)$$

其中 $\breve{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{2N \times (2Q+3)}$ 和 $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{2Q+3}$ 分别定义为

$$\breve{\mathbf{C}} \triangleq [\mathbf{Y}(\theta_0), \mathbf{Y}(\theta_1), \dots, \mathbf{Y}(\theta_Q), \tilde{\mathbf{d}}(\theta_0)] \quad (4-87)$$

$$\mathbf{g} \triangleq [1, 0, \tilde{\mathbf{u}}_1^T \tilde{\mathbf{a}}(\theta_1), \tilde{\mathbf{u}}_1^T \boldsymbol{\Upsilon} \tilde{\mathbf{a}}(\theta_1), \dots, \tilde{\mathbf{u}}_Q^T \tilde{\mathbf{a}}(\theta_Q), \tilde{\mathbf{u}}_Q^T \boldsymbol{\Upsilon} \tilde{\mathbf{a}}(\theta_Q), 0]^T \quad (4-88)$$

式(4-87)中的 $\mathbf{Y}(\theta)$ 定义为

$$\mathbf{Y}(\theta) \triangleq [\tilde{\mathbf{a}}(\theta), \Upsilon\tilde{\mathbf{a}}(\theta)] \in \mathbb{R}^{2N \times 2} \quad (4-89)$$

如果得到了满足式(4-86)中 $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}$, 我们可以将最终的权向量 \mathbf{w}_{new} 表示为

$$\mathbf{w}_{\text{new}} = [\mathbf{I}_N, j\mathbf{I}_N] \tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}} \quad (4-90)$$

为了找到满足(4-86)中 $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}$ 的解析表达式, 首先定义 $\check{\mathbf{C}}_{i-} \in \mathbb{R}^{2N \times (2Q+1)}$ 为

$$\check{\mathbf{C}}_{i-} \triangleq [\mathbf{Y}(\theta_0), \dots, \mathbf{Y}(\theta_{i-1}), \mathbf{Y}(\theta_{i+1}), \dots, \mathbf{Y}(\theta_Q), \tilde{\mathbf{d}}(\theta_0)], i = 0, 1, \dots, Q \quad (4-91)$$

事实上, 上式中的 $\check{\mathbf{C}}_{i-}$ 可以通过从 $\check{\mathbf{C}}$ 中剔除 $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_i)$ 和 $\Upsilon\tilde{\mathbf{a}}(\theta_i)$ 得到。定义

$$\mathbf{Z}_0 \triangleq \mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{C}}_{0-}|\mathbf{Y}(\theta_0)}^T \quad (4-92a)$$

$$\mathbf{Z}_q \triangleq \mathbf{E}_{\mathbf{Y}(\theta_q)|\check{\mathbf{C}}_{q-}}^T, q = 1, \dots, Q \quad (4-92b)$$

其中 $\mathbf{E}_{\check{\mathbf{C}}_{0-}|\mathbf{Y}(\theta_0)}$ 和 $\mathbf{E}_{\mathbf{Y}(\theta_q)|\check{\mathbf{C}}_{q-}}$ 为斜投影算子, 满足

$$\mathbf{E}_{\check{\mathbf{C}}_{0-}|\mathbf{Y}(\theta_0)} = \check{\mathbf{C}}_{0-} \left(\check{\mathbf{C}}_{0-}^H \mathbf{P}_{\mathbf{Y}(\theta_0)}^\perp \right)^{-1} \check{\mathbf{C}}_{0-}^H \mathbf{P}_{\mathbf{Y}(\theta_0)}^\perp \quad (4-93a)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Y}(\theta_q)|\check{\mathbf{C}}_{q-}} = \mathbf{Y}(\theta_q) \left(\mathbf{Y}^H(\theta_q) \mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}_{q-}}^\perp \mathbf{Y}(\theta_q) \right)^{-1} \mathbf{Y}^H(\theta_q) \mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}_{q-}}^\perp \quad (4-93b)$$

其中 q 可以取为 $1, \dots, Q$ 。由斜投影性质, 可以得到

$$\mathbf{Z}_i^T \mathbf{Y}(\theta_j) = \begin{cases} \mathbf{Y}(\theta_j), & j = i \\ \mathbf{0}, & j \neq i \end{cases} \quad (4-94a)$$

$$\mathbf{Z}_i^T \tilde{\mathbf{d}}(\theta_0) = \mathbf{0} \quad (4-94b)$$

其中 i 和 j 可以取为 $0, 1, \dots, Q$ 。因此, 参考上一节的多点控制算法, 可以将 $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}$ 解析地表示为

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}} = \mathbf{Z}_0 \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}} + \sum_{q=1}^Q \mathbf{Z}_q \tilde{\mathbf{u}}_q \quad (4-95)$$

不难验证, 上式中的 $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}$ 满足下面三个等式:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}^T (\tilde{\mathbf{a}}(\theta_0) + j\Upsilon\tilde{\mathbf{a}}(\theta_0)) &= \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}}^T \mathbf{Z}_0^T (\tilde{\mathbf{a}}(\theta_0) + j\Upsilon\tilde{\mathbf{a}}(\theta_0)) \\ &= \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}}^T \mathbf{Z}_0^T \mathbf{Y}(\theta_0)[1, j]^T \\ &= \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}}^T \mathbf{Y}(\theta_0)[1, j]^T \\ &= \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}}^T \mathbf{a}(\theta_0) + j\tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}}^T \Upsilon\mathbf{a}(\theta_0) \\ &= \mathbf{w}_{\text{pre}}^H \mathbf{a}(\theta_0) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (4-96)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}^T (\tilde{\mathbf{a}}(\theta_q) + j\mathbf{Y}\tilde{\mathbf{a}}(\theta_q)) &= \sum_{i=1}^Q \tilde{\mathbf{u}}_i^T \mathbf{Z}_i^T \mathbf{Y}(\theta_q)[1, j]^T \\
 &= \tilde{\mathbf{u}}_q^T \mathbf{Y}(\theta_q)[1, j]^T \\
 &= \tilde{\mathbf{u}}_q^T (\tilde{\mathbf{a}}(\theta_q) + j\mathbf{Y}\tilde{\mathbf{a}}(\theta_q))
 \end{aligned} \tag{4-97}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}^T \tilde{\mathbf{d}}(\theta_0) &= \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}}^T \mathbf{Z}_0^T \tilde{\mathbf{d}}(\theta_0) + \sum_{q=1}^Q \tilde{\mathbf{u}}_q^T \mathbf{Z}_q^T \tilde{\mathbf{d}}(\theta_0) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4-98}$$

从而可以看出，式(4-95)中的 $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}$ 满足约束(4-86)。换言之，式(4-90)中的 \mathbf{w}_{new} 满足等式组(4-76)。因此，式(4-90)中的 \mathbf{w}_{new} 实现了式(4-53)中的多点阵列响应控制，而不会导致波束中心偏移。与上一节算法类似，式(4-90)中的 \mathbf{w}_{new} 可以通过更新权向量 $\mathbf{w}_{\text{new},q}$ 来分别调节 θ_q 处的电平响应， $q = 1, \dots, Q$ 。这使得电平控制更加灵活。不难发现，上述算法最多可以对 $N - 2$ 个角度的电平进行精确控制。

上节和本节算法中，参数 φ_q 和 ϕ_q 可以任意设定， $q = 1, \dots, Q$ 。如何进一步选取最优的 φ_q 或 ϕ_q 取决于具体应用。仿真实验表明，取 $\varphi_q = 0$ 和 $\phi_q = 0$ 可以得到较好的波束方向图性能（非控制点处方向图产生较小的畸变）， $q = 1, \dots, Q$ 。

4.3.3 斜投影多点方向图控制算法的性质

下面我们展示上两节的斜投影多点方向图控制算法的性质。首先，注意到空间 $\mathcal{R}^\perp(\check{\mathbf{A}})$ 中的向量成分不会影响 θ_i 处的方向图电平， $i = 0, 1, \dots, Q$ ，但是会影响控制点之外的方向图响应。与之前的权向量 \mathbf{w}_{pre} 相比，一个权向量 \mathbf{w}_{new} 若不产生“冗余成分”（即 $\mathcal{R}^\perp(\check{\mathbf{A}})$ 中的向量成分）应该满足 $\mathbf{w}_{\text{new}} - \mathbf{w}_{\text{pre}} \in \mathcal{R}(\check{\mathbf{A}})$ ，或等价地，

$$\mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}}^\perp (\mathbf{w}_{\text{new}} - \mathbf{w}_{\text{pre}}) = \mathbf{0} \tag{4-99}$$

实际上，式(4-67)和式(4-90)所得到的两个权向量均满足(4-99)。为了说明这一点，由附录C.2可以将式(4-67)中的 \mathbf{w}_{new} 表示为

$$\mathbf{w}_{\text{new}} = \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}}^\perp \mathbf{w}_{\text{pre}} + \check{\mathbf{A}} \mathbf{H} \mathbf{c} \tag{4-100}$$

其中 \mathbf{H} 和 \mathbf{c} 的定义分别如式(C-38)和式(C-39)所示。从式(4-100)可以看出，式(4-99)成立。

另一方面，为了说明式(4-90)中的 \mathbf{w}_{new} 满足(4-99)，将式(4-95)中的 $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}$ 重新表示为

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}} = \mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}}^{\perp} \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}} + \check{\mathbf{C}} \mathbf{F} \boldsymbol{\alpha} \quad (4-101)$$

上式的推导见附录C.3，其中 \mathbf{F} 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 的表达式参见式(C-46)。

由式(4-101)，可以验证

$$\mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}}^{\perp} (\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}} - \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}}) = \mathbf{0} \quad (4-102)$$

由附录C.4可知，由 $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}$ 构造出的权向量 \mathbf{w}_{new} （见式(4-90)）满足

$$\mathbf{P}_{[\check{\mathbf{A}}, \mathbf{d}(\theta_0)]}^{\perp} (\mathbf{w}_{\text{new}} - \mathbf{w}_{\text{pre}}) = \mathbf{0} \quad (4-103)$$

由于 $\mathcal{R}^{\perp}([\check{\mathbf{A}}, \mathbf{d}(\theta_0)]) \in \mathcal{R}^{\perp}(\check{\mathbf{A}})$ ，不难发现式(4-99)成立。

如此之外，如果在式(4-53)中取 $\rho_q = L_{\text{pre}}(\theta_q, \theta_0) \triangleq |\mathbf{w}_{\text{pre}}^H \mathbf{a}(\theta_q)|^2 / |\mathbf{w}_{\text{pre}}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2$ ，同时在式(4-67)中取 $\varphi_q = 0$ ， $q = 1, \dots, Q$ ，所得到的式(4-67)中的权向量 \mathbf{w}_{new} 满足

$$\mathbf{w}_{\text{new}} = \mathbf{w}_{\text{pre}} \quad (4-104)$$

上式推导见附录C.5。实际上，由于此时 \mathbf{w}_{pre} 已经满足在 θ_q 的期望响应，所得到的权向量即为 \mathbf{w}_{pre} 。

类似地，如果在式(4-53)中取 $\rho_q = L_{\text{pre}}(\theta_q, \theta_0)$ ，在式(4-76b)中取 $\phi_q = 0$ ， $q = 1, \dots, Q$ ，则式(4-95)中得到的权向量 $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}$ 满足

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{d}}(\theta_0) | \check{\mathbf{C}}_{\tilde{\mathbf{d}}-}}^T \right) \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}} \quad (4-105)$$

其中

$$\check{\mathbf{C}}_{\tilde{\mathbf{d}}-} \triangleq [\mathbf{Y}(\theta_0), \mathbf{Y}(\theta_1), \dots, \mathbf{Y}(\theta_Q)] \in \mathbb{R}^{2N \times (2Q+2)} \quad (4-106)$$

这种场景下，权向量 \mathbf{w}_{new} （由式(4-90)得到）在保持 θ_q 方向波束电平不变的情况下将波束中心导向 θ_0 处， $q = 1, \dots, Q$ 。事实上，式(4-105)提供了一种灵活的方式来改变波束中心或进行波束扫描（在满足一定电平均匀约束的条件下）。需要注意的是，如果对电平没有额外要求，此时可以令 $\check{\mathbf{C}}_{\tilde{\mathbf{d}}-} = \mathbf{Y}(\theta_0)$ ，得到如下新的权向量

$$\mathbf{w}_{\text{new}} = [\mathbf{I}_N, j\mathbf{I}_N] \left(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{d}}(\theta_0) | \mathbf{Y}(\theta_0)}^T \right) \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}} \quad (4-107)$$

上式的推导见附录C.6。此时， \mathbf{w}_{new} 可以将波束中心重新聚焦到 θ_0 。

4.3.4 仿真实验

本节通过实验仿真验证所提算法的有效性。为了进行实验对比，同时测试文献[43]中的凸优化方法，文献[45]中的半正定松弛方法，文献[35]中的菲利普方

法, 文献[152]中的WORD方法, 文献[148]中的 MA^2RC 和 M^2A^2RC 方法, 以及文献[153]中的FARCP方法。

4.3.4.1 所提算法的方向图控制效果

(1). 等距线阵方向图控制

第一个例子中, 使用16阵元等距线阵进行仿真, 各阵元各向同性, 取主瓣波束中心为 $\theta_0 = 20^\circ$ 。取 w_{pre} 为-25dB等电平旁瓣衰落的切比雪夫权。三个待控制角度分别为 $\theta_1 = -60^\circ$, $\theta_2 = -36^\circ$ 和 $\theta_3 = -12^\circ$ 。第一种场景取各角度期望电平为 $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = -40$ dB。可相应计算得到 $\beta_1 = 0.1878$, $\beta_2 = 0.1788$, $\beta_3 = 0.1772$ 。图4-11对比了不同方法的方向图控制效果, 从中可以看出所有方法均实现了事先给定的方向图控制要求, 且各方向得到的方向图相似。放大主瓣区域可以发现, MA^2RC , FARCP 和所提出的第一种算法产生了波束中心偏移。对于第二种算法, 主瓣中心固定在 θ_0 。另外可以注意到, 所提的两种算法在非控制角度区域的方向图电平几乎不变。

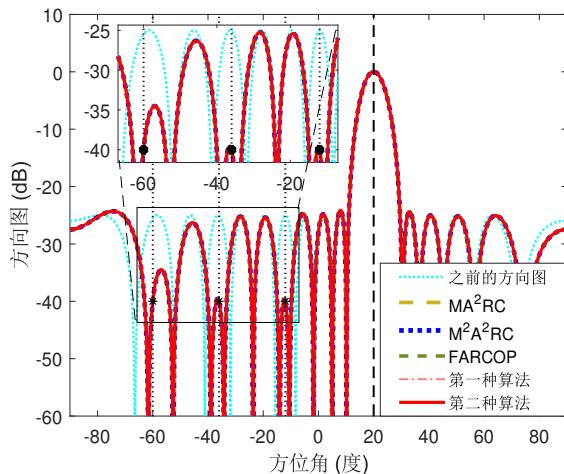


图 4-11 方向图控制结果对比 (场景一)

第二种场景下, 保持待控制角度不变, 将各自的期望电平取为 $\rho_1 = -35$ dB, $\rho_2 = -40$ dB, $\rho_3 = -20$ dB。可以计算得到 $\beta_1 = 0.3341$, $\beta_2 = 0.1788$, $\beta_3 = 1.7849$ 。图4-12给出了各算法得到的方向图。从图中可以看出, 提出的两种算法均实现了给定的方向图控制要求, 且第二种算法没产生波束中心偏移。与第一种场景相比, ρ_1 和 ρ_3 发生了变化, 而 ρ_2 保持不变。所以, 只需要重新计算 $w_{new,1}$ 和 $w_{new,3}$, 并相应地更新最终权即可。由此发现, 提出的两种算法可以分别控制各点方向图电平, 而 MA^2RC 和 M^2A^2RC 对各点方向图是无法独立控制的。另外可以发现, 提出的两种方法在非控制角度区域的电平几乎不发生改变。

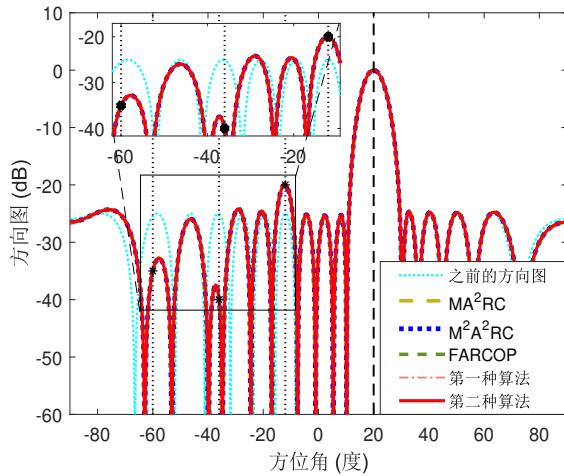


图 4-12 方向图控制结果对比（场景二）

(2). 各向异性阵元随机阵列方向图控制

本例中，使用10阵元各向异性随机阵列，第 n 个阵元的方向图函数为

$$g_n(\theta) = (\cos(\pi l_n \sin(\theta + \zeta_n)) - \cos(\pi l_n)) / \cos(\theta + \zeta_n) \quad (4-108)$$

其中 ζ_n 和 l_n 分别表示阵元方向和长度，各参数取值连同阵元位置信息见表4-3。该例中，取 $\theta_0 = 0^\circ$, $\mathbf{w}_{\text{pre}} = \mathbf{a}(\theta_0)$ 。两个待控制方向分别为 $\theta_1 = -25^\circ$ 和 $\theta_2 = -4^\circ$ ，其期望电平分别为 $\rho_1 = -20\text{dB}$ 和 0dB 。注意到 θ_1 位于旁瓣区域，而 θ_2 位于主瓣区域。

表 4-3 各向异性阵列参数设定

n	$x_n(\lambda)$	$l_n(\lambda)$	$\zeta_n(\text{deg})$	n	$x_n(\lambda)$	$l_n(\lambda)$	$\zeta_n(\text{deg})$
1	0.00	0.3	0.0	6	2.64	0.27	10
2	0.45	0.25	-4.0	7	3.09	0.23	1.0
3	0.93	0.24	5.0	8	3.55	0.24	-10
4	1.56	0.20	-32	9	4.09	0.25	0.5
5	2.04	0.26	-3.2	10	4.52	0.21	7.2

不同方法的方向图对比如图4-13所示。从图中发现， MA^2RC 和 $\text{M}^2\text{A}^2\text{RC}$ 算法的方向图主瓣发生了畸变。第一种算法可以实现给定的方向图控制要求，且所得到的方向图结果与FARCOP算法类似。然而，第一种算法和FARCOP算法均产生了波束中心偏移。第二种算法克服了第一种算法的不足，其方向图如图4-13所示。

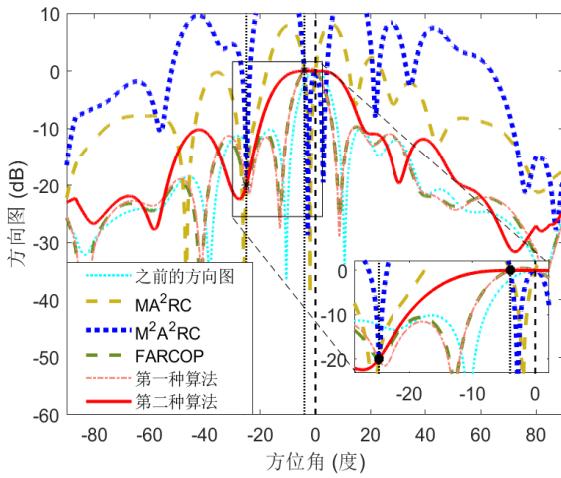


图 4-13 各向异性阵列方向图控制结果对比

(3). 最优权向量方向图重新聚焦

本节使用10阵元等距线阵进行仿真，考察第二种算法在波束中心重新聚焦方面的性能。具体地，取 $\theta_0 = 40^\circ$ ，并假设存在两个干扰（方向分别为 -50° 和 20° ）。两个干扰的干噪比均为30dB，信噪比取为10dB。取 $\mathbf{w}_{\text{pre}} = \mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_{n+i}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$ ，其中 \mathbf{R}_{n+i} 表示噪声加干扰协方差矩阵， \mathbf{w}_{opt} 表示使得输出信噪比最大化的最优权。

图4-14展示了最优权的方向图，从中可以看出在干扰方向形成了两个凹陷。除此之外，最优权的波束中心偏离期望角度 θ_0 约 0.1° 。利用式(4-107)计算新的权向量 \mathbf{w}_{new} ，可以将波束中心重新聚焦到 θ_0 ，其方向图如图4-14所示。从图中可以看出，波束中心重新变为了 θ_0 ，且干扰方向的凹口可以保持。

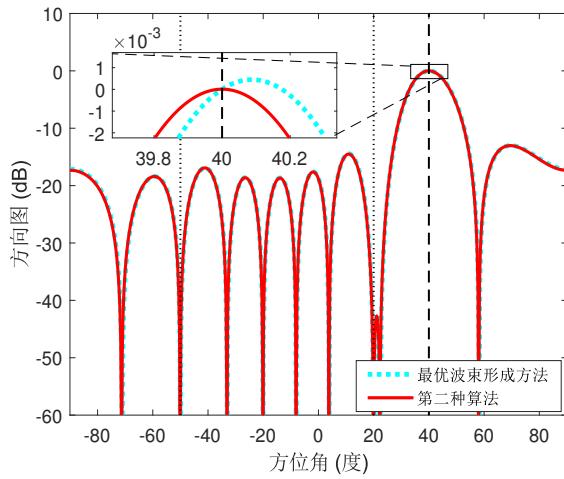


图 4-14 方向图波束中心重聚焦效果对比

4.3.4.2 方向图综合仿真

下面仿真验证所提方法的方向图综合性能。简单起见，取 $\mathbf{w}_0 = \mathbf{a}(\theta_0)$ 。

(1). 等距线阵非等电平旁瓣综合

首先考虑 $N = 60$ 阵元各向同性等距线阵方向图综合，阵元间隔取为半波长。期望方向图指向 $\theta_0 = 50^\circ$ ，具有非等电平旁瓣（详见图4-15(c)中的黑线）。

图4-15展示了使用第二种算法进行方向图综合时的中间结果。由图中可以看出，每步中先选择前步方向图的旁瓣峰值，在此基础上将选定方向的电平调节至期望电平。方向图控制中不会发生波束中心偏移，且仅需三步即可得到满意的方向图结果。

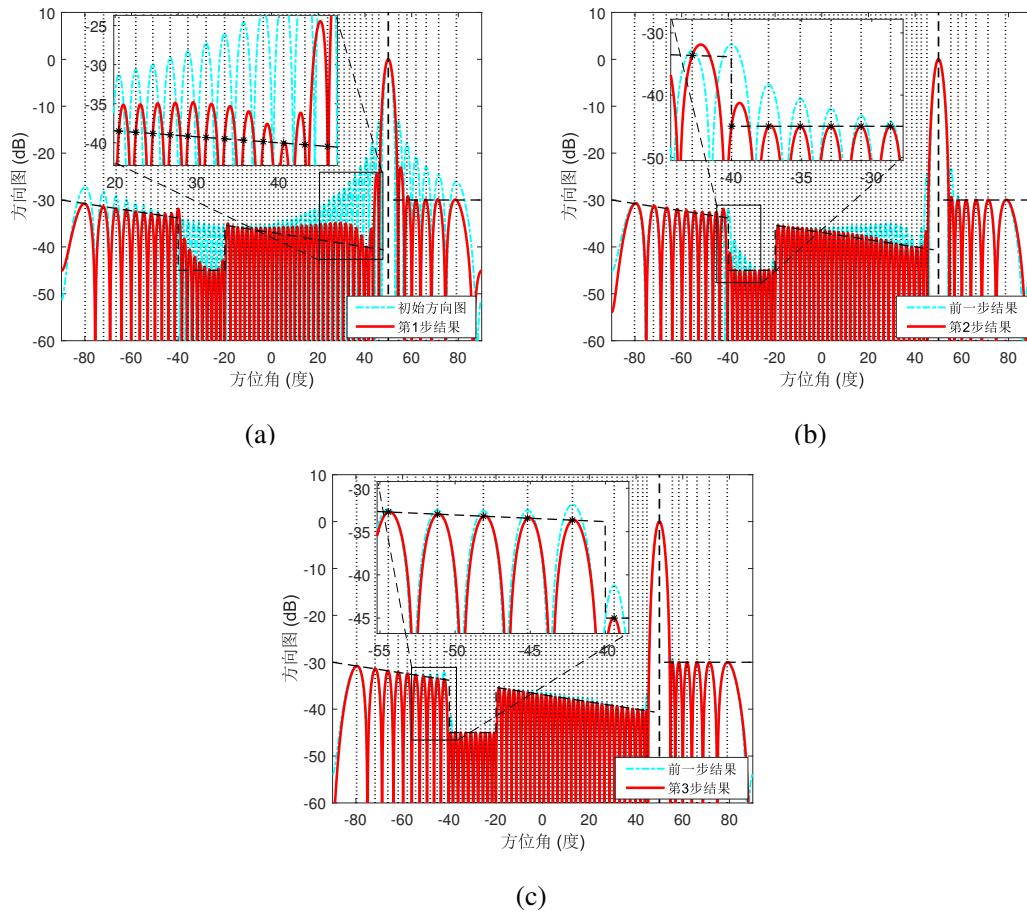


图 4-15 非等电平旁瓣方向图综合结果。(a)第1步结果;(b)第2步结果;(c)第3步结果

与其它方法的方向图结果对比见图4-16。从图中可以发现，凸优化方法，菲利普方法以及WORD方法（经过100步迭代）的旁瓣包络没能和期望电平对齐。对于WORD方法，可能需要更多的迭代次数才能产生满意的方向图结果。而且，这

些方法（包括FARCOP方法）产生了不同程度的波束中心偏移。 M^2A^2RC 算法表现良好，且无波束中心偏移，但其运行时间长于提出的第二种算法。

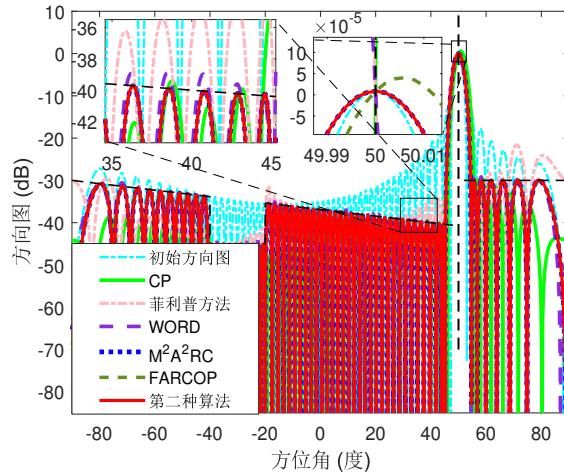


图 4-16 非等电平旁瓣方向图综合结果对比

(2). 非等距线阵多波束方向图综合

下面使用16阵元非等距线阵进行多波束方向图综合的仿真。两波束指向分别为 30° 和 -10° 。取 $\mathbf{a}(30^\circ)$ 为初始权向量，首先应用第二种算法将 -10° 方向的电平调节为0dB，即实现 $L_1(-10^\circ, 30^\circ) = 0$ dB。在此基础上，将其它旁瓣峰值调节至低于 -25 dB。经过4次迭代即可得到满意的方向图结果。各方法的结果对比如图4-17所示，从中可以发现凸优化方法，菲利普方法，WORD方法和FARCOP方法均发生了波束中心偏移。而且，菲利普方法在某些区域的方向图电平高于期望电平。另外，所提方法的运行时间要比 M^2A^2RC 方法短。

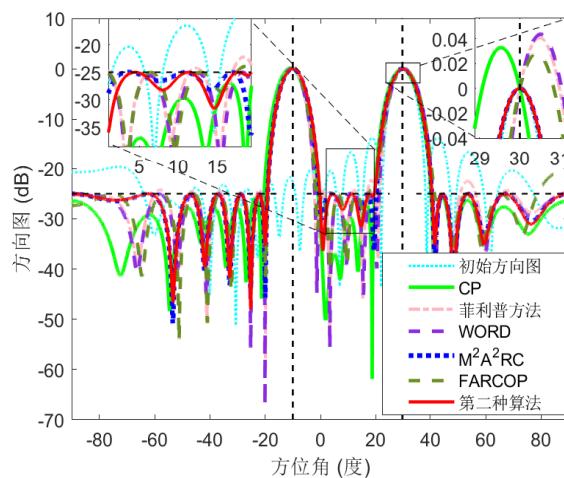


图 4-17 多波束方向图综合结果对比

4.4 本章小结

本章首先介绍了一种基于斜投影的灵活方向图控制算法（简称为FARCOP算法）。所提FARCOP算法可以灵活准确地对多点方向图进行同时控制。FARCOP算法中，各参数可以独立控制不同方向的方向图电平。FARCOP算法以白噪声增益最大化进行参数优化，利用梯度投影进行参数确定。对中心对称阵列，FARCOP算法得到解析的权向量更新形式。另外，本章介绍了基于FARCOP算法的方向图综合，实验仿真实证了所提方法的有效性。

本章还介绍了两种基于斜投影的方向图控制方法并讨论了两种方法在方向图综合中的应用。所提出的两种算法具有解析表达式，可以实现对多个角度方向图电平的精确控制。而且，所提方法在非控制角度区域产生较小的方向图变化。另外，通过添加导数约束，第二种方法不会产生波束中心偏移。本章对所提两种算法的性质进行了全面分析，并将所提算法应用于方向图综合中。最后通过实验仿真验证了所提两种算法的有效性。

第五章 基于拟凸优化的高性能方向图综合

前面章节利用方向图控制算法（如WORD算法、FARCOP算法等）进行方向图的设计。但是这种方法没有从全局上考虑方向图的性能，使得最终方向图的性能无法保障。本章介绍线性分式半正定松弛和拟凸优化，在此基础上提出一种基于线性分式半正定松弛和拟凸优化的高性能波束方向图综合方法。所提方法考虑了主瓣损失最小化和凹口电平最小化两种场景。仿真结果表明，所提方法可以实现高性能方向图综合。

5.1 问题描述

考虑 N 元阵列。简单起见，假设阵列呈一维分布（多维情况同样适用）。则 θ 方向的导向矢量为

$$\mathbf{a}(\theta) = [g_1(\theta)e^{j\phi_1(\theta)}, \dots, g_N(\theta)e^{j\phi_N(\theta)}]^T \quad (5-1)$$

其中 $g_n(\theta)$ 为 n 元阵列的辐射方向图（对于全向天线，我们有 $g_n(\theta) = 1$ ）， $\phi_n(\theta)$ 代表第 n 个阵元的相移， $n = 1, \dots, N$ 。则归一化能量方向图可以表示为

$$B(\theta, \theta_0) = |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)|^2 / |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \quad (5-2)$$

其中 $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T$ 为权向量， θ_0 表示波束中心轴即期望信号的角度。

考虑单个信源，则阵列观测数据可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_n(t) \quad (5-3)$$

其中 $\mathbf{x}_s(t)$ 和 $\mathbf{x}_n(t)$ 分别代表信号成分和噪声成分。信号部分和噪声部分的协方差矩阵可分别表示为

$$\mathbf{R}_s = E[\mathbf{x}_s(t)\mathbf{x}_s^H(t)] = \sigma_s^2 \mathbf{a}(\theta_0)\mathbf{a}^H(\theta_0) \quad (5-4)$$

$$\mathbf{R}_n = E[\mathbf{x}_n(t)\mathbf{x}_n^H(t)] = \sigma_n^2 \mathbf{\Xi} \quad (5-5)$$

其中 σ_s^2 和 σ_n^2 分别代表信号功率和噪声功率。式(5-5)中的 $\mathbf{\Xi}$ 为正定矩阵用来表征噪声的结构，被称作归一化噪声协方差矩阵。显然，输入信噪比SNR可以表示为

$$\text{SNR}_{\text{in}} = \sigma_s^2 / \sigma_n^2 \quad (5-6)$$

对于给定的权向量 \mathbf{w} ，阵列输出可以表示为 $y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$ ，其输出功率满足

$$E[|y(t)|^2] = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_s \mathbf{w} + \mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} \quad (5-7)$$

其中 $\mathbf{w}^H \mathbf{R}_s \mathbf{w}$ 和 $\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}$ 分别表征信号和噪声的输出功率。则输出信噪比 SNR 可以表示为

$$\text{SNR}_{\text{out}} = \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_s \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}} = \frac{\sigma_s^2 \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}}{\sigma_n^2 \mathbf{w}^H \boldsymbol{\Xi} \mathbf{w}} \quad (5-8)$$

阵列处理的主要目的是提高输出的信噪比 SNR_{out} 。这项参数通常由阵列增益表征，阵列增益定义为输出 SNR 与输入 SNR 的比值。根据(5-6)和(5-8)，阵列增益可以表示为

$$G(\mathbf{w}) \triangleq \frac{\text{SNR}_{\text{out}}}{\text{SNR}_{\text{in}}} = \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \boldsymbol{\Xi} \mathbf{w}} \quad (5-9)$$

寻找使 $G(\mathbf{w})$ 最大化的最优权向量（记作 $\bar{\mathbf{w}}$ ，有些文献称该权向量为静态权向量）是一个瑞利比的问题，该问题可以借助对矩阵束 $([\mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0)], \boldsymbol{\Xi})$ 进行广义特征值分解得到。更准确地，使得 $G(\mathbf{w})$ 最大化的权向量 $\bar{\mathbf{w}}$ 满足

$$[\mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0)] \bar{\mathbf{w}} = \lambda_1 \boldsymbol{\Xi} \bar{\mathbf{w}} \quad (5-10)$$

其中 λ_1 代表广义特征值分解的最大特征值。从式(5-10)中不难看出， $\bar{\mathbf{w}}$ 与矩阵束 $([\mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0)], \boldsymbol{\Xi})$ 的主特征向量对应。对于静态权向量 $\bar{\mathbf{w}}$ ，其满足下式

$$G(\mathbf{w}) \leq G(\bar{\mathbf{w}}), \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{C}^N \quad (5-11)$$

另外，在白噪声背景下（即 $\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{I}$ ），可以得到 $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{a}(\theta_0)$ 。

如果对归一化方向图 $B(\theta, \theta_0)$ 施加额外限制（如主瓣宽度、旁瓣电平等），则会损失阵列增益。鉴于此，我们考虑设计方向图，使其既满足形状约束同时又获得高阵列增益。为此，我们定义如下增益损失因子来测量增益衰减程度

$$\text{Loss}(\mathbf{w}) \triangleq G(\bar{\mathbf{w}})/G(\mathbf{w}) \quad (5-12)$$

与此同时，可以如下计算考虑阵列衰落的方向图

$$P(\theta, \theta_0) = B(\theta, \theta_0) \cdot \frac{G(\mathbf{w})}{G(\bar{\mathbf{w}})} = \frac{B(\theta, \theta_0)}{\text{Loss}(\mathbf{w})} \quad (5-13)$$

$P(\theta, \theta_0)$ 可以更直观地展示出阵列增益损失。

5.2 线性分式半正定松弛和拟凸优化

下面首先介绍线性分式半正定松弛和拟凸优化理论。

5.2.1 线性分式半正定松弛

线性分式半正定松弛(Linear Fractional SemiDefinite Relaxation,LFSDR)是半正定松弛(SemiDefinite Relaxation,SDR)的简单变种，下面首先介绍 SDR，在 SDR 的基础上介绍 LFSDR。

(1). SDR

考虑下面实值二次约束二次优化问题

$$\min_{\mathbf{v} \in \mathbb{S}^n} \mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{v} \quad (5-14a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{v}^T \mathbf{B}_i \mathbf{v} \succeq_i d_i, i = 1, \dots, m \quad (5-14b)$$

其中 \succeq_i 可以表示 \geq 、 $=$ 或者 \leq ， $\mathbf{C}, \mathbf{B}_i \in \mathbb{S}^n$ ， 其中 \mathbb{S}^n 表示 $n \times n$ 维实对称矩阵的集合， 问题(5-14)中 d_i 为实数， $i = 1, \dots, m$ 。 由于

$$\mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{v} = \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{v} \mathbf{v}^T), \mathbf{v}^T \mathbf{B}_i \mathbf{v} = \text{tr}(\mathbf{B}_i \mathbf{v} \mathbf{v}^T) \quad (5-15)$$

在此基础上，我们引入新变量 $\mathbf{V} = \mathbf{v} \mathbf{v}^T$ ， 将问题(5-14)重新表述为

$$\min_{\mathbf{V} \in \mathbb{S}^n} \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{V}) \quad (5-16a)$$

$$\text{s.t. } \text{tr}(\mathbf{B}_i \mathbf{V}) \succeq_i d_i, i = 1, \dots, m \quad (5-16b)$$

$$\mathbf{V} \succeq \mathbf{0} \quad (5-16c)$$

$$\text{rank}(\mathbf{V}) = 1 \quad (5-16d)$$

注意到上述问题中添加了约束 $\text{rank}(\mathbf{V}) = 1$ ， 这是因为 $\text{rank}(\mathbf{V}) = \text{rank}(\mathbf{v} \mathbf{v}^T) = 1$ 。 然而， 约束(5-16d)为非凸。 SDR的基本思想是将秩约束(5-16d)略去， 同时将(5-16)松弛为

$$\min_{\mathbf{V} \in \mathbb{S}^n} \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{V}) \quad (5-17a)$$

$$\text{s.t. } \text{tr}(\mathbf{B}_i \mathbf{V}) \succeq_i d_i, i = 1, \dots, m \quad (5-17b)$$

$$\mathbf{V} \succeq \mathbf{0} \quad (5-17c)$$

上述问题为凸优化问题，可以通过软件包得到全局最优解。

得到问题(5-17)的解之后（记作 $\hat{\mathbf{V}}$ ），可以由 $\hat{\mathbf{V}}$ 得到问题(5-14)的可行解。比如利用特征值分解，可以得到问题(5-14)的一个潜在的解 $\tilde{\mathbf{v}} = \sqrt{\sigma_1} \mathbf{u}_1$ ，其中 σ_1 为 $\hat{\mathbf{V}}$ 为最大特征值， \mathbf{u}_1 为其对应的特征向量。另外，还可以从利用随机化的方式从 $\hat{\mathbf{V}}$ 中提取问题的(5-14)的近似解。

(2). LFSDR

作为SDR的变种，LFSDR方法考虑下述问题

$$\min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{F} \mathbf{v}} \quad (5-18a)$$

$$\text{s.t. } \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{B}_i \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{D}_i \mathbf{v}} \succeq_i d_i, i = 1, \dots, m \quad (5-18b)$$

其中 \mathbf{F} 和 \mathbf{D}_i 为半正定矩阵， $i = 1, \dots, m$ 。定义 $\mathbf{V} = \mathbf{v}\mathbf{v}^T$ ，则可以将问题(5-18)重新表述为下述关于 \mathbf{V} 的问题

$$\min_{\mathbf{V} \in \mathbb{S}^n} \frac{\text{tr}(\mathbf{CV})}{\text{tr}(\mathbf{FV})} \quad (5-19a)$$

$$\text{s.t. } \frac{\text{tr}(\mathbf{B}_i \mathbf{V})}{\text{tr}(\mathbf{D}_i \mathbf{V})} \trianglerighteq_i d_i, i = 1, \dots, m \quad (5-19b)$$

$$\mathbf{V} \succeq \mathbf{0} \quad (5-19c)$$

$$\text{rank}(\mathbf{V}) = 1 \quad (5-19d)$$

与SDR技术类似，可以去掉秩约束(5-19d)，将问题(5-19)松弛为

$$\min_{\mathbf{V} \in \mathbb{S}^n} \frac{\text{tr}(\mathbf{CV})}{\text{tr}(\mathbf{FV})} \quad (5-20a)$$

$$\text{s.t. } \text{tr}[(\mathbf{B}_i - d_i \cdot \mathbf{D}_i) \mathbf{V}] \trianglerighteq_i 0, i = 1, \dots, m \quad (5-20b)$$

$$\text{tr}(\mathbf{D}_i \mathbf{V}) \geq \beta, i = 1, \dots, m \quad (5-20c)$$

$$\mathbf{V} \succeq \mathbf{0} \quad (5-20d)$$

其中 $\beta > 0$ 为较小的整数，其引入为了防止问题的解为零。问题(5-20)解得后，可以利用特征值分解或者随机化方法进一步得到原问题(5-18)的近似解。然而，由于式(5-20a)中代价函数 $\text{tr}(\mathbf{CV})/\text{tr}(\mathbf{FV})$ 的非凸性，导致问题(5-20)非凸，从而无法直接用工具包进行求解。然而，如后文所述，式(5-20a)中的代价函数实际为拟凸函数，而问题(5-20)可以利用二分法求解。

5.2.2 拟凸函数和拟凸优化问题

作为凸函数的扩展，拟凸函数具有重要的应用。下面简单介绍拟凸函数、拟凸优化问题，以及用来解决拟凸问题的二分法。

(1). 拟凸函数

定义 5.2.1 函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为拟凸函数如果 $f(\cdot)$ 的定义域以及所有 α -下水平集 S_α 对于 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ 均为凸集，其中 α -下水平集合定义为

$$S_\alpha = \{\mathbf{z} | \mathbf{z} \in \text{dom}(f), f(\mathbf{z}) \leq \alpha\} \quad (5-21)$$

图5-1示意了拟凸函数的曲线，其中曲线下面的虚线 \overline{AB} 表明了函数的非凸性。显然，任何凸函数均是拟凸函数，反之则不然。

定义 5.2.2 如果函数 $-f(\cdot)$ 为拟凸函数，则函数 $f(\cdot)$ 为拟凹函数。如果 $f(\cdot)$ 既是拟凸又是拟凹，则我们称其为拟线性函数。

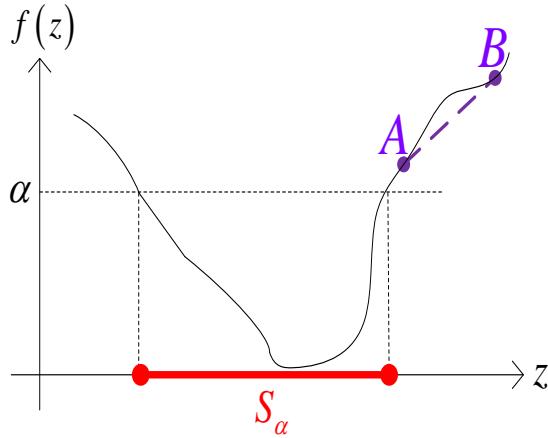


图 5-1 拟凸函数示意图

由上面定义可知，式(5-20)中代价函数 $f(\mathbf{V}) = \text{tr}(\mathbf{CV})/\text{tr}(\mathbf{FV})$ 为拟线性函数。

(2). 拟凸优化问题

拟凸优化问题具有下面形式

$$\min_{\mathbf{z}} f_0(\mathbf{z}) \quad (5-22a)$$

$$\text{s.t. } f_i(\mathbf{z}) \leq 0, i = 1, \dots, m \quad (5-22b)$$

$$h_i(\mathbf{z}) = 0, i = 1, \dots, p \quad (5-22c)$$

其中 $f_0(\mathbf{z})$ 为拟凸函数， $f_i(\mathbf{z})$ 为凸函数， $h_i(\mathbf{z})$ 为仿射函数。

为了解问题(5-22)，借助上镜图的概念将其重新表述为

$$\min_{\mathbf{z}} \tau \quad (5-23a)$$

$$\text{s.t. } f_0(\mathbf{z}) \leq \tau \quad (5-23b)$$

$$f_i(\mathbf{z}) \leq 0, i = 1, \dots, m \quad (5-23c)$$

$$h_i(\mathbf{z}) = 0, i = 1, \dots, p \quad (5-23d)$$

注意到由于 f_0 为拟凸函数，因此不等式约束集 $\{(\mathbf{z}, \tau) | f_0(\mathbf{z}) \leq \tau\}$ 为非凸集合，即问题(5-23)非凸。然而，对于固定的 τ ，下面的可行集问题为凸

$$\text{find } \mathbf{z} \quad (5-24a)$$

$$\text{s.t. } f_0(\mathbf{z}) \leq \tau \quad (5-24b)$$

$$f_i(\mathbf{z}) \leq 0, i = 1, \dots, m \quad (5-24c)$$

$$h_i(\mathbf{z}) = 0, i = 1, \dots, p \quad (5-24d)$$

问题(5-24)的凸约束集 (记为 \mathcal{C}_τ) 可以表示为

$$\mathcal{C}_\tau = \{\mathbf{z} \mid f_0(\mathbf{z}) \leq \tau, f_i(\mathbf{z}) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_i(\mathbf{z}) = 0, i = 1, \dots, p\} \quad (5-25)$$

且上述集合满足

$$\mathcal{C}_\tau \subseteq \mathcal{C}_s, \quad \forall \tau \leq s \quad (5-26)$$

更重要的是, 记 τ^* 为问题 (5-23)的最优解, 则当 $\tau \geq \tau^*$ 时有 $\mathcal{C}_\tau \neq \emptyset$, 当 $\tau < \tau^*$ 时有 $\mathcal{C}_\tau = \emptyset$ 。

对于问题(5-23), 通常使用二分法进行求解。简单来讲, 优化问题(5-23)可以通过迭代减小 τ 直到问题(5-24)对于 $\tau \in [\tau^*, \tau^* + \epsilon]$ 可解, 其中 ϵ 为设定的正实数。具体来讲, 首先假设 τ^* 位于 $[l, u]$ 内, 其中区间的上界 l 和上界 u 可以根据约束条件确定。之后检验 $\tau = (l + u)/2$ 时问题(5-24) 的可行性。如果问题(5-24)可行, 则更新 u 为 $u = \tau$, 否则更新 l 为 $l = \tau$ 。使用新的区间 $[l, u]$ 再次对凸可行问题(5-24) 进行测试, 并迭代上述过程直至 $u - l \leq \epsilon$ 。上述 ϵ 次优二分法的总结见算法16。注意到问题(5-20)实际上为问题(5-22)的特例。因此问题(5-20)可以用上述二分法直接求解。

5.3 基于线性分式半正定松弛和拟凸优化的高性能波束综合

下面基于线性分式半正定松弛和拟凸优化实现高性能波束方向图综合。考虑主瓣损失最小化和凹口电平最小化两种场景。

5.3.1 主瓣损失最小化

为了得到较高的输出SNR, 需要在满足波束方向图约束下实现主瓣损失最小化。具体来讲, 在旁瓣区域内通常对波束辐射方向图进行上限约束, 在主瓣内则对方向图同时进行上限和下限约束。在对波束方向图进行形状约束的基础上, 我们建立如下问题实现阵列增益最大化

$$\max_{\mathbf{w}} G(\mathbf{w}) \quad (5-27a)$$

$$\text{s.t. } B(\theta, \theta_0) \leq \rho(\theta), \theta \in \Omega_S \quad (5-27b)$$

$$l(\theta) \leq B(\theta, \theta_0) \leq u(\theta), \theta \in \Omega_M \quad (5-27c)$$

其中 $\rho(\theta)$ 代表旁瓣角度区域 Ω_S 内的上限电平约束, $l(\theta)$ 和 $u(\theta)$ 分别代表主瓣区域 Ω_M 内的上限和下限电平约束。

算法 16 利用二分法求解拟凸问题(5-22)

- 1: 输入: l, u, ϵ 满足 $u - l \geq \epsilon$ 。
 - 2: **while** $u - l \geq \epsilon$ **do**
 - 3: 更新 $\tau = (l + u)/2$ 。
 - 4: 测试凸问题(5-24)。
 - 5: 如果问题(5-24)可行 (即 $\mathcal{C} \neq \emptyset$)，更新 $u = \tau$ ；否则更新 $l = \tau$ 。
 - 6: **end while**
 - 7: 输出: 问题(5-24)的解 \mathbf{z}_{opt} 。
-

根据式(5-2)中 $B(\theta, \theta_0)$ 以及式(5-9)中 $G(\mathbf{w})$ 的表达式，问题(5-27)可以重新表述为

$$\min_{\mathbf{w}} -\frac{\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \Xi \mathbf{w}} \quad (5-28a)$$

$$\text{s.t. } \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}} \leq \rho(\theta), \theta \in \Omega_S \quad (5-28b)$$

$$l(\theta) \leq \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}} \leq u(\theta), \theta \in \Omega_M \quad (5-28c)$$

注意到问题(5-27)中的最大化问题已经转换为上述的最小化问题。为了进一步解决问题(5-28)，定义

$$\mathbf{A}_\theta \triangleq \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) \in \mathbb{C}^{N \times N} \quad (5-29)$$

则不难将问题(5-28)转到实数域处理，如下面问题所述

$$\min_{\tilde{\mathbf{w}}} -\frac{\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{A}}_{\theta_0} \tilde{\mathbf{w}}}{\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\Xi} \tilde{\mathbf{w}}} \quad (5-30a)$$

$$\text{s.t. } \frac{\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{A}}_\theta \tilde{\mathbf{w}}}{\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{A}}_{\theta_0} \tilde{\mathbf{w}}} \leq \rho(\theta), \theta \in \Omega_S \quad (5-30b)$$

$$l(\theta) \leq \frac{\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{A}}_\theta \tilde{\mathbf{w}}}{\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{A}}_{\theta_0} \tilde{\mathbf{w}}} \leq u(\theta), \theta \in \Omega_M \quad (5-30c)$$

其中 $\tilde{\mathbf{A}}_\theta$, $\tilde{\Xi}$, $\tilde{\mathbf{w}}$ 分别定义为

$$\tilde{\mathbf{A}}_\theta \triangleq \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{A}_\theta\} & -\Im\{\mathbf{A}_\theta\} \\ \Im\{\mathbf{A}_\theta\} & \Re\{\mathbf{A}_\theta\} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N} \quad (5-31a)$$

$$\tilde{\Xi} \triangleq \begin{bmatrix} \Re\{\Xi\} & -\Im\{\Xi\} \\ \Im\{\Xi\} & \Re\{\Xi\} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N} \quad (5-31b)$$

$$\tilde{\mathbf{w}} \triangleq \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{w}^T) & \Im(\mathbf{w}^T) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2N} \quad (5-31c)$$

对问题(5-30)应用LFSDR技术, 可以得到下面松弛问题

$$\min_{\widetilde{\mathbf{W}}} -\frac{\text{tr}(\widetilde{\mathbf{A}}_{\theta_0}\widetilde{\mathbf{W}})}{\text{tr}(\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}\widetilde{\mathbf{W}})} \quad (5-32a)$$

$$\text{s.t. } \text{tr}[(\widetilde{\mathbf{A}}_\theta - \rho(\theta) \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_{\theta_0})\widetilde{\mathbf{W}}] \leq 0, \theta \in \Omega_S \quad (5-32b)$$

$$\text{tr}[(\widetilde{\mathbf{A}}_\theta - u(\theta) \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_{\theta_0})\widetilde{\mathbf{W}}] \leq 0, \theta \in \Omega_M \quad (5-32c)$$

$$\text{tr}[(\widetilde{\mathbf{A}}_\theta - l(\theta) \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_{\theta_0})\widetilde{\mathbf{W}}] \geq 0, \theta \in \Omega_M \quad (5-32d)$$

$$\text{tr}(\widetilde{\mathbf{W}}) \geq \beta \quad (5-32e)$$

$$\widetilde{\mathbf{W}} \succeq 0 \quad (5-32f)$$

其中 β 为小的正数, 如问题(5-20)中所描述, $\widetilde{\mathbf{W}}$ 的秩为一, 定义为

$$\widetilde{\mathbf{W}} \triangleq \widetilde{\mathbf{w}}\widetilde{\mathbf{w}}^T \in \mathbb{R}^{2N \times 2N} \quad (5-33)$$

注意到在问题(5-32)中, 松弛操作将非凸约束 $\text{rank}(\widetilde{\mathbf{W}}) = 1$ 省去。

如前所述, (5-32)为拟凸优化问题, 其可进一步表述为

$$\min_{\widetilde{\mathbf{W}}} \tau \quad (5-34a)$$

$$\text{s.t. } \text{tr}[(\widetilde{\mathbf{A}}_{\theta_0} + \tau \cdot \widetilde{\boldsymbol{\Xi}})\widetilde{\mathbf{W}}] \geq 0 \quad (5-34b)$$

$$\text{tr}[(\widetilde{\mathbf{A}}_\theta - \rho(\theta) \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_{\theta_0})\widetilde{\mathbf{W}}] \leq 0, \theta \in \Omega_S \quad (5-34c)$$

$$\text{tr}[(\widetilde{\mathbf{A}}_\theta - u(\theta) \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_{\theta_0})\widetilde{\mathbf{W}}] \leq 0, \theta \in \Omega_M \quad (5-34d)$$

$$\text{tr}[(\widetilde{\mathbf{A}}_\theta - l(\theta) \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_{\theta_0})\widetilde{\mathbf{W}}] \geq 0, \theta \in \Omega_M \quad (5-34e)$$

$$\text{tr}(\widetilde{\mathbf{W}}) \geq \beta \quad (5-34f)$$

$$\widetilde{\mathbf{W}} \succeq 0 \quad (5-34g)$$

相应地, 对于固定的 τ , 下面问题为凸

$$\text{find } \widetilde{\mathbf{W}} \quad (5-35a)$$

$$\text{s.t. } \text{tr}[(\widetilde{\mathbf{A}}_{\theta_0} + \tau \cdot \widetilde{\boldsymbol{\Xi}})\widetilde{\mathbf{W}}] \geq 0 \quad (5-35b)$$

$$\text{tr}[(\widetilde{\mathbf{A}}_\theta - \rho(\theta) \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_{\theta_0})\widetilde{\mathbf{W}}] \leq 0, \theta \in \Omega_S \quad (5-35c)$$

$$\text{tr}[(\widetilde{\mathbf{A}}_\theta - u(\theta) \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_{\theta_0})\widetilde{\mathbf{W}}] \leq 0, \theta \in \Omega_M \quad (5-35d)$$

$$\text{tr}[(\widetilde{\mathbf{A}}_\theta - l(\theta) \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_{\theta_0})\widetilde{\mathbf{W}}] \geq 0, \theta \in \Omega_M \quad (5-35e)$$

$$\text{tr}(\widetilde{\mathbf{W}}) \geq \beta \quad (5-35f)$$

$$\widetilde{\mathbf{W}} \succeq 0 \quad (5-35g)$$

而且, 由不等式(5-11)可知 $\tau \in [-G(\overline{\mathbf{w}}), 0]$, 其中 $\overline{\mathbf{w}}$ 可由式(5-10)计算得到。基

于此，问题(5-32)的解（记为 $\tilde{\mathbf{W}}_1$ ）可以利用算法16中的二分法得到。相应地， $\tilde{\mathbf{w}}_1$ 则可以进一步由特征值分解或随机化方法得到。最终，根据式(5-31c)，可以得到最终权向量如下所示

$$\hat{\mathbf{w}} = [\tilde{\mathbf{w}}_1(1), \dots, \tilde{\mathbf{w}}_1(N)]^T + j[\tilde{\mathbf{w}}_1(N+1), \dots, \tilde{\mathbf{w}}_1(2N)]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & j\mathbf{I}_N \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_1 \quad (5-36)$$

其中 $\tilde{\mathbf{w}}_1(n)$ 为 $\tilde{\mathbf{w}}_1$ 的第 n 个元素， \mathbf{I}_N 为 $N \times N$ 维单位矩阵。

5.3.2 凹口电平最小化

下面在对阵列增益和主瓣形状进行约束下，考虑旁瓣某区域凹口最小化问题。具体来讲，我们对主瓣同时进行上限和下限约束，同时约束阵列增益高于某特定值。在此基础上，求解权向量使得某旁瓣区域电平最小化。数学上，上述问题可以描述为

$$\min_{\mathbf{w}} \max_{\theta \in \Omega_S} B(\theta, \theta_0) \quad (5-37a)$$

$$\text{s.t. } l(\theta) \leq B(\theta, \theta_0) \leq u(\theta), \theta \in \Omega_M \quad (5-37b)$$

$$G(\mathbf{w}) \geq \eta \quad (5-37c)$$

其中 Ω_S 为旁瓣最小化区域， Ω_M 为主瓣区域， $l(\theta)$ 和 $u(\theta)$ 主瓣最低约束电平和最高约束电平， η 为某设定的阵列增益阈值。

上述问题可以等价地表述为

$$\min_{\mathbf{w}} \tau \quad (5-38a)$$

$$\text{s.t. } B(\theta, \theta_0) \leq \tau, \theta \in \Omega_S \quad (5-38b)$$

$$l(\theta) \leq B(\theta, \theta_0) \leq u(\theta), \theta \in \Omega_M \quad (5-38c)$$

$$G(\mathbf{w}) \geq \eta \quad (5-38d)$$

为了便于执行，我们将问题(5-38)转到实数域处理，如下面问题所述

$$\min_{\mathbf{w}} \tau \quad (5-39a)$$

$$\text{s.t. } \frac{\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{A}}_\theta \tilde{\mathbf{w}}}{\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{A}}_{\theta_0} \tilde{\mathbf{w}}} \leq \tau, \theta \in \Omega_S \quad (5-39b)$$

$$l(\theta) \leq \frac{\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{A}}_\theta \tilde{\mathbf{w}}}{\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{A}}_{\theta_0} \tilde{\mathbf{w}}} \leq u(\theta), \theta \in \Omega_M \quad (5-39c)$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{w}}^H \tilde{\mathbf{A}}_{\theta_0} \tilde{\mathbf{w}}}{\tilde{\mathbf{w}}^H \Xi \tilde{\mathbf{w}}} \geq \eta \quad (5-39d)$$

其中 $\tilde{\mathbf{A}}_\theta$, $\tilde{\boldsymbol{\Xi}}$ 和 $\tilde{\mathbf{w}}$ 的定义见(5-31)。应用LFSDR技术, 可以得到下面拟凸优化问题

$$\min_{\tilde{\mathbf{W}}} \tau \quad (5-40a)$$

$$\text{s.t. } \text{tr}[(\tilde{\mathbf{A}}_\theta - \tau \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{\theta_0}) \tilde{\mathbf{W}}] \leq 0, \theta \in \Omega_S \quad (5-40b)$$

$$\text{tr}[(\tilde{\mathbf{A}}_\theta - u(\theta) \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{\theta_0}) \tilde{\mathbf{W}}] \leq 0, \theta \in \Omega_M \quad (5-40c)$$

$$\text{tr}[(\tilde{\mathbf{A}}_\theta - l(\theta) \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{\theta_0}) \tilde{\mathbf{W}}] \geq 0, \theta \in \Omega_M \quad (5-40d)$$

$$\text{tr}[(\eta \cdot \tilde{\boldsymbol{\Xi}} - \tilde{\mathbf{A}}_{\theta_0}) \tilde{\mathbf{W}}] \leq 0 \quad (5-40e)$$

$$\text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}) \geq \beta \quad (5-40f)$$

$$\tilde{\mathbf{W}} \succeq 0 \quad (5-40g)$$

其中秩一矩阵 $\tilde{\mathbf{W}}$ 的定义见式(5-33)。如前文所述, 对于固定的 τ , 下面问题为凸

$$\text{find } \tilde{\mathbf{W}} \quad (5-41a)$$

$$\text{s.t. } \text{tr}[(\tilde{\mathbf{A}}_\theta - \tau \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{\theta_0}) \tilde{\mathbf{W}}] \leq 0, \theta \in \Omega_S \quad (5-41b)$$

$$\text{tr}[(\tilde{\mathbf{A}}_\theta - u(\theta) \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{\theta_0}) \tilde{\mathbf{W}}] \leq 0, \theta \in \Omega_M \quad (5-41c)$$

$$\text{tr}[(\tilde{\mathbf{A}}_\theta - l(\theta) \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{\theta_0}) \tilde{\mathbf{W}}] \geq 0, \theta \in \Omega_M \quad (5-41d)$$

$$\text{tr}[(\eta \cdot \tilde{\boldsymbol{\Xi}} - \tilde{\mathbf{A}}_{\theta_0}) \tilde{\mathbf{W}}] \leq 0 \quad (5-41e)$$

$$\text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}) \geq \beta \quad (5-41f)$$

$$\tilde{\mathbf{W}} \succeq 0 \quad (5-41g)$$

而且, 不难发现 $\tau \in [0, \gamma]$, 其中 $\gamma = \max_{\theta \in \Omega_S} \bar{B}(\theta, \theta_0)$, $\bar{B}(\theta, \theta_0)$ 代表权向量 $\bar{\mathbf{w}}$ 的归一化波束方向图。类似地, 可以利用二分法来得到问题(5-41)的解 $\tilde{\mathbf{W}}_2$ 。最终的权向量可以用下式计算得到

$$\hat{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & j\mathbf{I}_N \end{bmatrix} \mathbf{w}_2 \quad (5-42)$$

其中 \mathbf{w}_2 可以通过对 $\tilde{\mathbf{W}}_2$ 进行特征值分解或者随机化操作得到。

在白噪声背景下(即 $\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{I}$), 同时若对权向量施加唯相位约束, 此时 $\mathbf{w}^H \boldsymbol{\Xi} \mathbf{w}$ 为常数, 所建立的问题可以借助半正定松弛解决, 如文献[48]所讨论。此外, 不同于文献[48], 问题(5-37a)建立了最大最小化问题来实现凹口最小化, 从而可以得到等电平的凹口深度。综上, 本节算法可以认为是文献[48]中唯相位方法的扩展。

5.4 仿真实验

本节通过仿真实验来验证所提方法的性能。简单起见, 考虑高斯白噪声, 此时可知静态权向量 $\bar{\mathbf{w}}$ 等于 $\mathbf{a}(\theta_0)$ 。为了展示合成方向图的主瓣损失, 考虑衰减后

的方向图 $P(\theta, \theta_0)$, 见式(5-13)的定义。实验中取 $\beta = 0.1$, $\epsilon = 10^{-6}$ 。为了对比性能, 另外将测试文献[48]中的唯相位方法, 文献[43]中的凸优化方法, 文献[137]中的A²RC方法, 以及文献[154]中的凹凸过程方法(convex-concave procedure, CCP)。

5.4.1 主瓣损失最小化

下面利用两种阵列配置来实现主瓣最小化。

(1). 等距线阵下單个区域等电平旁瓣约束

考虑32阵元各向同性等距线阵, 阵元间距为半波长。波束中心取为 $\theta_0 = -30^\circ$, 旁瓣区域 $\Omega_S = [50^\circ, 65^\circ]$ 电平上限为 -50dB 。

图5-2展示了上述参数配置下的方向图, 由图可以看出所有测试方法均可以在区间 Ω_S 内达到理想的旁瓣电平。而且, 可以看出所提方法与凸优化方法得到相同的方向图。考虑阵列增益损失, 所提方法的主瓣损失为0.058dB, 比唯相位方法和A²RC方法的损失要低。

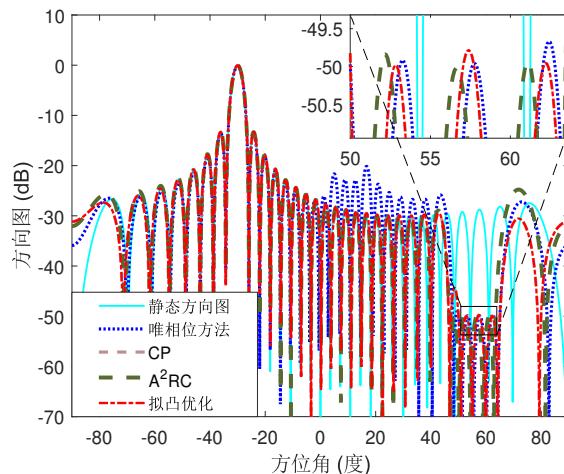


图 5-2 等距线阵主瓣增益损失最小方向图结果对比

正如文献[48]阐述, 在凹口深度和主瓣增益损失两方面需要折衷考量。图5-3描绘了主瓣损失随凹口电平的变化情况, 从中可以看出凹口电平越高, 主瓣损失最小。该结论对所有测试方法均成立。对于给定的旁瓣凹口电平, 所提方法的主瓣损失要低于其它测试方法。而且, 当凹口接近 -30dB (约等于静态方向图在凹口区间的电平) 时, 所有方法的主瓣损失趋于零, 所得到的权向量实际上退化为静态权向量 $\bar{\mathbf{w}}$ 。

(2). 随机线阵非等电平旁瓣和平顶主瓣约束

为了进一步测试所提方法在主瓣损失最小化方面的性能, 下面考虑20阵元各向同性非等距线性阵列, 其阵元位置信息见表5-1。取波束中心为 $\theta_0 = 10^\circ$ 。期望

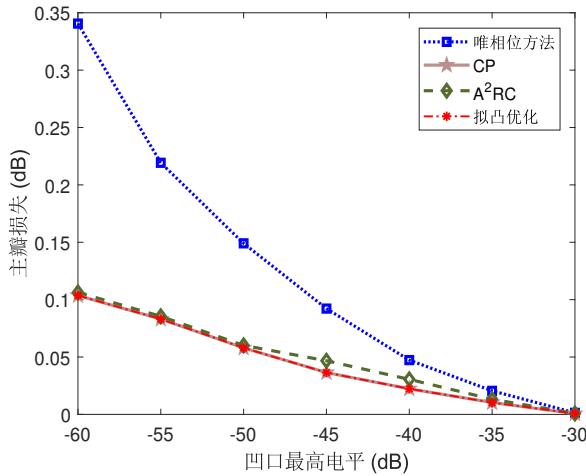


图 5-3 主瓣损失随凹口最高电平变化曲线

旁瓣电平随角度变化。具体地，凹口区域为 $\Omega_S = [-40^\circ, -20^\circ] \cup [50^\circ, 60^\circ]$ ，其中区域 $[-40^\circ, -20^\circ]$ 的电平上限为 -30dB ，区域 $[50^\circ, 60^\circ]$ 的电平上限为 -40dB 。除此之外，主瓣区域 $[5^\circ, 15^\circ]$ 期望形成为平顶电平，波纹小于 0.5dB 。

表 5-1 非等距线阵阵元位置及得到的权向量

n	$x_n(\lambda)$	w_n	n	$x_n(\lambda)$	w_n
1	0.00	$0.1038e^{+j1.6074}$	11	5.15	$0.7634e^{-j2.3479}$
2	0.45	$0.2107e^{+j2.0508}$	12	5.68	$0.8781e^{-j1.6678}$
3	0.92	$0.2704e^{+j2.4490}$	13	6.23	$0.9308e^{-j1.1390}$
4	1.35	$0.2777e^{-j3.1135}$	14	6.68	$0.9216e^{-j0.6140}$
5	1.98	$0.1933e^{-j2.8021}$	15	7.25	$1.0000e^{+j0.0000}$
6	2.41	$0.0949e^{-j1.9877}$	16	7.80	$0.7046e^{+j0.5811}$
7	3.02	$0.0275e^{+j1.8551}$	17	8.25	$0.7108e^{+j1.1360}$
8	3.62	$0.3082e^{+j2.2844}$	18	8.88	$0.5279e^{+j1.7313}$
9	4.12	$0.3849e^{+j2.8386}$	19	9.26	$0.2592e^{+j2.3173}$
10	4.52	$0.5748e^{-j2.8941}$	20	9.80	$0.1914e^{+j2.5509}$

由于上述场景下无法应用凸优化方法，下面仅对比所提方法与文献[48]的唯相位方法，A²RC方法，以及凹凸过程方法。各方法得到的方向图见图5-4，表5-1列出了所提方法的权向量取值。由图5-4可以看出，尽管唯相位方法和 A²RC方法

均可以得到满意的旁瓣电平，但两种方法无法得到满意的平顶主瓣。所提方法和凹凸过程可以在主瓣和旁瓣区域得到满意的方向图结果。对比主瓣损失可以发现，所提方法的损失为8.1034dB，低于凹凸方法的9.5637dB。

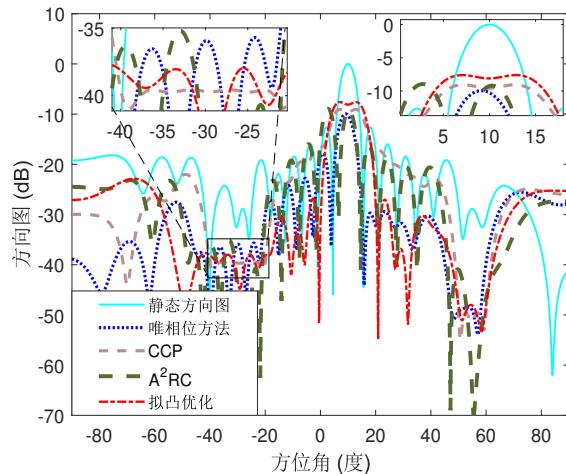


图 5-4 平顶主瓣方向图结果对比

5.4.2 凹口电平最小化

下面通过仿真实验来验证所提方法在凹口电平最小化方面的性能。

(1). 等距线阵

该实验中，考虑32各向同性阵元等距线阵，阵元间距为半波长。主瓣波束中心为 $\theta_0 = 50^\circ$ ，允许主瓣损失为 $\eta = 0.15\text{dB}$ ，凹口区域为 $\Omega_S = [-70^\circ, -50^\circ]$ ，该区域内方向图电平期望进行最小化。仿真中不对主瓣区域进行额外的旁瓣约束。

图5-5对比了不同方法的仿真结果，从图中可以看出所有方法的主瓣损失均满足期望要求。所提方法和凸优化方法可以获得-55dB的等旁瓣电平，而唯相位方法和A²RC方法的最大凹口电平分别为-41dB和-40dB。由于所提方法在满足主瓣损失的条件下获得最深的凹口电平，所以其性能优于其它方法。

下面将可允许主瓣损失由0dB变化到0.21dB，测试不同方法得到的凹口电平如图5-6所示。由图5-6可以看出，对于所有测试算法，可允许增益损失越大，得到的旁瓣凹口越深。对于给定的可允许主瓣损失，所提方法和凸优化方法得到的凹口电平低于唯相位方法和A²RC方法。而且，当取 η 为0dB时（即不允许存在增益损失），所有方法得到的凹口电平均为-25dB，这实际上刚好等于静态方向图在 Ω_S 区域内的最大方向图电平。上述场景下，所有方法得到的权向量退化为静态权。

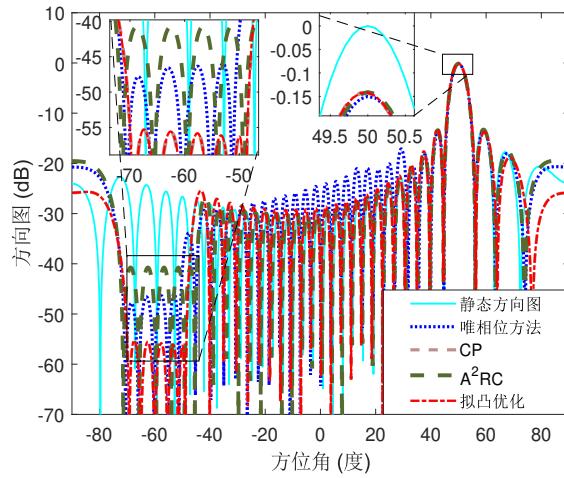


图 5-5 32阵元等距线阵凹口电平最小得到的方向图结果对比

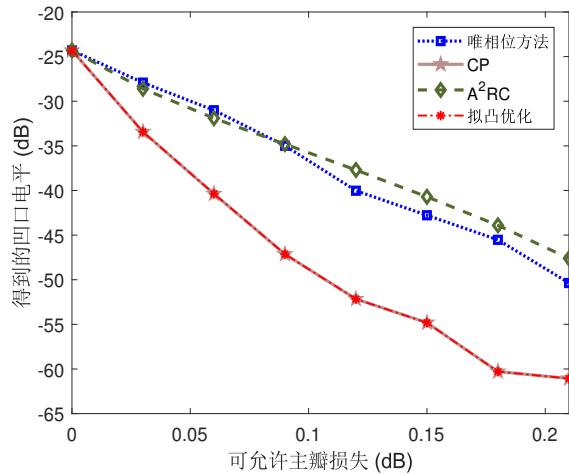


图 5-6 得到的凹口电平随可允许主瓣损失变化曲线

(2). 各向异性线性随机阵列

该实验中考虑33阵元各向异性随机阵列，第 n 个阵元方向图函数满足：

$$g_n(\theta) = \frac{\cos[\pi l_n \sin(\theta + \zeta_n)] - \cos(\pi l_n)}{\cos(\theta + \zeta_n)} \quad (5-43)$$

其中 ζ_n 和 l_n 分别代表阵元方向和长度。设定主瓣波束中心为 $\theta_0 = 30^\circ$ ，取可允许的主瓣损失为 $\eta = 3\text{dB}$ ，凹口区域取为 $\Omega_S = [-40^\circ, -20^\circ]$ 。除此之外，主瓣区域 $\Omega_M = [27^\circ, 33^\circ]$ 内期望得到平顶电平。图5-7对比了不同方法的方向图结果。

由图中可以看出，唯相位方法在主瓣区域无法得到期望的平顶电平，且其在凹口区域 Ω_S 的电平较高。凹凸过程方法， A^2RC 方法以及所提方法在给定主瓣区

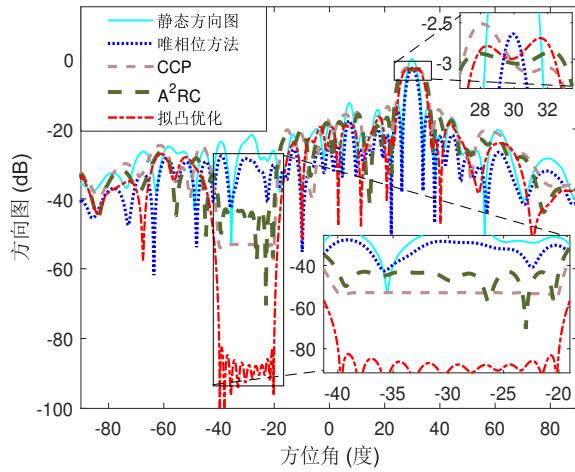


图 5-7 各向异性线性随机阵列凹口最小方向图结果对比

域均可以获得满意的方向图，且得到的增益损失满足给定要求。旁瓣区域 Ω_S 内， A^2RC 方法得到的最大电平约为 -44 dB。所提方法的凹口电平低于 -80 dB，该值均低于凹凸过程与 A^2RC 方法的相应值。

5.5 本章小结

本章讨论了基于线性分式半正定松弛和拟凸优化的高性能阵列方向图综合。主要研究了主瓣损失最小化和凹口最小化两个问题。具体地，首先利用半正定松弛将原始问题转换为拟凸优化问题。在此基础上利用二分法对拟凸优化问题进行求解。最后利用特征值分解或随机化操作得到最终的权向量。所提方法适用于任意阵列，且对噪声协方差矩阵没有限制。仿真实验证实了所提算法的有效性。

第六章 唯相位方向图控制的几何方法

由于硬件的限制，有时需要进行唯相位的方向图控制，即只改变阵元加权的相位，而固定幅度权值不变。已有的唯相位方向图控制方法没有解析解，同时运算量较大。研究具有解析形式的唯相位方向图控制方法具有重要的理论和应用价值。

本章首先研究了唯相位阵列响应调整的几何解释，在此基础上提出利用多边形构成进行问题求解。之后对几何方法的解进行了深入分析，并提出一种基于WORD方法的相位确定算法。所提的几何方法有解析形式解，且可以有效避免方向图畸变现象。实验仿真证实了所提方法的有效性。

6.1 唯相位阵列响应调整的几何解释

考虑 N 元阵列，假设 $N \geq 3$ 。给定某权向量 \mathbf{w}_{pre} ，需要设计一个新的权向量 \mathbf{w}_{new} （只调节权向量的相位）实现将 θ_c 处的归一化阵列响应调节为 ρ_c ，即满足

$$L_{\text{new}}(\theta_c, \theta_0) \triangleq \frac{|\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_c)|^2}{|\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} = \rho_c \quad (6-1)$$

其中 θ_0 为主瓣波束中心， $\mathbf{a}(\theta)$ 代表 θ 方向的导向矢量，权向量 \mathbf{w}_{new} 和 \mathbf{w}_{pre} 的第 n 个元素（分别记为 $w_{\text{new},n}$ 和 $w_{\text{pre},n}$ ）满足下述条件

$$w_{\text{new},n} = |w_{\text{pre},n}| \cdot e^{j\phi_n}, \quad n = 1, \dots, N \quad (6-2)$$

其中 $\phi_n = \angle w_{\text{new},n}$ 。通过引入相位参数 $\psi_c \in [0, 2\pi)$ ，可以将二次式(6-1)简化为

$$\frac{\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_c)}{\mathbf{w}_{\text{new}}^H \mathbf{a}(\theta_0)} = \sqrt{\rho_c} e^{j\psi_c} \quad (6-3)$$

或等价地，

$$\underbrace{\mathbf{w}_{\text{new}}^H (\mathbf{a}(\theta_c) - \sqrt{\rho_c} e^{j\psi_c} \mathbf{a}(\theta_0))}_{\triangleq \mathbf{h}(\theta_c, \theta_0, \rho_c, \psi_c)} = \sum_{n=1}^N h_n |w_{\text{pre},n}| e^{-j\phi_n} = 0 \quad (6-4)$$

其中 h_n 代表 $\mathbf{h}(\theta_c, \theta_0, \rho_c, \psi_c)$ 的第 n 个元素。如何选择相位 ψ_c 将在后文讨论，这里假设 ψ_c 已知。给定 θ_c ， θ_0 ， ρ_c 以及 ψ_c ，下面讨论如何确定相位 $\phi_n (n = 1, \dots, N)$ 使得式(6-4)成立。

为了简化符号，定义

$$v_n \triangleq h_n \cdot |w_{\text{pre},n}|, \quad n = 1, \dots, N \quad (6-5)$$

则式(6-4)等价于 $\sum_{n=1}^N v_n e^{-j\phi_n} = 0$ 。在复平面上, $v_n e^{-j\phi_n}$ 对应于向量 $\overrightarrow{v_n e^{-j\phi_n}}$, 其坐标为 $(\Re(v_n e^{-j\phi_n}), \Im(v_n e^{-j\phi_n}))$ 。借助几何思想, 式(6-4)可以等价地表示为

$$\sum_{n=1}^N \overrightarrow{v_n e^{-j\phi_n}} = \sum_{n=1}^N |v_n| e^{j(\vartheta_n - \phi_n)} = \overrightarrow{0} \quad (6-6)$$

其中 $\vartheta_n = \angle v_n = \angle h_n$, $n = 1, \dots, N$ 。则解等式(6-4)的问题等价于如何在复平面上旋转向量 $\overrightarrow{v_n}$ ($n = 1, \dots, N$)使得其和为零向量, 如图 6-1 所示。事实上, 上述问题等价于如何在复平面构造多边形, 其中该多边形各边长度刚好为 $|v_n|$, $n = 1, \dots, N$ 。

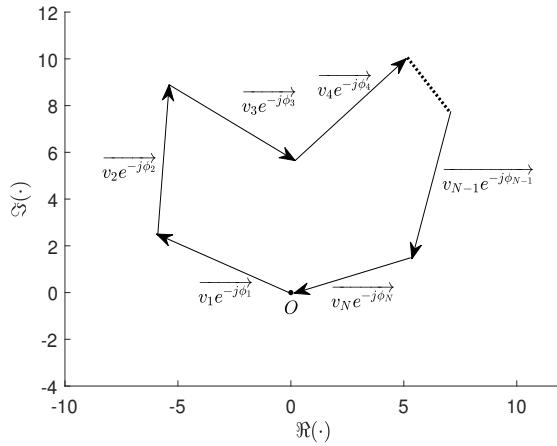


图 6-1 多边形构造示意图

6.2 基于三角形构造的几何解

下面研究方程(6-6)的可行性, 并给出一种基于三角形构造的几何解。首先, 定义置换矩阵 \mathbf{J} 将 $|v_1|, \dots, |v_N|$ 按降序排列为

$$[d_1, \dots, d_N]^T = \mathbf{J} [|v_1|, \dots, |v_N|]^T \quad (6-7)$$

其中 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_N > 0$ 。利用上述符号, 不难发现解方程(6-6) (关于参数 ϕ_n) 等价于求解相位 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ 使得下式成立

$$\sum_{i=1}^N \overrightarrow{d_i e^{j\varphi_i}} = \overrightarrow{0} \quad (6-8)$$

其中 ϕ_n 和 φ_n 满足下述关系

$$[\phi_1, \dots, \phi_N]^T = [\vartheta_1, \dots, \vartheta_N]^T - \mathbf{J}^T [\varphi_1, \dots, \varphi_N]^T \quad (6-9)$$

上式中用到了性质 $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T$ 。因此, 相位 ϕ_n ($n = 1, \dots, N$) 的确定转换为如何求解相位 φ_i ($i = 1, \dots, N$) 使得式(6-8)成立。进一步讨论之前, 首先介绍下面引理。

引理 6.2.1 假设 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_N > 0$, 同时定义分段求和函数 $Q(\cdot)$ 满足

$$Q(k, l) \triangleq \sum_{i=k}^l d_i, \quad 1 \leq k \leq l \leq N \quad (6-10)$$

如果

$$d_1 \leq Q(2, N) \quad (6-11)$$

则有

$$d_1 \geq \min_{i \in \{2, \dots, N-1\}} |Q(2, i) - Q(i+1, N)| \quad (6-12)$$

证明 见附录D.1。 ■

基于引理6.2.1, 可以得到下面重要推论。

推论 6.2.1 如果 $d_1 \leq Q(2, N)$, 则非线性方程(6-8)有下面解

$$\varphi_i = \begin{cases} \pi, & i = 1 \\ \alpha_1, & 2 \leq i \leq m \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \pi, & m + 1 \leq i \leq N \end{cases} \quad (6-13)$$

其中 m 满足

$$m = \arg \min_{i \in \{2, \dots, N-1\}} |Q(2, i) - Q(i+1, N)| \quad (6-14)$$

α_1 和 α_2 定义如下

$$\alpha_1 = \arccos \left(\frac{d_1^2 + Q^2(2, m) - Q^2(m+1, N)}{2d_1 Q(2, m)} \right) \quad (6-15a)$$

$$\alpha_2 = \arccos \left(\frac{Q^2(2, m) + Q^2(m+1, N) - d_1^2}{2Q(2, m)Q(m+1, N)} \right) \quad (6-15b)$$

证明 给定满足式(6-14)的 m , 如果式(6-11)成立, 即

$$d_1 \leq Q(2, N) = Q(2, m) + Q(m+1, N) \quad (6-16)$$

则由引理6.2.1可以得到

$$d_1 \geq |Q(2, m) - Q(m+1, N)| \quad (6-17)$$

上式意味着 d_1 , $Q(2, m)$ 和 $Q(m+1, N)$ 三条边可以构成三角形, 如图6-2所示, 其中 α_1 代表 d_1 和 $Q(2, m)$ 之间的夹角, α_2 代表 $Q(2, m)$ 和 $Q(m+1, N)$ 之间的夹角, α_1 和 α_2 的定义见式(6-15)。以几何方式, 我们得到

$$\overrightarrow{d_1 e^{j\pi}} + \overrightarrow{Q(2, m) e^{j\alpha_1}} + \overrightarrow{Q(m+1, N) e^{j(\alpha_1 + \alpha_2 + \pi)}} = \overrightarrow{0} \quad (6-18)$$

上式表明, 等式(6-8)存在解(6-13)。证毕。 ■

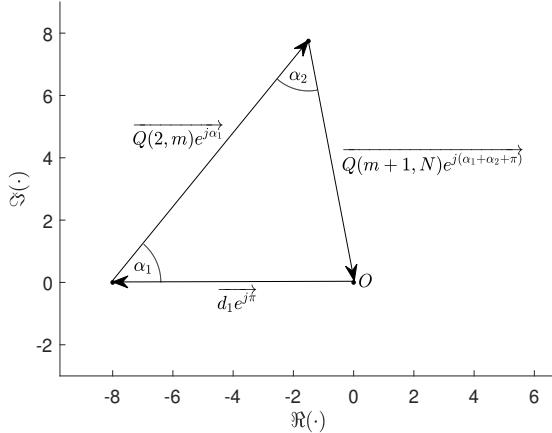


图 6-2 三角形构造示意图

推论6.2.1给出了等式(6-8)可行的充分条件（即式(6-11)）。而且，推论6.2.1借助三角形构造给出了问题(6-8)的一个解析解。利用式(6-13)中直接相位选取的方式，由式(6-9)可以得到 ϕ_n , $n = 1, \dots, N$ ，即可实现前文所述的唯相位阵列响应控制。

为了验证上述结果，下面考虑一等距线阵，阵元间距为半波长，阵元个数为 $N = 16$ ，阵元方向图各向同性。波束中心固定在 $\theta_0 = -20^\circ$ ，已有权向量设置为 $\mathbf{w}_{\text{pre}} = \mathbf{a}(\theta_0)$ 。另外，取 $\theta_c = 30^\circ$, $\rho_c = -40\text{dB}$, $\psi_c = 0$ 。上述条件下，可以计算出 $m = 8$, $d_1 = 1.0099$, $Q(2, m) = 7.0412$, $Q(m+1, N) = 7.9451$, $\alpha_1 = 151.7380^\circ$, $\alpha_2 = 3.4504^\circ$ 。图6-3描述了 \mathbf{w}_{pre} 和 \mathbf{w}_{new} 的方向图。可以看出新的权向量 \mathbf{w}_{new} 可以将 θ_c 处的电平准确地调节为 ρ_c 。而且不难检验， \mathbf{w}_{new} 各元素与已有权向量 \mathbf{w}_{pre} 具有相同的模。然而，由图6-3可以发现，相比于 \mathbf{w}_{pre} 的方向图， \mathbf{w}_{new} 的方向图在非控制区域有较大变化。实际上， \mathbf{w}_{new} 的方向图产生了畸变。鉴于此，下文将提出避免波束畸变的改进方法。另外，上文所指的三角形包括三边共线的场景，此时有 $d_1 = Q(2, m) + Q(m+1, N)$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$ 。

6.3 基于多边形构造的解分析

下面利用多边形构造来对方程(6-8)的解进行分析，并给出相位 φ_n 的可行集。这是后文解问题(6-8)和(6-6)提供了重要的理论基础。进一步讨论之前，首先介绍下面引理。

引理 6.3.1 给定 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_N > 0$ ，方程 $\sum_{i=1}^N \overrightarrow{d_i e^{j\varphi_i}} = \overrightarrow{0}$ 存在解（或者等价地，边 d_i 可以形成多边形），当且仅当 $d_1 \leq Q(2, N)$ 成立。

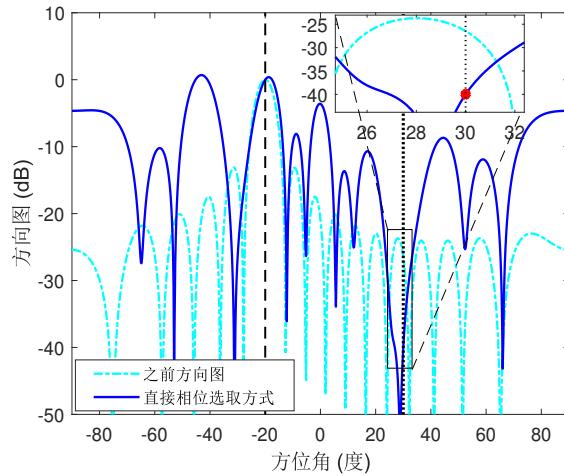


图 6-3 利用三角形构造方法得到的方向图结果

证明 见文献[155]。 ■

强于上节中的推论6.2.1所述的充分条件，上述引理6.3.1表明 $d_1 \leq Q(2, N)$ 同时也是方程 $\sum_{i=1}^N \overrightarrow{d_i e^{j\varphi_i}} = \vec{0}$ 可行的必要条件。利用几何思想，这意味着所有边 $d_i (i = 1, \dots, N)$ 经过旋转后可以构成多边形，当且仅当最长的边（即 d_1 ）长度不超过其它所有边长度之和。注意到当 $N = 3$ 时，引理6.3.1 表明三条边 d_1 , d_2 和 d_3 可以构成三角形当且仅当 $d_1 \leq d_2 + d_3$ 。这与常识相吻合（注意到由于 $d_1 \geq d_2 \geq d_3 > 0$, $d_1 \geq d_2 - d_3$ 已经满足）。利用上述引理6.3.1，下面分析方程 $\sum_{i=1}^N \overrightarrow{d_i e^{j\varphi_i}} = \vec{0}$ 的解。

由于等式 $\sum_{i=1}^N \overrightarrow{d_i e^{j\varphi_i}} = \vec{0}$ 在经过某相移后仍然成立，简单起见，我们参照图6-2来选取 φ_1 满足

$$\varphi_{1,\star} = \pi \quad (6-19)$$

根据推论6.2.1，三条边 d_1 , $Q(2, m)$ 和 $Q(m+1, N)$ 可以构成三角形，如图 6-2 所示，其中 m 的定义见式(6-14)。实际上，通过对 $\overrightarrow{d_2 e^{j\varphi_2}}$ 进行一定角度的旋转，多边形的形状可以保持。为了进一步分析，下面绘制辅助向量 $\overrightarrow{x_2 e^{j\gamma_2}}$ （其模值为 x_2 相位为 γ_2 ）由向量 $\vec{0}$ 的终点指向向量 $\overrightarrow{d_1 e^{j\pi}} + \overrightarrow{d_2 e^{j\varphi_2}}$ 的终点，如图6-4所示。可以看出，所有的边 $d_i (i = 1, \dots, N)$ 可以构成多边形当且仅当

- 1) 三条边 d_1 , d_2 和 x_2 可以构成三角形。
- 2) 边 x_2 , d_3 , ..., d_N 可以构成多边形。

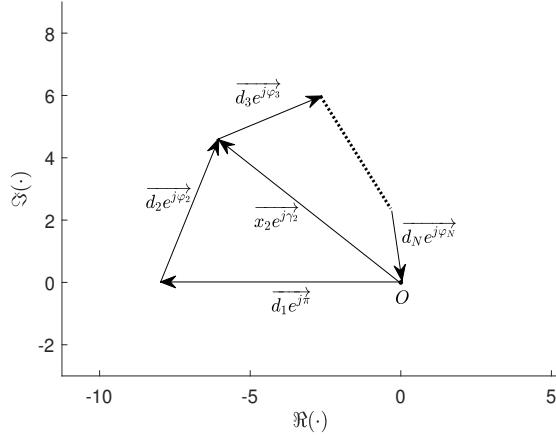


图 6-4 多边形构造的几何示意图

由引理6.3.1, 上述两个条件满足当且仅当

$$d_1 - d_2 \leq x_2 \leq d_1 + d_2 \quad (6-20a)$$

$$d_3 \geq x_2, d_3 \leq x_2 + \sum_{k=4}^N d_k \quad (6-20b)$$

或

$$d_1 - d_2 \leq x_2 \leq d_1 + d_2 \quad (6-21a)$$

$$x_2 \geq d_3, x_2 \leq \sum_{k=3}^N d_k \quad (6-21b)$$

经过计算, 可以得到 x_2 的可行集 (记为 $\mathbb{X}_2 = [x_{2,\min}, x_{2,\max}]$) 为

$$\mathbb{X}_2 = \left[\underbrace{\max \left\{ d_1 - d_2, d_3 - \sum_{k=4}^N d_k \right\}}_{x_{2,\min}}, \underbrace{\min \left\{ d_1 + d_2, \sum_{k=3}^N d_k \right\}}_{x_{2,\max}} \right] \quad (6-22)$$

利用辅助向量 $\overrightarrow{x_2 e^{j\gamma_2}}$ 以及式(6-22)中 x_2 的范围, 我们可以进一步得到相位 φ_2 的可行集。具体来讲, 由于 d_1, d_2 和 x_2 可以形成三角形, d_1 和 d_2 的夹角 (记为 δ_2) 可以表示为

$$\delta_2 = \arccos \left(\frac{d_1^2 + d_2^2 - x_2^2}{2d_1 d_2} \right) \quad (6-23)$$

由于 x_2 可以在集合 \mathbb{X}_2 内取值, 不难得到

$$\delta_2 \in [\delta_{2,\min}, \delta_{2,\max}] \quad (6-24)$$

其中

$$\delta_{2,\min} = \arccos\left(\frac{d_1^2 + d_2^2 - x_{2,\min}^2}{2d_1d_2}\right) \quad (6-25a)$$

$$\delta_{2,\max} = \arccos\left(\frac{d_1^2 + d_2^2 - x_{2,\max}^2}{2d_1d_2}\right) \quad (6-25b)$$

注意到边 d_2 可以沿着向量 $\overrightarrow{-d_1e^{j\pi}}$ 进行顺时针或逆时针方向旋转(旋转角度为 δ_2)。可以得到, φ_2 的可行集为

$$\varphi_2 \in [-\delta_{\max}, -\delta_{\min}] \cup [\delta_{\min}, \delta_{\max}] \quad (6-26)$$

为了更好地理解上述描述, 我们绘制了图6-5来展示更多细节。图6-5的红色虚箭头代表可行的向量 $d_2e^{j\varphi_2}$, 紫色区域为其扫过的区域。如果将 φ_2 选取为 $\varphi_{2,*}$ (如何选取将在下文讨论), 响应的 $\overrightarrow{x_2e^{j\gamma_{2,*}}}$ ($\gamma_{2,*}$ 表示 γ_2 的最终值)满足

$$\overrightarrow{x_2e^{j\gamma_{2,*}}} = \overrightarrow{d_1e^{j\varphi_{1,*}}} + \overrightarrow{d_2e^{j\varphi_{2,*}}} \quad (6-27)$$

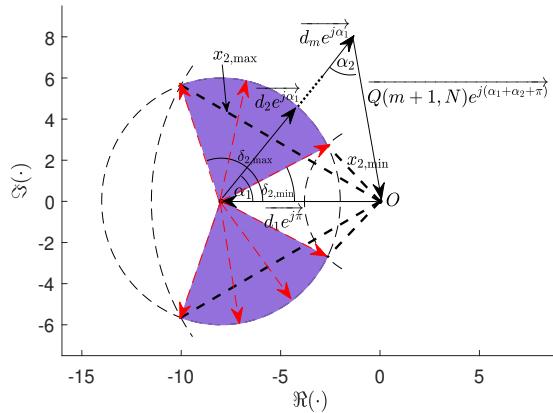


图 6-5 确定相位 φ_2 可行集的几何示意图

给定 $\overrightarrow{d_1e^{j\varphi_{1,*}}}$, $\overrightarrow{d_2e^{j\varphi_{2,*}}}$ 以及得到的 $\overrightarrow{x_2e^{j\gamma_{2,*}}}$, 可以用类似的方式得到 φ_3 的可行集。为了满足(6-8), 边 x_2, d_3, \dots, d_N 需要构成多边形。此时, 可以绘制辅助向量 $\overrightarrow{x_3e^{j\gamma_3}}$ 由向量 $\overrightarrow{0}$ 的终点指向向量 $\overrightarrow{x_2e^{j\gamma_{2,*}}} + \overrightarrow{d_3e^{j\varphi_3}}$ 的终点。不难看出, 边 x_2, d_3, \dots, d_N 可以形成多边形当且仅当

1)边 x_2, d_3 和 x_3 可以构成三角形。

2)边 x_3, d_4, \dots, d_N 可以构成多边形。

参照确定 φ_2 的可行集的方式, 可以得到 φ_3 的可行集。基于此, 可以得到依照一定

准则选取最终的 φ_3 （详见下节）。最终的 $\overrightarrow{x_3e^{j\gamma_{3,*}}}$ 满足

$$\overrightarrow{x_3e^{j\gamma_{3,*}}} = \overrightarrow{x_2e^{j\gamma_{2,*}}} + \overrightarrow{d_3e^{j\varphi_{3,*}}} = \sum_{k=1}^3 \overrightarrow{d_ke^{j\varphi_{k,*}}} \quad (6-28)$$

更一般地，如果 $\overrightarrow{x_{i-1}e^{j\gamma_{i-1}}}$ 已经确定为 $\overrightarrow{x_{i-1}e^{j\gamma_{i-1,*}}}$ 满足

$$\overrightarrow{x_{i-1}e^{j\gamma_{i-1,*}}} = \overrightarrow{x_{i-2}e^{j\gamma_{i-2,*}}} + \overrightarrow{d_{i-1}e^{j\varphi_{i-1,*}}} = \sum_{k=1}^{i-1} \overrightarrow{d_ke^{j\varphi_{k,*}}} \quad (6-29)$$

为了得到 φ_i 的可行集，绘制辅助向量 $\overrightarrow{x_ie^{j\gamma_i}}$ 由 $\overrightarrow{0}$ 的终点指向 $\overrightarrow{x_{i-1}e^{j\gamma_{i-1,*}}} + \overrightarrow{d_ie^{j\varphi_i}}$ 的终点， $i = 2, \dots, N-2$ ，其中 x_1 和 $\gamma_{1,*}$ 分别定义如下

$$x_1 \triangleq d_1 \quad (6-30a)$$

$$\gamma_{1,*} \triangleq \varphi_{1,*} = \pi \quad (6-30b)$$

为了满足等式(6-8)，边 x_{i-1}, d_i, \dots, d_N 需要构造为多边形。类似于 \mathbb{X}_1 的确定过程，可以得到 x_i 的可行集（记为 \mathbb{X}_i ）如下所示

$$\mathbb{X}_i = \left[\underbrace{\max \left\{ |x_{i-1} - d_i|, d_{i+1} - \sum_{k=i+2}^N d_k \right\}}_{\triangleq x_{i,\min}}, \underbrace{\min \left\{ x_{i-1} + d_i, \sum_{k=i+1}^N d_k \right\}}_{\triangleq x_{i,\max}} \right] \quad (6-31)$$

其中*i*可以取为 $2, \dots, N-2$ 。在进一步计算 φ_i 的可行集之前，首先介绍如下定理来保证集合 \mathbb{X}_i 非空性， $i = 2, \dots, N-2$ 。

定理 6.3.1 如果 $d_1 \leq Q(2, N)$ ，则集合 \mathbb{X}_2 非空。如果 $x_{i-1} \in \mathbb{X}_{i-1}$ ，则集合 \mathbb{X}_i 非空，其中*i* = 3, ..., N-2。

证明 见附录D.2。 ■

由于 x_{i-1} 从相应的集合 \mathbb{X}_{i-1} 中选取， $i = 3, \dots, N-2$ ，由定理6.3.1可知，所有的集合 \mathbb{X}_i ($i = 2, \dots, N-2$) 均非空，只要 $d_1 \leq Q(2, N)$ 成立。图6-6从几何上示意了如何确定 φ_i 的可行集， $i = 2, \dots, N-2$ 。可以看出，边 x_{i-1} 和边 d_i 的夹角（记为 δ_i ）满足

$$\delta_i = \arccos \left(\frac{x_{i-1}^2 + d_i^2 - x_i^2}{2x_{i-1}d_i} \right), \quad i = 2, \dots, N-2 \quad (6-32)$$

集合(6-31)，不难得到

$$\delta_i \in [\delta_{i,\min}, \delta_{i,\max}] \quad (6-33)$$

其中

$$\delta_{i,\min} = \arccos \left(\frac{x_{i-1}^2 + d_i^2 - x_{i,\min}^2}{2x_{i-1}d_i} \right) \quad (6-34a)$$

$$\delta_{i,\max} = \arccos \left(\frac{x_{i-1}^2 + d_i^2 - x_{i,\max}^2}{2x_{i-1}d_i} \right) \quad (6-34b)$$

上式中 $x_{i,\min}$ 和 $x_{i,\max}$ 的定义见式(6-31), $i = 2, \dots, N-2$ 。进一步可以得到 φ_i 的可行集如下所示

$$\begin{aligned} \varphi_i \in \Psi_i &\triangleq [\gamma_{i-1,*} + \pi - \delta_{i,\max}, \gamma_{i-1,*} + \pi - \delta_{i,\min}] \cup \\ &[\gamma_{i-1,*} + \pi + \delta_{i,\min}, \gamma_{i-1,*} + \pi + \delta_{i,\max}] \end{aligned} \quad (6-35)$$

其中 $i = 2, \dots, N-2$ 。图6-6中的紫色区域为向量 $\overrightarrow{d_i e^{j\varphi_i}}$ 扫过的区域, 红箭头代表 $\overrightarrow{d_i e^{j\varphi_i}}$ 。

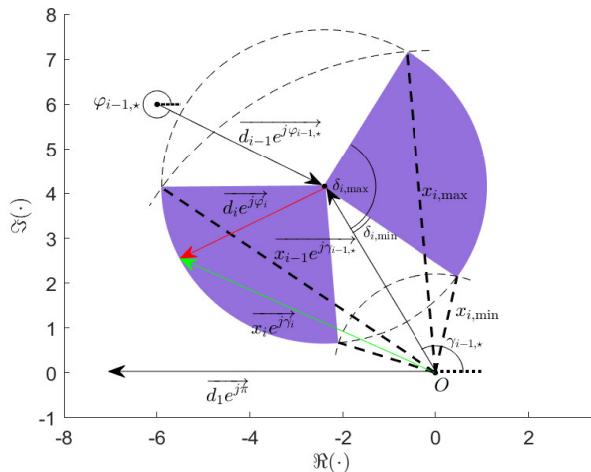


图 6-6 确定相位 φ_i 可行集的几何示意图

如果选取 φ_i 的最终值为 $\varphi_{i,*}$ (选取准则见下文), 则最终的 $\overrightarrow{x_i e^{j\gamma_{i,*}}}$ 可以表示为

$$\overrightarrow{x_i e^{j\gamma_{i,*}}} = \overrightarrow{x_{i-1} e^{j\gamma_{i-1,*}}} + \overrightarrow{d_i e^{j\varphi_{i,*}}}, \quad i = 2, \dots, N-2 \quad (6-36)$$

上述讨论中, 下标 i 需要满足 $i < N-2$ 。当 $i = N-2$ 时, 所得到的 x_{N-2} 与其余两条边 d_{N-1} 和 d_N 需要可以形成三角形, 如图 6-7 所示。不难进一步得到相位 φ_{N-1} 和 φ_N 的可行集。具体来讲, 为了得到满足条件的相位 φ_{N-1} , 可以首先将边 x_{N-2} 和 d_{N-1} 的夹角表示为

$$\delta_{N-1} = \arccos \left(\frac{x_{N-2}^2 + d_{N-1}^2 - d_N^2}{2x_{N-2}d_{N-1}} \right) \quad (6-37)$$

借助图6-7中的几何解释，不难发现 φ_{N-1} 最多有两个可行解，即

$$\varphi_{N-1} \in \Psi_{N-1} \triangleq \{\gamma_{N-2,*} + \pi - \delta_{N-1}, \gamma_{N-2,*} + \pi + \delta_{N-1}\} \quad (6-38)$$

而且，由图6-7容易得到

$$\overrightarrow{d_N e^{j\varphi_N}} = - \left(\overrightarrow{x_{N-2} e^{j\gamma_{N-2,*}}} + \overrightarrow{d_{N-1} e^{j\varphi_{N-1}}} \right) \quad (6-39)$$

如果将 φ_{N-1} 的最终选取值记为 $\varphi_{N-1,*}$ （详见下文讨论），则 φ_N 只有一个备选值（记为 $\varphi_{N,*}$ ）满足

$$\varphi_{N,*} = \angle \left(\overrightarrow{x_{N-2} e^{j\gamma_{N-2,*}}} + \overrightarrow{d_{N-1} e^{j\varphi_{N-1,*}}} \right) + \pi \quad (6-40)$$

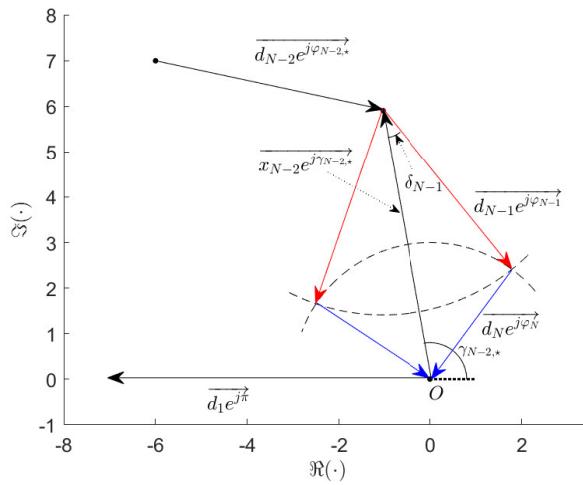


图 6-7 确定相位 φ_{N-1} 和 φ_N 的几何示意图

6.4 相位确定

上节中，我们分析了方程(6-8)的解，并得到了相位 $\varphi_i(i=2,\dots,N)$ 的可行集。下面讨论如何确定相位 $\varphi_{i,*}(i=2,\dots,N)$ ，并得到最终的相位 $\phi_n(n=1,\dots,N)$ 。

首先由式(6-9)可知

$$\mathbf{J}[\phi_1, \dots, \phi_N]^T = \mathbf{J}[\vartheta_1, \dots, \vartheta_N]^T - [\varphi_1, \dots, \varphi_N]^T \quad (6-41)$$

对于任意给定的 $i \in \{1, \dots, N\}$ ，一定存在唯一的 $n \in \{1, \dots, N\}$ 满足 $\mathbf{J}(i, n) = 1$ 。简洁起见，记对应的 n 满足

$$n = \varsigma(i) \quad (6-42)$$

其中 $\varsigma(\cdot)$ 返回从1到 N 的索引值， $\varsigma(\cdot)$ 的具体形式依赖于置换矩阵 \mathbf{J} 。利用上述标记，

由等式(6-41)可以得到

$$\phi_{\varsigma(i)} = \vartheta_{\varsigma(i)} - \varphi_i, i = 1, \dots, N \quad (6-43)$$

由于波束方向图在固定的相位旋转下保持不变，且前文取 $\varphi_{1,\star} = \pi$ ，我们取最终的 $\phi_{\varsigma(1)}$ 为

$$\phi_{\varsigma(1),\star} = \vartheta_{\varsigma(1)} - \varphi_{1,\star} = \vartheta_{\varsigma(1)} - \pi \quad (6-44)$$

当 $i \in \{2, \dots, N-1\}$ 时，可以通过选取 $\phi_{\varsigma(i)}$ 来间接地确定相位 φ_i 。具体来讲，假设 φ_i 的可行集已知。由于 $\vartheta_{\varsigma(i)}$ 为常数，由式(6-43)可以得到相位 $\phi_{\varsigma(i)}$ 的可行集（记为 $\Phi_{\varsigma(i)}$ ）满足

$$\Phi_{\varsigma(i)} = \{\phi_{\varsigma(i)} \mid \phi_{\varsigma(i)} = (\vartheta_{\varsigma(i)} - \varphi_i)_{2\pi}, \varphi_i \in \Psi_i\} \quad (6-45)$$

或者更简洁地表示为

$$\Phi_{\varsigma(i)} = \begin{cases} \left(\left[a_{\varsigma(i)}^{(l)}, a_{\varsigma(i)}^{(r)} \right] \cup \left[b_{\varsigma(i)}^{(l)}, b_{\varsigma(i)}^{(r)} \right] \right)_{2\pi}, & i \in \{2, \dots, N-2\} \\ \left(\left\{ c_{\varsigma(N-1)}^{(l)}, c_{\varsigma(N-1)}^{(r)} \right\} \right)_{2\pi}, & i = N-1 \end{cases} \quad (6-46)$$

其中

$$a_{\varsigma(i)}^{(l)} \triangleq \vartheta_{\varsigma(i)} - \gamma_{i-1,\star} - \pi - \delta_{i,\max} \quad (6-47a)$$

$$a_{\varsigma(i)}^{(r)} \triangleq \vartheta_{\varsigma(i)} - \gamma_{i-1,\star} - \pi - \delta_{i,\min} \quad (6-47b)$$

$$b_{\varsigma(i)}^{(l)} \triangleq \vartheta_{\varsigma(i)} - \gamma_{i-1,\star} - \pi + \delta_{i,\min} \quad (6-47c)$$

$$b_{\varsigma(i)}^{(r)} \triangleq \vartheta_{\varsigma(i)} - \gamma_{i-1,\star} - \pi + \delta_{i,\max} \quad (6-47d)$$

上式中 $i \in \{2, \dots, N-2\}$ ，另外式(6-46)中的 $c_{\varsigma(N-1)}^{(l)}$ 和 $c_{\varsigma(N-1)}^{(r)}$ 分别定义为

$$c_{\varsigma(N-1)}^{(l)} \triangleq \vartheta_{\varsigma(N-1)} - \gamma_{N-2,\star} - \pi - \delta_{N-1} \quad (6-48a)$$

$$c_{\varsigma(N-1)}^{(r)} \triangleq \vartheta_{\varsigma(N-1)} - \gamma_{N-2,\star} - \pi + \delta_{N-1} \quad (6-48b)$$

为了避免波束畸变，我们提出选取 $\phi_{\varsigma(i)} (i = 1, \dots, N)$ 接近某设定权向量的相应相位，其中设定的权向量可以得到理想的波束方向图。具体来讲，建立下述优化问题来求解最优相位 $\phi_{\varsigma(i)} (i = 2, \dots, N-1)$

$$\underset{\phi_{\varsigma(i)}}{\text{minimize}} \quad |\exp(j\phi_{\varsigma(i)}) - \exp(j\angle \bar{w}_{\varsigma(i)})| \quad (6-49a)$$

$$\text{subject to} \quad \phi_{\varsigma(i)} \in \Phi_{\varsigma(i)} \quad (6-49b)$$

式(6-49)中， $\bar{w}_{\varsigma(i)}$ 代表某提前设定权向量 \bar{w} 的第 $\varsigma(i)$ 个元素。而且， \bar{w} 在 θ_c 处获得期望的电平 ρ_c ，且不产生波束畸变。需要注意，权向量 \bar{w} 可能不满足唯相位约

束。除此之外，假设 $\bar{\mathbf{w}}$ 满足

$$\angle \bar{w}_{\varsigma(1)} = \vartheta_{\varsigma(1)} - \pi \quad (6-50)$$

此时有 $\phi_{\varsigma(1),*} = \angle \bar{w}_{\varsigma(1)}$ ，满足 $i = 1$ 时问题(6-49)的最优解。当 $i \in \{2, \dots, N-1\}$ 时，不难得知问题(6-49)有下面解析解

$$\phi_{\varsigma(i),*} = \begin{cases} \angle \bar{w}_{\varsigma(i)}, & (\angle \bar{w}_{\varsigma(i)})_{2\pi} \in \Phi_{\varsigma(i)} \\ \tau_{\varsigma(i)}, & (\angle \bar{w}_{\varsigma(i)})_{2\pi} \notin \Phi_{\varsigma(i)} \end{cases} \quad (6-51)$$

其中 $\tau_{\varsigma(i)}$ 为下面问题的最优解

$$\underset{\tau}{\text{maximize}} \cos(\tau - \angle \bar{w}_{\varsigma(i)}) \quad (6-52a)$$

$$\text{subject to } \tau \in \begin{cases} \left\{ a_{\varsigma(i)}^{(l)}, a_{\varsigma(i)}^{(r)}, b_{\varsigma(i)}^{(l)}, b_{\varsigma(i)}^{(r)} \right\}, & i \in \{2, \dots, N-2\} \\ \left\{ c_{\varsigma(N-1)}^{(l)}, c_{\varsigma(N-1)}^{(r)} \right\}, & i = N-1 \end{cases} \quad (6-52b)$$

上述问题只需要简单的比较操作即可解出。

上述问题(6-49)中，最终的相位 $\phi_{\varsigma(i)}$ 期望接近相位 $\bar{w}_{\varsigma(i)}$ 。因此，得到的方向图与 $\bar{\mathbf{w}}$ 的方向图相似，即可以避免方向图畸变。

下面利用权向量正交分解WORD算法构造权向量 $\bar{\mathbf{w}}$ 。对于给定的权向量 \mathbf{w}_{pre} ，WORD算法可以精确地将 θ_c 方向的电平调节为期望电平 ρ_c ，且该算法有解析表达式。具体地，WORD算法利用下式更新权向量：

$$\check{\mathbf{w}} = [\mathbf{w}_\perp \ \mathbf{w}_\parallel] [1 \ \beta]^T \quad (6-53)$$

其中 \mathbf{w}_\perp 和 \mathbf{w}_\parallel 为 \mathbf{w}_{pre} 的正交分解成分，满足

$$\mathbf{w}_\perp \triangleq \mathbf{P}_{\mathbf{a}(\theta_c)}^\perp \mathbf{w}_{\text{pre}}, \quad \mathbf{w}_\parallel \triangleq \mathbf{P}_{\mathbf{a}(\theta_c)} \mathbf{w}_{\text{pre}} \quad (6-54)$$

式(6-53)，实参数 β 可以选为 β_a 或 β_b ，分别定义为

$$\beta_a = \frac{-\Re(\mathbf{B}(1,2)) + \eta}{\mathbf{B}(2,2)}, \quad \beta_b = \frac{-\Re(\mathbf{B}(1,2)) - \eta}{\mathbf{B}(2,2)} \quad (6-55)$$

其中 \mathbf{B} 和 η 满足

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_c) \\ \mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_c) \\ \mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_c) \end{bmatrix}^H - \rho_c \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0) \\ \mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0) \\ \mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0) \end{bmatrix}^H \quad (6-56)$$

$$\eta = \sqrt{\Re^2(\mathbf{B}(1,2)) - \mathbf{B}(1,1)\mathbf{B}(2,2)} \quad (6-57)$$

选取使得 $F(\beta) = \|\mathbf{P}_{\mathbf{w}_{\text{pre}}}^\perp \check{\mathbf{w}} / \|\check{\mathbf{w}}\|_2\|_2^2$ 输出值较小的 β ，即可得到权向量 $\check{\mathbf{w}}$ 。为了满足(6-50)，对 $\check{\mathbf{w}}$ 进行相移可以得到最终权向量 $\bar{\mathbf{w}}$ 为

$$\bar{\mathbf{w}} = \check{\mathbf{w}} \cdot \exp(j(\vartheta_{\varsigma(1)} - \pi - \angle \check{w}_{\varsigma(1)})) \quad (6-58)$$

其中 $\check{w}_{\varsigma(1)}$ 为 $\check{\mathbf{w}}$ 的第 $\varsigma(1)$ 个元素。注意到 $\check{\mathbf{w}}$ 和 $\overline{\mathbf{w}}$ 可能不满足唯相位约束。

借助(6-58)中的 $\overline{\mathbf{w}}$ 解得问题(6-49)之后，则最终的相位 $\varphi_{i,\star}$ 可以根据(6-43)表示为

$$\varphi_{i,\star} = \vartheta_{\varsigma(i)} - \phi_{\varsigma(i),\star}, \quad i = 2, \dots, N-1 \quad (6-59)$$

上述 $\varphi_{i,\star}$ 对后续相位 $\varphi_{i+1}, \dots, \varphi_N$ 的选择是必要的。除此之外，需要说明的是， $\overline{\mathbf{w}}$ 可以有其它不同于式(6-58)的选择。仿真表明，式(6-58)的权向量 $\overline{\mathbf{w}}$ 可以得到满意的方向图结果。

当 $i = N$ 时，只有一个备选的 φ_N ，其最终值可由式(6-40)得到。因此，可以由下式计算最终的 $\phi_{\varsigma(N),\star}$

$$\phi_{\varsigma(N),\star} = \vartheta_{\varsigma(N)} - \varphi_{N,\star} \quad (6-60)$$

确定了相位 $\phi_{\varsigma(i),\star} (i = 1, \dots, N)$ 之后，可以将新权向量 \mathbf{w}_{new} 表示为

$$\mathbf{w}_{\text{new}} = [|w_{\text{pre},1}|, \dots, |w_{\text{pre},N}|]^T \odot [e^{j\phi_{1,\star}}, \dots, e^{j\phi_{N,\star}}]^T \quad (6-61)$$

另外，仿真实验表明如果取(6-4)中的 ψ_c 为

$$\psi_c = \angle(\overline{\mathbf{w}}^H \mathbf{a}(\theta_c) / \overline{\mathbf{w}}^H \mathbf{a}(\theta_0)) \quad (6-62)$$

则可以得到较为满意的结果。利用上述的 ψ_c ，则新权向量在 θ_c 处的归一化输出（即 $\overline{\mathbf{w}}^H \mathbf{a}(\theta) / \overline{\mathbf{w}}^H \mathbf{a}(\theta_0)$ ）与 $\overline{\mathbf{w}}$ 或 $\check{\mathbf{w}}$ 相同。综上，唯相位阵列相应控制算法流程描述见算法17。

为了验证上述算法的性能，下面使用16阵元各向同性等距线阵进行仿真。与之前设置一样，取 $\theta_0 = -20^\circ$, $\theta_c = 30^\circ$, $\rho_c = -40$ dB 和 $\mathbf{w}_{\text{pre}} = \mathbf{a}(\theta_0)$ 。此时有 $|w_{\text{pre},n}| = 1$, $n = 1, \dots, N$ 。按照算法17的描述，可以计算出 $\beta_a = 0.2100$, $\beta_b = -0.2098$ ，以及 WORD 算法权向量 $\check{\mathbf{w}}$ （详见表6-1）。按照(6-62)，可以计算出 $\psi_c = 0.9901$ 。由 $\check{\mathbf{w}}$ 可以进一步得到 $\overline{\mathbf{w}}$ （同样见表6-1）。根据算法17中的相位确定方法可以计算出 $\varsigma(i)$, 集合 $\Phi_{\varsigma(i)}$, 以及 $\phi_{\varsigma(i),\star} (i = 1, \dots, N)$ ，各参数取值参考表6-2。由表6-2可以发现，集合 $\Phi_{\varsigma(i)}$ 包含 $\overline{w}_{\varsigma(i)}$ 的取值，此时取 $\phi_{\varsigma(i),\star} = \overline{w}_{\varsigma(i)}$, $i = 1, \dots, N-2$ 。当 $i = N-1$ 或 $i = N$ 时，集合 $\Phi_{\varsigma(i)}$ 只有一个或两个备选值。这两种情况下，所得到的 $\phi_{\varsigma(N-1),\star}$ 和 $\phi_{\varsigma(N),\star}$ 与相应的 $\overline{w}_{\varsigma(N-1)}$ 和 $\overline{w}_{\varsigma(N)}$ 不同。除此之外，由表6-1发现 $\check{\mathbf{w}}$ （或 $\overline{\mathbf{w}}$ ）的元素模值接近于期望模值1。因此，可以预测最终的方向图与WORD算法方向图类似。

图6-8对比了不同权向量对应的方向图结果，从中可以看出 WORD 算法可以精确地将 θ_c 方向的电平调节为期望电平，且在非控制区域产生较小的方向图变化。固定WORD算法权向量的相位，将其元素模值取为与 \mathbf{w}_{pre} 相同，从而得到新

算法 17 唯相位阵列方向图电平控制算法

```

1: 输入:  $\theta_0, \theta_c, \rho_c, \mathbf{w}_{\text{pre}}$ 。
2: 由式(6-55)计算 $\beta_a$ 和 $\beta_b$ , 得到式(6-53)的权向量 $\check{\mathbf{w}}$ 。
3: 得到 $\psi_c = \angle(\bar{\mathbf{w}}^H \mathbf{a}(\theta_c) / \bar{\mathbf{w}}^H \mathbf{a}(\theta_0))$ 。
4: 得到 $\mathbf{h}(\theta_c, \theta_0, \rho_c, \psi_c) = \mathbf{a}(\theta_c) - \sqrt{\rho_c} e^{j\psi_c} \mathbf{a}(\theta_0)$ 。
5: 记 $v_n = h_n \cdot |w_{\text{pre},n}|, n = 1, \dots, N$ 。
6: 对 $|v_1|, \dots, |v_N|$ 进行排序, 得到 $[d_1, \dots, d_N]^T = \mathbf{J} [|v_1|, \dots, |v_N|]^T$ 。
7: 得到 $\bar{\mathbf{w}} = \check{\mathbf{w}} \cdot \exp(j(\vartheta_{\varsigma(1)} - \pi - \angle \check{w}_{\varsigma(1)}))$ 。
8: for  $i = 1, 2, \dots, N-1$  do
9:   if  $i == 1$  then
10:    取 $\varphi_{1,*} = \gamma_{1,*} = \pi, \phi_{\varsigma(1),*} = \vartheta_{\varsigma(1)} - \pi, x_1 = d_1$ 。
11:   else if  $i \in \{2, \dots, N-2\}$  then
12:    得到式(6-31)中的 $x_{i,\min}$ 和 $x_{i,\max}$ , 计算(6-34)中的 $\delta_{i,\min}$ 和 $\delta_{i,\max}$ 。
13:    得到(6-46)中的 $\Phi_{\varsigma(i)}$ , 得到问题(6-49)的最优解 $\phi_{\varsigma(i),*}$ 。
14:    得到  $\overrightarrow{\varphi_{i,*}} = \overrightarrow{\vartheta_{\varsigma(i)}} - \overrightarrow{\phi_{\varsigma(i),*}}$ 。
15:    得到  $\overrightarrow{x_i e^{j\gamma_{i,*}}} = \overrightarrow{x_{i-1} e^{j\gamma_{i-1,*}}} + \overrightarrow{d_i e^{j\varphi_{i,*}}}$ 。
16:   else
17:    计算(6-37)中的 $\delta_{N-1}$ 。
18:    得到(6-46)中的 $\Phi_{\varsigma(N-1)}$ , 得到问题(6-49)的最优解 $\phi_{\varsigma(N-1),*}$ 。
19:    得到  $\overrightarrow{\varphi_{N-1,*}} = \overrightarrow{\vartheta_{\varsigma(N-1)}} - \overrightarrow{\phi_{\varsigma(N-1),*}}$ 。
20:    取 $\varphi_{N,*} = \angle(\overrightarrow{x_{N-2} e^{j\gamma_{N-2,*}}} + \overrightarrow{d_{N-1} e^{j\varphi_{N-1,*}}}) + \pi$ 。
21:    得到  $\phi_{\varsigma(N),*} = \vartheta_{\varsigma(N)} - \varphi_{N,*}$ 。
22:   end if
23: end for
24: 取 $w_{\text{new},\varsigma(i)} = |w_{\text{pre},\varsigma(i)}| \cdot e^{j\phi_{\varsigma(i),*}}, i = 1, \dots, N$ 。
25: 输出: 权向量  $\mathbf{w}_{\text{new}}$ 。

```

的权向量, 其对应方向图见图6-8 (标记为唯相位正交分解) 可以看出, 虽然唯相位正交分解算法在 θ_c 处的归一化电平不等于期望电平, 但其方向图与WORD算法类似。唯相位几何方法在 θ_c 处可以获得期望的电平, 而且从图 6-8可以看出, 其在非控制区域产生较小的方向图变化, 从而可以防止波束畸变现象。

6.5 计算复杂度

可以发现, 几何方法唯相位阵列方向图控制只需要低复杂度的相加和比较操

表 6-1 得到的 \check{w} 和 $\angle \bar{w}$

n	\check{w}_n	$\angle \bar{w}_n$	n	\check{w}_n	$\angle \bar{w}_n$
1	$0.9799e^{+j0.0320}$	1.1808	9	$0.9914e^{-j2.3494}$	-1.2007
2	$1.0039e^{-j1.1118}$	0.0370	10	$1.0258e^{+j2.9229}$	-2.2116
3	$1.0156e^{-j2.1151}$	-0.9664	11	$0.9646e^{+j1.8089}$	2.9576
4	$0.9707e^{+j3.0359}$	-2.0985	12	$1.0370e^{+j0.7410}$	1.8897
5	$1.0370e^{+j1.9912}$	3.1400	13	$0.9707e^{-j0.3037}$	0.8450
6	$0.9646e^{+j0.9234}$	2.0721	14	$1.0156e^{-j1.4359}$	-0.2871
7	$1.0258e^{-j0.1907}$	0.9581	15	$1.0039e^{-j2.4392}$	-1.2905
8	$0.9914e^{-j1.2015}$	-0.0528	16	$0.9799e^{+j2.7002}$	-2.4343

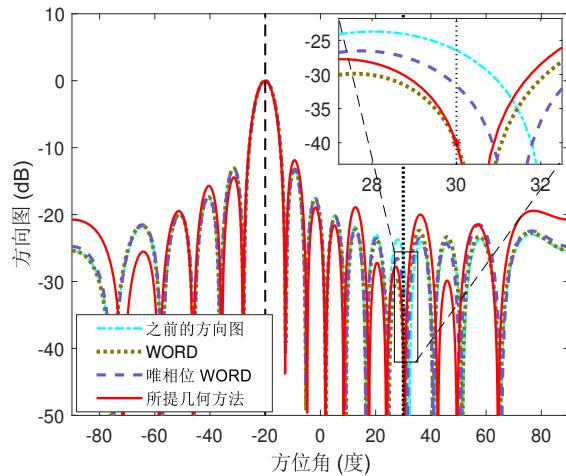


图 6-8 不同方法的方向图对比结果

作。其中，主要运算在于式(6-7)的比较操作，其复杂度为 $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ 。综上，几何方法唯相位阵列响应控制方法的计算复杂度为 $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ 。

6.6 实验仿真

下面对几何辅助唯相位阵列响应控制算法进行仿真验证。为了实验比较，同时测试文献[45]中的半正定松弛方法，以及文献[83]的凸松弛方法(convex relaxation, CR)。为了比较各算法性能，下面介绍两种参数指标。第一个指标定义为

$$D \triangleq |L_{\text{new}}(\theta_c, \theta_0) - \rho_c| \quad (6-63)$$

表 6-2 所提方法得到的参数结果

i	$\varsigma(i)$	$\Phi_{\varsigma(i)}$	$\angle \bar{w}_{\varsigma(i)}$	$\phi_{\varsigma(i),\star}$
1	5	{3.1400}	3.1400	3.1400
2	12	[-4.7107, 1.5724]	1.8897	1.8897
3	10	[-1.4195, 4.8637]	-2.2116	-2.2116
4	7	[-6.3765, -0.0934]	0.9581	0.9581
5	3	[-6.1337, 0.1495]	-0.9664	-0.9664
6	14	[-1.6332, 4.6500]	-0.2871	-0.2871
7	15	[-6.1345, 0.1487]	-1.2905	-1.2905
8	2	[-1.6229, 4.6603]	0.0370	0.0370
9	8	[-4.5635, 1.7197]	-0.0528	-0.0528
10	9	[-3.1940, 3.0891]	-1.2007	-1.2007
11	1	[-2.2983, 2.5988]	1.1808	1.1808
12	16	[-3.3042, 0.0367]	-2.4343	-2.4343
13	13	[-1.0997, 1.4046]	0.8450	0.8450
14	4	[-2.5563, -0.7786]	-2.0985	-2.0985
15	6	{1.0987, 2.3536}	2.0721	2.3536
16	11	{2.6761}	2.9576	2.6761

用来衡量权向量在 θ_c 处的电平与期望电平 ρ_c 的差异。第二个指标定义为

$$E \triangleq \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| |w_{\text{new},n}| - |w_{\text{pre},n}| \right|^2} \quad (6-64)$$

用来测量得到的新权向量 w_{new} 与权向量 w_{pre} 的平均模值差异。显然， D 和 E 的期望输出为零，其值越低算法性能越好。

6.6.1 等距线阵旁瓣调整

考虑 $N = 11$ 阵元各向同性等距线阵，取主瓣波束中心为 $\theta_0 = 20^\circ$ ，待控制角度为 $\theta_c = -54^\circ$ ，期望电平为 $\rho_c = -45\text{dB}$ 。权向量 w_{pre} 取为 -30dB 切比雪夫权。表6-3对比了权向量 w_{pre} ，WORD算法权向量 \check{w} 以及最终的权向量 w_{new} 。可以验证 $|w_{\text{new},n}| = |w_{\text{pre},n}|(n = 1, \dots, N)$ ，且 w_{new} 的相位与 \check{w} 的对应值接近。此时可以

得到 $\psi_c = 0.7691$ 。图6-9对比了不同权向量的方向图，可以看出三种方法均可以将 θ_c 方法的电平调节为期望电平，即 $D = 0\text{dB}$ 。对于几何辅助唯相位方向图控制方法，得到 $E = 0$ 。对于凸松弛方法，得到 $E = 0.0088$ 。上述结果表明，凸松弛方法得到的权向量的模值可能与 w_{pre} 不同。除此之外，几何辅助唯相位方向图控制方法的运行时间为 0.06秒，比半正定松弛方法的41.03秒和凸松弛的 14.55秒都要短。

表 6-3 权向量对比

n	$w_{\text{pre},n}$	\check{w}_n	$w_{\text{new},n}$
1	$0.2565e^{+j0.0000}$	$0.2469e^{+j0.0382}$	$0.2565e^{+j0.1926}$
2	$0.3950e^{+j1.0745}$	$0.3996e^{+j1.0423}$	$0.3950e^{+j1.0423}$
3	$0.6080e^{+j2.1490}$	$0.6101e^{+j2.1710}$	$0.6080e^{+j2.1710}$
4	$0.8069e^{-j3.0597}$	$0.7991e^{-j3.0735}$	$0.8069e^{-j3.0735}$
5	$0.9486e^{-j1.9852}$	$0.9607e^{-j1.9788}$	$0.9486e^{-j1.9788}$
6	$1.0000e^{-j0.9107}$	$0.9864e^{-j0.9107}$	$1.0000e^{-j0.9107}$
7	$0.9486e^{+j0.1637}$	$0.9607e^{+j0.1573}$	$0.9486e^{+j0.1573}$
8	$0.8069e^{+j1.2382}$	$0.7991e^{+j1.2520}$	$0.8069e^{+j1.2520}$
9	$0.6080e^{+j2.3127}$	$0.6101e^{+j2.2907}$	$0.6080e^{+j2.2907}$
10	$0.3950e^{-j2.8960}$	$0.3996e^{-j2.8638}$	$0.3950e^{-j2.8638}$
11	$0.2565e^{-j1.8215}$	$0.2469e^{-j1.8597}$	$0.2565e^{-j2.0141}$

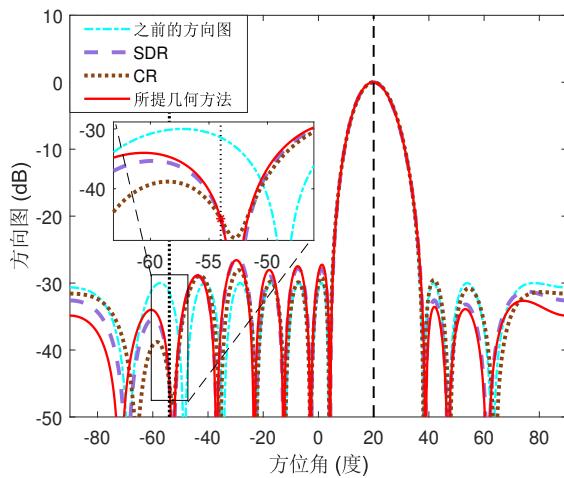


图 6-9 初始权为切比雪夫权时的方向图结果对比

6.6.2 唯相位两波束合成

为了验证几何辅助唯相位阵列响应控制方法可以用来提升 θ_c 处的电平，下面考虑 $N = 16$ 元各向同性阵列，阵元间距为 0.4 波长。此时取 $\theta_0 = -45^\circ$, $\mathbf{w}_{\text{pre}} = \mathbf{a}(\theta_0)$, $\theta_c = 35^\circ$, $\rho_c = 0 \text{ dB}$ 。图 6-10 对比了不同方法得到的方向图。从图中可以看出，虽然半正定松弛方法可以完成 θ_c 方向的期望电平调节，但其方向图发生了畸变。凸松弛方法和几何辅助方法均可以实现两波束合成，然而，凸松弛方法权向量模值与 \mathbf{w}_{pre} 对应值不完全相同，即不满足唯相位控制。事实上，对于凸松弛方法得到 $E = 0.5195$ ，几何辅助方法得到 $E = 0$ 。几何辅助方法的运行时间为 0.01 秒，比半正定松弛方法的 2.59 秒和凸松弛方法的 0.67 秒运行时间均要短。

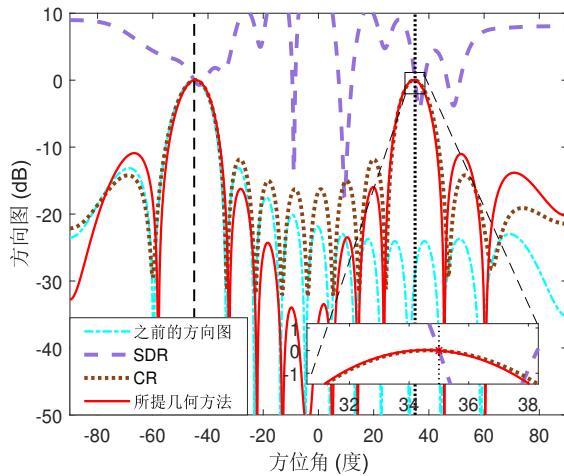
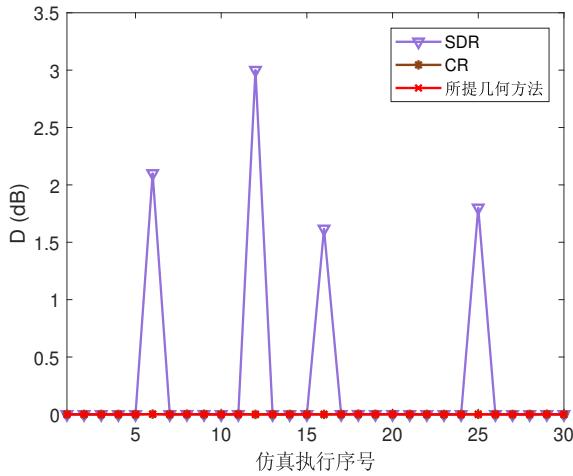
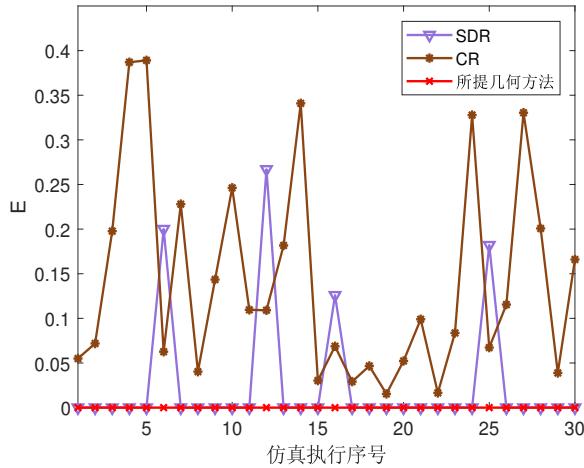


图 6-10 唯相位两波束合成结果对比

6.6.3 随机化阵列配置性能仿真

为了说明几何辅助唯相位方向图控制方法在随机化的阵列配置下仍然有效，下面考虑各向同性线性阵列，阵元个数和位置随机选取。具体地，将波束中心固定为 $\theta_0 = -40^\circ$ ，待控制角度为 $\theta_c = 25^\circ$ ，取 $\mathbf{w}_{\text{pre}} = \mathbf{a}(\theta_0)$ 。进行 30 次蒙特卡洛实验，每次实验中，阵元个数 N 从 12 至 20 中随机选取，各阵元间距在区间 $[0.4\lambda, 0.6\lambda]$ 内随机选取。除此之外，期望电平 ρ_c 在范围 $[-50 \text{ dB}, 0 \text{ dB}]$ 内随机选取。

在上述参数设置下，图 6-11 和图 6-12 分别展示了 D 和 E 随实验序数的变化曲线。由图 6-11 可以看出，半正定松弛方法可能无法实现 θ_c 的精确电平调节。由图 6-12 可以看出，半正定松弛和凸松弛方法的权向量模值可能与 \mathbf{w}_{pre} 不同。对于几何辅助方法，每次实验均得到 $D = E = 0$ ，从而证实所提算法在随机化阵列配置下依然有效。

图 6-11 D 随仿真序号变化曲线图 6-12 E 随仿真序号变化曲线

下面展示随机化阵列配置下几何辅助方法的辐射方向图。此时，将 ρ_c 固定为 -45dB 。图6-13展示了不同阵元个数和阵元位置下进行10次实验的方向图。由6-13可以看出，几何辅助方法在每次实验均可以实现将 θ_c 处的电平调节为期望电平。而且，可以发现没有发生波束畸变现象。上述结果进一步证实了几何辅助方法在随机化阵列配置下的有效性。

6.7 本章小结

本章介绍了一种几何辅助的唯相位方向图控制方法。对于给定的权向量，所提方法在唯相位的约束下可以精确快速地实现单点方向图电平调节。所提的几何

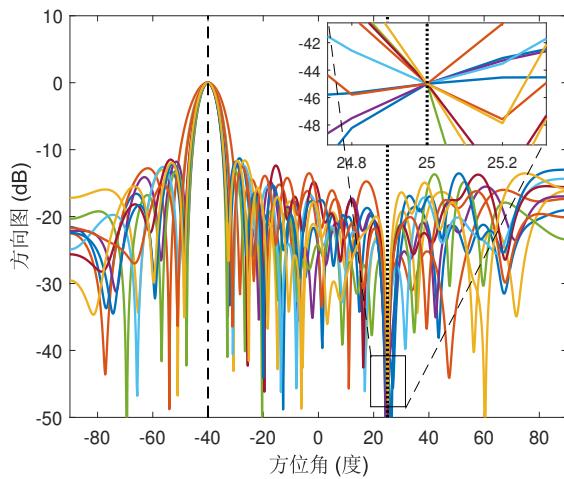


图 6-13 随机化阵列配置得到的方向图结果

辅助方法通过多边形构造来实现方向图电平调节。为了在非控制区域产生较小的方向图变化，从而避免方向图畸变，提出了一种低运算复杂度的相位确定方法。仿真实验验证了所提的几何辅助方法的有效性。该方法的缺点是只能控制单个点的电平，无法实现多方向的电平控制。

第七章 基于多边形构造的相控阵保密通信方法

由于无线通信的广播特性，传输信息可能被窃听设备接收并解码，因此有必要研究保密无线通信，从而防止信息泄露。本章讨论相控阵发射模式下的保密通信问题，将问题建模为多边形构造问题。详细介绍了基于多边形构造的相控阵发射权设计方法，并提出两种基于时变权的保密通信方法。所提方法可以应用于多径毫米波信道，且对调制方式无限制。仿真结果证实了所提方法的有效性。

7.1 系统模型与问题描述

7.1.1 系统描述

考虑多输入单输出(Multiple-Input Single-Output,MISO)下行传输系统。假设基站包含 N 个发射天线，目标用户(Bob)以及可能存在的 Q 个窃听设备均采用单天线接收。简单起见，这里考虑等距线阵，其它阵列形式可类似扩展。在离散时刻 k ，目标用户和第 q 个窃听器接收数据可分别表示为：

$$y_d(k) = \mathbf{h}^H \mathbf{x}(k) + \eta(k) \quad (7-1)$$

$$y_q(k) = \mathbf{g}_q^H \mathbf{x}(k) + \nu_q(k), \quad q = 1, \dots, Q \quad (7-2)$$

其中 $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^N$ 代表基站与目标用户间的信道向量， \mathbf{g}_q 为基站与第 q 个窃听者的信道向量， \mathbf{x} 为发射信号向量， $\eta \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_d^2)$ 和 $\nu_q \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_q^2)$ 分别为目标和第 q 个窃听器的噪声， $q = 1, \dots, Q$ 。

考虑多径信道，则 \mathbf{h} 可以表示为

$$\mathbf{h} = \sqrt{1/L_d} \sum_{l=1}^{L_d} \alpha_l \mathbf{a}(\psi_l) \quad (7-3)$$

其中 L_d 为多径个数， $\alpha_l \sim \mathcal{CN}(0, 1)$ 为第 l 个路径的增益， ψ_l 为第 l 个路径的离开角， $\mathbf{a}(\psi) \in \mathbb{C}^N$ 为 ψ 处的导向矢量满足

$$\mathbf{a}(\psi) = \left[1, e^{j2\pi d \sin(\psi)/\lambda}, \dots, e^{j2\pi(N-1)d \sin(\psi)/\lambda} \right]^T \quad (7-4)$$

其中 λ 为波长， d 代表相邻阵元的间距。类似地，信道向量 \mathbf{g}_q 可以表示为

$$\mathbf{g}_q = \sqrt{1/L_q} \sum_{l=1}^{L_q} \alpha_{q,l} \mathbf{a}(\psi_{q,l}), \quad q = 1, \dots, Q \quad (7-5)$$

上式中各参数含义类似于式(7-3)。这里假设目标用户信道向量（即 \mathbf{h} ）在基站端已知，而窃听者的信道向量（即 \mathbf{g}_q , $q = 1, \dots, Q$ ）则未知。

考虑相控阵传输结构和PSK调制信号，则在时刻 k 发射信号向量可以表示为

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{w}(k)x(k) \quad (7-6)$$

其中 $\mathbf{w}(k) \in \mathbb{C}^N$ 为发射权向量， $x(k) = \sqrt{E_s}e^{j\zeta(k)}$ 代表调制的发射信号， $\sqrt{E_s}$ 为基带调制幅度， $\zeta(k)$ 为发射符号的相位值。由于采用相控阵结构，发射权向量由移相器控制，所以 \mathbf{w} 在每个时刻均需要满足恒模特性，即

$$|w_n(k)| = 1, n = 1, \dots, N \quad (7-7)$$

其中 $w_n(k)$ 代表 $\mathbf{w}(k)$ 的第 n 个元素， $n = 1, \dots, N$ 。

7.1.2 问题描述

由式(7-1)和(7-6)，目标用户接收的信号可表示为

$$y_d(k) = \mathbf{h}^H \mathbf{w}(k) x(k) + \eta(k) \quad (7-8)$$

对应的瞬时接收信噪比（记为 SNR_k ）为 $E_s |\mathbf{h}^H \mathbf{w}(k)|^2 / \sigma_d^2$ 。如果在所有发射时刻均采用同样的权向量，则窃听者不难跟踪接收数据进而解码信息。因此，需要利用时变权向量来提供数据传输的安全性。由于 $\mathbf{w}(k)$ 随时刻 k 变化，其取值对目标用户未知。此时，目标用户为了正确解调 $x(k)$ ，其无噪声接收数据应满足

$$\angle(\mathbf{h}^H \mathbf{w}(k) x(k)) = \angle x(k) = \zeta(k), k = 1, 2, \dots \quad (7-9)$$

或等价地

$$\mathbf{h}^H \mathbf{w}(k) > 0, k = 1, 2, \dots \quad (7-10)$$

除此之外，为了实现对目标用户的可靠通信，接收 SNR_k 应大于某给定阈值 Γ_d ，即

$$\mathbf{h}^H \mathbf{w}(k) > \sqrt{\Gamma_d \sigma_d^2 / E_s} \triangleq \rho \quad (7-11)$$

上式融合了式(7-10)的结果。因此，合格的权向量 $\mathbf{w}(k)$ 应该同时满足(7-7)和(7-11)。另外，为了实现对目标用户的保密通信，权向量 $\mathbf{w}(k)$ 需要随时间变化，否则，窃听器则可能通过跟踪接收信号最终解码数据信息。下面提供两种保密通信算法来防止信息泄露。

7.2 基于多边形构造的相位方程求解

介绍保密通信算法之前，首先考虑如何找到满足(7-7)和(7-11)的权向量 \mathbf{w} 。简单起见，下面讨论中省略时间下标 k 。

7.2.1 权向量求解的几何解释

记 $\varphi_n = \angle w_n$, $\vartheta_n = \angle h_n$, $n = 1, \dots, N$ 。则可以将 $\mathbf{h}^H \mathbf{w}$ 表示为

$$\mathbf{h}^H \mathbf{w} = \sum_{n=1}^N h_n^* e^{j\varphi_n} = \sum_{n=1}^N |h_n| e^{j(\varphi_n - \vartheta_n)} \quad (7-12)$$

上式中融入了约束(7-7), h_n 表示 \mathbf{h} 的第 n 个元素, $n = 1, \dots, N$ 。定义

$$\phi_n \triangleq (\varphi_n - \vartheta_n)_{2\pi}, n = 1, \dots, N \quad (7-13)$$

则可以通过解下面关于 ϕ_1, \dots, ϕ_N 的相位方程来得到满足条件的权向量 \mathbf{w} :

$$\sum_{n=1}^N |h_n| e^{j\phi_n} = |h_0| \quad (7-14)$$

为了便于后文讨论, 上式中引入了新变量 $|h_0|$ 表示某已经确定的实常数。需要注意的是, h_0 是虚拟变量, 并不代表信道系数。由于发射端已知 \mathbf{h} 的值, 一旦解出满足等式的相位 ϕ_n , 则可以进一步通过下式得到权向量 \mathbf{w} 的相位 φ_n :

$$\varphi_n = (\phi_n + \vartheta_n)_{2\pi}, n = 1, \dots, N \quad (7-15)$$

最终可以将权向量表示为: $\mathbf{w} = [e^{j\varphi_1}, \dots, e^{j\varphi_N}]^T$ 。

在复平面内, 式(7-14)中的 $|h_n| e^{j\phi_n}$ 对应于某个向量, 记为

$$\overrightarrow{|h_n| e^{j\phi_n}} \triangleq \left(\Re(|h_n| e^{j\phi_n}), \Im(|h_n| e^{j\phi_n}) \right) \quad (7-16)$$

利用上述几何思想, 可以将式(7-14)记为:

$$\overrightarrow{|h_0| e^{j\phi_0}} + \sum_{n=1}^N \overrightarrow{|h_n| e^{j\phi_n}} = \overrightarrow{0} \quad (7-17)$$

其中 $\phi_{0,\star} \triangleq \pi$ 。解关于相位 ϕ_n 的等式(7-17)则转换为如何在复平面内旋转各边 $|h_n|$, 使得式(7-17)左手边各向量相加为零向量, 如图7-1所示, $n = 1, \dots, N$ 。事实上, 上述问题等价于用各边 $|h_i|$ 在复平面构造多边形, $i = 0, 1, \dots, N$ 。文献[155–157]提出一种三角形构造的方法来解上述等式(7-17)。然而, 由于三角形构造方法只能得到一个解 (对应于一组权向量 \mathbf{w}), 这不足以实现前文讨论的保密通信。本节介绍一种新的多边形构造方法来解等式(7-14)或(7-17), 并得到尽可能多的相位解。

讨论多边形构造方法之前, 首先介绍下面引理, 其证明见文献[155–157]。

引理 7.2.1 给定 $|h_0|, |h_1|, \dots, |h_N| > 0$, 式(7-14)存在解 (或等价地, 各边 $|h_i|$ 可以构造为多边形, $i = 0, 1, \dots, N$), 当且仅当:

$$2 \max\{|h_0|, |h_1|, \dots, |h_N|\} \leq \sum_{i=0}^N |h_i| \quad (7-18)$$

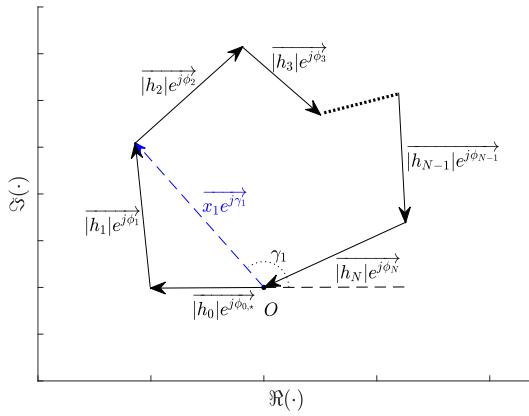


图 7-1 等式(7-17)的几何示意图

利用几何视角, 引理7.2.1说明所有的边 $|h_i|(i = 0, 1, \dots, N)$ 在经过一定旋转之后可以在复平面构造为多边形, 当且仅当最长的边的长度小于或等于其它边长度的和。特别地, 如果 $N = 2$, 则引理7.2.1会得到关于三角形构造的条件。基于上述重要结果, 可以进一步分析等式(7-14)或(7-17)的解。

7.2.2 基于多边形构造的相位求解

利用上节中的几何解释, 下面介绍一种多边形构造方法来解等式(7-17)中的相位 ϕ_n , $n = 1, \dots, N$ 。为了便于下文讨论, 定义:

$$S(n) \triangleq \sum_{i=n}^N |h_i| \quad (7-19a)$$

$$|h|_{\max}(n) \triangleq \max_{i \in \{n, n+1, \dots, N\}} |h_i| \quad (7-19b)$$

其中 $n \in \{1, \dots, N\}$ 。

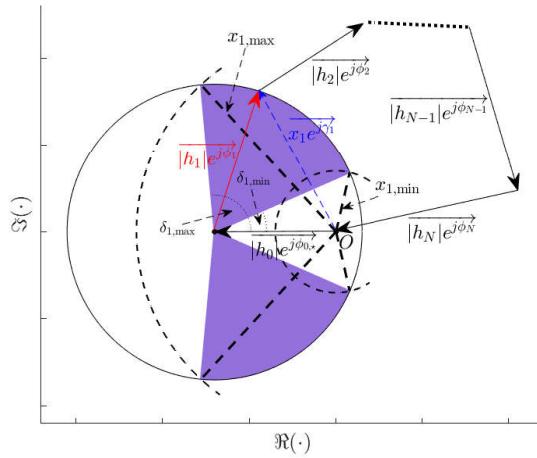
下面首先分析相位 ϕ_1 的可行集。为此, 作辅助向量 $\overrightarrow{x_1 e^{j\gamma_1}}$ 由 $\overrightarrow{0}$ 指向 $\overrightarrow{|h_0|e^{j\phi_{0,*}}} + \overrightarrow{|h_1|e^{j\phi_1}}$, 即

$$\overrightarrow{x_1 e^{j\gamma_1}} = \overrightarrow{|h_0|e^{j\phi_{0,*}}} + \overrightarrow{|h_1|e^{j\phi_1}} \quad (7-20)$$

其中 γ_1 代表辅助向量的相位, 如图7-2所示。

如果各边 $|h_0|, |h_1|, \dots, |h_N|$ 可以构成多边形, 则需要满足下面两个条件:

- 1) 边 $|h_0|, |h_1|$ 和 x_1 可以构造为三角形。
- 2) 边 $x_1, |h_2|, \dots, |h_N|$ 可以构造为多边形。

图 7-2 确定相位 ϕ_1 可行集的几何示意图

由引理7.2.1可知，上述两条件满足当且仅当

$$||h_0| - |h_1|| \leq x_1 \leq |h_0| + |h_1| \quad (7-21a)$$

$$|h|_{\max}(2) \geq x_1, 2|h|_{\max}(2) \leq x_1 + S(2) \quad (7-21b)$$

或者

$$||h_0| - |h_1|| \leq x_1 \leq |h_0| + |h_1| \quad (7-22a)$$

$$x_1 > |h|_{\max}(2), x_1 \leq S(2) \quad (7-22b)$$

经过计算可以得到， x_1 的可行集（记为 \mathbb{X}_1 ）满足

$$x_1 \in \left[\underbrace{\max \{ ||h_0| - |h_1||, 2|h|_{\max}(2) - S(2) \}}_{x_{1,\min}}, \underbrace{\min \{ |h_0| + |h_1|, S(2) \}}_{x_{1,\max}} \right] \triangleq \mathbb{X}_1 \quad (7-23)$$

利用辅助向量 $\overrightarrow{x_1 e^{j\gamma_1}}$ 以及式(7-23)中的集合 \mathbb{X}_1 ，可以进一步得到相位 ϕ_1 的可行集。具体地，由于 $|h_0|$ ， $|h_1|$ 和 x_1 可以构成三角形，边 $|h_0|$ 和 $|h_1|$ 的夹角（记为 δ_1 ）可以表示为

$$\delta_1 = \arccos \left(\frac{|h_0|^2 + |h_1|^2 - x_1^2}{2|h_0| \cdot |h_1|} \right) \quad (7-24)$$

由于 $x_1 \in \mathbb{X}_1$ ，可以得到

$$\delta_1 \in [\delta_{1,\min}, \delta_{1,\max}] \quad (7-25)$$

其中

$$\delta_{1,\min} = \arccos \left(\frac{|h_0|^2 + |h_1|^2 - x_{1,\min}^2}{2|h_0| \cdot |h_1|} \right) \quad (7-26a)$$

$$\delta_{1,\max} = \arccos \left(\frac{|h_0|^2 + |h_1|^2 - x_{1,\max}^2}{2|h_0| \cdot |h_1|} \right) \quad (7-26b)$$

上式中 $x_{1,\min}$ 和 $x_{1,\max}$ 的定义见式 (7-23)。注意到边 $|h_1|$ 可以沿着向量 $-\overrightarrow{|h_0|e^{j\phi_{0,*}}}$ 做逆时针或顺时针旋转 (旋转角度为 δ_1)。不难得到 ϕ_1 的可行集为:

$$\Phi_1 \triangleq ([-\delta_{1,\max}, -\delta_{1,\min}] \cup [\delta_{1,\min}, \delta_{1,\max}])_{2\pi} \quad (7-27)$$

为了更好地理解上述描述, 图7-2给出了更多细节。图中红色向量为一个可行的 $\overrightarrow{|h_1|e^{j\phi_1}}$, 紫色区域为相位 ϕ_1 在集合 Φ_1 内旋转时向量 $\overrightarrow{|h_1|e^{j\phi_1}}$ 扫过的区域。如果从 Φ_1 中选取 $\phi_{1,*}$ 作为 ϕ_1 的最终值, 相应地, 向量 $\overrightarrow{x_1 e^{j\gamma_{1,*}}}$ ($\gamma_{1,*}$ 表示 γ_1 的最终值) 满足

$$\overrightarrow{x_1 e^{j\gamma_{1,*}}} = \overrightarrow{|h_0|e^{j\phi_{0,*}}} + \overrightarrow{|h_1|e^{j\phi_{1,*}}} \quad (7-28)$$

对于给定的 $\overrightarrow{|h_0|e^{j\phi_{0,*}}}$, $\overrightarrow{|h_1|e^{j\phi_{1,*}}}$, 以及得到的 $\overrightarrow{x_1 e^{j\gamma_{1,*}}}$, 可以类似得到相位 ϕ_2 的可行集。此时, 可以作辅助向量 $\overrightarrow{x_2 e^{j\gamma_2}}$ 从原点 $\vec{0}$ 指向 $\overrightarrow{x_1 e^{j\gamma_{1,*}}} + \overrightarrow{|h_2|e^{j\phi_2}}$ 。更一般地, 对于给定的 $n \in \{1, \dots, N-2\}$, 如果 $\overrightarrow{x_{n-1} e^{j\gamma_{n-1,*}}}$ 已经被确定为 $\overrightarrow{x_{n-1} e^{j\gamma_{n-1,*}}}$ 满足

$$\overrightarrow{x_{n-1} e^{j\gamma_{n-1,*}}} = \overrightarrow{x_{n-2} e^{j\gamma_{n-2,*}}} + \overrightarrow{|h_{n-1}|e^{j\phi_{n-1,*}}} = \sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{|h_i|e^{j\phi_{i,*}}} \quad (7-29)$$

则可以进一步计算相位 ϕ_n 的可行集。具体地, 此时可作辅助向量 $\overrightarrow{x_n e^{j\gamma_n}}$ 从 $\vec{0}$ 指向 $\overrightarrow{x_{n-1} e^{j\gamma_{n-1,*}}} + \overrightarrow{|h_n|e^{j\phi_n}}$, 如图 7-3 所示。注意在式(7-29)中, 我们定义 x_0 和 $\gamma_{0,*}$ 为

$$x_0 \triangleq |h_0| \quad (7-30a)$$

$$\gamma_{0,*} \triangleq \phi_{0,*} = \pi \quad (7-30b)$$

由于边 $|h_0|, \dots, |h_{n-1}|$ 和 x_{n-1} 已经形成多边形, 根据图7-3, 所有边 $|h_i|$ 可以形成多边形当且仅当边 x_{n-1} 与余下的边 $|h_n|, \dots, |h_N|$ 可以构造为多边形, $i = 0, 1, \dots, N$ 。

类似地，可以得到 x_n 的可行集（记为 \mathbb{X}_n ）为

$$x_n \in \left[\underbrace{\max \{ |x_{n-1} - |h_n||, 2|h|_{\max}(n+1) - S(n+1) \}}_{\triangleq x_{n,\min}}, \underbrace{\min \{ x_{n-1} + |h_n|, S(n+1) \}}_{\triangleq x_{n,\max}} \right] \triangleq \mathbb{X}_n, \quad 1 \leq n \leq N-2 \quad (7-31)$$

其中 $n \in \{1, \dots, N-2\}$ 。

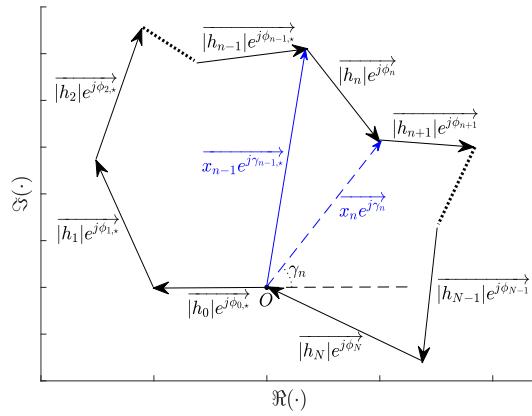


图 7-3 辅助向量示意图

图7-4(a)和图7-4(b)从几何上展示了如何得到一般 ϕ_n 的可行集， $n = 1, \dots, N-2$ 。为了问题考虑的全面性，图7-4(a)和图7-4(b) 分别描绘了 $x_{n-1} \geq |h_n|$ 和 $x_{n-1} < |h_n|$ 两种情况。由图可知，两种情况下边 x_{n-1} 和 $|h_n|$ 的夹角（记为 δ_n ）均可以表示为

$$\delta_n = \arccos \left(\frac{x_{n-1}^2 + |h_n|^2 - x_n^2}{2x_{n-1} \cdot |h_n|} \right), \quad n = 1, \dots, N-2 \quad (7-32)$$

结合式(7-31)，可以得到

$$\delta_n \in [\delta_{n,\min}, \delta_{n,\max}] \quad (7-33)$$

其中

$$\delta_{n,\min} = \arccos \left(\frac{x_{n-1}^2 + |h_n|^2 - x_{n,\min}^2}{2x_{n-1} \cdot |h_n|} \right) \quad (7-34a)$$

$$\delta_{n,\max} = \arccos \left(\frac{x_{n-1}^2 + |h_n|^2 - x_{n,\max}^2}{2x_{n-1} \cdot |h_n|} \right) \quad (7-34b)$$

上式中 $x_{n,\min}$ 和 $x_{n,\max}$ 的定义见式(7-31), $n = 1, \dots, N-2$ 。因此, 相位 ϕ_n 的可行集可以表示为

$$\Phi_n = ([\gamma_{n-1,*} + \pi - \delta_{n,\max}, \gamma_{n-1,*} + \pi - \delta_{n,\min}] \cup [\gamma_{n-1,*} + \pi + \delta_{n,\min}, \gamma_{n-1,*} + \pi + \delta_{n,\max}])_{2\pi}, n = 1, \dots, N-2 \quad (7-35)$$

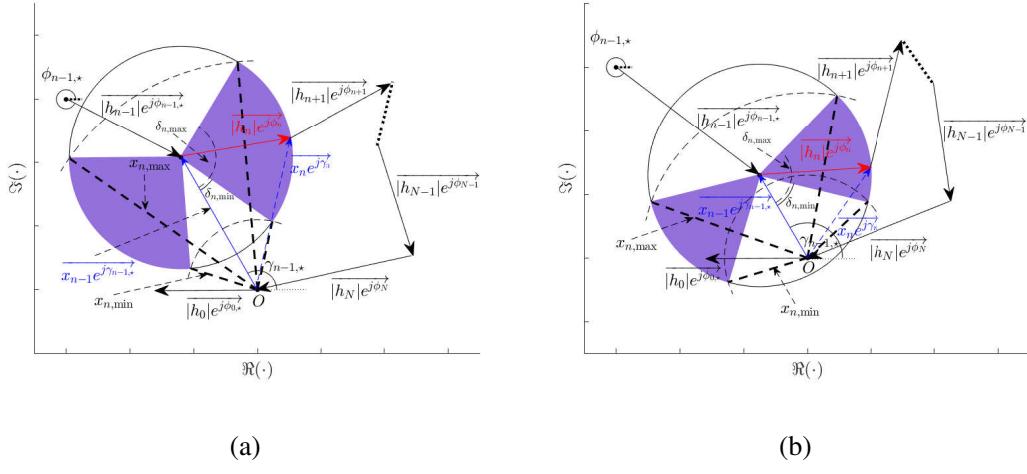


图 7-4 确定相位 ϕ_n 可行集的几何示意图。(a) $x_{n-1} \geq |h_n|$;(b) $x_{n-1} < |h_n|$

如果从 Φ_n 中选取 ϕ_n 的最终值为 $\phi_{n,*}$, 得到的向量 $\overrightarrow{x_n e^{j\gamma_{n,*}}}$ 可以表示为

$$\overrightarrow{x_n e^{j\gamma_{n,*}}} = \overrightarrow{x_{n-1} e^{j\gamma_{n-1,*}}} + \overrightarrow{|h_n| e^{j\phi_{n,*}}}, n = 1, \dots, N-2 \quad (7-36)$$

上式中的 $\overrightarrow{x_n e^{j\gamma_{n,*}}}$ 对后续向量 $\phi_{n+1}, \dots, \phi_N$ 的确定起着关键作用。

上述分析可以得到相位 ϕ_n 的可行集, 其中 $n \in \{1, \dots, N-2\}$ 。注意到当 $n = N-2$ 时, 得到的 x_{N-2} 可以与余下的 $|h_{N-1}|$ 和 $|h_N|$ 两条边形成三角形, 如图7-5所示。

此时, 边 x_{N-2} 与 $|h_{N-1}|$ 之间的夹角为

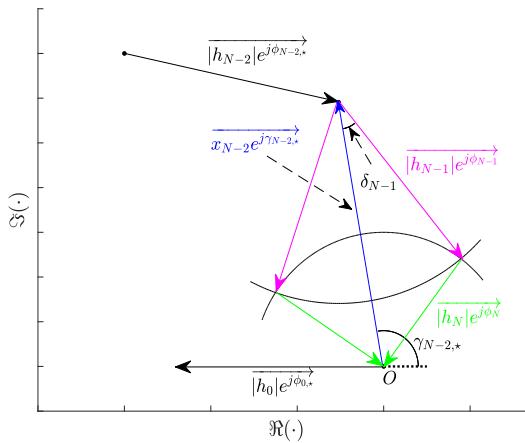
$$\delta_{N-1} = \arccos \left(\frac{x_{N-2}^2 + |h_{N-1}|^2 - |h_N|^2}{2x_{N-2} \cdot |h_{N-1}|} \right) \quad (7-37)$$

根据图7-5不难发现, ϕ_{N-1} 最多有两个备选值, 即

$$\Phi_{N-1} \triangleq \{(\gamma_{N-2,*} + \pi - \delta_{N-1})_{2\pi}, (\gamma_{N-2,*} + \pi + \delta_{N-1})_{2\pi}\} \quad (7-38)$$

而且, 由图7-5可知

$$|h_N|e^{j\phi_N} = - \left(\overrightarrow{x_{N-2} e^{j\gamma_{N-2,*}}} + \overrightarrow{|h_{N-1}| e^{j\phi_{N-1}}} \right) \quad (7-39)$$

图 7-5 确定相位 ϕ_{N-1} 和 ϕ_N 的几何示意图

如果 ϕ_{N-1} 取为 $\phi_{N-1,*}$, 则 ϕ_N 可相应地表示为

$$\phi_{N,*} = \left(\pi + \angle \left(\overrightarrow{x_{N-2}e^{j\gamma_{N-2,*}}} + \overrightarrow{|h_{N-1}|e^{j\phi_{N-1,*}}} \right) \right)_{2\pi} \quad (7-40)$$

为了与前文保持一致, 将 ϕ_N 的可行集记为

$$\Phi_N \triangleq \left\{ \left(\pi + \angle \left(\overrightarrow{x_{N-2}e^{j\gamma_{N-2,*}}} + \overrightarrow{d_{N-1}e^{j\phi_{N-1,*}}} \right) \right)_{2\pi} \right\} \quad (7-41)$$

算法18对上述多边形构造方法进行了总结。注意到在算法18中, 我们在 Φ_n 中随机选取最终的 $\phi_{n,*}$, $n = 1, \dots, N-1$ 。这实际上已经假设只要 $\phi_{n-1,*} \in \Phi_{n-1}$, 则集合 Φ_n 可行, $n = 2, \dots, N$ 。事实上, 下节分析表明该假设是成立的。得到 ϕ_n ($n = 1, \dots, N$) 之后, 相应地可以将权向量表示为

$$\mathbf{w} = [e^{j(\phi_{1,*}+\vartheta_1)2\pi}, \dots, e^{j(\phi_{N,*}+\vartheta_N)2\pi}]^T \quad (7-42)$$

上述讨论中, ϕ_n 根据其自然顺序来确定, 即 Φ_{n-1} 和 ϕ_{n-1} 的确定早于 Φ_n 和 ϕ_n 的确定。事实上, 利用同样的思想, 可以任意选取相位确定的顺序, 此时 \mathbb{X}_n 和 Φ_n 的表达式会相应地改变。

7.2.3 解分析

在多边形构造的基础上, 下面对分析方程(7-14)的解。首先可以得到下面引理, 从而可以保证集合 \mathbb{X}_n 的非空性, $n = 1, \dots, N-2$ 。

引理 7.2.2 如果(7-18)满足, 则集合 \mathbb{X}_1 非空。如果 $x_{n-1} \in \mathbb{X}_{n-1}$, 则集合 \mathbb{X}_n 非空, $n = 2, \dots, N-2$ 。

证明 见附录E.1。 ■

算法 18 多边形构造方法解相位方程(7-14)

```

1: 输入:  $\{h_0, h_1, \dots, h_N\}$ ,  $x_0 = |h_0|$ ,  $\gamma_{0,*} = \phi_{0,*} = \pi$ 。
2: for  $n = 1, 2, \dots, N$  do
3:   if  $n <= N - 2$  then
4:     计算  $x_{n,\min} = \max \{ |x_{n-1} - |h_n||, 2|h|_{\max}(n+1) - S(n+1) \}$ 。
5:     计算  $x_{n,\max} = \min \{ x_{n-1} + |h_n|, S(n+1) \}$ 。
6:     计算  $\delta_{n,\min} = \arccos \left( \frac{x_{n-1}^2 + |h_n|^2 - x_{n,\min}^2}{2x_{n-1} \cdot |h_n|} \right)$ 。
7:     计算  $\delta_{n,\max} = \arccos \left( \frac{x_{n-1}^2 + |h_n|^2 - x_{n,\max}^2}{2x_{n-1} \cdot |h_n|} \right)$ 。
8:     得到(7-35)中的集合  $\Phi_n$ 。
9:     随机选择  $\phi_{n,*} \in \Phi_n$ 。
10:    计算  $\overrightarrow{x_n e^{j\gamma_{n,*}}} = \overrightarrow{x_{n-1} e^{j\gamma_{n-1,*}}} + \overrightarrow{|h_n| e^{j\phi_{n,*}}}$ 。
11:  else if  $n == N - 1$  then
12:    计算  $\delta_{N-1} = \arccos \left( \frac{x_{N-2}^2 + |h_{N-1}|^2 - |h_N|^2}{2x_{N-2} \cdot |h_{N-1}|} \right)$ 。
13:    计算  $\Phi_{N-1} = \{(\gamma_{N-2,*} + \pi - \delta_{N-1})_{2\pi}, (\gamma_{N-2,*} + \pi + \delta_{N-1})_{2\pi}\}$ 。
14:    随机选择  $\phi_{N-1,*} \in \Phi_{N-1}$ 。
15:  else
16:    计算  $\phi_{N,*} = \left( \pi + \angle \left( \overrightarrow{x_{N-2} e^{j\gamma_{N-2,*}}} + \overrightarrow{|h_{N-1}| e^{j\phi_{N-1,*}}} \right) \right)_{2\pi}$ 。
17:  end if
18: end for
19: 输出:  $\{\phi_{1,*}, \dots, \phi_{N,*}\}$ 。

```

如果 \mathbb{X}_n 非空, 由式(7-35)中 Φ_n 的表达式可知集合 Φ_n 也非空, $n = 1, \dots, N - 2$ 。据此不难得到下面引理, 从而保证相位 Φ_n 的可行性, $n = 1, \dots, N$ 。

引理 7.2.3 如果(7-18)满足, 则集合 Φ_1 非空。如果 $\phi_{n-1,*} \in \Phi_{n-1}$, 则集合 Φ_n 非空, $n = 2, \dots, N - 2$ 。而且, 如果 $\phi_{N-2,*} \in \Phi_{N-2}$, 则 Φ_{N-1} 和 Φ_N 均非空。

根据引理7.2.3, 如果(7-18)满足, 且相位 $\phi_{n,*}$ 从相应的集合 Φ_n 中按顺序选取, $n = 1, \dots, N$, 则得到的一组相位 $\{\phi_{1,*}, \dots, \phi_{N,*}\}$ 为等式(7-14)的解。根据上述结果, 可以通过从集合 Φ_n 中随机选取 $\phi_{n,*}$ 来得到方程(7-14)的可行解, 如算法18所描述。而且, 可以得到下面定理, 可为下节的保密通信方法提供理论基础。

定理 7.2.1 给定 $|h_0|, |h_1|, \dots, |h_N| > 0$, 相位方程(7-14)存在无穷多个解 (所

有相位解均在 $[0, 2\pi)$ 范围内，即无相位缠绕发生），当且仅当：

$$2 \max\{|h_0|, |h_1|, \dots, |h_N|\} < \sum_{i=0}^N |h_i| \quad (7-43)$$

证明 见附录E.2。 ■

注意到式(7-43)中使用了严格不等式，这与式(7-18)的结果不同。定理7.2.1说明等式(7-14)存在无穷多个解当且仅当 $\{|h_0|, |h_1|, \dots, |h_N|\}$ 的最大边长度严格小于其余边长度的和。另外，通过结合引理7.2.1和定理7.2.1，可以得到下面推论。

推论 7.2.1 给定 $|h_0|, |h_1|, \dots, |h_N| > 0$ ，则方程(7-14)存在有限个解（事实上，此时在范围 $[0, 2\pi)$ 内仅存在一组解）当且仅当：

$$2 \max\{|h_0|, |h_1|, \dots, |h_N|\} = \sum_{i=0}^N |h_i| \quad (7-44)$$

7.3 保密通信算法

在多边形构造的基础上，下面介绍两种保密通信算法。

7.3.1 基于多边形构造的保密通信

由前文讨论可知，如果条件(7-43)满足，则等式(7-14)存在无穷多组解，各解对应的式(7-42)中的权向量均满足 $\mathbf{h}^H \mathbf{w} = |h_0|$ 。前文提到， $|h_0|$ 为某事先指定的常数。为了避免混淆，下文讨论中将 $|h_0|$ 替换为 β ，表示目标用户的波束增益。 β 和 $|h_0|$ 总体相同的值，两者可以相互交换

$$\mathbf{h}^H \mathbf{w} = \beta \quad (7-45)$$

这说明存在无穷多组权向量使得目标用户得到同一增益。由于这些权向量为目标信道设计，对窃听者信道不匹配，如果在不同发射时刻应用不同权向量，则可以扰乱窃听者的接收。在进一步介绍所提保密传输方案之前，下面首先分析使得条件(7-43)成立的 β 的可行范围。

沿用之前的符号标记，不难发现式(7-43)满足当且仅当：

$$|h|_{\max}(1) \leq \beta < S(1) \quad (7-46)$$

或者

$$\beta < |h|_{\max}(1) < \beta + S(1) - |h|_{\max}(1) \quad (7-47)$$

经过计算可以得到下面关于条件(7-46)和(7-47)的紧密表达式:

$$\max\{2|h|_{\max}(1) - S(1), 0\} < \beta < S(1) \quad (7-48)$$

在上述条件下, 总可以找到无穷多个权向量 \mathbf{w} 满足式(7-45)。

回到之前介绍的保密通信问题, 由式(7-11)可知 β 需要额外满足

$$\beta > \rho \quad (7-49)$$

将(7-49)融入式(7-48)中可以得到:

$$r < \beta < S(1) \quad (7-50)$$

其中

$$r \triangleq \max\{2|h|_{\max}(1) - S(1), \rho\} \quad (7-51)$$

注意到上述结果以 $\rho < S(1)$ 成立为前提。则对于任意满足(7-50)的 β 均可以得到无穷多个权向量, 且每组权都可以实现对目标用户的可靠通信。由于不同权向量在窃听器上产生不同的输出信号, 应用时变权则可以扰乱窃听者接收。

一方面, 较大的 β 在目标用户上会得到较高的接收信噪比。另一方面, β 越靠近其取值上界 $S(1)$, 得到的式(7-42)的权向量 $\mathbf{w}(k)$ 的相关性会越大, 此时窃听者解码信息的难度降低。极限情况下, 如果取 $\beta = S(1)$, 所有权向量解均相同, 正如推论7.2.1所描述。

一种平衡目标用户检测性能(或信噪比)与安全性的方法是在区间 $(r, S(1))$ 内选取中等大小的 β 。利用这种方式得到的相位 $\angle(\mathbf{g}_q^H \mathbf{w}(k)) (k = 1, 2, \dots)$ 的分布较为分散, 同时不会违背对SNR的约束要求。然而, 在窃听器信道信息未知的情况下, 只能通过经验方式来选取 β 。

为了避免对 β 进行经验选取, 这里提出对 β 以符号速率进行变化。具体地, 每个符号发射时刻 k , 在区间 $(r, S(1))$ 内随机选取 β 。在此基础上, 利用多边形构造算法18 随机选取等式(7-14)的相位解。最终, 得到式(7-42)的权向量作为当前时刻的发射权。上述传输方案中采用大小值混合的 β 选取方式, 从而增强了非期望方向接收信息的随机性。除此之外, 不难发现解方程(7-14)时各相位的求解顺序可以任意设定。因此, 可以通过随机交换相位求解顺序来进一步扰乱窃听器的接收信号。算法19对上述保密通信方法的步骤进行了总结。注意到算法19中, 置换矩阵 \mathbf{J} 满足 $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T$, 由此可以降低运算复杂度。

7.3.2 基于松弛符号区域的改进保密通信方法

上一小节中的保密通信方法中, 目标用户接收信号相位与期望符号相位完全相同。严格的相位约束降低了权向量设计的自由度。为了增加权向量设计的自由

度，进一步扰乱非期望方向的接收信号，下面介绍一种改进的保密通信方法。改进方法利用松弛符号区域进行符号检测，允许目标接收信号的相位位于某松弛范围 $[\zeta(k) - \Delta, \zeta(k) + \Delta]$ 内。为此，可以对算法19得到权向量进行额外的相位旋转操作，从而提高非期望接收器信号的扰动性。

算法 19 基于多边形构造的保密通信方法

- 1: 输入: $\mathbf{h} = [h_1, \dots, h_N]^T$, $\sqrt{E_s}$, σ_d^2 , Γ_d 。
 - 2: 初始化: $|h|_{\max}(1) = \max\{|h_1|, \dots, |h_N|\}$, $S(1) = |h_1| + \dots + |h_N|$, $\rho = \sqrt{\Gamma_d \sigma_d^2 / E_s}$, $r = \max\{2|h|_{\max}(1) - S(1), \rho\}$, $\vartheta_n = \angle h_n$, $n = 1, \dots, N$ 。
 - 3: **for** $k = 1, 2, \dots$ **do**
 - 4: 随机选取 $\beta \in (r, S(1))$ 。
 - 5: 随机选择某 $N \times N$ 维置换矩阵 \mathbf{J} 。
 - 6: 计算 $[|h'_1|, |h'_2|, \dots, |h'_N|]^T = \mathbf{J}[|h_1|, |h_2|, \dots, |h_N|]^T$ 。
 - 7: 应用多边形构造算法18求解相位方程 $|h'_1|e^{j\phi'_1} + \dots + |h'_N|e^{j\phi'_N} = \beta$ 。
 - 8: 将上述问题解记为 $\{\phi'_{1,*}, \dots, \phi'_{N,*}\}$ 。
 - 9: 计算 $[\phi_{1,*}, \dots, \phi_{N,*}]^T = \mathbf{J}^T[\phi'_{1,*}, \dots, \phi'_{N,*}]^T$ 。
 - 10: 输出: $\mathbf{w}(k) = [e^{j(\phi_{1,*} + \vartheta_1)2\pi}, \dots, e^{j(\phi_{N,*} + \vartheta_N)2\pi}]^T$ 。
 - 11: **end for**
-

具体地，为了保证对目标用户的可靠通信，算法19得到的权向量 $\mathbf{w}(k)$ 的相位旋转值 ψ_k 应满足

$$\psi_k \in [-\Delta, \Delta] \quad (7-52)$$

其中 Δ 依赖于 β 。经过计算可以得到

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\pi}{M} - \arcsin\left(\frac{\tau}{\beta}\right) \\ &= \frac{\pi}{M} - \arcsin\left(\frac{\rho \cdot \sin(\pi/M)}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (7-53)$$

其中 M 表示调制阶数， $\tau = \rho \cdot \sin(\pi/M)$ 表示安全边缘用来分离松弛符号区域与决策边界。图7-6给出了松弛符号区域的示意图。上述改进的保密通信算法的总结见算法20。

上述讨论中采用PSK调制，对于其它调制类型以及检测区域，所提算法经过简单变化后同样适用。

7.3.3 计算复杂度

所提的两个保密通信算法只需要简单的加法和比较操作，所以具有较低的

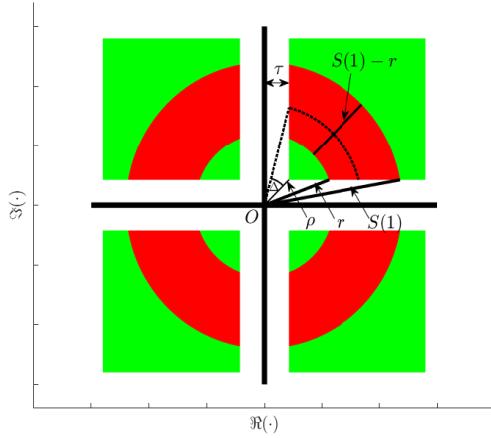


图 7-6 松弛符号区域示意图

算法 20 基于松弛符号区域的改进保密通信算法

- 1: 输入: $\mathbf{h} = [h_1, \dots, h_N]^T$, $\sqrt{E_s}$, σ_d^2 , Γ_d , M 。
- 2: 初始化: $|h|_{\max}(1) = \max\{|h_1|, \dots, |h_N|\}$, $S(1) = |h_1| + \dots + |h_N|$, $\rho = \sqrt{\Gamma_d \sigma_d^2 / E_s}$, $r = \max\{2|h|_{\max}(1) - S(1), \rho\}$, $\vartheta_n = \angle h_n$, $n = 1, \dots, N$ 。
- 3: **for** $k = 1, 2, \dots$ **do**
- 4: 随机选取 $\beta \in (r, S(1))$ 。
- 5: 计算 $\Delta = \pi/M - \arcsin(\rho \cdot \sin(\pi/M)/\beta)$ 。
- 6: 随机选取 $\psi_k \in [-\Delta, \Delta]$ 。
- 7: 随机选取 $N \times N$ 维置换矩阵 \mathbf{J} 。
- 8: 计算 $[|h'_1|, |h'_2|, \dots, |h'_N|]^T = \mathbf{J}[|h_1|, |h_2|, \dots, |h_N|]^T$ 。
- 9: 应用多边形构造算法 18 求解问题 $|h'_1|e^{j\phi'_1} + \dots + |h'_N|e^{j\phi'_N} = \beta$ 。
- 10: 将上述问题的解记为 $\{\phi'_{1,*}, \dots, \phi'_{N,*}\}$ 。
- 11: 计算 $[\phi_{1,*}, \dots, \phi_{N,*}]^T = \mathbf{J}^T[\phi'_{1,*}, \dots, \phi'_{N,*}]^T$ 。
- 12: 输出: $\mathbf{w}(k) = e^{j\psi_k} [e^{j(\phi_{1,*} + \vartheta_1)2\pi}, \dots, e^{j(\phi_{N,*} + \vartheta_N)2\pi}]^T$ 。
- 13: **end for**

运算复杂度。消耗最多运算的是式(7-31)集合 \mathbb{X}_n 中 $|h|_{\max}(n+1)$ 的计算, 这与对 N 个实数进行排序运算量相当, 其复杂度为 $O(N \log_2 N)$ 。所有其它运算的复杂度均为 $O(N)$ 。因此, 两种保密通信方法的运算量均为 $O(N \log_2 N)$ 。

7.4 实验仿真

本节对所提的两种保密通信方法进行仿真验证。除非特别说明, 我们使用 20 阵

元等距线阵，并采用多径毫米波信道模型（如式(7-3)和(7-5)所描述）。信道路径数（即(7-3)中的 L_d 或(7-5)中的 L_q ）取为5。每条路径的离开角在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 范围内随机分布。简单起见，我们取 $\Gamma_d = 160$, $\sqrt{E_s} = 1$, $\sigma_d^2 = 0.1$, 因此得到 $\rho = 4$ 。定义SNR $\triangleq E_s/\sigma_d^2$, 同时假设目标用户与窃听者的噪声功率相同。

表 7-1 信道 \mathbf{h} 的取值

n	h_n	n	h_n
1	$0.6928e^{j0.5258}$	11	$1.7020e^{j0.9018}$
2	$1.8808e^{j4.2005}$	12	$1.8871e^{j4.9358}$
3	$1.9896e^{j2.9017}$	13	$2.2073e^{j3.5416}$
4	$0.6173e^{j0.1126}$	14	$0.7611e^{j3.2271}$
5	$1.1198e^{j0.9779}$	15	$1.8750e^{j0.9515}$
6	$0.3202e^{j0.3919}$	16	$1.3125e^{j5.5432}$
7	$1.1921e^{j1.9526}$	17	$1.6447e^{j2.9199}$
8	$1.3517e^{j5.0372}$	18	$1.0155e^{j3.0950}$
9	$0.4221e^{j3.7346}$	19	$1.0307e^{j1.0637}$
10	$0.6968e^{j0.3450}$	20	$1.4003e^{j5.7674}$

7.4.1 固定 β 取值星座图合成结果

第一个例子中，我们考虑QPSK调制，并假设存在两个窃听接收器。表7-1给出了目标用户信道 \mathbf{h} 的值。经过计算可以发现 $|h|_{\max}(1) = 2.2073$, $S(1) = 25.1194$, $r = \rho = 4$ 。因此， β 的可行集为 $(4, 25.1194)$ 。下面将 β 固定为不同值，并展示目标用户和窃听器所得到的（无噪声）星座图。发射时刻个数取为500。

第一个场景下，取 $\beta = 5$ 。各接收机接收到的星座图如图7-7所示，其中红点表示目标用户合成的星座图，绿点和蓝点分别表示第一个窃听器和第二个窃听器得到的星座图。由图7-7看出，目标用户处观测到4个清晰的点，所合成的星座图无畸变。相比之下，两个窃听器合成的星座图杂乱无章，没出现明显的模式。表7-2列出了前4个发射时刻权向量 \mathbf{w} 的相位值。可以看出不同时刻下得到的相位值是分散的。除此之外，从图7-7可以看出，窃听者与目标用户接收信号的幅度大小相当。

第二种场景下取 $\beta = 25$ 。各接收机得到的无噪声星座图如图7-8所示，从中可以看出在目标方法形成了清晰的星座图结果。上述参数下，窃听器接收信号的幅

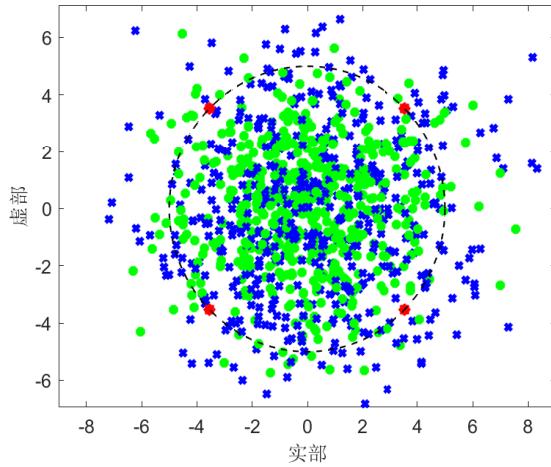


图 7-7 $\beta = 5$ 时目标用户和窃听设备的接收星座图（红点表示目标用户接收，绿点和蓝点分别表示第一个窃听器和第二个窃听器的接收信号）

度小于目标用户的信号幅度。虽然窃听器合成的星座图表现出随机性，但是其符号出现了聚集，且聚集后的形状在经过缩放和旋转后与目标用户相同。这主要因为当 β 取较大值时，权向量设计的自由度有限。前 4 个发射时刻得到的权向量相位如表 7-3 所示，从中可以发现虽然各权向量相位看起来完全不同，但是其实各相位差别很小。此时，窃听者不难从图 7-8 的星座图中解码出有用信息。

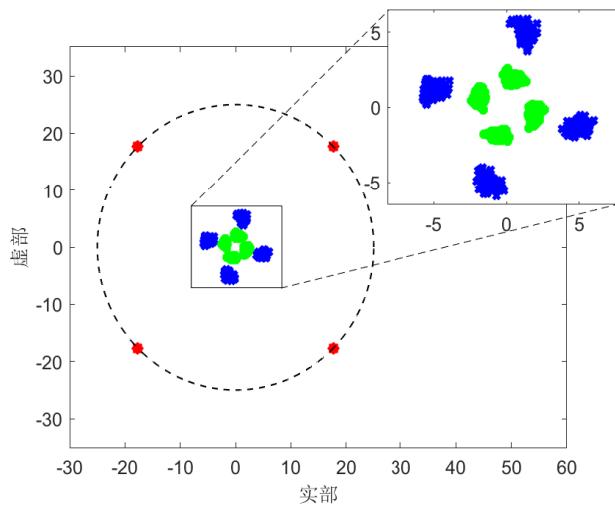


图 7-8 $\beta = 25$ 时目标用户和窃听设备的接收星座图（红点表示目标用户接收，绿点和蓝点分别表示第一个窃听器和第二个窃听器的接收信号）

7.4.2 变化 β 时的性能测试

沿用上小节的参数设定，下面测试不同时刻下权向量的相关性。具体地，定

表 7-2 使用固定 $\beta = 5$ 在前4发射时刻得到的权向量 \mathbf{w} 的相位

n	$\varphi_n(k=1)$	$\varphi_n(k=2)$	$\varphi_n(k=3)$	$\varphi_n(k=4)$
1	1.9517	1.4511	1.0168	3.3933
2	1.8604	5.9012	3.1134	1.9504
3	2.8630	5.8596	3.4043	5.1718
4	5.7267	4.0771	1.3960	0.3418
5	0.8386	1.3212	1.9330	1.1697
6	2.3831	0.6743	1.5510	0.2101
7	2.1855	5.9466	5.2997	2.2920
8	5.5607	1.0405	4.5414	1.6418
9	2.5413	3.1089	1.7841	1.6560
10	2.5522	4.5091	4.7127	0.7534
11	6.1551	1.2735	4.7225	2.0872
12	5.4707	4.2889	3.0177	4.8844
13	0.5388	5.4028	0.7744	3.3036
14	4.0629	2.5959	4.0591	3.1579
15	2.6219	0.4193	1.4561	5.8194
16	5.3100	4.7956	0.4320	5.4314
17	6.2123	1.9759	3.1458	5.7188
18	0.4828	2.4595	5.9337	3.2369
19	1.7200	0.3658	2.1094	0.3506
20	4.5290	1.5707	5.7127	2.7096

义

$$\chi \triangleq \text{Mean}(|\varrho|) \quad (7-54)$$

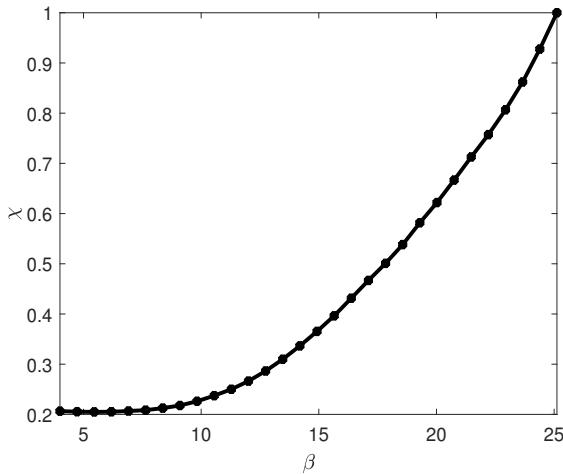
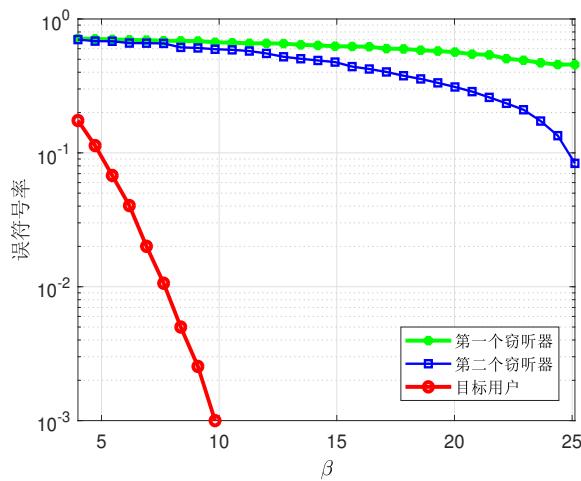
其中 ϱ 测量了两个不同时刻发射权向量的相关系数，式(7-54)得到的参数 χ 测量了不同权向量的平均相关性。仿真得到的 χ 随 β 的变化曲线如图 7-9所示，从中可以看出权向量相关性随 β 的增大而降低。

除了上述对 χ 的测试外，下面考察固定 β 选取方案下目标用户和窃听器的误符号率(symbol error rate,SER)性能。我们取SNR = -5dB同时限制目标用户的接收信

表 7-3 使用固定 $\beta = 25$ 在前4发射时刻得到的权向量 \mathbf{w} 的相位

n	$\varphi_n(k=1)$	$\varphi_n(k=2)$	$\varphi_n(k=3)$	$\varphi_n(k=4)$
1	0.5392	0.5848	0.4990	0.4633
2	4.2218	4.1897	4.1739	4.1852
3	2.9222	2.9140	2.8727	2.8389
4	0.1348	0.1148	0.0817	0.6843
5	1.2105	1.0053	0.9478	1.0126
6	0.3663	1.2028	0.3564	0.3708
7	1.9767	1.9705	1.9236	1.9338
8	5.0350	5.0299	5.0775	5.0289
9	3.7773	3.7591	3.7345	3.7215
10	0.0459	0.3619	0.3141	0.3308
11	0.7359	0.8945	0.9397	0.8460
12	4.9604	4.9404	4.9107	5.0377
13	3.5614	3.5370	3.5139	3.5245
14	3.2489	3.2355	3.0190	3.1964
15	0.9688	0.8493	0.9495	0.9346
16	5.5882	5.5180	5.5114	5.5252
17	2.9445	2.8290	2.9468	2.9067
18	3.1050	3.1114	3.0637	3.0721
19	0.8319	1.0625	1.4938	1.0404
20	5.8224	5.7838	5.7650	5.7448

号相位完全等于期望符号相位。图7-10展示了误符号率曲线随 β 的变化曲线，从中可以看出目标用户的误符号率随 β 的增加而降低，且当取 β 超过10时误符号率低于 10^{-3} 。另一方面，从图中可以看出窃听器得到的误符号率也随 β 的增加而降低，尤其当 β 的取值接近其最大取值上限 $S(1)$ 时误符号率出现明显下降。可以预测，取更高信噪比时，窃听器得到的误符号率将会更低。因此，固定 β 方案下，有用信息可能被窃听器窃取。

图 7-9 χ 随 β 变化曲线图 7-10 误符号率随 β 变化曲线

7.4.3 所提算法的合成结果

下面沿用前两节的参数设计对所提两种算法的合成星座图进行测试。为了说明所提算法的广泛适用性，我们对不同调制类型进行仿真验证。

7.4.3.1 QPSK调制

为了与之前仿真结果进行对比，下面首先考虑QPSK调制。图7-11展示了利用第一种算法在目标用户和窃听器处得到的接收星座图结果。从图中可以看出，目标用户得到的接收星座图可以形成四条规则的线段，这是因为我们在 $(r, S(1))$ 范围内随机设定 β 的取值。图7-11同时展示了两个窃听器得到的扰乱的接收星座图。总的来看，窃听器接收信号幅度较小，且信号分布不规则。

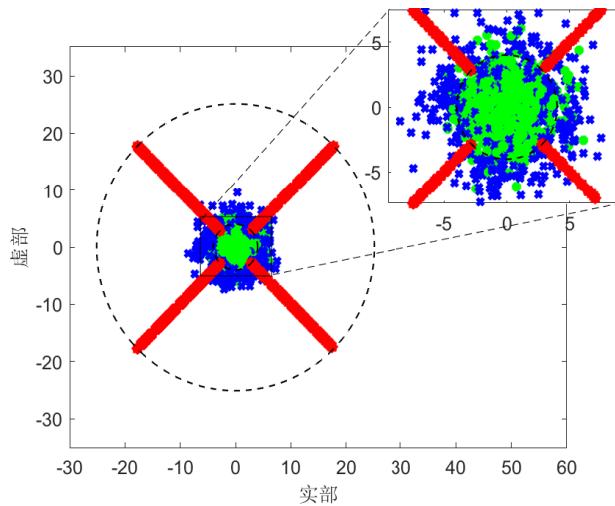


图 7-11 QPSK 调制下第一种算法在目标用户和窃听设备的接收星座图（红点表示目标用户接收，绿点和蓝点分别表示第一个窃听器和第二个窃听器的接收信号）

使用同样的参数设定，下面展示第二种算法得到的无噪声接收星座图，结果如图 7-12 所示。从图中可以看出，目标信号得到的接收符号均在松弛符号区域内，窃听器得到的接收星座图出现了随机性。由于在权向量上进行了额外的相位旋转操作，可以预测第二种算法将获得更好的保密性能。

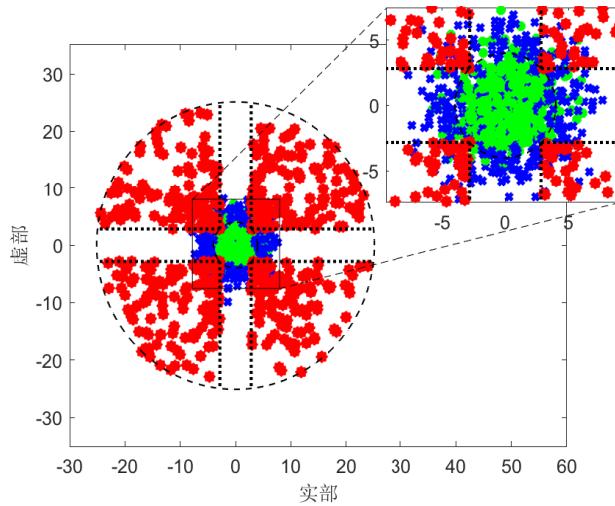


图 7-12 QPSK 调制下第二种算法在目标用户和窃听设备的接收星座图（红点表示目标用户接收，绿点和蓝点分别表示第一个窃听器和第二个窃听器的接收信号）

7.4.3.2 8-PSK 调制

下面提高调制阶数，考虑 8-PSK 调制下得到的星座图结果。图 7-13(a) 和图 7-13(b) 展示了使用两种算法得到的目标用户和窃听器的无噪声星座图。与 QPSK 调

制类似，第一种算法在目标用户处得到规则的星座图结果（如图7-13(a)所示），而第二种算法的接收符号均位于松弛符号区间。对于窃听器，两种算法得到的星座图均出现随机性，没有产生清晰的模式（如图7-13(b)所示）。

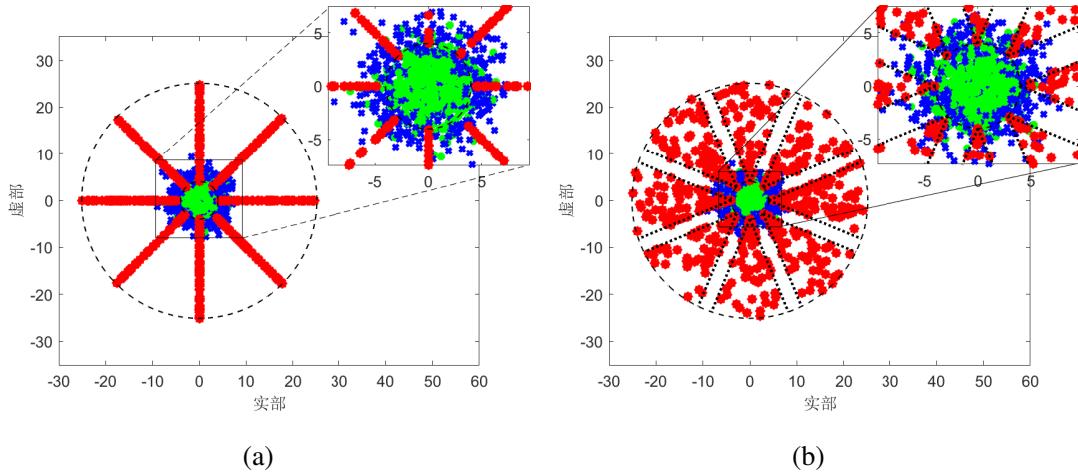


图 7-13 8-PSK 调制下在目标用户和窃听设备的接收星座图（红点表示目标用户接收，绿点和蓝点分别表示第一个窃听器和第二个窃听器的接收信号）。(a) 第一种算法结果;(b)第二种算法结果

7.4.3.3 16-QAM

下面考虑16-QAM调制，并展示所提算法经过改进后得到的星座图结果。不同于PSK调制里各符号仅由相位进行区分，QAM调制里各符号在相位和幅度上均有区别，所以原算法19和算法20不再适用。对于QAM调制，我们分别对算法19和算法20进行改进。具体地，第一种改进算法中，我们使用固定 β 的方式，使得合成的符号刚好等于期望符号。此时，只有有限个 β 可供选择，其取值取决于当前符号。通过变化发射权，窃听器的接收星座图即可被扰乱。类似地，第二种算法经过改进后同时适用于QAM调制。此时只需使用QAM的松弛符号区域，并允许目标用户的接收信号位于松弛区域内。该场景下， β 可在特定范围内进行选取，其具体范围取决于发射符号。

图7-14(a)和图7-14(b)展示了16-QAM下，利用两种改进算法得到的目标用户和窃听器的无噪声接收星座图。具体地，第一种改进算法的结果见图7-14(a)，从中可以看出在目标用户处合成了期望的星座图，而两个窃听器处的接收星座图是随机的。图7-14(b)展示了使用QAM松弛符号区域后，第二种改进算法得到的接收星座图结果。从图中可以看出，目标用户的接收信号均在松弛符号区域内，而窃听器得到的星座图中没有清晰的模式。

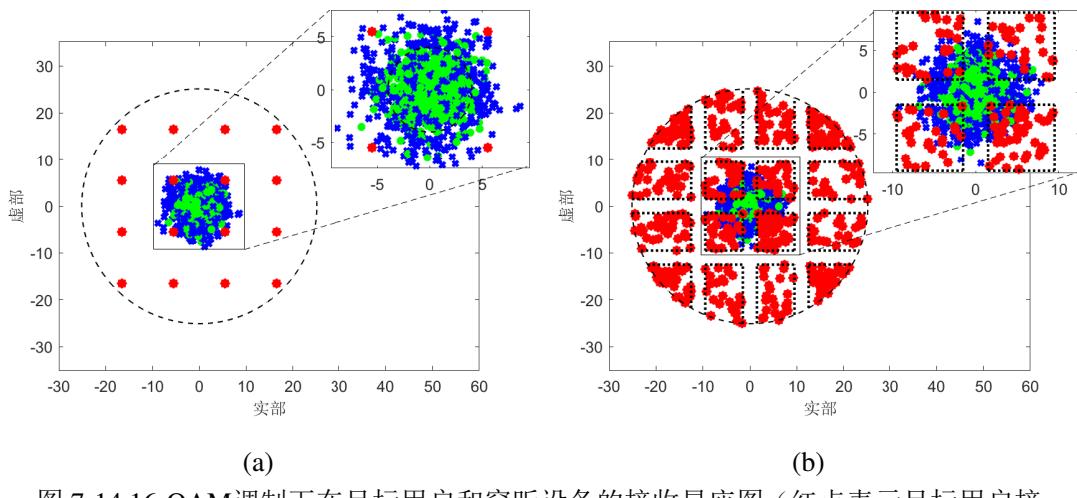


图 7-14 16-QAM 调制下在目标用户和窃听设备的接收星座图 (红点表示目标用户接收, 绿点和蓝点分别表示第一个窃听器和第二个窃听器的接收信号)。(a) 第一种算法结果;(b)第二种算法结果

7.4.4 所提算法的保密性能

下面假设仅有一个窃听器, 在此基础上调查所提算法的保密性能。为了实验对比, 我们将同时测试传统相控阵(conventional phased-array, CPA)传输, 保密恒包络预编码(secure constant-envelope precoding, SCEP)传输^[93], 虚拟噪声传输(artificial noise transmission, ANT)^[157]。需要注意的是, 保密恒包络预编码算法可能在目标用户上产生噪声泄露, 而虚拟噪声传输的代价是需要额外的射频链路。

分别考虑QPSK和8-PSK两种调制方式, 信噪比从-10dB变化到30dB, 不同算法得到的目标用户的误符号率曲线如图7-15 所示。从图中可以看出, 同一信噪比下8-PSK调制的误符号率高于QPSK模式的响应值。所提两种算法性能差于传统相控阵传输的性能。保密恒包络预编码传输在8-PSK调制下的误符号率高于 10^{-1} 。另外, 由图7-15可以看出相同信噪比参数下, 第二种算法的误符号率高于第一种算法的相应值, 这与理论预测是一致的。

相应地, 窃听器的误符号率随信噪比变化曲线如图7-16所示, 从中可以看出对于所有考察的算法, 8-PSK调制得到的误符号率要高于 QPSK调制的对应值。由图7-16可以看出, 对于每种调制方式, 传统相控阵传输, 保密恒包络预编码传输以及虚拟噪声传输得到的误符号率均随信噪比的增加而降低, 而所提算法的性能几乎不受信噪比影响。对于所提的两种算法, 任意信噪比下在窃听器处得到的误符号率总是高于 0.3。另外, 由图7-16可以看出, 相同信噪比下第二种算法得到的误符号率高于第一种算法的相应值。

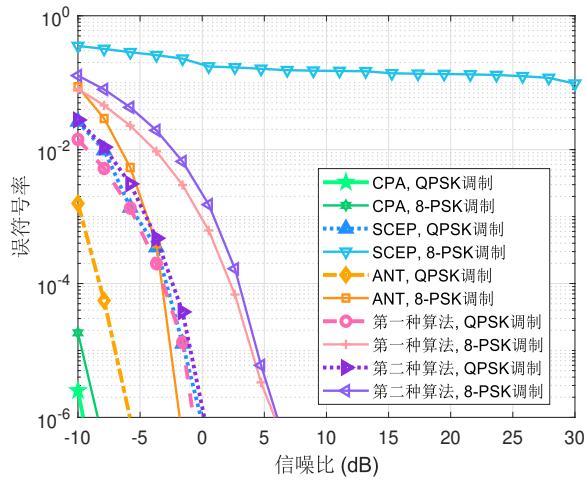


图 7-15 目标用户误符号率随信噪比变化曲线

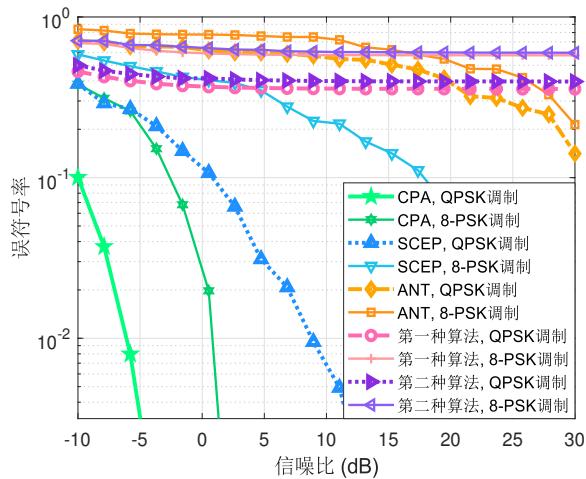


图 7-16 窃听设备误符号率随信噪比变化曲线

7.4.5 单路径信道保密性仿真

以上仿真均考虑多路径毫米波信道，下面对单路径信道进行测试和性能比较。具体地，假设目标用户位于 $\theta_T = 30^\circ$ 方向，另外在 $\theta_U = 28^\circ$ 存在一个窃听器。注意到窃听器方向与目标用户方向接近。由单路径毫米波信道模型，我们有 $\mathbf{h} = \mathbf{a}(\theta_T)$, $\mathbf{g} = \mathbf{a}(\theta_U)$ ，其中 $\mathbf{a}(\theta)$ 为阵列导向矢量。在此基础上，分别考察 8-PSK 和 16-PSK 两种调制方式下窃听器处的误符号率。除了传统相控阵传输，保密恒包络预编码传输，以及虚拟噪声传输之外，同时测试天线子集调制(antenna subset modulation, ASM) 传输^[98]，静默天线跳频(silent antenna hopping, SAH) 传输^[99]，以及倒置天线子集传输(inverted antenna subset transmission, IAST)^[100]。

图7-17展示了8-PSK调制方式下窃听器处的误符号率随信噪比变化曲线。从图中可以看出，传统相控阵传输、保密恒包络预编码传输、天线子集调制传输，静默天线跳频传输以及倒置天线子集传输获得降低的误符号率。虚拟噪声传输方法的误符号率在信噪比高于15dB时下降明显。在高信噪比场景下，所提的两种算法性能优于已有算法，得到的误符号率高于 $10^{-1.5}$ 。因此可以看出，尽管窃听器离目标用户较近，所提算法仍然可以扰乱窃听器的接收信号。

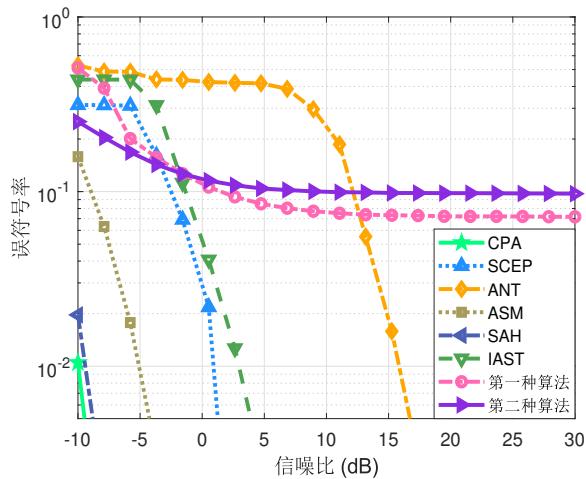


图 7-17 8-PSK 调制时窃听设备误符号率随信噪比变化曲线

图7-18展示了16-PSK调制时窃听器的误符号率随信噪比变化曲线。与8-PSK调制时的结果类似，所提的两种算法在高信噪比场景下得到的误符号率高于已有方法。该场景下，虚拟噪声传输方法的性能与所提算法性能接近。然而，正如前文提到，虚拟噪声传输需要额外的射频链路来产生虚拟噪声，其硬件成本更高。可以看出，所提的两种算法几乎不受信噪比影响，而其它算法受信噪比影响明显。由于调制阶数的增加，相比于图7-17中的结果，图7-18得到的不同算法的误符号率有所提高。

7.5 本章小结

本章介绍了两种基于几何构造的相控阵传输模式下的保密通信算法。首先考虑PSK调制，分析发现传统的星座图合成问题可以转换为复平面多边形构造问题。而且，对于给定的星座图合成任务，深入分析发现在某种条件下存在无穷多个发射权向量解。在此基础上提出时变权的概念，以符号率速度对发射权进行随机选取。所提算法具有解析解和低的运算复杂度。第一种算法可以实现理想的星座图合成，第二种算法在第一种算法的基础上，使用了松弛检测区域的概念进行改进。与传统方法相比，所提算法对信道模型没有限制，且不需要开关电路。另外，所

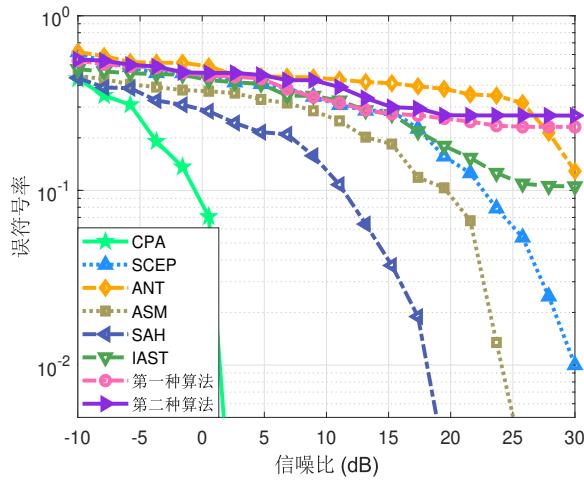


图 7-18 16-PSK 调制时窃听设备误符号率随信噪比变化曲线

提算法不仅适用于PSK调制，也适用于其它调制类型。本章所提出的两种保密通信算法具有解析解，硬件结构简单，且不受限于特定调制类型，为实际保密通信系统的实现提供了重要的理论支撑。实验仿真证实了所提算法在不同场景下的有效性。

第八章 基于欧拉公式的DOA与相位误差联合估计

阵列存在相位误差时，传统DOA估计算法性能下降或失效。因此，研究存在相位误差时的DOA估计算法具有重要的理论和应用价值。本章首先研究了等距线阵情况下的DOA与相位误差联合估计问题，提出一种基于欧拉公式和数据相加的部分校正阵列参数估计方法。在此基础上，研究了适用于任意阵列的DOA与相位误差联合估计方法。此时问题建模为包含二次约束的最小二乘问题，最后利用凸过程对问题进行了求解。仿真实验证实了所提两种算法的有效性。

8.1 基于欧拉公式的DOA与相位误差联合估计—等距线阵情况

8.1.1 信号模型

考虑 N 元各向异性等距线阵，阵元间距为半波长，各阵元依次标号为1, 2, ..., N 。以中间阵元为参考，其标号为 $(N+1)/2$ 。考虑单个信源，其角度为 θ_0 。存在阵列误差时， θ 方向的导向矢量可以表示为

$$\tilde{\mathbf{a}}(\theta) = \Phi \mathbf{a}(\theta) \quad (8-1)$$

其中 $\mathbf{a}(\theta)$ 为理想情况下 θ 方向的导向矢量，满足

$$\mathbf{a}(\theta) = \left[e^{j\frac{(1-N)}{2}\pi \sin(\theta)}, e^{j\frac{(3-N)}{2}\pi \sin(\theta)}, \dots, 1, \dots, e^{j\frac{(N-3)}{2}\pi \sin(\theta)}, e^{j\frac{(N-1)}{2}\pi \sin(\theta)} \right]^T$$

式(8-1)中 $\Phi = \text{diag}\{[e^{j\phi_1}, e^{j\phi_2}, \dots, e^{j\phi_N}]\}$ ， ϕ_n 表示第 n 个阵元的相位误差， $n = 1, 2, \dots, N$ 。存在相位误差时，理想导向矢量与实际导向矢量之间存在失配，使得传统的特征空间类DOA估计方法性能恶化。

本节针对等距线阵，考虑部分校正阵列的DOA与相位误差联合估计。以原点阵元（标号为 $(N+1)/2$ ）为参考，同时假设另外某标号为 c 的阵元已被校正。换句话说，假设 $\phi_{(N+1)/2} = 0$ 且 ϕ_c 已知。阵列接收数据向量可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{a}}(\theta)s(t) + \mathbf{n}(t) = \Phi \mathbf{a}(\theta)s(t) + \mathbf{n}(t) \quad (8-2)$$

其中 $s(t)$ 包含复信号包络， $\mathbf{n}(t)$ 为 $N \times 1$ 维复高斯加性噪声。阵列的 L 次快拍数据可以表示为

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(L)] = \Phi \mathbf{a}(\theta) \mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (8-3)$$

其中 $\mathbf{S} = [s(1), s(2), \dots, s(L)]$, $\mathbf{N} = [n(1), n(2), \dots, n(L)]$ 。则阵列数据协方差矩阵可以表示为

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} = \sigma_s^2 \Phi \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) \Phi^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (8-4)$$

其中 σ_n^2 为噪声功率, $\sigma_s^2 = \mathbf{E}\{s(t)s^H(t)\}$ 为信号功率。协方差矩阵 \mathbf{R} 通常由下式估计

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \mathbf{X} \mathbf{X}^H \quad (8-5)$$

下面考虑如何利用 \mathbf{X} 或 $\hat{\mathbf{R}}$ 估计信号来波角度 θ_0 以及相位误差 ϕ_n , $n = 1, \dots, N$, $n \neq c$, $n \neq (N+1)/2$ 。

8.1.2 所提方法

不失一般性, 下面假设 $c < (N+1)/2$ 。

8.1.2.1 DOA和相位误差估计

介绍所提相位误差估计方法之前, 首先定义如下选择矩阵

$$\mathbf{J}_1 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\frac{(N+1)}{2} \times \frac{(N-1)}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{(N+1)}{2}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\frac{(N+1)}{2} \times N} \quad (8-6a)$$

$$\mathbf{J}_2 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\frac{(N-1)}{2} \times \frac{(N+1)}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{(N-1)}{2}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\frac{(N-1)}{2} \times N} \quad (8-6b)$$

$$\mathbf{J}_3 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\frac{(N-1)}{2} \times \frac{(N-1)}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{(N-1)}{2}} & \mathbf{0}_{\frac{(N-1)}{2}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\frac{(N-1)}{2} \times N} \quad (8-6c)$$

对于任意正实数 A 和 B , 由欧拉定理可知

$$e^{jA} + e^{jB} = 2\Re(e^{j\frac{A-B}{2}})e^{j\frac{A+B}{2}} \quad (8-7)$$

利用式(8-6)中的选择矩阵, 我们构造如下数据

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{J}_1 \mathbf{X} \quad (8-8)$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{J}_1 \text{flipud}(\mathbf{X}) \quad (8-9)$$

其中 $\text{flipud}(\cdot)$ 表示对矩阵进行上下翻转。定义 $\Theta \triangleq \pi \sin(\theta)$ 。将 \mathbf{X}_1 和 \mathbf{X}_2 相加, 并结合式(8-7)得到

$$\mathbf{X}_{12} = \mathbf{J}_1 \mathbf{X} + \mathbf{J}_1 \text{flipud}(\mathbf{X}) = \Gamma_{12} \mathbf{b}_{12} \mathbf{S} + \mathbf{N}_{12} \quad (8-10)$$

其中 $\mathbf{N}_{12} = \mathbf{J}_1 \mathbf{N} + \mathbf{J}_1 \text{flipud}(\mathbf{N})$ 为混合噪声, Γ_{12} 为实对角矩阵, 满足

$$\Gamma_{12} = 2\text{diag} \left\{ \left[1, \Re \left(e^{j\frac{2\Theta + \phi(N+3)/2 - \phi(N-1)/2}{2}} \right), \dots, \Re \left(e^{j\frac{(N-1)\Theta + \phi_N - \phi_1}{2}} \right) \right] \right\} \quad (8-11)$$

式(8-10)中 \mathbf{b}_{12} 为复向量, 可以表示为

$$\mathbf{b}_{12} = \left[1, e^{j\frac{\phi(N+3)/2 + \phi(N-1)/2}{2}}, \dots, e^{j\frac{\phi_N + \phi_1}{2}} \right]^T \quad (8-12)$$

图8-1对矩阵 \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 以及 \mathbf{X}_{12} 的含义进行了直观地描绘。

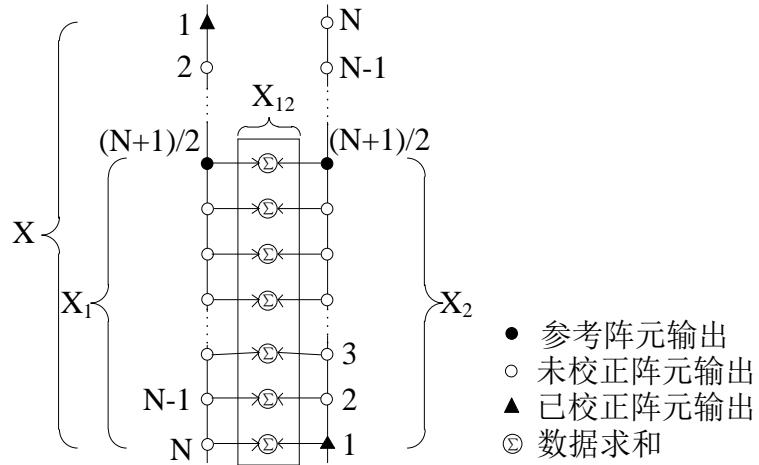


图 8-1 阵列数据相加示意图

记 \mathbf{R}_{12} 表示数据 \mathbf{X}_{12} 的协方差矩阵, γ_{12} 为 \mathbf{R}_{12} 的主特征向量。假设 γ_{12} 已经过归一化处理使其首元素为1。由子空间原理, 向量 $\Gamma_{12}\mathbf{b}_{12}$ 与 γ_{12} 张成相同的列空间, 即

$$\text{span}(\Gamma_{12}\mathbf{b}_{12}) = \text{span}(\gamma_{12}) \quad (8-13)$$

其中(·)返回张成的列空间。由于 Γ_{12} 的元素符号未知, 所以向量 \mathbf{b}_{12} 的相位可能出现 π 值的模糊。假设 \mathbf{b}_{12} 的各元素相位在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 范围内分布, 则有下式成立

$$\angle \mathbf{b}_{12} = \angle \gamma_{12} \quad (8-14)$$

由上式可以建立一系列关于相位 ϕ_n 的线性方程组。显然, 由于可能的独立方程个数少于未知变量的个数, 方程将存在无穷多个解。为了得到唯一解, 从而实现参数估计, 需要建立更多关于相位 ϕ_n 的方程。

与等式(8-8)和(8-9)类似, 我们使用 \mathbf{J}_2 和 \mathbf{J}_3 构造如下四个矩阵

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{J}_2 \mathbf{X} \quad (8-15)$$

$$\mathbf{X}_4 = \mathbf{J}_3 \text{flipud}(\mathbf{X}) \quad (8-16)$$

$$\mathbf{X}_5 = \mathbf{J}_3 \mathbf{X} \quad (8-17)$$

$$\mathbf{X}_6 = \mathbf{J}_2 \text{flipud}(\mathbf{X}) \quad (8-18)$$

如图8-2(a)和8-2(b)所示，分别将 \mathbf{X}_3 和 \mathbf{X}_4 ，以及 \mathbf{X}_5 和 \mathbf{X}_6 进行相加，并利用下式构造 \mathbf{X}_{34} 和 \mathbf{X}_{56}

$$\mathbf{X}_{34} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^T \\ \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_4 \end{bmatrix} = \Gamma_{34} \mathbf{b}_{34} \mathbf{S} + \mathbf{N}_{34} \quad (8-19)$$

$$\mathbf{X}_{56} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^T \\ \mathbf{X}_5 + \mathbf{X}_6 \end{bmatrix} = \Gamma_{56} \mathbf{b}_{56} \mathbf{S} + \mathbf{N}_{56} \quad (8-20)$$

其中 $\mathbf{x}_0^T = \mathbf{X}((N+1)/2, :)$ ， Γ_{34} 和 Γ_{56} 均为实对角矩阵， \mathbf{N}_{34} 和 \mathbf{N}_{56} 代表相应的混合噪声，复向量 \mathbf{b}_{34} 和 \mathbf{b}_{56} 可分别表示为

$$\mathbf{b}_{34} = \left[1, e^{j\frac{\Theta+\phi(N+3)/2+\phi(N+1)/2}{2}}, \dots, e^{j\frac{\Theta+\phi_N+\phi_2}{2}} \right]^T \quad (8-21)$$

$$\mathbf{b}_{56} = \left[1, e^{j\frac{-\Theta+\phi(N+1)/2+\phi(N-1)/2}{2}}, \dots, e^{j\frac{-\Theta+\phi(N-1)+\phi_1}{2}} \right]^T \quad (8-22)$$

将 \mathbf{X}_{34} 和 \mathbf{X}_{56} 的协方差矩阵分别记为 \mathbf{R}_{34} 和 \mathbf{R}_{56} ，则可以得到

$$\angle \mathbf{b}_{34} = \angle \gamma_{34} \quad (8-23)$$

$$\angle \mathbf{b}_{56} = \angle \gamma_{56} \quad (8-24)$$

其中 γ_{34} 和 γ_{56} 分别为 \mathbf{R}_{34} 和 \mathbf{R}_{56} 的主特征向量，且假设 γ_{34} 和 γ_{56} 已经过归一化处理（首元素为1）。可以发现式(8-21)和(8-22) 中引入了新参数 Θ 。

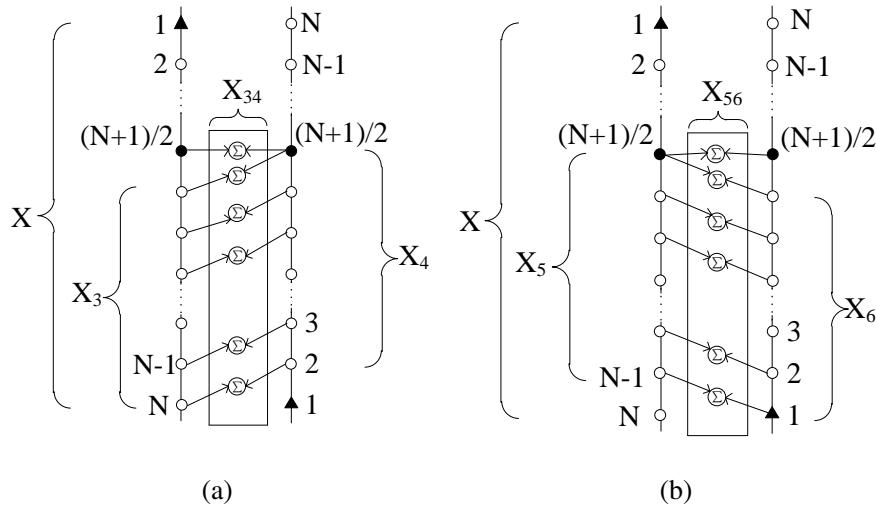


图 8-2 阵列数据错位相加示意图。(a)错位相加方式一;(b)错位相加方式二

结合式(8-14), (8-23)和(8-24), 可以得到下面等式

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{u} = \mathbf{d}_1 \quad (8-25a)$$

$$\mathbf{C}_2 \mathbf{u} = \mathbf{d}_2 \quad (8-25b)$$

$$\mathbf{C}_3 \mathbf{u} = \mathbf{d}_3 \quad (8-25c)$$

其中 $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{(N-1)/2 \times (N+1)}$ 和 $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^{(N-1)/2}$, $i = 1, 2, 3$, 分别定义为

$$\mathbf{C}_1 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{(N-1)/2} & \mathbf{0}_{(N-1)/2} & \mathbf{I}_{(N-1)/2} & \mathbf{0}_{(N-1)/2} \end{bmatrix} \quad (8-26a)$$

$$\mathbf{C}_2 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N-1)/2} & \mathbf{P}_{(N-1)/2} & \mathbf{I}_{(N-1)/2} & \mathbf{1}_{(N-1)/2} \end{bmatrix} \quad (8-26b)$$

$$\mathbf{C}_3 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{(N-1)/2} & \mathbf{I}_{(N-1)/2} & \mathbf{0}_{(N-1)/2} & -\mathbf{I}_{(N-1)/2} \end{bmatrix} \quad (8-26c)$$

以及

$$\mathbf{d}_1 \triangleq \angle \gamma_{12}(2 : (N+1)/2) \quad (8-27a)$$

$$\mathbf{d}_2 \triangleq \angle \gamma_{34}(2 : (N+1)/2) \quad (8-27b)$$

$$\mathbf{d}_3 \triangleq \angle \gamma_{56}(2 : (N+1)/2) \quad (8-27c)$$

式(8-25)中 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N+1}$ 为参数向量, 可以表示为

$$\mathbf{u} = [\phi_1, \dots, \phi_n, \dots, \phi_N, \Theta]^T \quad (8-28)$$

不难进一步将式(8-25)更紧凑地表示为

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{d} \quad (8-29)$$

其中 $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3(N-1)/2 \times (N+1)}$ 和 $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{3(N-1)/2}$ 分别满足

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{(N-1)/2} & \mathbf{0}_{(N-1)/2} & \mathbf{I}_{(N-1)/2} & \mathbf{0}_{(N-1)/2} \\ \mathbf{0}_{(N-1)/2} & \mathbf{P}_{(N-1)/2} & \mathbf{I}_{(N-1)/2} & \mathbf{1}_{(N-1)/2} \\ \mathbf{P}_{(N-1)/2} & \mathbf{I}_{(N-1)/2} & \mathbf{0}_{(N-1)/2} & -\mathbf{1}_{(N-1)/2} \end{bmatrix} \quad (8-30)$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \angle \gamma_{12}(2 : (N+1)/2) \\ \angle \gamma_{34}(2 : (N+1)/2) \\ \angle \gamma_{56}(2 : (N+1)/2) \end{bmatrix} \quad (8-31)$$

式(8-30)中 $\mathbf{P}_{(N-1)/2}$ 表示 $(N-1)/2 \times (N-1)/2$ 维交换矩阵, 定义为

$$\mathbf{P}_{(N-1)/2} = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{bmatrix} \quad (8-32)$$

由附录F.1可以推导得到

$$\text{rank}(\mathbf{C}_{12}) = \text{rank}(\mathbf{C}_{13}) = \text{rank}(\mathbf{C}_{23}) = N - 1 \quad (8-33)$$

其中

$$\mathbf{C}_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i \\ \cdots \\ \mathbf{C}_j \end{bmatrix}, i, j \in \{1, 2, 3\}, i < j \quad (8-34)$$

$$\mathbf{d}_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \cdots \\ \mathbf{d}_j \end{bmatrix}, i, j \in \{1, 2, 3\}, i < j \quad (8-35)$$

由式(8-33)可知, 矩阵 \mathbf{C}_{ij} 为行满秩矩阵, 其中 $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i < j$ 。

假设 $\phi_{(N-1)/2} = 0$ 且 ϕ_c 已知, 不难得出

$$\tilde{\mathbf{C}}_{ij}\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{d}_{ij} - \phi_c \mathbf{C}_{ij}(:, c), i, j \in \{1, 2, 3\}, i < j \quad (8-36)$$

其中 $\tilde{\mathbf{C}}_{ij} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ 为修正后的系数矩阵, 其可以通过从矩阵 \mathbf{C}_{ij} 中依次剔除第 $(N+1)/2$ 列和第 c 列后得到, 向量 $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{N-1}$ 可以表示为

$$\tilde{\mathbf{u}} = [\phi_1, \dots, \phi_{c-1}, \phi_{c+1}, \dots, \phi_{(N-1)/2}, \phi_{(N+3)/2}, \dots, \phi_N, \Theta]^T \quad (8-37)$$

由于 \mathbf{C}_{ij} 为行满秩矩阵, 其各行线性独立。类似于附录F.1, 可以证明

$$\text{rank}(\tilde{\mathbf{C}}_{ij}) = N - 1 \quad (8-38)$$

因此, 矩阵对于任意给定的 N , $\tilde{\mathbf{C}}_{ij}$ 为列满秩矩阵。进一步可知, 式(8-36)一定存在下面唯一最小二乘解:

$$\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_{LS} = \tilde{\mathbf{C}}_{ij}^\dagger [\mathbf{d}_{ij} - \phi_c \mathbf{C}_{ij}(:, c)] \quad (8-39)$$

其中 $\tilde{\mathbf{C}}_{ij}^\dagger$ 为 $\tilde{\mathbf{C}}_{ij}$ 的伪逆。利用式(8-39)即可同时估计DOA与相位误差。

8.1.2.2 提高实用性

不难得出, 式(8-29)成立的前提是

$$\max(\text{abs}(\angle \mathbf{b})) \leq \frac{\pi}{2} \quad (8-40)$$

其中 $\mathbf{b} = [\mathbf{b}_{12}^T, \mathbf{b}_{34}^T, \mathbf{b}_{56}^T]^T$, $\text{abs}(\cdot)$ 为取绝对值操作。为了提高实用性, 下面假设DOA角度 θ_0 分布于某已知区间:

$$\theta_0 \in [\bar{\theta}_0 - \delta, \bar{\theta}_0 + \delta] \quad (8-41)$$

其中 $\bar{\theta}_0$ 为 θ_0 的粗略估计。

为了使式(8-40)更容易满足, 下面定义旋转因子 Ω

$$\Omega \triangleq \frac{\pi [\sin(\bar{\theta}_0 - \delta) + \sin(\bar{\theta}_0 + \delta)]}{2} \quad (8-42)$$

在基础上, 定义如下旋转对角矩阵 Ξ

$$\Xi \triangleq \text{Diag} \left\{ \left[e^{j \frac{(N-1)\Omega}{2}}, \dots, 1, \dots, e^{j \frac{(1-N)\Omega}{2}} \right] \right\} \quad (8-43)$$

利用 Ξ 对原始阵列接收数据 $\mathbf{x}(t)$ 进步旋转变换, 得到如下的修正数据 $\mathbf{y}(t)$

$$\mathbf{y}(t) = \Xi \mathbf{x}(t) = \Phi \mathbf{a}(\tilde{\Theta}) s(t) + \mathbf{n}_y(t) \quad (8-44)$$

其中 $\tilde{\Theta} = \Theta - \Omega$ 。由数据 $\mathbf{y}(t)$ 即可估计得到 $\tilde{\Theta}$ 的估计 (记为 $\hat{\tilde{\Theta}}$), 以及相位 ϕ_n 的估计, $n = 1, \dots, N$, $n \neq (N+1)/2$, $n \neq c$ 。DOA估计可由下式得到

$$\hat{\theta} = \arcsin\left(\frac{\hat{\tilde{\Theta}} + \Omega}{\pi}\right) \quad (8-45)$$

8.1.3 实验仿真

下面对所提算法进行仿真验证。为了实验进行对比, 同时测试仿真MUSIC算法^[23]与WF算法^[110]。仿真中, 相位误差由下式产生

$$\phi_n = \sqrt{12} \sigma_\phi \eta_n, n = 1, \dots, N \quad (8-46)$$

其中 η_n 独立同分布, 在 $[-0.5, 0.5]$ 范围内均匀分布。使用15阵元等距线阵进行仿真, 信源真实角度为 12° , 已知该信源位于 $[\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$ 内, 其中 $\theta_0 = 9^\circ$, $\delta = 8^\circ$ 。快拍数取为512, 且假设第一个阵元已校正。

8.1.3.1 空间谱对比

取 $\sigma_\phi = 30^\circ$, 信噪比为15dB。图8-3对比了不同方法得到的空间谱曲线。从图中可以看出, 在未知阵列误差情况下MUSIC算法无法得到准确的DOA估计结果。对于WF方法, 其结果收敛至局部最优解, 因此得到较大的角度估计偏差。所提方法在真实信源角度处出现峰值, 其DOA估计性能优于MUSIC算法和WF算法。

8.1.3.2 不同相位误差方差时的估计性能对比

取信噪比为15dB, 图8-4对比了DOA与相位误差估计性能随相位误差标准差变化曲线。具体地, 图8-4(a)为DOA估计均方根误差随相位误差标准差变化曲线, 图8-4(b)为相位估计均方差误差随相位误差标准差变化曲线。从图中可以看出, 三种方法的估计性能均随相位误差标准差的增大而变差, 且所提方法性能优于WF方法和MUSIC方法。

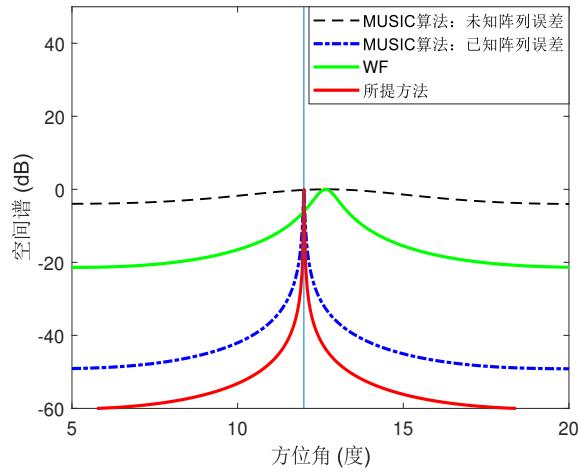


图 8-3 空间谱对比

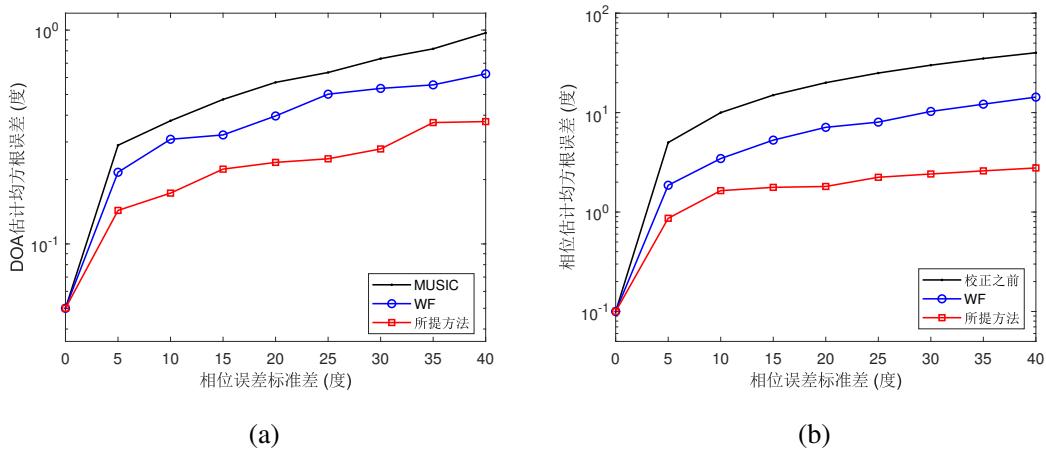


图 8-4 不同相位误差方差时的估计性能对比。(a)DOA估计性能;(b)相位误差估计性能

8.1.3.3 不同信噪比时的估计性能对比

类似地，取 $\sigma_\phi = 30^\circ$ ，图8-5对比了DOA与相位误差估计性能随信噪比变化曲线。具体地，图8-5(a)为DOA估计均方根误差随信噪比变化曲线，图8-5(b)为相位估计均方差误差随信噪比变化曲线。从图中可以看出，信噪比越大三种方法的估计性能越好。另外，在低信噪比情况下所提方法性能略差于WF方法。在高信噪比情况下，所提方法性能优于WF方法。

8.2 基于欧拉公式的DOA与相位误差联合估计-任意阵列情况

8.2.1 信号模型

考虑 N 元各向同性平面阵列，假设存在单信源，且信源与阵列平面共面，信

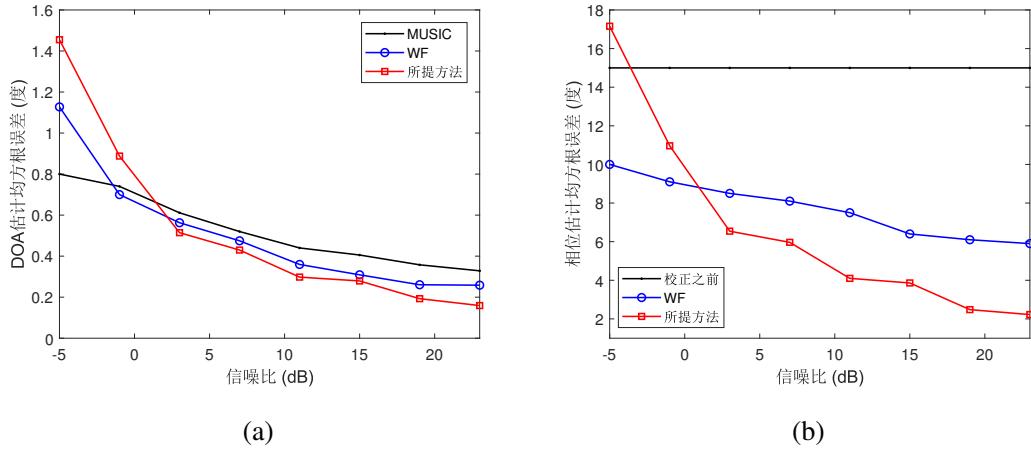


图 8-5 不同信噪比时的估计性能对比。(a)DOA估计性能;(b)相位误差估计性能

源角度为 θ_0 。理想情况下，阵列导向矢量 $\mathbf{a}(\theta)$ 可以表示为

$$\mathbf{a}(\theta) = [1, e^{j2\pi\lambda^{-1}\mathbf{p}_2^T \mathbf{r}}, \dots, e^{j2\pi\lambda^{-1}\mathbf{p}_N^T \mathbf{r}}]^T \quad (8-47)$$

其中 $j = \sqrt{-1}$ 为虚数单位， $\mathbf{p}_n = [x_n, y_n]^T$ 代表第 n 个阵元的位置坐标， $n = 1, 2, \dots, N$ ， $\mathbf{r} = [\cos(\theta), \sin(\theta)]^T$ 为 θ 方向的单位矢量。

考虑相位误差，实际导向矢量 $\mathbf{a}_r(\theta)$ 满足

$$\mathbf{a}_r(\theta) = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{a}(\theta) \quad (8-48)$$

其中 $\boldsymbol{\Gamma}$ 为相位误差矩阵

$$\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}\{[e^{j\phi_1}, e^{j\phi_2}, \dots, e^{j\phi_N}]\} \quad (8-49)$$

其中 ϕ_n 表示第 n 个阵元的相位误差。不失一般性，这里以第一个阵元为参考，即 $\phi_1 = 0$ 。相应地，阵列接收数据可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_r(\theta) s(t) + \mathbf{n}(t) = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{a}(\theta) s(t) + \mathbf{n}(t) \quad (8-50)$$

其中 $s(t)$ 表示信号波形， $\mathbf{n}(t)$ 为复高斯加性噪声。除此之外，我们假设

$$E\{s(t)s^*(t)\} = \sigma_s^2 \quad (8-51a)$$

$$E\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)\} = \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (8-51b)$$

其中 σ_s^2 和 σ_n^2 分别代表信号和噪声功率。 L 次快拍数据可以表示为

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(L)] = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{a}(\theta) \mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (8-52)$$

其中 $\mathbf{S} = [s(1), \dots, s(L)]$ ， $\mathbf{N} = [\mathbf{n}(1), \dots, \mathbf{n}(L)]$ 。

与前一节类似，这里假设第 c 个阵元已被校正，即 ϕ_c 已知。下面考虑如何利用 \mathbf{X} 估计DOA角度 θ_c 以及相位误差 ϕ_n ， $n = 2, \dots, c-1, c+1, \dots, N$ 。

8.2.2 所提方法

8.2.2.1 DOA和相位误差估计

为了本节的完整性，首先介绍如下欧拉公式。具体地，假设 A 和 B 均为实数，则有下面公式

$$e^{jA} + e^{jB} = 2\Re(e^{j\frac{A-B}{2}})e^{j\frac{A+B}{2}} \quad (8-53)$$

首先，由式(8-52)不难得到

$$\mathbf{X}(n,:) = e^{j(2\pi\lambda^{-1}\mathbf{p}_n^T\mathbf{r}+\phi_n)}\mathbf{S} + \mathbf{N}(n,:) \quad (8-54)$$

其中标记 $\mathbf{A}(n,:)$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的第 n 行。定义 \mathbf{X}_{i+k} 表示 $\mathbf{X}(i,:)$ 和 $\mathbf{X}(k,:)$ 的和，即

$$\mathbf{X}_{i+k} \triangleq \mathbf{X}(i,:) + \mathbf{X}(k,:) \quad (8-55)$$

利用欧拉公式(8-53)，不难得到

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{i+k} &= \mathbf{X}(i,:) + \mathbf{X}(k,:) \\ &= \left(e^{j(2\pi\lambda^{-1}\mathbf{p}_i^T\mathbf{r}+\phi_i)} + e^{j(2\pi\lambda^{-1}\mathbf{p}_k^T\mathbf{r}+\phi_k)} \right) \mathbf{S} + \mathbf{N}_{i+k} \\ &= c_{i+k} e^{j\Psi_{i+k}} \mathbf{S} + \mathbf{N}_{i+k} \end{aligned} \quad (8-56)$$

其中 $\mathbf{N}_{i+k} = \mathbf{N}(i,:) + \mathbf{N}(k,:)$ 为混合噪声， c_{i+k} 为实数满足

$$c_{i+k} = 2\Re\left(e^{j(\pi\lambda^{-1}(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_k)^T\mathbf{r}+\frac{\phi_i-\phi_k}{2})}\right) \quad (8-57)$$

式(8-56)中的 Ψ_{i+k} 与未知参数 ϕ_i ， ϕ_k 以及 θ 有关，具体来讲， Ψ_{i+k} 满足

$$\Psi_{i+k} = \pi\lambda^{-1}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_k)^T\mathbf{r} + (\phi_i + \phi_k)/2 = \mathbf{b}_{i+k}^T \mathbf{u} \quad (8-58)$$

其中 \mathbf{u} 为如下参数向量

$$\mathbf{u} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N, \cos(\theta), \sin(\theta)]^T \in \mathbb{R}^{N+2} \quad (8-59)$$

式(8-58)中 \mathbf{b}_{i+k} 为系数向量，可以表示为

$$\mathbf{b}_{i+k} = \left[0, \dots, 0, 1/2, 0, \dots, 0, 1/2, 0, \dots, 0, \pi\lambda^{-1}x_n, \pi\lambda^{-1}y_n \right]^T \in \mathbb{R}^{N+2} \quad (8-60)$$

上式 \mathbf{b}_{i+k} 中，其第*i*和第*k*个元素为 $1/2$ ，最后两个元素分别为 $\pi\lambda^{-1}x_n$ 和 $\pi\lambda^{-1}y_n$ ，其余各元素均为零。

由(8-58)可知， Ψ_{i+k} 是 ϕ_i 和 ϕ_k ，以及DOA的映射函数 $\cos(\theta)$ 和 $\sin(\theta)$ 的线性组合。基于此，有可能利用 Ψ_{i+k} 反解出未知的相位误差和DOA参数。

为了估计 Ψ_{i+k} , 我们构建下面数据矩阵 \mathbf{Y}_{i+k}

$$\mathbf{Y}_{i+k} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(1,:) \\ \mathbf{X}_{i+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ c_{i+k} e^{j\Psi_{i+k}} \end{bmatrix} \mathbf{S} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}(1,:) \\ \mathbf{N}_{i+k} \end{bmatrix} \quad (8-61)$$

由子空间原理不难得到

$$\text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ c_{i+k} e^{j\Psi_{i+k}} \end{bmatrix} \right) = \text{span}(\boldsymbol{\gamma}_{i+k}) \quad (8-62)$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}_{i+k}$ 为 \mathbf{Y}_{i+k} 的主左奇异向量, 可以通过对 \mathbf{Y}_{i+k} 进行奇异值分解得到。具体地, $\boldsymbol{\gamma}_{i+k}$ 满足

$$\mathbf{Y}_{i+k} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{i+k}, \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \Sigma \mathbf{V}^H \quad (8-63)$$

上式中 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 分别代表 \mathbf{Y}_{i+k} 的左奇异向量和右奇异向量。假设 $\boldsymbol{\gamma}_{i+k}$ 的首元素已被归一化为1, 由式(8-62)得到

$$c_{i+k} e^{j\Psi_{i+k}} = \boldsymbol{\gamma}_{i+k}(2) \quad (8-64)$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}_{i+k}(2)$ 表示 $\boldsymbol{\gamma}_{i+k}$ 的第二个元素。

注意到式(8-64)中的 c_{i+k} 可正可负, 而且 Ψ_{i+k} 可能不在 $[0, 2\pi)$ 范围内。因此, 如果 c_{i+k} 的符号信息未知, 或者 Ψ_{i+k} 的范围信息未知, 则不能准确地估计 Ψ_{i+k} 。如果假设

$$\text{abs}(\Psi_{i+k}) \leq \pi/2 \quad (8-65)$$

则由式(8-64)可知

$$\Psi_{i+k} = \mathbf{b}_{i+k}^T \mathbf{u} = \angle(\boldsymbol{\gamma}_{i+k}(2)) \triangleq \text{atan} \left(\frac{\Im(\boldsymbol{\gamma}_{i+k}(2))}{\Re(\boldsymbol{\gamma}_{i+k}(2))} \right) \quad (8-66)$$

由于上式中的 Ψ_{i+k} 位于区间 $[-\pi/2, \pi/2]$, 则由式(8-64)可以得到 Ψ_{i+k} 的正确估计。由上述分析可知, 如果(8-65)成立, 则式(8-66)可以提供关于 ϕ_i , ϕ_k 和 θ 的测量信息。

由前文假设, 这里考虑部分校正阵列, 此时 $\phi_1 = 0$, ϕ_c 已知, 式(8-66)可以重新整理为

$$\mathbf{w}_{i+k}^T \mathbf{v} = \angle[\boldsymbol{\gamma}_{i+k}(2)] - \phi_c \mathbf{b}(c) \quad (8-67)$$

上式中 $\mathbf{v} = [\phi_2, \dots, \phi_{c-1}, \phi_{c+1}, \dots, \phi_N, \cos(\theta), \sin(\theta)]^T$ 为修正后的未知参数向量, 不难发现 \mathbf{v} 可以通过从 \mathbf{u} 中剔除元素 ϕ_1 和 ϕ_c 后得到。类似地, \mathbf{w}_{i+k} 可以通过从 \mathbf{b}_{i+k} 中剔除相应位置的元素后得到。

总结来讲，取所有可能的 $\{i, k\}$ 组（满足 $i, k = 1, 2, \dots, N, i \neq k$ ），则可以基于式(8-67)建立关于未知参数向量 \mathbf{v} 的线性方程组。如果独立方程的个数足够，则可能准确恢复未知向量 \mathbf{v} ，从而实现DOA和相位误差估计。图8-6对上述思想进行了直观地示意。

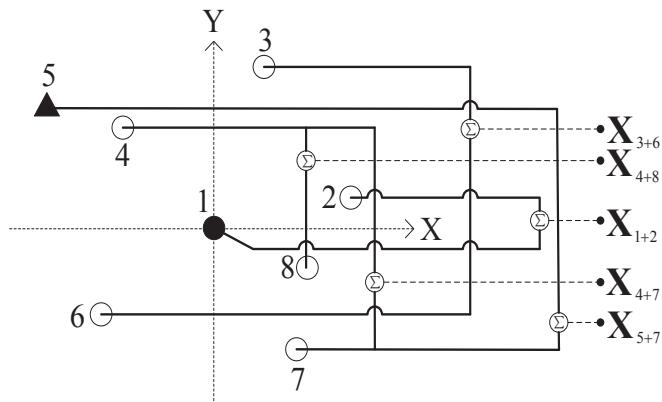


图 8-6 所提的DOA与相位误差联合估计方法示意图

然而，需要注意到线性方程(8-66)或(8-67)以条件(8-65)为前提。换言之，可能只存在少数的 $\{i, j\}$ 组合可以使式(8-65)成立。如果独立方程个数不足，则可能得到欠定方程，从而无法准确地进行参数估计。为了解决这个问题，提高算法的实用性，下节提出改进措施。

8.2.2.2 提高实用性

首先合理地假设 ϕ_n 均匀分布于已知区间 $[-\Delta, \Delta]$ ，即 ϕ_n 满足

$$\phi_n \in [-\Delta, \Delta], n = 1, 2, \dots, N \quad (8-68)$$

此外，假设真实DOA位于已知区间 \mathcal{D} ，即

$$\mathcal{D} = \{\theta | \bar{\theta}_0 - \delta_\theta \leq \theta_0 \leq \bar{\theta}_0 + \delta_\theta\} \quad (8-69)$$

其中 $\bar{\theta}_0$ 为DOA的粗估计，其与真实DOA θ_0 存在一定的偏差，式(8-69)中的 δ_θ 用来描述DOA的扰动程度。

下面定义 Ψ_{i+k}

$$\tilde{\Psi}_{i+k} \triangleq \Psi_{i+k} - C_{i+k} \quad (8-70)$$

其中 C_{i+k} 代表旋转因子。若 C_{i+k} 已知，则可以由 $\tilde{\Psi}_{i+k}$ 恢复出 Ψ_{i+k} 。因此，参考之前式(8-65)，我们考虑如何使得下面条件成立

$$\text{abs}(\tilde{\Psi}_{i+k}) \leq \pi/2 \quad (8-71)$$

为了满足上述不等式(8-71), 应该选择合适的 C_{i+k} 使得 $\tilde{\Psi}_{i+k}$ 为对称分布。此时 $\tilde{\Psi}_{i+k}$ 的最大绝对值取得最小值, 从而条件(8-71)更容易满足。而且, 由式(8-68)可以得到

$$(\phi_i + \phi_k)/2 \in [-\Delta, \Delta] \quad (8-72)$$

上式表明 $(\phi_i + \phi_k)/2$ 对称分布。由于 $\tilde{\Psi}_{i+k} = \pi \lambda^{-1} (\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_k)^T \mathbf{r} + (\phi_i + \phi_k)/2 - C_{i+k}$, 使得式(8-71)成立的一个充分条件是

$$\pi \lambda^{-1} (\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_k)^T \mathbf{r} - C_{i+k} \in [-\Delta_{i+k}, \Delta_{i+k}], \forall \theta \in \mathcal{D} \quad (8-73a)$$

$$\Delta + \Delta_{i+k} \leq \pi/2 \quad (8-73b)$$

注意在式(8-73a)中, 我们引入了哑变量 Δ_{i+k} 。为了满足条件(8-73a), 我们取 C_{i+k} 为

$$C_{i+k} = \left(\alpha_{\max}^{(i+k)} + \alpha_{\min}^{(i+k)} \right) / 2 \quad (8-74)$$

其中 $\alpha_{\max}^{(i+k)}$ 和 $\alpha_{\min}^{(i+k)}$ 由下式决定

$$\alpha_{\max}^{(i+k)} = \max_{\theta \in \mathcal{D}} (\pi \lambda^{-1} (\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_k)^T \mathbf{r}) \quad (8-75a)$$

$$\alpha_{\min}^{(i+k)} = \min_{\theta \in \mathcal{D}} (\pi \lambda^{-1} (\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_k)^T \mathbf{r}) \quad (8-75b)$$

在式(8-74)和(8-75)的参数设定下, 可以得到

$$\Delta_{i+k} = \left(\alpha_{\max}^{(i+k)} - \alpha_{\min}^{(i+k)} \right) / 2 \quad (8-76)$$

而且, 结合式(8-73)和(8-76), 满足式(8-71)的一个充分条件可以表示为

$$\Delta + \left(\alpha_{\max}^{(i+k)} - \alpha_{\min}^{(i+k)} \right) / 2 \leq \pi/2 \quad (8-77)$$

因此, 如果(8-71)成立, 则不等式(8-77)一定成立。注意到对于给定的 $\{i, k\}$, 可以离线判断式(8-77)是否成立。下面考虑如何得到 $\tilde{\Psi}_{i+k}$ 的估计, 从而进一步构造关于未知参数的方程。

总体来讲, 确定 $\tilde{\Psi}_{i+k}$ 的过程类似于上节中 Ψ_{i+k} 的确定过程。具体来讲, 如果对于给定的 $\{i, k\}$ 组合满足式(8-77), 我们使用 $e^{-jC_{i+k}}$ 来补偿 $\mathbf{X}(i, :)$ 和 $\mathbf{X}(k, :)$, 并将补偿后的结果相加得到 $\tilde{\mathbf{X}}_{i+k}$, 即

$$\tilde{\mathbf{X}}_{i+k} = \mathbf{X}(i, :) e^{-jC_{i+k}} + \mathbf{X}(k, :) e^{-jC_{i+k}} \quad (8-78)$$

由式(8-56)可将 $\tilde{\mathbf{X}}_{i+k}$ 进一步表示为

$$\tilde{\mathbf{X}}_{i+k} = c_{i+k} e^{j\tilde{\Psi}_{i+k}} \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{N}}_{i+k} \quad (8-79)$$

其中 $\tilde{\mathbf{N}}_{i+k} = \mathbf{N}(i, :) e^{-jC_{i+k}} + \mathbf{N}(k, :) e^{-jC_{i+k}}$ 。注意到式(8-79)中出现了 $\tilde{\Psi}_{i+k} = \Psi_{i+k} -$

C_{i+k} 。由于 $\text{abs}(\tilde{\Psi}_{i+k}) \leq \pi/2$, $\tilde{\Psi}_{i+k}$ 的无模糊估计可以由下式得到

$$\tilde{\Psi}_{i+k} = \angle(\tilde{\gamma}_{i+k}(2)) \quad (8-80)$$

其中 $\tilde{\gamma}_{i+k}$ 为 $\tilde{\mathbf{Y}}_{i+k}$ 的主左奇异向量满足

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{i+k} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(1,:) \\ \tilde{\mathbf{X}}_{i+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-jC_{i+k}} \end{bmatrix} \mathbf{Y}_{i+k} \quad (8-81)$$

其中 \mathbf{Y}_{i+k} 的定义见式(8-61)。注意在式(8-80)中, 假设 $\tilde{\gamma}_{i+k}$ 的首元素已被归一化为1。得到 $\tilde{\Psi}_{i+k}$ 的估计后, 可以构造下面的方程

$$\mathbf{w}_{i+k}^T \mathbf{v} = \angle[\tilde{\gamma}_{i+k}(2)] - \phi_c \mathbf{b}(c) + C_{i+k} \triangleq d_{i+k} \quad (8-82)$$

注意到上面方程的建立基于 $\tilde{\gamma}_{i+k}$, 而不是 γ_{i+k} 。相比于条件(8-65), 条件(8-77)更容易满足, 因此可以得到更多的类似于式(8-82)中的方程。

8.2.2.3 包含二次约束的最小二乘问题

给定*i*和*k*的条件下, 上节讨论了如何构造关于未知DOA θ 和相位误差 ϕ 的线性方程 (即方程(8-82))。通过遍历*i*和*k*, 则可以构造关于未知参数的线性方程组, 进而有可能实现DOA和相位误差的联合估计。

具体地, 定义 \mathbf{W} 为由向量 \mathbf{w}_{i+k}^T 沿列方向堆积成的矩阵, 与之对应地, 定义 \mathbf{d} 为由 d_{i+k} 堆积成的向量, 其中*i*和*k*满足(8-77)。则DOA和相位误差估计问题可由下面包含二次约束的最小二乘问题进行建模:

$$\min_{\mathbf{v}} \|\mathbf{W}\mathbf{v} - \mathbf{d}\|_2^2 \quad (8-83a)$$

$$\text{s.t. } \|\mathbf{Z}\mathbf{v}\|_2^2 = 1 \quad (8-83b)$$

其中矩阵 $\mathbf{Z} = [\mathbf{O}_{2 \times (N-2)} \ \mathbf{I}_2]$, 用来使得约束 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 成立。由文献[158]可知, 如果下面条件成立:

$$\text{rank}([\mathbf{W}^T \ \mathbf{Z}^T]^T) = N \quad (8-84)$$

则问题(8-83)可解。解得问题(8-83)后 (将解记为 $\hat{\mathbf{v}}$), 可由下式子估计DOA和相位误差:

$$\hat{\theta} = \arcsin(\hat{\mathbf{v}}(N)) \quad (8-85)$$

以及

$$\hat{\phi}_n = \begin{cases} \hat{\mathbf{v}}(n-1), & 2 < n < c \\ \hat{\mathbf{v}}(n-2), & c < n \leq N \end{cases} \quad (8-86)$$

显然, 余下的问题就是如何解优化问题(8-83)。

8.2.2.4 利用凹凸过程进行问题求解

本节中利用凹凸过程(convex-concave procedure, CCP)对问题(8-83)进行求解。CCP具有广泛应用，可以用来解凸差规划(difference of convex, DC)问题。CCP方法以迭代的方式对原始DC问题凸划处理和求解，由文献 [159]可知，CCP的收敛性可以很好的保证。

为了应用CCP方法，首先将问题(8-83)重新表述为：

$$\min_{\mathbf{v}} \mathbf{v}^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{v} - 2\mathbf{d}^T \mathbf{W} \mathbf{v} \quad (8-87a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{v}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{v} = 1 \quad (8-87b)$$

对矩阵 $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$ 进行特征值分解操作可以得到

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \sum_{n=1}^N \lambda_n \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^H = \underbrace{\sum_{n=1}^C \lambda_n \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^H}_{\triangleq \mathbf{B}_+} - \underbrace{\sum_{n=C+1}^N |\lambda_n| \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^H}_{\triangleq \mathbf{B}_-} \quad (8-88)$$

其中 λ_n 和 \mathbf{q}_n 分别代表矩阵 $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$ 的特征值和特征分量， $n = 1, \dots, N$ 。而且，假设特征值已被重新排列且满足：

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_C \geq 0 > \lambda_{C+1} \dots \geq \lambda_N \quad (8-89)$$

根据式(8-89)不难发现，式(8-88)中的矩阵 \mathbf{B}_+ 和 \mathbf{B}_- 均为半正定矩阵。

另一方面，不难得到：

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{N-2} & \mathbf{O}_{(N-2) \times 2} \\ \mathbf{O}_{2 \times (N-2)} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{I}_N}_{\triangleq \mathbf{P}_+} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-2} & \mathbf{O}_{(N-2) \times 2} \\ \mathbf{O}_{2 \times (N-2)} & \mathbf{O}_2 \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathbf{P}_-} \quad (8-90)$$

显然，上式中的 \mathbf{P}_+ 和 \mathbf{P}_- 均为半正定矩阵。

因此，问题(8-87)等价于：

$$\min_{\mathbf{v}} \mathbf{v}^T \mathbf{B}_+ \mathbf{v} - (\mathbf{v}^T \mathbf{B}_- \mathbf{v} + 2\mathbf{d}^T \mathbf{W} \mathbf{v}) \quad (8-91a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{v}^T \mathbf{P}_+ \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{P}_- \mathbf{v} = 1 \quad (8-91b)$$

其中 \mathbf{B}_+ , \mathbf{B}_- , \mathbf{P}_+ , \mathbf{P}_- 的定义见 (8-88)和(8-90)。进一步可以发现式(8-91a)中的代价函数为DC函数。因此，只要约束(8-91b)也为DC函数，即可得到DC规划问题，

从而可以利用 CCP方法进行求解。为此，可将问题(8-91)进一步表述为：

$$\min_{\mathbf{v}} \underbrace{\mathbf{v}^T \mathbf{B}_+ \mathbf{v}}_{\triangleq f_0(\mathbf{v})} - \underbrace{(\mathbf{v}^T \mathbf{B}_- \mathbf{v} + 2\mathbf{d}^T \mathbf{W} \mathbf{v})}_{\triangleq h_0(\mathbf{v})} \quad (8-92a)$$

$$\text{s.t. } \underbrace{\mathbf{v}^T \mathbf{P}_+ \mathbf{v}}_{\triangleq f_1(\mathbf{v})} - \underbrace{(\mathbf{v}^T \mathbf{P}_- \mathbf{v} + 1)}_{\triangleq h_1(\mathbf{v})} \leq 0 \quad (8-92b)$$

$$\underbrace{(\mathbf{v}^T \mathbf{P}_- \mathbf{v} + 1)}_{\triangleq f_2(\mathbf{v})} - \underbrace{\mathbf{v}^T \mathbf{P}_+ \mathbf{v}}_{\triangleq h_2(\mathbf{v})} \leq 0 \quad (8-92c)$$

由于 \mathbf{B}_+ , \mathbf{B}_- , \mathbf{P}_+ 和 \mathbf{P}_- 均为半正定矩阵，所以问题(8-92)中的函数 $f_l(\mathbf{v})$ 和 $h_l(\mathbf{v})$ 均为凸函数， $l = 0, 1, 2$ 。根据文献[159]的定义，问题(8-92)为DC规划问题，因此可以用CCP方法进行求解。

CCP方法首先在可行集内选取一个初始点。对于问题(8-92)或(8-87)，取 $k = 1$ ，并进行如下初始化：

$$\mathbf{v}_1 = [0, \dots, 0, \cos(\theta_0), \sin(\theta_0)]^T \in \mathbb{R}^N \quad (8-93)$$

其中 θ_0 为DOA的粗估计。在CCP的第 k 步，将函数 $h_l(\mathbf{v})(l = 0, 1, 2)$ 替换为 $\hat{h}_l(\mathbf{v}; \mathbf{v}_k)$ ，定义为：

$$\hat{h}_l(\mathbf{v}; \mathbf{v}_k) \triangleq h_l(\mathbf{v}_k) + \nabla h_l^T(\mathbf{v}_k)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k), \quad l = 0, 1, 2 \quad (8-94)$$

由于 $\hat{h}_l(\mathbf{v}; \mathbf{v}_k)$ 为关于 \mathbf{v} 的仿射函数，所以 $f_l(\mathbf{v}) - \hat{h}_l(\mathbf{v}; \mathbf{v}_k)$ 为凸函数， $l = 0, 1, 2$ 。更准确地，我们有

$$\begin{aligned} \hat{h}_0(\mathbf{v}; \mathbf{v}_k) &= h_0(\mathbf{v}_k) + 2(\mathbf{v}_k^T \mathbf{B}_- + \mathbf{d}^T \mathbf{W})(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k) \\ &= 2(\mathbf{v}_k^T \mathbf{B}_- + \mathbf{d}^T \mathbf{W})\mathbf{v} - \mathbf{v}_k^T \mathbf{B}_- \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (8-95a)$$

$$\begin{aligned} \hat{h}_1(\mathbf{v}; \mathbf{v}_k) &= h_1(\mathbf{v}_k) + 2\mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_-(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k) \\ &= 2\mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_- \mathbf{v} - \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_- \mathbf{v}_k + 1 \end{aligned} \quad (8-95b)$$

$$\begin{aligned} \hat{h}_2(\mathbf{v}; \mathbf{v}_k) &= h_2(\mathbf{v}_k) + 2\mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_+(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k) \\ &= 2\mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_+ \mathbf{v} - \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_+ \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (8-95c)$$

相应地，问题(8-92)的凸化形式（将 $h_l(\mathbf{v})$ 替换为 $\hat{h}_l(\mathbf{v}; \mathbf{v}_k)$ ， $l = 0, 1, 2$ ）为：

$$\min_{\mathbf{v}} \mathbf{v}^T \mathbf{B}_+ \mathbf{v} - 2(\mathbf{v}_k^T \mathbf{B}_- + \mathbf{d}^T \mathbf{W})\mathbf{v} \quad (8-96a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{v}^T \mathbf{P}_+ \mathbf{v} \leq 2\mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_- \mathbf{v} - \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_- \mathbf{v}_k + 1 \quad (8-96b)$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P}_- \mathbf{v} + 1 \leq 2\mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_+ \mathbf{v} - \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_+ \mathbf{v}_k \quad (8-96c)$$

一旦解出问题(8-96)（将解记为 $\mathbf{v}_{k,*}$ ），则可以更新 $k = k + 1$ ，取 $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1,*}$ ，并

对问题(8-96)进行迭代求解直到满足收敛条件。最终即可得到 \mathbf{v} 的最终估计值(记为 $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_k$)。算法21总结了利用CCP方法对问题(8-83)进行求解的步骤。

算法 21 利用CCP方法求解问题(8-83)

- 1: 输入: $k = 1, \mathbf{v}_1$ (见式(8-93))。
 - 2: **while** 不收敛 **do**
 - 3: 求解问题(8-96), 并将解记为 $\mathbf{v}_{k,*}$ 。
 - 4: 更新 $k = k + 1$, 取 $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1,*}$ 。
 - 5: **end while**
 - 6: 输出: $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_k$ 。
-

前文提到, 一旦解出问题(8-83)的解 $\hat{\mathbf{v}}$, 则可以相应确定 DOA与相位误差值。最终, 基于欧拉公式的DOA与相位误差联合估计方法总结见算法22。

8.2.3 克莱美罗界

本节给出DOA与相位误差估计的克莱美罗界(Cramer-Rao Bounds,CRBs)。由前文可知, 协方差矩阵满足

$$\mathbf{R} = \sigma_s^2 \mathbf{T} \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{T}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} = \sigma_s^2 \mathbf{a}_r(\theta) \mathbf{a}_r^H(\theta) + \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (8-97)$$

根据文献[127]的推导结果, DOA θ 的CRB满足:

$$\text{CRB}(\theta) = \frac{1}{2\sigma_s^4 N} \left\{ \Re \left(\mathbf{a}_r^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}_r(\theta) \dot{\mathbf{a}}_r^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{a}}_r(\theta) + (\mathbf{a}_r^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{a}}_r(\theta))^2 \right) \right\}^{-1}$$

其中 $\dot{\mathbf{a}}_r(\theta)$ 定义为:

$$\dot{\mathbf{a}}_r(\theta) \triangleq \frac{\partial \mathbf{a}_r(\theta)}{\partial \theta} \quad (8-98)$$

另一方面, 定义 ϕ 为

$$\phi = [\phi_2, \dots, \phi_{c-1}, \phi_{c+1}, \dots, \phi_N]^T \quad (8-99)$$

则根据文献[127], 相位误差的CRB可由下式计算得到:

$$\begin{aligned} \text{CRB}(\phi) &= \frac{1}{2\sigma_s^4 N} \left\{ \Re \left(\mathbf{J} \left[(\mathbf{a}_r(\theta) \mathbf{a}_r^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}_r(\theta) \mathbf{a}_r^H(\theta)) \odot \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. (\mathbf{R}^{-1})^T - (\mathbf{a}_r(\theta) \mathbf{a}_r^H(\theta) \mathbf{R}^{-1}) \odot (\mathbf{a}_r(\theta) \mathbf{a}_r^H(\theta) \mathbf{R}^{-1})^T \right] \mathbf{J}^T \right) \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (8-100)$$

算法 22 基于欧拉公式的DOA与相位误差联合估计方法

```

1: 输入: DOA粗估计值 $\theta_0$ , DOA扰动量 $\delta$ ,  $\Delta$ 。
2: for  $i = 1 \rightarrow N$  do
3:   for  $k = 1 \rightarrow N, k \neq i$  do
4:     利用式(8-75)得到 $\alpha_{\max}^{(i+k)}$ 和 $\alpha_{\min}^{(i+k)}$ 。
5:     if 如果条件(8-77)满足 then
6:       由式(8-60)得到向量 $\mathbf{b}_{i+k}$ , 对  $\mathbf{b}_{i+k}$  进行修正得到向量 $\mathbf{w}_{i+k}$ 。
7:       分别用(8-74), (8-78)和(8-81) 得到 $C_{i+k}$ ,  $\tilde{\mathbf{X}}_{i+k}$ 和 $\tilde{\mathbf{Y}}_{i+k}$ 。
8:       对 $\tilde{\mathbf{Y}}_{i+k}$ 进行奇异值分解得到 $\tilde{\gamma}_{i+k}$ , 由式(8-82)得到 $d_{i+k}$ 。
9:     end if
10:    end for
11:  end for
12: 构造 $\mathbf{W}$ 和 $\mathbf{d}$ 。
13: if rank $\left([\mathbf{W}^T \ \mathbf{Z}^T]^T\right) == N$  then
14:   利用CCP方法 (见算法21) 求解问题(8-83), 将解记为 $\hat{\mathbf{v}}$ 。
15:   分别由(8-85)和(8-86)得到 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\phi}_n$ 。
16: else
17:   取 $\hat{\theta} = \theta_0$ ,  $\hat{\phi}_n = 0$ ,  $n = 2, \dots, c-1, c+1, \dots, N$ 。
18: end if
19: 输出:  $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\phi}_n$ 。

```

其中 \mathbf{J} 为 $(N-2) \times N$ 维矩阵, 其第 (i,j) 个元素满足:

$$\mathbf{J}_{i,j} = \begin{cases} 1, & i \leq c-2, i = j-1 \\ 1, & i > c-2, i = j-2 \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad (8-101)$$

8.2.4 实验仿真

本节对所提算法进行仿真验证。实验中相位误差 $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ 由下式产生:

$$\phi_n = \sqrt{12}\sigma_\phi\eta_n \quad (8-102)$$

其中 η_n 为在 $[-0.5, 0.5]$ 内均匀分布的随机变量, σ_ϕ 为相位误差 ϕ_n 的标准差, $n = 1, \dots, N$ 。考虑 $N = 7$ 阵元的二维阵列, 各阵元位置信息如表8-1所示。以第1个阵元为参考阵元, 并假设第6个阵元已校正。图8-7为阵列示意图。

考虑单个信源, 假设信源来向与阵列平面共面, 来波角度为 $\theta = 26^\circ$ 。我们已知信源位于 $[\theta_0 - \delta_\theta, \theta_0 + \delta_\theta]$ 区间内, 其中 $\theta_0 = 24^\circ$, $\delta_\theta = 8^\circ$ 。除非特别说明, 设

表 8-1 二维阵列阵元位置

n	$x_n(\lambda)$	$y_n(\lambda)$	n	$x_n(\lambda)$	$y_n(\lambda)$
1	0.00	0.00	5	2.50	2.03
2	1.79	-0.85	6	-3.84	-0.27
3	-0.22	1.80	7	1.25	-3.00
4	-1.94	-1.95			

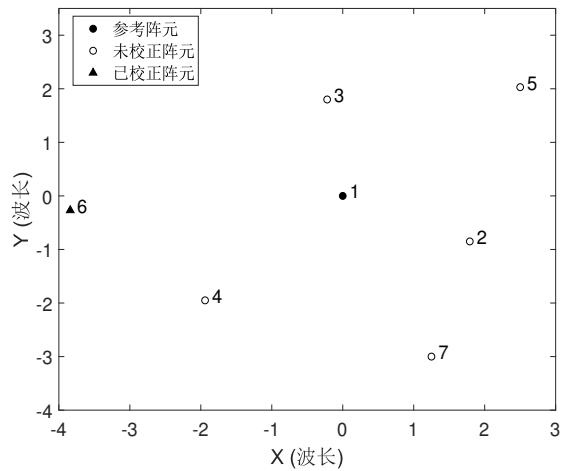


图 8-7 二维阵列示意图

$\sigma_\phi = 10^\circ$, SNR = 15dB, 快拍数取为400。为了进行实验对比, 同时测试WF算法^[110]性能, 并与CRB进行对比。

8.2.4.1 不同相位误差标准差时的估计性能

图8-8对比了DOA与相位误差估计性能随相位误差标准差变化曲线。具体地, 图8-8(a)为DOA估计均方根误差随相位误差标准差变化曲线, 图8-8(b)为相位估计均方差误差随相位误差标准差变化曲线。可以看出, 所提方法性能优于WF方法。另外从图中可以发现, 相位误差标准差越大, 两种算法的估计性能越差。

8.2.4.2 不同信噪比时的估计性能

图8-9对比了DOA与相位误差估计性能随信噪比变化曲线。具体地, 图8-9(a)展示了DOA估计均方根误差随信噪比变化曲线, 图8-9(b)为相位估计均方差误差随信噪比变化曲线。从图中可以看出, 所提方法性能优于WF方法。另外从图中可以发现, 信噪比越高, 两种算法的估计性能越好。

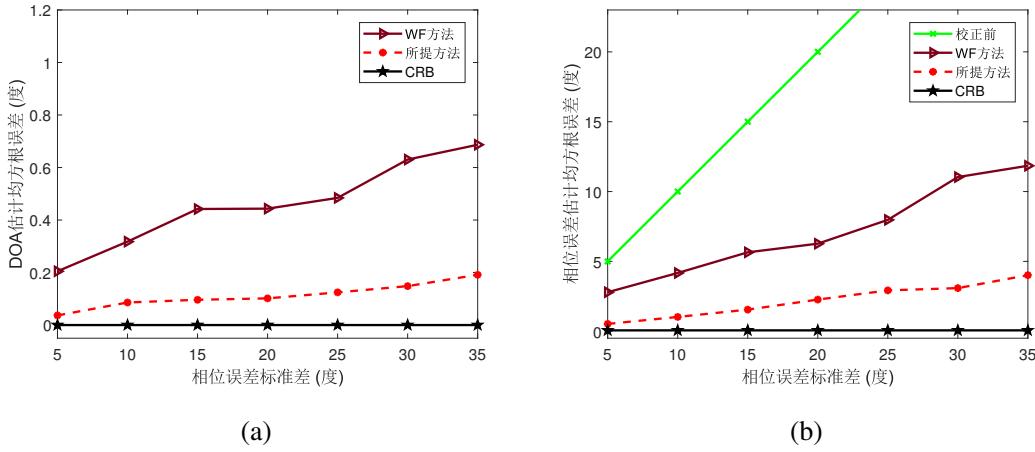


图 8-8 不同相位误差标准差时的估计性能。(a)DOA估计性能;(b)相位误差估计性能

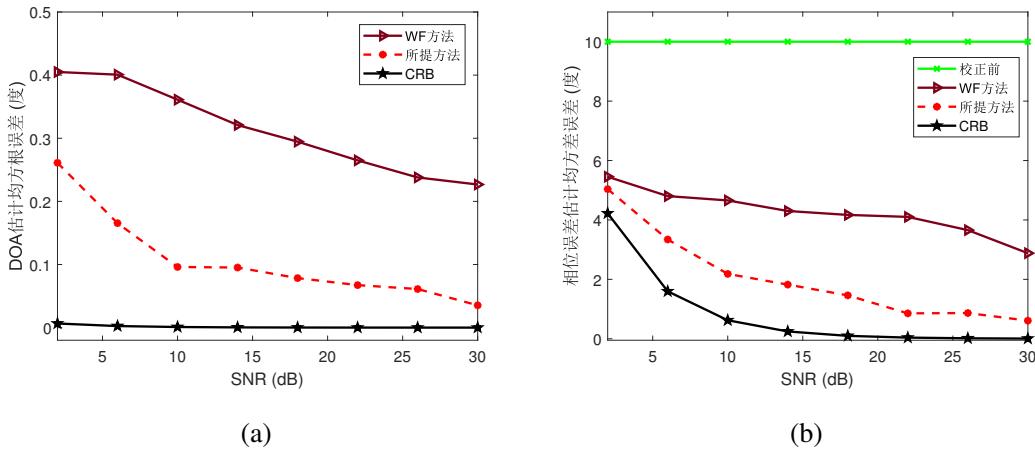


图 8-9 不同信噪比时的估计性能。(a)DOA估计性能;(b)相位误差估计性能

8.2.4.3 不同快拍数时的估计性能

图8-10对比了DOA与相位误差估计性能随快拍数的变化曲线。具体地，图8-10(a)为DOA估计均方根误差随快拍数变化曲线，图8-10(b)为相位估计均方差误差随快拍数变化曲线。从图中可以看出，所提方法性能优于WF方法。另外从图中可以发现，快拍数越大，两种算法的估计性能越好。

8.3 本章小结

本章首先讨论了等距线阵情况下DOA与相位误差联合估计问题。假设阵列存在一个已校正阵元，所提方法通过对阵列数据进行求和并借助欧拉公式和子空间原理来提取出DOA和相位误差信息。并最终将DOA与相位误差联合估计问题建模

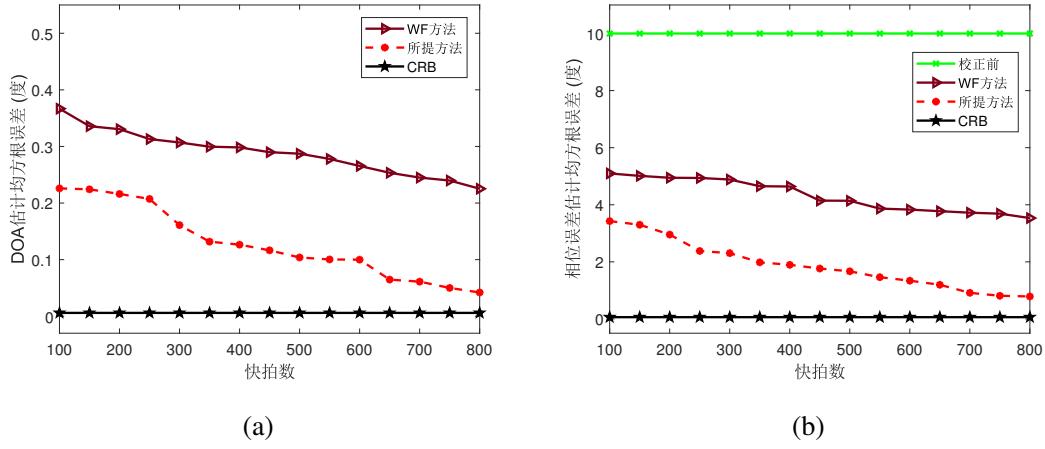


图 8-10 不同快拍数时的估计性能。(a)DOA估计性能;(b)相位误差估计性能

为最小二乘问题。所提方法具有较低的运算复杂度，且对已校正阵元的位置无限制。仿真实验证实了所提算法的有效性。

本章还讨论了任意阵列情况下DOA与相位误差联合估计问题。假设阵列存在一个已校正阵元，所提方法通过对阵列数据进行求和，并借助欧拉公式和子空间原理来提取出DOA和相位误差信息。最终将DOA与相位误差联合估计问题建模为具有二次约束的最小二乘问题，并利用凸过程进行问题求解。所提方法对已校正阵元的位置无限制。仿真实验证实了所提算法的有效性。

第九章 全文总结与展望

9.1 全文总结

本文研究阵列方向图控制理论与算法。所涉及的理论与方法主要包括：线性空间理论、正交投影理论、斜投影理论、优化理论、几何方法、欧拉公式等。具体应用包括：灵活地方向图控制新方法、稳健旁瓣方向图综合方法、唯相位方向图调整方法、低功耗相控阵保密通信方法、稳健的阵列参数估计方法。本文主要研究工作总结如下：

(1) 针对阵列响应控制和方向图综合灵活性差的问题，提出了一种简单有效的单点精确阵列响应控制方法 (A^2RC 方法)，该方法具有解析表达式同时可以有效避免方向图畸变现象。通过迭代应用所提方法，实现了方向图的快速合成。该方法突破了传统的方向图整体设计的框架，利用单点精确控制的概念实现方向图合成。研究阵列响应控制和方向图综合，提出了一种简单有效的多点阵列响应控制方法 (MA^2RC 方法)。对 MA^2RC 进行改进，提出一种可以有效避免波束中心偏移多点方向图控制算法 (M^2A^2RC 方法)。利用所提算法实现了快速方向图设计。提出了一种最优阵列响应控制算法 (OPARC算法)。基于OPARC，提出了协方差矩阵加载的概念。算法可以应用在静态和自适应波束形成中。另外研究最优阵列响应控制算法以及协方差矩阵加载的具体应用，应用背景包括数据独立和数据依赖两种场景。仿真结果显示，所提算法大大改善了传统波束形成器的性能。

(2) A^2RC 算法需要借助经验信息进行参数寻优，为了克服该缺点，本文提出一种权向量正交分解算法 (WORD算法)，实现了在给定初始权向量条件下对单个方向响应的精确控制。研究存在阵列误差时的方向图控制。首先对存在误差时阵列方向图的上界进行分析，基于此提出了一种稳健的方向图控制方法，可以对上界方向图电平进行精确调整。通过对方向图上界进行迭代控制，可以实现阵列存在误差时的稳健方向图综合。

(3) 提出了一种基于斜投影理论的灵活方向图控制算法 (FARCP算法)。所提算法从自适应阵列理论出发，将最优权进行重新表示，由此得到一种新的权向量更新模型。所提算法实质上将虚拟干扰功率与阵列波束响应电平进行解耦，算法灵活简单，对于对称阵列可以得到解析表达式。将WORD算法与斜投影概念结合，提出一种灵活的多点控制算法。通过对所提算法进一步改进，提出一种不会产生波束中心偏移的方向图灵活控制算法。

(4) 研究高性能阵列方向图综合。将方向图综合问题建模为非凸问题，利用拟凸优化和半正定松弛方法来解决该非凸问题。算法可以得到较高的阵列增益。

(5) 提出一种几何辅助的唯相位方向图控制方法。对于给定的权向量，所提方法在唯相位的约束下可以精确快速地实现单点方向图电平调节。所提的几何辅助方法通过多边形构造来实现方向图电平调节。为了在非控制区域产生较小的方向图变化，从而避免方向图畸变，提出了一种低运算复杂度的相位确定方法。仿真实验验证了所提的几何辅助方法的有效性。该方法的缺点是只能控制单个点的电平，无法实现多方向的电平控制。

(6) 提出两种基于几何构造的相控阵传输模式下的保密通信算法。首先考虑PSK调制，分析发现传统的星座图合成问题可以转换为复平面多边形构造问题。而且，对于给定的星座图合成任务，深入分析发现在某种条件下存在无穷多个发射权向量解。在此基础上提出时变权的概念，以符号率速度对发射权进行随机选取。所提方法具有解析解和低的运算复杂度。与传统方法相比，所提方法对信道模型没有限制，且不需要开关电路。实验仿真实证了所提算法在不同场景下的有效性。

(7) 研究等距线阵下的DOA与相位误差估计问题。针对部分校正阵列，提出了一种基于欧拉公式的单源DOA与阵列相位误差联合估计方法。参数估计最终建模为最小二乘问题，从而可以解析地得到DOA以及相位误差值。研究DOA与相位误差估计问题。针对任意结构的部分校正阵列，提出一种DOA与相位误差联合估计方法。可以实现阵列存在相位误差时的单信号源DOA估计。

9.2 后续工作展望

本文研究基于矩阵理论与方法的阵列处理新算法并取得一定进展。在本文研究工作的基础上，仍有以下方向值得进一步研究：

(1) 研究大规模相控阵唯相位发射置零的解析方法。发射置零是阵列信号处理的难点问题，唯相位置零由于恒模约束的限制，导致问题难以求解。已有方法一般通过凸/非凸优化方法来得到相位加权。当应用大规模阵列时，会有计算量大，无法实时应用等问题。鉴于此，计划研究唯相位置零的解析方法。计划将该问题转换为多边形构造问题，另外研究特定阵列结构下的唯相位发射置零方法。

(2) 传统的唯相位置零中，一般不限制移相器的精度。实际中，移相器精度有限，这使得实际的高精度唯相位置零更具挑战性。鉴于此，计划研究使用有限精度移相器时的高性能唯相位置零方法。

(3) 研究基于机会约束的稳健方向图综合方法。已有的方向图综合方法很少考虑阵列误差，而实际中阵列误差不可避免。鉴于此，计划研究阵列存在误差时的稳健方向图综合方法。为了得到更合实际的方向图，考虑利用机会约束对问题进行建模。机会约束将阵列误差的概率分布考虑在内，可避免主瓣加宽，进而得到高增益的方向图。

(4) 研究恒包络的预编码算法。放大器的功耗通常很大，为了降低其功率消耗，考虑限制放大器工作于饱和状态。这就需要传输信号具有恒定包络。为了实现恒定包络的信息传输，拟研究恒包络的预编码问题。实际上，该问题可以等价地建模为复平面上的多边形构造问题。多边形构造方法不仅灵活简单，而且有解析表达式，运算量低，这为大规模阵列低功耗实时预编码提供了可能。

(5) 研究低功耗混合预编码的解析算法。传统的数字发射波束形成中，每个阵元天线需要单独连接一个射频链路（包括放大器，混频器，数模转换等）。当应用大规模天线阵时，需要等数量的射频链路来实现数字波束形成，这会大大增加硬件成本和功耗。为了降低硬件成本，同时不严重损失系统性能，考虑应用混合预编码结构。鉴于此，计划研究混合预编码的解析算法，具体可借助几何方法和矩阵分解等来实现。

致 谢

在论文完成之际，回忆过往，感慨万千！能够顺利完成学业，首先向导师何子述教授表示由衷和诚挚的感谢。博士期间，从基础知识铺垫、论文选题、科研推动，到成果梳理与输出，无不倾注了何老师的心血。何老师深厚的学术积淀、严谨的治学态度以及忘我的科研精神，感染并指引着我在科研道路上不断进取，值得我终身学习。何老师为人随和，在生活上也给予了很大的指导和帮助，再次衷心感谢何老师！

感谢在美国特拉华大学联合培养期间的导师夏香根教授，感谢他提供的赴美合作研究的机会。夏老师具有扎实广博的专业知识和严谨求实的科研作风。每次小组讨论，夏老师都会从问题本质出发指出研究工作的不足，并给予很多指导性建议。夏老师批改论文时既总体把握又着眼细节，在这里向夏老师表示衷心感谢！

感谢深圳大学廖斌老师在科研上的指导与帮助。廖老师学术知识渊博，对待科研工作严谨负责。博士期间的研究成果和廖老师的精心指导和热情关怀是分不开的。

感谢相控阵与自适应处理团队中李会勇、李朝海、李军、谢菊兰、何茜、张伟、胡进峰、夏威、程婷等老师的关心与帮助。

另外感谢赴美联合培养期间曾给予我帮助的饶煊、鲁溟峰、张金凤、厉彦魁、王勤、蔡彩霞、冶佩、辛红彩、王洋等人。也需要感谢读博期间一起交流讨论的博士生李锐洋、赵翔、王旭、钱君辉、贾逢德、程子扬、鲁彦希、李扬、孙国皓、王兆祎、李明、彭伟来、史靖希、林兰瑾、石胜男、谢磊、邓明龙、王志航等人。

最后感谢我的哥哥和嫂子在生活上、思想上无微不至的关怀和支持，感谢小侄儿生活中带来的欢乐。特别感谢我的父母，在过去求学生涯中，你们的理解、鼓舞和支持让我得以顺利完成自己的学业。

参考文献

- [1] F. Rusek, D. Persson, B. K. Lau, et al. Scaling up MIMO: Opportunities and challenges with very large arrays[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2013, 30(1):40–60
- [2] H. Krim, M. Viberg. Two decades of array signal processing research: the parametric approach[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1996, 13(4):67–94
- [3] Q. H. Spencer, A. L. Swindlehurst, M. Haardt. Zero-forcing methods for downlink spatial multiplexing in multiuser MIMO channels[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(2):461–471
- [4] P. Viswanath, D. N. C. Tse, R. Laroia. Opportunistic beamforming using dumb antennas[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2002, 48(6):1277–1294
- [5] B. D. Van Veen, K. M. Buckley. Beamforming: a versatile approach to spatial filtering[J]. *IEEE ASSP Magazine*, 1988, 5(2):4–24
- [6] M. H. Er. Array pattern synthesis with a controlled mean-square sidelobe level[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1992, 40(4):977–981
- [7] M. Comisso, R. Vescovo. Fast iterative method of power synthesis for antenna arrays[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2009, 57(7):1952–1962
- [8] J. Xiao, A. Nehorai. Optimal polarized beampattern synthesis using a vector antenna array[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(2):576–587
- [9] K. M. Tsui, S. C. Chan. Pattern synthesis of narrowband conformal arrays using iterative second-order cone programming[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2010, 58(6):1959–1970
- [10] R. C. Nongpiur, D. J. Shpak. Synthesis of linear and planar arrays with minimum element selection[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(20):5398–5410
- [11] A. Amar, M. A. Doron. Beampattern synthesis with blind interference suppression[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(9):4982–4986
- [12] J. Li, Y. Xie, P. Stoica, et al. Beampattern synthesis via a matrix approach for signal power estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(12):5643–5657
- [13] T. S. Rappaport, S. Sun, R. Mayzus, et al. Millimeter wave mobile communications for 5G cellular: It will work![J]. *IEEE Access*, 2013, 1:335–349
- [14] W. Roh, J. Seol, J. Park, et al. Millimeter-wave beamforming as an enabling technology for 5G cellular communications: Theoretical feasibility and prototype results[J]. *IEEE Communications Magazine*, 2014, 52(2):106–113

- [15] Z. Pi, F. Khan. An introduction to millimeter-wave mobile broadband systems[J]. IEEE Communications Magazine, 2011, 49(6):101–107
- [16] S. Rangan, T. S. Rappaport, E. Erkip. Millimeter-wave cellular wireless networks: Potentials and challenges[J]. Proceedings of the IEEE, 2014, 102(3):366–385
- [17] A. Seghouane. A kullback-leibler methodology for unconditional ML DOA estimation in unknown nonuniform noise[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2011, 47(4):3012–3021
- [18] C. Qian, L. Huang, M. Cao, et al. PUMA: An improved realization of MODE for DOA estimation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2017, 53(5):2128–2139
- [19] P. Stoica, A. Nehorai. Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990, 38(10):1783–1795
- [20] B. D. Rao, K. V. S. Hari. Performance analysis of root-music[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, 37(12):1939–1949
- [21] A. Nehorai, E. Paldi. Vector-sensor array processing for electromagnetic source localization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(2):376–398
- [22] S. Qin, Y. D. Zhang, M. G. Amin. Generalized coprime array configurations for direction-of-arrival estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(6):1377–1390
- [23] R. Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, 34(3):276–280
- [24] R. Roy, T. Kailath. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, 37(7):984–995
- [25] P. Stoica, K. C. Sharman. Maximum likelihood methods for direction-of-arrival estimation[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990, 38(7):1132–1143
- [26] C. L. Dolph. A current distribution for broadside arrays which optimizes the relationship between beam width and side-lobe level[J]. Proceedings of the IRE, 1946, 34(6):335–348
- [27] H. Unz. Linear arrays with arbitrarily distributed elements[J]. IRE Transactions on Antennas and Propagation, 1960, 8(2):222–223
- [28] A. Koretz, B. Rafaely. Dolph chebyshev beampattern design for spherical arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(6):2417–2420
- [29] Keen-Keong Yan, Yilong Lu. Sidelobe reduction in array-pattern synthesis using genetic algorithm[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1997, 45(7):1117–1122
- [30] D. W. Boeringer, D. H. Werner. Particle swarm optimization versus genetic algorithms for phased array synthesis[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2004, 52(3):771–779

- [31] V. Murino, A. Trucco, C. S. Regazzoni. Synthesis of unequally spaced arrays by simulated annealing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(1):119–122
- [32] C. . Tseng, L. J. Griffiths. A simple algorithm to achieve desired patterns for arbitrary arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(11):2737–2746
- [33] C. A. Olen, R. T. Compton. A numerical pattern synthesis algorithm for arrays[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1990, 38(10):1666–1676
- [34] W. A. Swart, J. C. Olivier. Numerical synthesis of arbitrary discrete arrays[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1993, 41(8):1171–1174
- [35] Philip Yuanping Zhou, M. A. Ingram. Pattern synthesis for arbitrary arrays using an adaptive array method[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1999, 47(5):862–869
- [36] I. S. Reed, J. D. Mallett, L. E. Brennan. Rapid convergence rate in adaptive arrays[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1974, AES-10(6):853–863
- [37] P. Rocca, R. L. Haupt, A. Massa. Interference suppression in uniform linear arrays through a dynamic thinning strategy[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2011, 59(12):4525–4533
- [38] L. Poli, P. Rocca, M. Salucci, et al. Reconfigurable thinning for the adaptive control of linear arrays[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2013, 61(10):5068–5077
- [39] G. Oliveri, L. Manica, A. Massa. ADS-based guidelines for thinned planar arrays[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2010, 58(6):1935–1948
- [40] G. Oliveri, M. Salucci, A. Massa. Synthesis of modular contiguously clustered linear arrays through a sparseness-regularized solver[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2016, 64(10):4277–4287
- [41] G. Oliveri, L. Poli, A. Massa. Maximum efficiency beam synthesis of radiating planar arrays for wireless power transmission[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2013, 61(5):2490–2499
- [42] A. B. Gershman, N. D. Sidiropoulos, S. Shahbazpanahi, et al. Convex optimization-based beam-forming[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2010, 27(3):62–75
- [43] H. Lebret, S. Boyd. Antenna array pattern synthesis via convex optimization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(3):526–532
- [44] S. E. Nai, W. Ser, Z. L. Yu, et al. Beampattern synthesis for linear and planar arrays with antenna selection by convex optimization[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2010, 58(12):3923–3930
- [45] B. Fuchs. Application of convex relaxation to array synthesis problems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2014, 62(2):634–640

- [46] Z. Luo, W. Ma, A. M. So, et al. Semidefinite relaxation of quadratic optimization problems[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2010, 27(3):20–34
- [47] H. G. Hoang, H. D. Tuan, B. Vo. Low-dimensional SDP formulation for large antenna array synthesis[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2007, 55(6):1716–1725
- [48] P. J. Kajenski. Phase only antenna pattern notching via a semidefinite programming relaxation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(5):2562–2565
- [49] Fan Wang, V. Balakrishnan, P. Y. Zhou, et al. Optimal array pattern synthesis using semidefinite programming[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(5):1172–1183
- [50] Fan Wang, R. Yang, C. Frank. A new algorithm for array pattern synthesis using the recursive least squares method[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2003, 10(8):235–238
- [51] Zhan Shi, Zhenghe Feng. A new array pattern synthesis algorithm using the two-step least-squares method[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2005, 12(3):250–253
- [52] K. Yang, Z. Zhao, Z. Nie, et al. Synthesis of conformal phased arrays with embedded element pattern decomposition[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2011, 59(8):2882–2888
- [53] L. Manica, P. Rocca, A. Massa. Design of subarrayed linear and planar array antennas with SLL control based on an excitation matching approach[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2009, 57(6):1684–1691
- [54] S. Yan, J. M. Hovem. Array pattern synthesis with robustness against manifold vectors uncertainty[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2008, 33(4):405–413
- [55] T. Zhang, W. Ser. Robust beampattern synthesis for antenna arrays with mutual coupling effect[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2011, 59(8):2889–2895
- [56] M. S. Hossain, G. N. Milford, M. C. Reed, et al. Robust efficient broadband antenna array pattern synthesis techniques[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2014, 62(9):4537–4546
- [57] S. A. Vorobyov, A. B. Gershman, Zhi-Quan Luo. Robust adaptive beamforming using worst-case performance optimization: A solution to the signal mismatch problem[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(2):313–324
- [58] A. Khabbazibasmenj, S. A. Vorobyov. Robust adaptive beamforming for general-rank signal model with positive semi-definite constraint via POTDC[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(23):6103–6117
- [59] B. Liao, K. M. Tsui, S. C. Chan. Robust beamforming with magnitude response constraints using iterative second-order cone programming[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2011, 59(9):3477–3482

- [60] S. E. Nai, W. Ser, Z. L. Yu, et al. A robust adaptive beamforming framework with beampattern shaping constraints[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2009, 57(7):2198–2203
- [61] S. D. Somasundaram. Linearly constrained robust capon beamforming[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(11):5845–5856
- [62] Z. L. Yu, M. H. Er, W. Ser. A novel adaptive beamformer based on semidefinite programming (SDP) with magnitude response constraints[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2008, 56(5):1297–1307
- [63] D. D. Feldman, L. J. Griffiths. A projection approach for robust adaptive beamforming[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(4):867–876
- [64] L. Tenuti, N. Anselmi, P. Rocca, et al. Minkowski sum method for planar arrays sensitivity analysis with uncertain-but-bounded excitation tolerances[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2017, 65(1):167–177
- [65] N. Anselmi, L. Manica, P. Rocca, et al. Tolerance analysis of antenna arrays through interval arithmetic[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2013, 61(11):5496–5507
- [66] P. Rocca, N. Anselmi, A. Massa. Optimal synthesis of robust beamformer weights exploiting interval analysis and convex optimization[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2014, 62(7):3603–3612
- [67] L. Poli, P. Rocca, N. Anselmi, et al. Dealing with uncertainties on phase weighting of linear antenna arrays by means of interval-based tolerance analysis[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2015, 63(7):3229–3234
- [68] N. Hu, B. Duan, W. Xu, et al. A new interval pattern analysis method of array antennas based on taylor expansion[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2017, 65(11):6151–6156
- [69] A. D. Khzmalyan, A. S. Kondratiev. The phase-only shaping and adaptive nulling of an amplitude pattern[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2003, 51(2):264–272
- [70] G. Buttazzoni, R. Vescovo. Power synthesis for reconfigurable arrays by phase-only control with simultaneous dynamic range ratio and near-field reduction[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2012, 60(2):1161–1165
- [71] R. M. Davis. Phase-only LMS and perturbation adaptive algorithms[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1998, 34(1):169–178
- [72] A. F. Morabito, A. Massa, P. Rocca, et al. An effective approach to the synthesis of phase-only reconfigurable linear arrays[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2012, 60(8):3622–3631
- [73] O. M. Bucci, G. D’Elia. Power synthesis of reconfigurable conformal arrays with phase-only control[J]. *IEE Proceedings - Microwaves, Antennas and Propagation*, 1998, 145(1):131–136

- [74] J. F. DeFord, O. P. Gandhi. Phase-only synthesis of minimum peak sidelobe patterns for linear and planar arrays[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1988, 36(2):191–201
- [75] G. M. Kautz. Phase-only shaped beam synthesis via technique of approximated beam addition[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1999, 47(5):887–894
- [76] Won-Suk Choi, T. K. Sarkar. Phase-only adaptive Processing based on a direct data domain least squares approach using the conjugate gradient method[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2004, 52(12):3265–3272
- [77] A. F. Morabito, P. Rocca. Reducing the number of elements in phase-only reconfigurable arrays generating sum and difference patterns[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2015, 14:1338–1341
- [78] R. Kadlimatti, P. V. Parimi. Phased arrays using odd phase distribution of the radiating elements[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2019, 18(5):891–895
- [79] R. Vescovo. Reconfigurability and beam scanning with phase-only control for antenna arrays[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2008, 56(6):1555–1565
- [80] O. M. Bucci, G. Mazzarella, G. Panariello. Reconfigurable arrays by phase-only control[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1991, 39(7):919–925
- [81] A. Trastoy, F. Ares, E. Moreno. Phase-only control of antenna sum and shaped patterns through null perturbation[J]. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 2001, 43(6):45–54
- [82] K. Hirasawa. The application of a biquadratic programming method to phase only optimization of antenna arrays[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1988, 36(11):1545–1550
- [83] P. Cao, J. S. Thompson, H. Haas. Constant modulus shaped beam synthesis via convex relaxation[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2017, 16:617–620
- [84] C. Baird, G. Rassweiler. Adaptive sidelobe nulling using digitally controlled phase-shifters[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1976, 24(5):638–649
- [85] H. Steyskal. Simple method for pattern nulling by phase perturbation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1983, 31(1):163–166
- [86] R. Shore. Nulling a symmetric pattern location with phase-only weight control[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1984, 32(5):530–533
- [87] R. Ghayoula, N. Fadlallah, A. Gharsallah, et al. Phase-only adaptive nulling with neural networks for antenna array synthesis[J]. IET Microwaves, Antennas Propagation, 2009, 3(1):154–163
- [88] R. L. Haupt. Phase-only adaptive nulling with a genetic algorithm[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1997, 45(6):1009–1015
- [89] R. L. Haupt. Adaptive nulling in monopulse antennas[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1988, 36(2):202–208

- [90] S. T. Smith. Optimum phase-only adaptive nulling[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(7):1835–1843
- [91] A. Babakhani, D. B. Rutledge, A. Hajimiri. Transmitter architectures based on near-field direct antenna modulation[J]. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 2008, 43(12):2674–2692
- [92] Y. Pei, Y. Liang, K. C. Teh, et al. Secure communication in multiantenna cognitive radio networks with imperfect channel state information[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(4):1683–1693
- [93] J. Zhu, N. Wang, V. K. Bhargava. Per-antenna constant envelope precoding for secure transmission in large-scale MISO systems[C]. 2015 IEEE/CIC International Conference on Communications in China (ICCC), Shenzhen, 2015, 1–6
- [94] S. Goel, R. Negi. Guaranteeing secrecy using artificial noise[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2008, 7(6):2180–2189
- [95] Y. . P. Hong, P. Lan, C. . J. Kuo. Enhancing physical-layer secrecy in multiantenna wireless systems: An overview of signal processing approaches[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2013, 30(5):29–40
- [96] M. P. Daly, J. T. Bernhard. Directional modulation technique for phased arrays[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2009, 57(9):2633–2640
- [97] M. P. Daly, E. L. Daly, J. T. Bernhard. Demonstration of directional modulation using a phased array[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2010, 58(5):1545–1550
- [98] N. Valliappan, A. Lozano, R. W. Heath. Antenna subset modulation for secure millimeter-wave wireless communication[J]. IEEE Transactions on Communications, 2013, 61(8):3231–3245
- [99] N. N. Alotaibi, K. A. Hamdi. Switched phased-array transmission architecture for secure millimeter-wave wireless communication[J]. IEEE Transactions on Communications, 2016, 64(3):1303–1312
- [100] Y. Hong, X. Jing, H. Gao. Programmable weight phased-array transmission for secure millimeter-wave wireless communications[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2018, 12(2):399–413
- [101] W. Wang, Z. Zheng. Hybrid MIMO and phased-array directional modulation for physical layer security in mmWave wireless communications[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2018, 36(7):1383–1396
- [102] Z. Ye, J. Dai, X. Xu, et al. DOA estimation for uniform linear array with mutual coupling[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2009, 45(1):280–288
- [103] F. Li, R. J. Vaccaro. Sensitivity analysis of DOA estimation algorithms to sensor errors[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1992, 28(3):708–717

- [104] B. Friedlander, A. J. Weiss. Direction finding in the presence of mutual coupling[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1991, 39(3):273–284
- [105] F. Sellone, A. Serra. A novel online mutual coupling compensation algorithm for uniform and linear arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(2):560–573
- [106] B. Liao, Z. Zhang, S. Chan. DOA estimation and tracking of ULAs with mutual coupling[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2012, 48(1):891–905
- [107] H. S. Mir. A generalized transfer-function based array calibration technique for direction finding[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(2):851–855
- [108] H. S. Mir, J. D. Sahr. Passive direction finding using airborne vector sensors in the presence of manifold perturbations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(1):156–164
- [109] H. S. Mir, J. D. Sahr, G. F. Hatke, et al. Passive source localization using an airborne sensor array in the presence of manifold perturbations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(6):2486–2496
- [110] B. Friedlander, A. J. Weiss. Eigenstructure methods for direction finding with sensor gain and phase uncertainties[C]. ICASSP-88., International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, New York, 1988, 2681–2684
- [111] A. Liu, G. Liao, C. Zeng, et al. An eigenstructure method for estimating DOA and sensor gain-phase errors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(12):5944–5956
- [112] S. Cao, Z. Ye, D. Xu, et al. A hadamard product based method for DOA estimation and gain-phase error calibration[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2013, 49(2):1224–1233
- [113] Boon Chong Ng, Chong Meng Samson See. Sensor-array calibration using a maximum-likelihood approach[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1996, 44(6):827–835
- [114] W. Wang, R. Wu, J. Liang, et al. Phase retrieval approach for DOA estimation with array errors[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2017, 53(5):2610–2620
- [115] M. Viberg, A. L. Swindlehurst. A bayesian approach to auto-calibration for parametric array signal processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(12):3495–3507
- [116] V. C. Soon, L. Tong, Y. F. Huang, et al. A subspace method for estimating sensor gains and phases[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(4):973–976
- [117] B. P. Ng, J. P. Lie, M. H. Er, et al. A practical simple geometry and gain/phase calibration technique for antenna array processing[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2009, 57(7):1963–1972
- [118] J. Liu, X. Wu, W. J. Emery, et al. Direction-of-arrival estimation and sensor array error calibration based on blind signal separation[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2017, 24(1):7–11

- [119] A. Paulraj, T. Kailath. Direction of arrival estimation by eigenstructure methods with unknown sensor gain and phase[C]. ICASSP '85. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Tampa, 1985, 640–643
- [120] Youming Li, M. H. Er. Theoretical analyses of gain and phase error calibration with optimal implementation for linear equispaced array[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(2):712–723
- [121] M. P. Wylie, S. Roy, H. Messer. Joint DOA estimation and phase calibration of linear equispaced (LES) arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(12):3449–3459
- [122] K. Han, P. Yang, A. Nehorai. Calibrating nested sensor arrays with model errors[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2015, 63(11):4739–4748
- [123] M. Pesavento, A. B. Gershman, K. M. Wong. Direction finding in partly calibrated sensor arrays composed of multiple subarrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(9):2103–2115
- [124] M. Li, Y. Lu. Source bearing and steering-vector estimation using partially calibrated arrays[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2009, 45(4):1361–1372
- [125] L. Lei, J. P. Lie, A. B. Gershman, et al. Robust adaptive beamforming in partly calibrated sparse sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(3):1661–1667
- [126] C. M. S. See, A. B. Gershman. Direction-of-arrival estimation in partly calibrated subarray-based sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(2):329–338
- [127] B. Liao, S. C. Chan. Direction finding with partly calibrated uniform linear arrays[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(2):922–929
- [128] B. Liao, S. Chan. Direction finding in partly calibrated uniform linear arrays with unknown gains and phases[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2015, 51(1):217–227
- [129] B. Liao, J. Wen, L. Huang, et al. Direction finding with partly calibrated uniform linear arrays in nonuniform noise[J]. IEEE Sensors Journal, 2016, 16(12):4882–4890
- [130] O. L. Frost. An algorithm for linearly constrained adaptive array processing[J]. Proceedings of the IEEE, 1972, 60(8):926–935
- [131] J. Xu, G. Liao, S. Zhu, et al. Response vector constrained robust LCMV beamforming based on semidefinite programming[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(21):5720–5732
- [132] C. Chen, P. P. Vaidyanathan. Quadratically constrained beamforming robust against direction-of-arrival mismatch[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(8):4139–4150
- [133] L. Griffiths, K. Buckley. Quiescent pattern control in linearly constrained adaptive arrays[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1987, 35(7):917–926

- [134] B. D. Van Veen. Optimization of quiescent response in partially adaptive beamformers[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990, 38(3):471–477
- [135] C. . Tseng, L. J. Griffiths. A unified approach to the design of linear constraints in minimum variance adaptive beamformers[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1992, 40(12):1533–1542
- [136] X. Zhang, Z. He, X. Xia, et al. OPARC: Optimal and precise array response control algorithm—Part I: Fundamentals[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2019, 67(3):652–667
- [137] X. Zhang, Z. He, B. Liao, et al. A²RC: An accurate array response control algorithm for pattern synthesis[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(7):1810–1824
- [138] H. Cox, R. Zeskind, M. Owen. Robust adaptive beamforming[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1987, 35(10):1365–1376
- [139] H. Cox, R. Zeskind, T. Kooij. Practical supergain[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1986, 34(3):393–398
- [140] Guanghai Xu, R. H. Roy, T. Kailath. Detection of number of sources via exploitation of centro-symmetry property[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(1):102–112
- [141] M. Haardt, J. A. Nossek. Unitary ESPRIT: How to obtain increased estimation accuracy with a reduced computational burden[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(5):1232–1242
- [142] J. Steinwandt, F. Roemer, M. Haardt, et al. R-dimensional esprit-type algorithms for strictly second-order non-circular sources and their performance analysis[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(18):4824–4838
- [143] X. Zhang, Z. He, X. Zhang, et al. Robust sidelobe control via complex-coefficient weight vector orthogonal decomposition[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2019, 67(8):5411–5425
- [144] Ming Zhang, Zhaoda Zhu. A method for direction finding under sensor gain and phase uncertainties[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1995, 43(8):880–883
- [145] K. C. Ho, L. Yang. On the use of a calibration emitter for source localization in the presence of sensor position uncertainty[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(12):5758–5772
- [146] C. M. Schmid, S. Schuster, R. Feger, et al. On the effects of calibration errors and mutual coupling on the beam pattern of an antenna array[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2013, 61(8):4063–4072
- [147] J. W. Demmel. Applied Numerical Linear Algebra[M]. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997

- [148] X. Zhang, Z. He, B. Liao, et al. Pattern synthesis with multipoint accurate array response control[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2017, 65(8):4075–4088
- [149] G. H. Golub, C. F. Van Loan. *Matrix Computations* (3rd Ed.)[M]. Baltimore, MD, USA: Johns Hopkins University Press, 1996
- [150] J. Tranter, N. D. Sidiropoulos, X. Fu, et al. Fast unit-modulus least squares with applications in beamforming[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(11):2875–2887
- [151] X. Zhang, Z. He, X. Xia, et al. OPARC: Optimal and precise array response control algorithm—Part II: Multi-points and applications[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(3):668–683
- [152] X. Zhang, Z. He, B. Liao, et al. Pattern synthesis for arbitrary arrays via weight vector orthogonal decomposition[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(5):1286–1299
- [153] X. Zhang, Z. He, B. Liao, et al. Flexible array response control via oblique projection[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(12):3126–3139
- [154] A. L. Yuille, A. Rangarajan. The concave-convex procedure[J]. *Neural Comput.*, 2003, 15(4):915–936
- [155] J. Zhang, Y. Huang, J. Wang, et al. Per-antenna constant envelope precoding and antenna subset selection: A geometric approach[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(23):6089–6104
- [156] J. Pan, W. Ma. Constant envelope precoding for single-user large-scale MISO channels: Efficient precoding and optimal designs[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2014, 8(5):982–995
- [157] W. Zhao, S. Lee, A. Khisti. Phase-only zero forcing for secure communication with multiple antennas[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2016, 10(8):1334–1345
- [158] W. Gander. Least squares with a quadratic constraint[J]. *Numerische Mathematik*, 1980, 36(3):291–307
- [159] T. Lipp, S. Boyd. Variations and extension of the convex–concave procedure[J]. *Optimization and Engineering*, 2016, 17(2):263–287

附录

A.1 定理2.2.1的证明

清晰起见，下面我们将复数 x 的实部和虚部分别记为：

$$x_r = \operatorname{Re}(x), \quad x_i = \operatorname{Im}(x) \quad (\text{A-1})$$

为了简化证明，下面我们仅考虑 $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ 的场景。此时对于任意 $\phi \in \mathbb{R}$ ，等式(2-39)可以重新表示为： $(a_1 - cb_1)/(cb_2 - a_2) = e^{j\phi}$ 。由此可以得到 $|cb_1 - a_1| = |cb_2 - a_2|$ 。利用(A-1)中的符号标记，可以得到： $|(c_r + jc_i)(b_{1r} + jb_{1i}) - (a_{1r} + ja_{1i})| = |(c_r + jc_i)(b_{2r} + jb_{2i}) - (a_{2r} + ja_{2i})|$ 。该式可以更紧凑地表示为：

$$f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{B}^T \mathbf{c} - 2\mathbf{a}_*^T \mathbf{B}^T \mathbf{c} + \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 = 0 \quad (\text{A-2})$$

其中 $\mathbf{c} = [c_r \ c_i]^T$, $\boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}([1 \ 1 \ -1 \ -1])$, $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{P}\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{P}\mathbf{b}_2]$, $\mathbf{b}_l = [b_{lr} \ -b_{li}]^T$, $\mathbf{a}_* = [\mathbf{a}_1^T \ -\mathbf{a}_2^T]^T$, $\mathbf{a}_l = [a_{lr} \ a_{li}]^T$, ($l = 1, 2$), \mathbf{P} 为下面矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} \quad (\text{A-3})$$

另外不难发现：

$$\mathbf{b}_l \mathbf{b}_l^T + \mathbf{P} \mathbf{b}_l \mathbf{b}_l^T \mathbf{P}^T = (\mathbf{b}_l^T \mathbf{b}_l) \mathbf{I}, \quad l = 1, 2 \quad (\text{A-4})$$

$$\mathbf{B} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{B}^T = (\mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2^T \mathbf{b}_2) \mathbf{I} \quad (\text{A-5})$$

定义：

$$h_a \triangleq \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2, \quad h_b \triangleq \mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2^T \mathbf{b}_2 \quad (\text{A-6})$$

则 $f(\mathbf{c})$ 可以重新表示为：

$$\begin{aligned} f(\mathbf{c}) &= h_b \mathbf{c}^T \mathbf{c} - 2\mathbf{a}_*^T \mathbf{B}^T \mathbf{c} + h_a \\ &= h_b \left(\mathbf{c} - \frac{1}{h_b} \mathbf{B} \mathbf{a}_* \right)^T \left(\mathbf{c} - \frac{1}{h_b} \mathbf{B} \mathbf{a}_* \right) - \frac{1}{h_b} \mathbf{a}_*^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{a}_* + h_a \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

由上式可以看出， \mathbf{c} 位于以圆心为 $\mathbf{c}_0 = \frac{1}{h_b} \mathbf{B} \mathbf{a}_*$ ，半径为 $r_c = \sqrt{\frac{1}{h_b^2} \mathbf{a}_*^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{a}_* - \frac{h_a}{h_b}}$ 的圆 \mathbb{C}_0 上，证毕。

A.2 定理2.2.2的证明

将 $a_1 = u_{21}$, $a_2 = \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}u_{22}$, $b_1 = u_{11}$, $b_2 = \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}u_{12}$ 代入定理2.2.1即可得到定理(2.2.2)。具体来讲, 我们使用 $x_r = \text{Re}(x)$ 和 $x_i = \text{Im}(x)$ 来分别表示 x 的实部和虚部。简化起见, 这里假设 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, 其中 \mathbb{F} 的定义见式(2-37)。由式(2-36)可知, μ_k 对应于式(2-39)中的 c 。相应地, $a_1 = u_{21}$, $a_2 = \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}u_{22}$, $b_1 = u_{11}$, $b_2 = \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}u_{12}$ 。根据定理2.2.1, 我们有:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} u_{21r} & u_{21i} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-8})$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}u_{22r} & \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}u_{22i} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-9})$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} u_{11r} & -u_{11i} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-10})$$

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}u_{12r} & -\sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}u_{12i} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-11})$$

$$\mathbf{a}_* = \begin{bmatrix} u_{21r} & u_{21i} & -\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}u_{22r} & -\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}u_{22i} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-12})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} u_{11r} & u_{11i} & \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}u_{12r} & \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}u_{12i} \\ -u_{11i} & u_{11r} & -\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}u_{12i} & \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}u_{12r} \end{bmatrix} \quad (\text{A-13})$$

利用式(A-6), 可以得到:

$$h_a = |u_{21}|^2 + (\lambda_1/\lambda_2)|u_{22}|^2 \quad (\text{A-14})$$

$$h_b = |u_{11}|^2 + (\lambda_1/\lambda_2)|u_{12}|^2 \quad (\text{A-15})$$

下面首先推导圆心 \mathbf{c}_μ 的坐标。利用式(2-41), 可以将 \mathbf{c}_μ 表示为:

$$\mathbf{c}_\mu = \frac{1}{h_b} \mathbf{B} \mathbf{a}_* = \frac{\begin{bmatrix} (u_{11r}u_{21r} + u_{11i}u_{21i})(\lambda_2 - \lambda_1) \\ (u_{11r}u_{21i} - u_{11i}u_{21r})(\lambda_2 - \lambda_1) \end{bmatrix}}{\lambda_2|u_{11}|^2 + \lambda_1|u_{12}|^2} \quad (\text{A-16})$$

注意在上式中, 我们利用了矩阵 \mathbf{U} 的行正交性, 即 $\begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}^T = 0$, 或者等价地:

$$(u_{11r}u_{21r} + u_{11i}u_{21i}) + (u_{12r}u_{22r} + u_{12i}u_{22i}) = 0 \quad (\text{A-17})$$

$$(u_{11r}u_{21i} - u_{11i}u_{21r}) + (u_{12r}u_{22i} - u_{12i}u_{22r}) = 0 \quad (\text{A-18})$$

由于 $\mathbf{Q} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^H$, 根据式(A-17) 和(A-18)有

$$\text{Re}(\mathbf{Q}(1,2)) = (\lambda_1 - \lambda_2)(u_{11r}u_{21r} + u_{11i}u_{21i}) \quad (\text{A-19})$$

$$\text{Im}(\mathbf{Q}(1,2)) = (\lambda_2 - \lambda_1)(u_{11r}u_{21i} - u_{11i}u_{21r}) \quad (\text{A-20})$$

所以, 式(A-16)的分子项可以表示为 $[-\text{Re}(\mathbf{Q}(1,2)) \text{ Im}(\mathbf{Q}(1,2))]^T$ 。

下面考虑式(A-16)的分母项。通过展开 $\mathbf{Q} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^H$, 不难得到:

$$\lambda_1|u_{21}|^2 + \lambda_2|u_{22}|^2 = \mathbf{Q}(2,2) \quad (\text{A-21})$$

由于 \mathbf{U} 为酉矩阵, 我们有 $|u_{11}|^2 + |u_{12}|^2 = |u_{12}|^2 + |u_{22}|^2 = |u_{11}|^2 + |u_{21}|^2 = 1$ 。进一步可以得到

$$|u_{12}|^2 = |u_{21}|^2, \quad |u_{11}|^2 = |u_{22}|^2 \quad (\text{A-22})$$

结合式(A-21)和(A-22), 可以得到

$$\lambda_2|u_{11}|^2 + \lambda_1|u_{12}|^2 = \mathbf{Q}(2,2) \quad (\text{A-23})$$

综上可以得到

$$\mathbf{c}_\mu = \frac{\begin{bmatrix} -\text{Re}(\mathbf{Q}(1,2)) \\ \text{Im}(\mathbf{Q}(1,2)) \end{bmatrix}}{\mathbf{Q}(2,2)} \quad (\text{A-24})$$

下面我们推导 r_μ 。由式(A-16)可以得到

$$\mathbf{a}_\star^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{a}_\star = (1 - \lambda_1/\lambda_2)^2 |u_{11}|^2 |u_{21}|^2 \quad (\text{A-25})$$

结合式(A-14), (A-15), (A-22)以及(A-25), 可以得到下面表达式

$$\mathbf{a}_\star^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{a}_\star - h_a h_b = -\lambda_1/\lambda_2 \quad (\text{A-26})$$

由于 $\det(\mathbf{Q}) = \lambda_1 \lambda_2$, 可以从式 (A-23)和(A-26)得到

$$r_\mu^2 = \frac{\mathbf{a}_\star^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{a}_\star - h_a h_b}{h_b^2} = \frac{-\det(\mathbf{Q})}{\mathbf{Q}^2(2,2)} \quad (\text{A-27})$$

上式可以重新表示为

$$r_\mu = \frac{\sqrt{-\det(\mathbf{Q})}}{|\mathbf{Q}(2,2)|} \quad (\text{A-28})$$

A.3 式(2-86)–(2-89)推导

由于 \mathbf{H}_m 为列满秩矩阵, 根据式(2-84)可以得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_m^T & c_m \end{bmatrix}^T = \mathbf{H}_m^\dagger \mathbf{H}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T & c_1 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-29})$$

其中 $\mathbf{H}_m^\dagger = (\mathbf{H}_m^H \mathbf{H}_m)^{-1} \mathbf{H}_m^H$, $m = 2, \dots, M$ 。将式(A-29)代入式(2-84)中得到

$$\mathbf{H}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T & c_1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{H}_m \mathbf{H}_m^\dagger \mathbf{H}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T & c_1 \end{bmatrix}^T, \quad m = 2, \dots, M \quad (\text{A-30})$$

或等价地,

$$(\mathbf{I}_N - \mathbf{H}_m \mathbf{H}_m^\dagger) \mathbf{H}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T & c_1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}, \quad m = 2, \dots, M \quad (\text{A-31})$$

显然, 式(A-31)中的 $M - 1$ 个等式可以紧凑地表示为

$$\mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T & c_1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \quad (\text{A-32})$$

其中矩阵 \mathbf{G} 定义如下

$$\mathbf{G} \triangleq \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_N - \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_2^\dagger) \mathbf{H}_1 \\ (\mathbf{I}_N - \mathbf{H}_3 \mathbf{H}_3^\dagger) \mathbf{H}_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{I}_N - \mathbf{H}_M \mathbf{H}_M^\dagger) \mathbf{H}_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{((M-1)N) \times (N-1)} \quad (\text{A-33})$$

由于式(2-84)中 c_1 非零, \mathbf{b}_1 和 c_1 的求解可以描述为

$$\begin{aligned} & \text{find } \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T & c_1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{N-1} \\ & \text{subject to } \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T & c_1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}, c_1 \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A-34})$$

上述问题等价于

$$\begin{aligned} & \text{find } \tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{C}^{N-2} \\ & \text{subject to } \mathbf{G} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}^T & 1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A-35})$$

其中 $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}_1/c_1$ 为待求解的新变量。为了得到式(A-35)的解析解, 首先将 \mathbf{G} 进行如下划分

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (\text{A-36})$$

其中 \mathbf{F} 为矩阵 \mathbf{G} 的前 $(N-2)$ 个列构成的矩阵, \mathbf{q} 为 \mathbf{G} 的最后一列。则约束(A-35)可以等价地表示为

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{b}}_1 = -\mathbf{q} \quad (\text{A-37})$$

这就证明了式(2-86)–(2-88)。下面分3步来说明等式(A-37)的一致性。

第1步: 对于任意给定的 $m \in \{2, \dots, M\}$, $\mathbf{I}_N - (\mathbf{H}_m \mathbf{H}_m^\dagger)$ 为子空间 $\mathcal{R}^\perp(\mathbf{H}_m)$ 的正交投影矩阵, 因此可以得到

$$\mathcal{R}(\mathbf{I}_N - (\mathbf{H}_m \mathbf{H}_m^\dagger)) = \mathcal{R}(\mathbf{h}_m) \quad (\text{A-38})$$

其中 \mathbf{h}_m 为 $\mathcal{R}^\perp(\mathbf{H}_m)$ 的基向量。根据式(A-38), 一定存在某初等变换矩阵 \mathbf{E}_m 使得下式成立

$$[\mathbf{I}_N - (\mathbf{H}_m \mathbf{H}_m^\dagger)] \mathbf{E}_m = [\mathbf{h}_m \quad \mathbf{O}] \quad (\text{A-39})$$

由于 $\mathbf{I}_N - (\mathbf{H}_m \mathbf{H}_m^\dagger)$ 是复共轭对称矩阵，上式(A-39)等价于

$$\mathbf{E}_m^H \left[\mathbf{I}_N - (\mathbf{H}_m \mathbf{H}_m^\dagger) \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_m^H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A-40})$$

结合式(A-40)以及G的表达式，可以得到

$$\mathbf{E}\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H}_1, \quad \mathbf{E}\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{U}_{12} \quad (\text{A-41})$$

其中

$$\mathbf{E} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{E}_2^H & & & \\ & \mathbf{E}_3^H & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{E}_M^H \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{H}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{h}_2^H \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_3^H \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_M^H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A-42})$$

由于初等变换矩阵 $\mathbf{E}_m (m = 2, \dots, M)$ 可逆，可知矩阵 \mathbf{E} 可逆。因此，我们得到

$$\text{rank}(\mathbf{F}) = \text{rank}(\mathbf{EF}) = \text{rank}(\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{U}_{12}) = \text{rank}(\mathbf{HU}_{12}) \quad (\text{A-43})$$

其中 \mathbf{H} 定义为

$$\mathbf{H} \triangleq [\mathbf{h}_2 \ \mathbf{h}_3 \ \dots \ \mathbf{h}_M]^H \quad (\text{A-44})$$

同时，不难发现下述四个等式是等价的

$$\mathbf{Gx} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{EGx} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H}_1\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{HH}_1\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\text{A-45})$$

因此可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\tilde{\mathbf{b}}_1 = -\mathbf{q} &\Leftrightarrow \mathbf{G} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^T & 1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{HH}_1 \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^T & 1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{HU}_{12}\tilde{\mathbf{b}} = -\mathbf{Hw}_{k+1,1} \end{aligned} \quad (\text{A-46})$$

第2步：下面我们得到矩阵 \mathbf{HU}_{12} 的一种等价表示形式。推导之前，首先分析向量 \mathbf{h}_m 。

对于给定的 $m \in \{2, \dots, M\}$ ， \mathbf{h}_m 表示子空间 $\mathcal{R}^\perp(\mathbf{H}_m)$ 的基向量，满足

$$\begin{cases} \mathbf{h}_m \in \mathcal{R}^\perp(\mathbf{H}_m) \\ \mathbf{h}_m \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{A-47})$$

其中 $\mathbf{H}_m = [\mathbf{U}_{m2} \quad \mathbf{w}_{k+1,m}]$ 为列满秩矩阵， $\mathcal{R}^\perp(\mathbf{U}_{m2}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}(\theta_0, \theta_{k+1,m}))$ 。因此，可以得到

$$\mathbf{h}_m \in \mathcal{R}^\perp(\mathbf{H}_m) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{h}_m \in \mathcal{R}^\perp(\mathbf{U}_{m2}) \\ \mathbf{h}_m \in \mathcal{R}^\perp(\mathbf{w}_{k+1,m}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{h}_m \in \mathcal{R}(\mathbf{A}(\theta_0, \theta_{k+1,m})) \\ \mathbf{w}_{k+1,m}^H \mathbf{h}_m = 0 \end{cases} \quad (\text{A-48})$$

从而式(A-47)可以等价地表示为

$$\mathbf{h}_m = [\mathbf{a}(\theta_0) \quad \mathbf{a}(\theta_{k+1,m})] \begin{bmatrix} \kappa_0 & \kappa_m \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-49a})$$

$$\text{subject to } \mathbf{w}_{k+1,m}^H [\mathbf{a}(\theta_0) \quad \mathbf{a}(\theta_{k+1,m})] \begin{bmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_m \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A-49b})$$

$$\kappa_m \neq 0 \quad (\text{A-49c})$$

其中 κ_0 和 κ_m 为满足(A-49b)和(A-49c)的复数。如果 $\kappa_m = 0$ ，此时由式(A-49b)可以得到 $\kappa_0 \mathbf{w}_{k+1,m}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 0$ 。由于 $\mathbf{w}_{k+1,m}^H \mathbf{a}(\theta_0)$ 非零，因此可以得到 $\kappa_0 = \kappa_m = 0$ ，以及 $\mathbf{h}_m = \mathbf{0}$ ，这与式(A-47)矛盾。因此，上述问题(A-49)中约束 $\kappa_m \neq 0$ 。综上可知， \mathbf{h}_m 可以表示为 $\mathbf{a}(\theta_0)$ 和 $\mathbf{a}(\theta_{k+1,m})$ 的线性组合，其组合系数满足一定约束。

下面分析 $\mathbf{H}\mathbf{U}_{12}$ 的秩，即 $\text{rank}(\mathbf{H}\mathbf{U}_{12})$ 。由式(A-49a)可知， $\mathbf{h}_m^H \mathbf{U}_{12}$ 满足

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_m^H \mathbf{U}_{12} &= \begin{bmatrix} \kappa_0^* & \kappa_m^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{a}^H(\theta_{k+1,m}) \mathbf{U}_{12} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \kappa_0^* & \kappa_m^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T \\ \mathbf{a}^H(\theta_{k+1,m}) \mathbf{U}_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-50a})$$

$$= \kappa_m^* \mathbf{a}^H(\theta_{k+1,m}) \mathbf{U}_{12}, \quad \kappa_m \neq 0 \quad (\text{A-50b})$$

注意到式(A-50a)中利用了 $\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{U}_{12} = \mathbf{0}^T$ 。而且，由式(A-50b)可以发现 $\mathbf{h}_m^H \mathbf{U}_{12}$ 只与 κ_m 有关，而不依赖于 κ_0 。将 $\mathbf{h}_m^H \mathbf{U}_{12}$ 代入到 $\mathbf{H}\mathbf{U}_{12}$ 的行向量中得到

$$\mathbf{H}\mathbf{U}_{12} = \mathbf{K} \mathbf{A}_{2,3,\dots,M}^H \mathbf{U}_{12} \quad (\text{A-51})$$

其中 \mathbf{K} 为满秩矩阵，定义如下

$$\mathbf{K} \triangleq \text{diag}([\kappa_2^*, \kappa_3^*, \dots, \kappa_M^*]) \quad (\text{A-52})$$

$\mathbf{A}_{2,3,\dots,M}$ 满足

$$\mathbf{A}_{2,3,\dots,M} = [\mathbf{a}(\theta_{k+1,2}) \quad \mathbf{a}(\theta_{k+1,3}) \quad \dots \quad \mathbf{a}(\theta_{k+1,M})] \quad (\text{A-53})$$

第3步：下面我们证明 $\mathbf{A}_{2,3,\dots,M}^H \mathbf{U}_{12}$ 为行满秩矩阵，即

$$\text{rank}(\mathbf{A}_{2,3,\dots,M}^H \mathbf{U}_{12}) = M - 1 \quad (\text{A-54})$$

为了证明(A-54), 我们假设 $\text{rank}(\mathbf{A}_{2,3,\dots,M}^H \mathbf{U}_{12}) < M - 1$, 即 $\mathbf{A}_{2,3,\dots,M}^H \mathbf{U}_{12}$ 包含线性相关的行。此时一定存在非零向量 $\mathbf{c} = [\eta_2 \ \eta_3 \ \dots \ \eta_M]^T$ 满足

$$\mathbf{c}^T \mathbf{A}_{2,3,\dots,M}^H \mathbf{U}_{12} = \mathbf{c}^T \begin{bmatrix} \mathbf{a}^H(\theta_{k+1,2}) \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{a}^H(\theta_{k+1,3}) \mathbf{U}_{12} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^H(\theta_{k+1,M}) \mathbf{U}_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{0}^T \quad (\text{A-55})$$

由上式(A-55)可知

$$\mathbf{A}_{2,3,\dots,M} \mathbf{c}^* \in \mathcal{R}^\perp(\mathbf{U}_{12}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}(\theta_0, \theta_{k+1,1})) \quad (\text{A-56})$$

此时若将 $\mathbf{A}_{2,3,\dots,M} \mathbf{c}^*$ 表示为

$$\mathbf{A}_{2,3,\dots,M} \mathbf{c}^* = \mathbf{A}(\theta_0, \theta_{k+1,1}) \begin{bmatrix} \eta_0 & \eta_1 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-57})$$

其中 $[\eta_0, \eta_1]^T$ 为相应的加权系数。由式(A-57)可知, 一定存在如下非零向量

$$\tilde{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \eta_0 & \eta_1 & -\eta_2^* & -\eta_3^* & \dots & -\eta_M^* \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-58})$$

满足

$$\left[\mathbf{a}(\theta_0) \ \mathbf{a}(\theta_{k+1,1}) \ \dots \ \mathbf{a}(\theta_{k+1,M}) \right] \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{0} \quad (\text{A-59})$$

不难看出, 式(A-58)和(A-59)与 $\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_{k+1,1}), \dots, \mathbf{a}(\theta_{k+1,M})$ 线性独立的假设矛盾。因此, $\text{rank}(\mathbf{A}_{2,3,\dots,M}^H \mathbf{U}_{12}) < M - 1$ 不成立。由于 $\mathbf{A}_{2,3,\dots,M}^H \mathbf{U}_{12}$ 的行数为 $M - 1$, 因此 $\text{rank}(\mathbf{A}_{2,3,\dots,M}^H \mathbf{U}_{12}) = M - 1$ 。式(A-54)证毕。

结合第2步和第3步, 我们可以得到

$$\text{rank}(\mathbf{H} \mathbf{U}_{12}) = \text{rank}(\mathbf{A}_{2,3,\dots,M}^H \mathbf{U}_{12}) = M - 1 \quad (\text{A-60})$$

等价地, $\mathbf{H} \mathbf{U}_{12}$ 为行满秩矩阵。而且, 由第1步中的式(A-46)可知, $\mathbf{H} \mathbf{U}_{12}$ 的列张成复空间 \mathbb{C}^{M-1} , 从而对于任意 $-\mathbf{H} \mathbf{w}_{k+1,1} \in \mathbb{C}^{M-1}$, 我们有 $-\mathbf{H} \mathbf{w}_{k+1,1} \in \mathcal{R}(\mathbf{H} \mathbf{U}_{12})$ 。因此, 方程 $\mathbf{H} \mathbf{U}_{12} \tilde{\mathbf{b}} = -\mathbf{H} \mathbf{w}_{k+1,1}$ (或等价地 $\mathbf{F} \tilde{\mathbf{b}}_1 = -\mathbf{q}$) 至少存在一组解。基于此, $\mathbf{F} \tilde{\mathbf{b}}_1 = -\mathbf{q}$ 的通解可以表示为

$$\tilde{\mathbf{b}}_1 = -\mathbf{F}^\dagger \mathbf{q} + \mathbf{f}_n, \quad \forall \mathbf{f}_n \in \mathcal{N}(\mathbf{F}) \quad (\text{A-61})$$

由(A-34)与(A-35)的等价性, 问题(A-34)的解 $[\bar{\mathbf{b}}_1^T, \bar{c}_1]^T$ 可以表示为

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_1^T & \bar{c}_1 \end{bmatrix}^T = c_1 \begin{bmatrix} -\mathbf{F}^\dagger \mathbf{q} + \mathbf{f}_n \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_1 \neq 0, \quad \forall \mathbf{f}_n \in \mathcal{N}(\mathbf{F}) \quad (\text{A-62})$$

因此，式(2-85)的 $\bar{\mathbf{w}}_{k+1}$ 可以表示为

$$\bar{\mathbf{w}}_{k+1} = \bar{c}_1 \mathbf{H}_1 \begin{bmatrix} -\mathbf{F}^\dagger \mathbf{q} + \mathbf{f}_n \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_1 \neq 0, \forall \mathbf{f}_n \in \mathcal{N}(\mathbf{F}) \quad (\text{A-63})$$

需要注意的是，式(A-63)得到的 $\bar{\mathbf{w}}_{k+1}$ 可以保证 $\bar{c}_1 \neq 0$ ，从而进一步有 $\bar{\mathbf{w}}_{k+1} \notin \mathbb{V}_{k+1,1}$ ， $L(\theta_{k+1,1}, \theta_0) = \rho_{k+1,1}$ 。式(A-63)并不能确保 $\bar{c}_m \neq 0$ 以及 $\bar{\mathbf{w}}_{k+1} \notin \mathbb{V}_{k+1,m}$ ， $m = 2, \dots, M$ 。实际上，只要 $\mathbf{w}_{k+1,1}^H \mathbf{a}(\theta_0) \neq 0$ 满足，即可得到

$$\bar{c}_m \neq 0, \bar{\mathbf{w}}_{k+1} \notin \mathbb{V}_{k+1,m}, \quad m = 2, \dots, M \quad (\text{A-64})$$

这是因为，如果存在 $m \in \{2, \dots, M\}$ 使得 $\bar{c}_m = 0$ 成立，由式(2-85)可知

$$\mathbf{H}_1 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_1^T & \bar{c}_1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{U}_{m2} \bar{\mathbf{b}}_m \quad (\text{A-65})$$

基于上式可以进一步得到

$$\mathbf{w}_{k+1,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{12} & \mathbf{U}_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{b}}_1^T / \bar{c}_1 & \bar{\mathbf{b}}_m^T / \bar{c}_1 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-66})$$

上式(A-66)说明 $\mathbf{w}_{k+1,1}$ 可以表示为矩阵 $\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{12} & \mathbf{U}_{m2} \end{bmatrix}$ 各列的线性组合。另一方面，由式(2-79)可知 $\mathbf{a}(\theta_0)$ 与矩阵 $\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{12} & \mathbf{U}_{m2} \end{bmatrix}$ 的各列垂直，即

$$\mathbf{a}^H(\theta_0) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{12} & \mathbf{U}_{m2} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{A-67})$$

结合式(A-66)和(A-67)，进一步可得 $\mathbf{w}_{k+1,1}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 0$ ，这与 $\mathbf{w}_{k+1,1}^H \mathbf{a}(\theta_0) \neq 0$ 的假设相矛盾。因此可知 $\bar{c}_m = 0$ 对于任意 $m \in \{2, \dots, M\}$ 不成立。

综上，式(2-85)中的 $\bar{\mathbf{w}}_{k+1}$ 可以解析地用式(A-63)表示。式(2-89)证毕。

A.4 方程(2-108)相容性的证明

证明方程(2-108)相容性之前，下面首先证明 $\mathbf{H}_d \mathbf{U}_{12}$ 为行满秩矩阵，其中 \mathbf{H}_d 定义如下

$$\mathbf{H}_d \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3 & \cdots & \mathbf{h}_M & \mathbf{d}(\theta_0) \end{bmatrix}^H \quad (\text{A-68})$$

由式(A-51)可知

$$\mathbf{H}_d \mathbf{U}_{12} = \mathbf{K}_d \begin{bmatrix} \mathbf{a}^H(\theta_2) \\ \vdots \\ \mathbf{a}^H(\theta_M) \\ \mathbf{d}^H(\theta_0) \end{bmatrix}^T \mathbf{U}_{12}, \quad \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \\ & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-69})$$

其中 \mathbf{K} (为满秩矩阵)的定义见式(A-52)。不难发现， \mathbf{K}_d 为满秩矩阵。

与附录A.3的第3步类似，用反证法证明如果 $\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_{k+1,1}), \dots, \mathbf{a}(\theta_{k+1,M}), \mathbf{d}(\theta_0)$ 线性无关，则 $\mathbf{H}_d \mathbf{U}_{12}$ 为行满秩矩阵，即

$$\text{rank}(\mathbf{H}_d \mathbf{U}_{12}) = M \quad (\text{A-70})$$

由附录A.3的第1步可知，

$$\begin{aligned} \text{rank} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{d}^H(\theta_0) \mathbf{U}_{12} \end{bmatrix} \right) &= \text{rank} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{d}^H(\theta_0) \mathbf{U}_{12} \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rank} \left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{d}^H(\theta_0) \mathbf{U}_{12} \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rank}(\mathbf{H}_d \mathbf{U}_{12}) \\ &= M \end{aligned} \quad (\text{A-71})$$

即 $[\mathbf{F}^H \ \mathbf{U}_{12}^H \mathbf{d}(\theta_0)]^H$ 为行满秩矩阵。而且，如果 $\mathbf{w}_{k+1,1}^H \mathbf{a}(\theta_0) \neq 0$ 成立，不难得到 $[\mathbf{F}^H \ \mathbf{a}(\theta_0)^H \mathbf{w}_{k+1,1} \mathbf{U}_{12}^H \mathbf{d}(\theta_0)]^H$ 为行满秩矩阵。因此，下面等式

$$[\mathbf{F}^H \ \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{k+1,1} \mathbf{U}_{12}^H \mathbf{d}(\theta_0)]^H \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{A-72})$$

或者其等价形式

$$\begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{F}) & -\text{Im}(\mathbf{F}) \\ \text{Im}(\mathbf{F}) & \text{Re}(\mathbf{F}) \\ \text{Re}(\mathbf{p}^H) & -\text{Im}(\mathbf{p}^H) \\ \text{Im}(\mathbf{p}^H) & \text{Re}(\mathbf{p}^H) \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}} \quad (\text{A-73})$$

对于任意 \mathbf{b} 或 $\tilde{\mathbf{b}}$ 均有解，其中式(A-73)中 \mathbf{p} 的定义见式(2-99)。由于 $\text{Re}(\mathbf{p}^H) = \text{Re}(\mathbf{p}^T)$ ， $-\text{Im}(\mathbf{p}^H) = \text{Im}(\mathbf{p}^T)$ ，可以得到

$$\begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{F}) & -\text{Im}(\mathbf{F}) \\ \text{Im}(\mathbf{F}) & \text{Re}(\mathbf{F}) \\ \text{Re}(\mathbf{p}^H) & -\text{Im}(\mathbf{p}^H) \\ \text{Im}(\mathbf{p}^H) & \text{Re}(\mathbf{p}^H) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ (\text{Im}(\mathbf{p}^H) \ \text{Re}(\mathbf{p}^H)) \end{bmatrix} \quad (\text{A-74})$$

其中 \mathbf{C} 的定义见式(2-109)。与方程(A-73)相比，方程 $\mathbf{Cz} = \mathbf{k}$ 包含较少的约束个数。由于方程(A-73)可解，结合式(A-74)可知方程 $\mathbf{Cz} = \mathbf{k}$ 相容。证毕。

A.5 定理2.4.2的证明

假设 \mathbf{T}_{k-1} 为复共轭对称矩阵，此时 ξ_0 和 ξ_k 均为实数，另外有 $\tilde{\xi}_c = \xi_c^*$ 。根据

式(2-141)有

$$\mathbf{H}_k(1,2) = \mathbf{w}_{k-1}^H [\mathbf{a}(\theta_k)\mathbf{a}^H(\theta_k) - \rho_k \mathbf{a}(\theta_0)\mathbf{a}^H(\theta_0)] \mathbf{v}_k = \chi \xi_c^*$$

其中 $\chi = \xi_k - \rho_k \xi_0 \in \mathbb{R}$ 。由式(2-143)可知

$$\mathbf{c}_\gamma(1) + j\mathbf{c}_\gamma(2) = -\chi \xi_c / \mathbf{H}_k(2,2) \quad (\text{A-75})$$

因此可以得到

$$\gamma_{k,a} = -\frac{(\|\mathbf{c}_\gamma\|_2 - R_\gamma) \chi \xi_c}{\|\mathbf{c}_\gamma\|_2 \mathbf{H}_k(2,2)}, \quad \gamma_{k,b} = -\frac{(\|\mathbf{c}_\gamma\|_2 + R_\gamma) \chi \xi_c}{\|\mathbf{c}_\gamma\|_2 \mathbf{H}_k(2,2)} \quad (\text{A-76})$$

由于 χ 和 $\mathbf{H}_k(2,2)$ 均为实数，从式(A-75)可以得到

$$\mathbf{c}_\gamma(2) / \mathbf{c}_\gamma(1) = \Im(\xi_c) / \Re(\xi_c) \quad (\text{A-77})$$

由式(2-149)中增益 G_k 的定义，我们有

$$\begin{aligned} G_k &= |\xi_c^*| \cdot |\xi_0/\xi_c^* + \gamma_k| \\ &= |\xi_c^*| \cdot |\gamma_k - d| \\ &= |\xi_c^*| \cdot \left\| \begin{bmatrix} \Re(\gamma_k) & \Im(\gamma_k) \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} \Re(d) & \Im(d) \end{bmatrix}^T \right\|_2 \end{aligned} \quad (\text{A-78})$$

其中 $d = -\xi_0/\xi_c^*$ 。此外，

$$\begin{aligned} \Im(d) / \Re(d) &= \Im(\xi_c) / \Re(\xi_c) \\ &= \mathbf{c}_\gamma(2) / \mathbf{c}_\gamma(1) \end{aligned} \quad (\text{A-79})$$

上式表明，原点 \mathbf{O} ，圆心 \mathbf{c}_γ 以及点 $D = [\Re(d) \ \Im(d)]$ 共线。基于此，问题(2-146)的最优解可以用下述的几何方法得到。

不失一般性，我们假设 $\Re(d) \neq \mathbf{c}_\gamma(1)$ ，否则，圆 \mathbb{C}_k 上所有的 γ_k 对应的增益 G_k 均相同。此时，如果 $\Re(d) > \mathbf{c}_\gamma(1) \geq 0$ 或者 $\Re(d) < \mathbf{c}_\gamma(1) < 0$ ，可以得到 $\gamma_{k,*} = \gamma_{k,a}$ ，即 $F = F_a$ 时 G_k 最大。

类似地，如果 $\mathbf{c}_\gamma(1) \geq 0$ ， $\Re(d) < \mathbf{c}_\gamma(1)$ ，或者 $\mathbf{c}_\gamma(1) < 0$ ， $\Re(d) > \mathbf{c}_\gamma(1)$ ，此时原点 O 与 D 位于点 C 的同一侧。因此，得到最优解 $\gamma_{k,*} = \gamma_{k,b}$ ，即当 $F = F_b$ 时， G_k 取得最大值。

综上可以得出结论，如果 $\zeta > 0$ ，有 $\gamma_{k,*} = \gamma_{k,a}$ ，否则有 $\gamma_{k,*} = \gamma_{k,b}$ ，其中 ζ 的定义见式(2-153)。证毕。

A.6 定理2.4.3的证明

假设 Ξ_{k-1}^{-1} 为共轭对称矩阵。由式(2-162)和(A-75), 可以将 p_1 和 q_1 分别表示为

$$p_1 = \frac{\chi\xi_c}{\mathbf{H}_k(2,2)}, \quad q_1 = \left(1 - \frac{\chi\xi_k}{\mathbf{H}_k(2,2)}\right)\xi_c \quad (\text{A-80})$$

其中 $\chi = \xi_k - \rho_k\xi_0$ 。由式(2-161)可以看出, β_k 对应于定理2.2.1中的 c , 其它参数满足 $a_1 = p_1 = \chi\xi_c/\mathbf{H}_k(2,2)$, $a_2 = p_2 = -R_\gamma$, $b_1 = q_1 = (1 - \chi\xi_k/\mathbf{H}_k(2,2))\xi_c$, $b_2 = q_2 = R_\gamma\xi_k$ 。简单起见, 首先定义

$$y \triangleq \frac{\chi}{\mathbf{H}_k(2,2)}, \quad z \triangleq 1 - \frac{\chi \cdot \xi_k}{\mathbf{H}_k(2,2)} \quad (\text{A-81})$$

利用定理2.2.1中的标记, 得到

$$\mathbf{a}_1 = y \cdot \begin{bmatrix} \Re(\xi_c) & \Im(\xi_c) \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-82a})$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -R_\gamma & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-82b})$$

$$\mathbf{b}_1 = z \cdot \begin{bmatrix} \Re(\xi_c) & -\Im(\xi_c) \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-82c})$$

$$\mathbf{b}_2 = R_\gamma \cdot \begin{bmatrix} \Re(\xi_k) & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-82d})$$

$$\mathbf{a}_* = \begin{bmatrix} y \cdot \Re(\xi_c) & y \cdot \Im(\xi_c) & R_\gamma & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-82e})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} z \cdot \Re(\xi_c) & z \cdot \Im(\xi_c) & R_\gamma\xi_k & 0 \\ -z \cdot \Im(\xi_c) & z \cdot \Re(\xi_c) & 0 & R_\gamma\xi_k \end{bmatrix} \quad (\text{A-82f})$$

进一步有

$$h_a = y^2|\xi_c|^2 - R_\gamma^2 \quad (\text{A-83a})$$

$$h_b = z^2|\xi_c|^2 - R_\gamma^2\xi_k^2 \quad (\text{A-83b})$$

$$\mathbf{B}\mathbf{a}_* = \begin{bmatrix} yz|\xi_c|^2 + R_\gamma^2\xi_k & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-83c})$$

由定理2.2.1可知

$$\mathbf{c}_\beta = \frac{\mathbf{B}\mathbf{a}_*}{h_b} = \frac{\begin{bmatrix} yz|\xi_c|^2 + R_\gamma^2\xi_k & 0 \end{bmatrix}^T}{z^2|\xi_c|^2 - R_\gamma^2\xi_k^2} \quad (\text{A-84})$$

事实上, 可以进一步化简 \mathbf{c}_β 。首先注意到

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_k(2,2) &= \mathbf{v}_k^H (\mathbf{a}(\theta_k)\mathbf{a}^H(\theta_k) - \rho_k\mathbf{a}(\theta_k)\mathbf{a}^H(\theta_k)) \mathbf{v}_k \\ &= \xi_k^2 - \rho_k|\xi_c|^2 \end{aligned} \quad (\text{A-85})$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{H}_k) &= -\rho_k |\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{v}_k^H \mathbf{a}(\theta_k) - \mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{v}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \\ &= -\rho_k (\xi_0\xi_k - |\xi_c|^2)^2 \end{aligned} \quad (\text{A-86})$$

经过计算可以发现

$$\begin{aligned} y &= \frac{\chi}{\mathbf{H}_k(2,2)} \\ &= \frac{\xi_k - \rho_k \xi_0}{\xi_k^2 - \rho_k |\xi_c|^2} \end{aligned} \quad (\text{A-87})$$

$$\begin{aligned} z &= 1 - \frac{\chi \cdot \xi_k}{\mathbf{H}_k(2,2)} \\ &= \frac{\rho_k (\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2)}{\xi_k^2 - \rho_k |\xi_c|^2} \end{aligned} \quad (\text{A-88})$$

$$\begin{aligned} R_\gamma^2 &= \frac{-\det(\mathbf{H}_k)}{\mathbf{H}_k^2(2,2)} \\ &= \rho_k \left(\frac{\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2}{\xi_k^2 - \rho_k |\xi_c|^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A-89})$$

在此基础上可以得到

$$\begin{aligned} \frac{yz|\xi_c|^2 + R_\gamma^2 \xi_k}{z^2 |\xi_c|^2 - R_\gamma^2 \xi_k^2} &= \frac{\left(\frac{\xi_k - \rho_k \xi_0}{\xi_k^2 - \rho_k |\xi_c|^2} \right) \left(\frac{\rho_k (\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2)}{\xi_k^2 - \rho_k |\xi_c|^2} \right) |\xi_c|^2 + \rho_k \left(\frac{\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2}{\xi_k^2 - \rho_k |\xi_c|^2} \right)^2 \xi_k}{\left(\frac{\rho_k (\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2)}{\xi_k^2 - \rho_k |\xi_c|^2} \right)^2 |\xi_c|^2 - \rho_k \left(\frac{\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2}{\xi_k^2 - \rho_k |\xi_c|^2} \right)^2 \xi_k^2} \\ &= \frac{(\xi_k - \rho_k \xi_0) |\xi_c|^2 + (\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2) \xi_k}{(\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2) (\rho_k |\xi_c|^2 - \xi_k^2)} \\ &= \frac{\xi_0 (\xi_k^2 - \rho_k |\xi_c|^2)}{(|\xi_c|^2 - \xi_0 \xi_k) (\xi_k^2 - \rho_k |\xi_c|^2)} \\ &= \frac{\xi_0}{|\xi_c|^2 - \xi_0 \xi_k} \end{aligned} \quad (\text{A-90})$$

结合(A-84)和(A-90)可以发现

$$\mathbf{c}_\beta = \begin{bmatrix} \frac{\xi_0}{|\xi_c|^2 - \xi_0 \xi_k} & 0 \end{bmatrix}^\top \quad (\text{A-91})$$

式(2-163)证毕。

下面推导 R_β 的表达式。由定理2.2.1可知

$$R_\beta^2 = \frac{\mathbf{a}_\star^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{B} \mathbf{a}_\star - h_a h_b}{h_b^2} \quad (\text{A-92})$$

结合式(A-83), 可以将 R_β^2 表示为

$$\begin{aligned}
R_\beta^2 &= \frac{(yz|\xi_c|^2 + R_\gamma^2\xi_k)^2 - (y^2|\xi_c|^2 - R_\gamma^2)(z^2|\xi_c|^2 - R_\gamma^2\xi_k^2)}{(z^2|\xi_c|^2 - R_\gamma^2\xi_k^2)^2} \\
&= \frac{R_\gamma^2|\xi_c|^2(z + y\xi_k)^2}{(z^2|\xi_c|^2 - R_\gamma^2\xi_k^2)^2} \\
&= \frac{\rho_k \left(\frac{\xi_0\xi_k - |\xi_c|^2}{\xi_k^2 - \rho_k|\xi_c|^2} \right)^2 |\xi_c|^2 \left(\frac{\rho_k(\xi_0\xi_k - |\xi_c|^2)}{\xi_k^2 - \rho_k|\xi_c|^2} + \left(\frac{\xi_k - \rho_k\xi_0}{\xi_k^2 - \rho_k|\xi_c|^2} \right) \xi_k \right)^2}{\left(\left(\frac{\rho_k(\xi_0\xi_k - |\xi_c|^2)}{\xi_k^2 - \rho_k|\xi_c|^2} \right)^2 |\xi_c|^2 - \rho_k \left(\frac{\xi_0\xi_k - |\xi_c|^2}{\xi_k^2 - \rho_k|\xi_c|^2} \right)^2 \xi_k^2 \right)^2} \\
&= \frac{\rho_k(\xi_0\xi_k - |\xi_c|^2)^2 |\xi_c|^2 (\rho_k(\xi_0\xi_k - |\xi_c|^2) + (\xi_k - \rho_k\xi_0)\xi_k)^2}{\left(\rho_k(\xi_0\xi_k - |\xi_c|^2)^2 (\rho_k|\xi_c|^2 - \xi_k^2) \right)^2} \\
&= \frac{\rho_k(\xi_0\xi_k - |\xi_c|^2)^2 |\xi_c|^2 (\rho_k|\xi_c|^2 - \xi_k^2)^2}{\rho_k(\xi_0\xi_k - |\xi_c|^2)^2 \cdot \rho_k(\xi_0\xi_k - |\xi_c|^2)^2 (\rho_k|\xi_c|^2 - \xi_k^2)^2} \\
&= \frac{|\xi_c|^2}{\rho_k(\xi_0\xi_k - |\xi_c|^2)^2}
\end{aligned} \tag{A-93}$$

最终得到

$$R_\beta = \frac{1}{\sqrt{\rho_k}} \cdot \frac{|\xi_c|}{\sqrt{|\xi_c|^2 - \xi_0\xi_k}} \tag{A-94}$$

式(2-164)证毕。

A.7 定理2.4.5的证明

不难发现, 式(2-168)中的 $-1/\xi_k > \xi_0 / (|\xi_c|^2 - \xi_0\xi_k)$ 等价于

$$(|\xi_c|^2 - \xi_0\xi_k)\xi_k < 0 \tag{A-95}$$

如果 $\mathbf{T}_{k-1} \in \mathbb{S}_{++}^N$, 我们有 $\mathbf{T}_{k-1}^{-1} \in \mathbb{S}_{++}^N$ 。因此, 由式(2-150b)得到

$$\xi_k > 0 \tag{A-96}$$

\mathbf{T}_{k-1}^{-1} 的乔利斯基分解为 $\mathbf{T}_{k-1}^{-1} = \mathbf{\Xi}\mathbf{\Xi}^H$, 其中 $\mathbf{\Xi}$ 为可逆矩阵。如果 $\mathbf{a}(\theta_0) \neq \varrho\mathbf{a}(\theta_k)$ 对任意 $\varrho \in \mathbb{C}$ 均成立, 我们有 $\mathbf{\Xi}^H\mathbf{a}(\theta_0) \neq \varrho\mathbf{\Xi}^H\mathbf{a}(\theta_k)$ for $\forall \varrho \in \mathbb{C}$ 。然后, 利用柯西-施瓦茨不等式可以得到

$$|\xi_c|^2 - \xi_0\xi_k = |(\mathbf{\Xi}^H\mathbf{a}(\theta_k))^H(\mathbf{\Xi}^H\mathbf{a}(\theta_0))|^2 - \|\mathbf{\Xi}^H\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2 \cdot \|\mathbf{\Xi}^H\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^2 < 0 \tag{A-97}$$

因此, 由定理2.4.4, 我们得到 $\beta_{k,\star} = \beta_{k,r}$ 。

由式(2-164), 式(2-169), 以及 $\beta_{k,\star} = \beta_{k,r}$, 我们有

$$\beta_{k,\star} = \frac{|\xi_c| - \sqrt{\rho_k} \xi_0}{\sqrt{\rho_k} (\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2)} \quad (\text{A-98})$$

式(2-175)证毕。

而且, 如果 $\mathbf{T}_{k-1} \in \mathbb{S}_{++}^N$, 由等式 $\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_{k-1} + \beta_{k,\star} \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k)$ 可以得到

$$\mathbf{T}_k \in \mathbb{S}_{++}^N \Leftrightarrow \mathbf{T}_{k-1} + \beta_{k,\star} \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) \in \mathbb{S}_{++}^N \quad (\text{A-99a})$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{I} + \beta_{k,\star} \mathbf{T}_{k-1}^{-1/2} \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{T}_{k-1}^{-1/2} \in \mathbb{S}_{++}^N \quad (\text{A-99b})$$

$$\Leftrightarrow 1 + \beta_{k,\star} \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_k) > 0 \quad (\text{A-99c})$$

$$\Leftrightarrow \beta_{k,\star} > -1/\xi_k \quad (\text{A-99d})$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\xi_c| \xi_k - \sqrt{\rho_k} |\xi_c|^2}{\sqrt{\rho_k} (\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2) \xi_k} > 0 \quad (\text{A-99e})$$

$$\Leftrightarrow \rho_k < \xi_k^2 / |\xi_c|^2 \quad (\text{A-99f})$$

定理2.4.5证毕。

A.8 定理2.4.7的证明

由权向量更新步骤可知

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \gamma_k \mathbf{v}_k = \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) - \beta_k \xi_c \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_k) / (1 + \beta_k \xi_k) \quad (\text{A-100})$$

基于此, 可以得到 $\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_k = \xi_0 - \beta_k |\xi_c|^2 / (1 + \beta_k \xi_k)$, 以及

$$|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 = |(\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2) \beta_k + \xi_0|^2 / |1 + \beta_k \xi_k|^2 \quad (\text{A-101})$$

另外, 由式(A-100)可知 $\mathbf{w}_k^H \mathbf{T}_{k-1} = \mathbf{a}^H(\theta_0) - \beta_k^* \xi_c^* \mathbf{a}^H(\theta_k) / (1 + \beta_k^* \xi_k)$ 。进一步有

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k^H \mathbf{T}_{k-1} \mathbf{w}_k &= \left(\mathbf{a}^H(\theta_0) - \beta_k^* \xi_c^* \mathbf{a}^H(\theta_k) / (1 + \beta_k^* \xi_k) \right) \cdot \\ &\quad \left(\mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) - \beta_k \xi_c \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_k) / (1 + \beta_k \xi_k) \right) \\ &= \frac{(\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2) \xi_k |\beta_k + \frac{1}{\xi_k}|^2 + \frac{|\xi_c|^2}{\xi_k}}{|1 + \beta_k \xi_k|^2} \end{aligned} \quad (\text{A-102})$$

结合式(A-101)和式(A-102), 可以得到

$$\frac{|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{\mathbf{w}_k^H \mathbf{T}_{k-1} \mathbf{w}_k} = \frac{\left(\frac{\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2}{\xi_k} \right) \cdot R_\beta^2}{\left| \beta_k + \frac{1}{\xi_k} \right|^2 + \frac{|\xi_c|^2}{(\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2) \xi_k^2}} \quad (\text{A-103})$$

上式中用到了 $\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2 > 0$ (见式(A-97)) 以及 $\left| \beta_k + \frac{\xi_0}{\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2} \right| = R_\beta$ 。显然, 最

大化 $|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 / (\mathbf{w}_k^H \mathbf{T}_{k-1} \mathbf{w}_k)$ 等价于最小化 $|\beta_k + \frac{1}{\xi_k}|$ 。定义

$$\mathbf{f} \triangleq \begin{bmatrix} -1/\xi_k & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-104})$$

则可以将问题(2-178)重新表述为

$$\underset{\beta_k}{\text{minimize}} \quad \|[\Re(\beta_k) \ \Im(\beta_k)]^T - \mathbf{f}\|_2 \quad (\text{A-105a})$$

$$\text{subject to} \quad [\Re(\beta_k) \ \Im(\beta_k)]^T \in \mathbb{C}_\beta \quad (\text{A-105b})$$

另外，将约束(2-166c)代入 G_k 中并利用定理2.4.3的结论，可以将 G_k 表示为

$$G_k = |\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)| \quad (\text{A-106a})$$

$$= \left| \xi_0 - \frac{\beta_k |\xi_c|^2}{1 + \beta_k \xi_k} \right| \quad (\text{A-106b})$$

$$= \left| \frac{\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2}{\xi_k} \right| \cdot \left| \frac{\beta_k - \xi_0 / (|\xi_c|^2 - \xi_0 \xi_k)}{\beta_k - (-1/\xi_k)} \right| \quad (\text{A-106c})$$

$$= \left| \frac{\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2}{\xi_k} \right| \cdot \frac{\|[\Re(\beta_k) \ \Im(\beta_k)]^T - \mathbf{c}_\beta\|_2}{\|[\Re(\beta_k) \ \Im(\beta_k)]^T - \mathbf{f}\|_2} \quad (\text{A-106d})$$

$$= \frac{|(\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2) \cdot R_\beta / \xi_k|}{\|[\Re(\beta_k) \ \Im(\beta_k)]^T - \mathbf{f}\|_2} \quad (\text{A-106e})$$

注意到上式(A-106a)是式(2-149)的中间结果，而上式(A-106d)可以由定理2.4.3得到。由于 $|(\xi_0 \xi_k - |\xi_c|^2) \cdot R_\beta / \xi_k|$ 为常数，由式(A-106e)不难发现问题(2-166)与问题(A-105)等价。

因此，如果 $\mathbf{T}_{k-1} \in \mathbb{S}_{++}^N$ 满足，则问题(2-166)与问题(2-178)有相同的解。定理2.4.7证毕。

A.9 式(2-184)的推导

下面首先证明

$$\mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_t) = \mathbf{A}(\theta_t, \theta_{k-1}, \dots, \theta_1) \mathbf{d}_k(\theta_t), \forall \theta_t \in \mathbb{R} \quad (\text{A-107})$$

其中 $\mathbf{d}_k(\theta_t)$ 的首元素为1。

我们使用数学归纳法证明(A-107)。当 $k=1$ 时，由于 $\mathbf{T}_0 = \mathbf{I}$ ，式(A-107)显然成立，此时 $\mathbf{d}_1(\theta_t)$ 退化为常数1。

假设当 $k=p$ 时，式(A-107)成立，即

$$\mathbf{T}_{p-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_s) = \mathbf{A}(\theta_s, \theta_{p-1}, \dots, \theta_1) \mathbf{d}_p(\theta_s), \forall \theta_s \in \mathbb{R} \quad (\text{A-108})$$

其中 $\mathbf{d}_p(\theta_s)$ 为 $p \times 1$ 维向量，其首元素为1。

当 $k = p + 1$ 时, 下面需要证明

$$\mathbf{T}_p^{-1}\mathbf{a}(\theta_r) = \mathbf{A}(\theta_r, \theta_p, \dots, \theta_1)\mathbf{d}_{p+1}(\theta_r), \forall \theta_r \in \mathbb{R} \quad (\text{A-109})$$

其中 $\mathbf{d}_{p+1}(\theta_r)$ 为 $(p+1) \times 1$ 维向量, 其首元素为 1。

为了证明等式(A-109), 首先注意到 $k = p$ 时等式(2-134)成立, 结合式(A-108)可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_p^{-1}\mathbf{a}(\theta_r) &= \mathbf{T}_{p-1}^{-1}\mathbf{a}(\theta_r) + \nu\mathbf{T}_{p-1}^{-1}\mathbf{a}(\theta_p) \\ &= \mathbf{A}(\theta_r, \theta_{p-1}, \dots, \theta_1)\mathbf{d}_p(\theta_r) + \nu\mathbf{A}(\theta_p, \theta_{p-1}, \dots, \theta_1)\mathbf{d}_p(\theta_p) \\ &= \mathbf{A}(\theta_r, \theta_p, \dots, \theta_1)\mathbf{d}_{p+1}(\theta_r), \forall \theta_r \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (\text{A-110})$$

其中

$$\nu = -\beta_p \mathbf{a}^H(\theta_p) \mathbf{T}_{p-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_r) / [1 + \beta_p \mathbf{a}^H(\theta_p) \mathbf{T}_{p-1}^{-1} \mathbf{a}(\theta_p)] \quad (\text{A-111})$$

式(A-110)中 $\mathbf{d}_{p+1}(\theta_r)$ 为 $(p+1) \times 1$ 维向量, 满足

$$\mathbf{d}_{p+1}(\theta_r) = [\mathbf{d}_p(\theta_r)_1, 0, \mathbf{d}_p(\theta_r)_2, \dots, \mathbf{d}_p(\theta_r)_p]^T + \nu [0, \mathbf{d}_p(\theta_p)_p, \mathbf{d}_p(\theta_r)_{p-1}, \dots, \mathbf{d}_p(\theta_r)_1]^T$$

其中 $\mathbf{d}_p(\theta_r)_i$ 表示 $\mathbf{d}_p(\theta_r)$ 的第 i 个元素。

令 $\theta_t = \theta_k$, 将式(A-107)代入式(2-146c) 可以得到式(2-184)。证毕。

A.10 推论2.4.1的证明

在OPARC的首步骤权向量更新中, 由于 $\mathbf{T}_0 = \mathbf{I}$ 以及 $\mathbf{H}_1 = \mathbf{Q}_1$, 不难得出 $\mathbb{C}_\gamma = \mathbb{C}_\mu$ 。由于 $[\Re(\gamma_{1,a}), \Im(\gamma_{1,a})]^T$ 在集合 \mathbb{C}_γ 中具有最小模值, 因此 $\mu_{1,*} = \gamma_{1,a}$ 。另外, 将 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}(\theta_1)$ 和 $\mathbf{w}_0 = \mathbf{a}(\theta_0)$ 代入式 (2-141) 得到 $\mathbf{H}_1(1,2) = (\|\mathbf{a}(\theta_1)\|_2^2 - \rho_1 \|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2) \cdot \mathbf{a}^H(\theta_0)\mathbf{a}(\theta_1)$ 以及 $\mathbf{H}_1(2,2) = \|\mathbf{a}(\theta_1)\|_2^4 - \rho_1 |\mathbf{a}^H(\theta_1)\mathbf{a}(\theta_0)|^2$ 。由式(2-143), 我们有

$$\mathbf{c}_\gamma(1) = \frac{-\Re[\mathbf{a}^H(\theta_0)\mathbf{a}(\theta_1)](\|\mathbf{a}(\theta_1)\|_2^2 - \rho_1 \|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2)}{\|\mathbf{a}(\theta_1)\|_2^4 - \rho_1 |\mathbf{a}^H(\theta_1)\mathbf{a}(\theta_0)|^2} \quad (\text{A-112})$$

与此同时, 由于 $\mathbf{T}_0 = \mathbf{I}$, 可以由式(2-153)得到 $\zeta = \text{sign}(\|\mathbf{a}(\theta_1)\|_2^2 - \rho_1 \|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2)$ 。最终, 由式(2-152), 如果 $\rho_1 \leq \|\mathbf{a}(\theta_1)\|_2^2 / \|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2$, 则有 $\gamma_{1,*} = \gamma_{1,a}$ 。否则, 可以得到 $\gamma_{1,*} = \gamma_{1,b}$ 。由于 $\mu_{1,*} = \gamma_{1,a}$, 推论2.4.1证毕。

A.11 式(2-187)和式(2-189)的推导

由式(2-185)和式(2-186)的等价性有 $\mathbf{b}_k = -(\mathbf{I} + \check{\Sigma}_k \mathbf{A}_k^H \mathbf{A}_k)^{-1} \check{\Sigma}_k \mathbf{A}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)$ 。将该等式左右两边同时左乘 $\mathbf{I} + \check{\Sigma}_k \mathbf{A}_k^H \mathbf{A}_k$ 得到 $\check{\Sigma}_k \mathbf{A}_k^H (\mathbf{a}(\theta_0) + \mathbf{A}_k \mathbf{b}_k) = -\mathbf{b}_k$ 。由于 $\check{\Sigma}_k$ 为

对角矩阵且 $\check{\mathbf{w}}_k = \mathbf{a}(\theta_0) + \mathbf{A}_k \mathbf{b}_k$, 可以得到

$$\check{\Sigma}_k = \text{Diag}(-\mathbf{b}_k \oslash (\mathbf{A}_k^H \check{\mathbf{w}}_k)) \quad (\text{A-113})$$

而且, 由于 $\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \mu_k \mathbf{a}(\theta_k)$, $\mathbf{b}_k = [\mathbf{b}_{k-1}^T \ \mu_k]^T$, $\mathbf{A}_k = [\mathbf{A}_{k-1} \ \mathbf{a}(\theta_k)]$, 可以将式(A-113)重新表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \oslash \text{diag}(\check{\Sigma}_k) &= -(\mathbf{A}_k^H \check{\mathbf{w}}_k) \oslash \mathbf{b}_k \\ &= -\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k-1}^H \check{\mathbf{w}}_k \\ \mathbf{a}^H(\theta_k) \check{\mathbf{w}}_k \end{bmatrix} \oslash \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{k-1} \\ \mu_k \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{k-1}^H \check{\mathbf{w}}_{k-1}) \oslash \mathbf{b}_{k-1} + (\mu_k \mathbf{A}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_k)) \oslash \mathbf{b}_{k-1} \\ \mathbf{a}^H(\theta_k) \check{\mathbf{w}}_{k-1} / \mu_k + \|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{1} \oslash \text{diag}(\check{\Sigma}_{k-1}) - (\mu_k \mathbf{A}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_k)) \oslash \mathbf{b}_{k-1} \\ -\mathbf{a}^H(\theta_k) \check{\mathbf{w}}_{k-1} / \mu_k - \|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-114})$$

因此可以得到下面等式

$$\frac{1}{\check{\beta}_{k,i}} = \begin{cases} \frac{1}{\check{\beta}_{k-1,i}} - \frac{\mu_k \mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{a}(\theta_k)}{\mu_i}, & 1 \leq i \leq k-1 \\ -\frac{\mathbf{a}^H(\theta_k) \check{\mathbf{w}}_{k-1}}{\mu_k} - \|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^2, & i = k \end{cases} \quad (\text{A-115})$$

由式(A-115), 不难得到式(2-187)和式(2-189)。

B.1 式(3-16)的推导

首先, 将 $\mathbf{w}_\star = \mathbf{w}_{(0)\perp} + \beta \mathbf{w}_{(0)\parallel}$ 代入到 $L_\star(\theta_i, \theta_0)$, 同时利用等式 $\mathbf{w}_{(0)\perp}^H \mathbf{a}(\theta_i) = 0$, 可以得到

$$L_\star(\theta_i, \theta_0) = \frac{|\mathbf{w}_\star^H \mathbf{a}(\theta_i)|^2}{|\mathbf{w}_\star^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} = \frac{\beta^2 |\mathbf{w}_{(0)\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_i)|^2}{|\mathbf{w}_{(0)\perp}^H \mathbf{a}(\theta_0) + \beta \mathbf{w}_{(0)\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} \quad (\text{B-1})$$

根据式(3-6), 我们有

$$\mathbf{w}_{(0)\parallel} = \frac{\mathbf{a}(\theta_i) \mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{a}(\theta_i)} \quad (\text{B-2})$$

不难验证 $\mathbf{w}_{(0)\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_0)$ 为正实数。将(B-1)中分子分母同时除以 $(\mathbf{w}_{(0)\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_0))^2$ 得到

$$L_\star(\theta_i, \theta_0) = \frac{|\mathbf{w}_{(0)\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_i)|^2}{(\mathbf{w}_{(0)\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_0))^2} \cdot \frac{\beta^2}{\left| \frac{\mathbf{w}_{(0)\perp}^H \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{w}_{(0)\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_0)} + \beta \right|^2} \quad (\text{B-3})$$

由于 $\mathbf{a}(\theta_0) = \mathbf{w}_{(0)} = \mathbf{w}_{(0)\perp} + \mathbf{w}_{(0)\parallel}$, 以及 $\mathbf{w}_{(0)\perp}^H \mathbf{w}_{(0)\parallel} = 0$, 我们有

$$\frac{\mathbf{w}_{(0)\perp}^H \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{w}_{(0)\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_0)} = \frac{\|\mathbf{w}_{(0)\perp}\|_2^2}{\|\mathbf{w}_{(0)\parallel}\|_2^2} = -\beta_p \quad (\text{B-4})$$

其中 β_p 的定义见式(3-14)。基于此, $L_\star(\theta_i, \theta_0)$ 可以进一步简化为

$$L_\star(\theta_i, \theta_0) = \mu(\theta_i, \theta_0) \cdot \frac{\beta^2}{(\beta - \beta_p)^2} \quad (\text{B-5})$$

其中 $\mu(\theta_i, \theta_0) \triangleq |\mathbf{w}_{(0)\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_i)|^2 / (\mathbf{w}_{(0)\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_0))^2 > 0$ 。因此, $L_\star(\theta_i, \theta_0)$ 对 β 的偏微分可以表示为

$$\frac{\partial L_\star(\theta_i, \theta_0)}{\partial \beta} = -2\mu(\theta_i, \theta_0) \cdot \frac{\beta \beta_p}{(\beta - \beta_p)^3} \quad (\text{B-6})$$

由于 $\mu(\theta_i, \theta_0) > 0$, $\beta_p < 0$, 可以得出

$$\frac{\partial L_\star(\theta_i, \theta_0)}{\partial \beta} \begin{cases} > 0, & \beta \in (-\infty, \beta_p) \cup (0, +\infty) \\ < 0, & \beta \in (\beta_p, 0) \end{cases} \quad (\text{B-7})$$

证毕。

B.2 式(3-24)的推导

首先证明, 如果 $0 \leq \rho_k \leq 1$, $\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k) > |\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_0)|$, 则下式成立

$$\mathbf{B}(2, 2) > 0 \quad (\text{B-8})$$

从式(2-112)中 \mathbf{B} 的表达式可知, 不等式(B-8)等价于下面不等式

$$|\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 > \rho_k |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \quad (\text{B-9})$$

由于

$$\mathbf{w}_\parallel = \frac{\mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{w}_{(k-1)}}{\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k)} \quad (\text{B-10})$$

式(B-9)可以进一步重新表示为

$$\rho_k < \frac{|\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2}{|\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} = \frac{\left| \frac{\mathbf{w}_{(k-1)}^H \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k)}{\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k)} \mathbf{a}(\theta_k) \right|^2}{\left| \frac{\mathbf{w}_{(k-1)}^H \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k)}{\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k)} \mathbf{a}(\theta_0) \right|^2} = \frac{|\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k)|^2}{|\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_0)|^2} \quad (\text{B-11})$$

显然, 如果 $\rho_k \leq 1$, $\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k) > |\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_0)|$, 我们可以得到

$$\rho_k \leq 1 < \frac{|\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k)|^2}{|\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_0)|^2} \quad (\text{B-12})$$

根据式(B-12), 不难发现式(B-11)以及式(B-8)成立。

为了得到等式(3-22)的解，我们对**B**进行如下特征值分解

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^H \quad (\text{B-13})$$

其中**Q**为酉矩阵， $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ ， λ_1 和 λ_2 为**B**的特征值。定义

$$\mathbf{y} \triangleq \mathbf{Q}^H \mathbf{z} \quad (\text{B-14})$$

则式(3-22)可以等价地表示为 $\mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{y} = 0$ ，进一步有

$$\lambda_1 |\mathbf{y}(1)|^2 + \lambda_2 |\mathbf{y}(2)|^2 = 0 \quad (\text{B-15})$$

由于 $\lambda_1 \lambda_2 = \det(\mathbf{B}) = -\rho_k |\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 \leq 0$ ，可知式(B-15)可解。将**Q**记作

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B-16})$$

由于 $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^H \mathbf{z}$ ，可以得到 $\mathbf{y}(1) = u_{11}^* + u_{21}^* \beta$ ，以及 $\mathbf{y}(2) = u_{12}^* + u_{22}^* \beta$ 。进而有

$$\begin{aligned} \lambda_1 |\mathbf{y}(1)|^2 + \lambda_2 |\mathbf{y}(2)|^2 &= \lambda_1 |u_{11}^* + u_{21}^* \beta|^2 + \lambda_2 |u_{12}^* + u_{22}^* \beta|^2 \\ &= \underbrace{\lambda_1 |u_{11}|^2 + \lambda_2 |u_{12}|^2}_{\mathbf{B}(1,1)} + \underbrace{(\lambda_1 u_{21}^* u_{11} + \lambda_2 u_{22}^* u_{12}) \beta}_{\mathbf{B}(1,2)} + \\ &\quad \underbrace{(\lambda_1 u_{11}^* u_{21} + \lambda_2 u_{12}^* u_{22}) \beta}_{\mathbf{B}(2,1)} + \underbrace{(\lambda_1 |u_{21}|^2 + \lambda_2 |u_{22}|^2)}_{\mathbf{B}(2,2)} \beta^2 \\ &= \mathbf{B}(1,1) + 2\Re(\mathbf{B}(1,2))\beta + \mathbf{B}(2,2)\beta^2 \end{aligned} \quad (\text{B-17})$$

上式推导中利用了下面等式组

$$\mathbf{B}(1,1) = \lambda_1 |u_{11}|^2 + \lambda_2 |u_{12}|^2 \quad (\text{B-18a})$$

$$\mathbf{B}(1,2) = \lambda_1 u_{21}^* u_{11} + \lambda_2 u_{22}^* u_{12} \quad (\text{B-18b})$$

$$\mathbf{B}(2,1) = \lambda_1 u_{11}^* u_{21} + \lambda_2 u_{12}^* u_{22} \quad (\text{B-18c})$$

$$\mathbf{B}(2,2) = \lambda_1 |u_{21}|^2 + \lambda_2 |u_{22}|^2 \quad (\text{B-18d})$$

因此，式(B-15)可以重新表述为下面二次等式

$$\mathbf{B}(1,1) + 2\Re(\mathbf{B}(1,2))\beta + \mathbf{B}(2,2)\beta^2 = 0 \quad (\text{B-19})$$

由**B**的表达式以及式(B-8)，可以得到

$$\Re^2(\mathbf{B}(1,2)) - \mathbf{B}(1,1)\mathbf{B}(2,2) \geq 0 \quad (\text{B-20})$$

因此，式(B-19)有如下解析解

$$\beta_{a,b} = (-\Re(\mathbf{B}(1,2)) \pm d)/\mathbf{B}(2,2) \quad (\text{B-21})$$

其中 $d = \sqrt{\Re^2(\mathbf{B}(1, 2)) - \mathbf{B}(1, 1)\mathbf{B}(2, 2)}$ 。证毕。

B.3 引理3.2.1的证明

简单起见，下面省略 β 和 $\tilde{\beta}$ 的下标 k 。为了证明引理3.2.1，下面找出一个特定的 $\tilde{\beta} \in \mathbb{C}$ 和式(3-27)中相应的 $\tilde{\mathbf{w}}_k$ 使得式(3-28)成立。

具体地，对于任意给定的 $\beta \in \mathbb{R}$ ，我们取 $\tilde{\beta}$ 为

$$\tilde{\beta} = \beta + j\zeta \quad (\text{B-22})$$

其中 ζ 定义为

$$\zeta \triangleq 2\beta^2\eta_i / (|\xi_{\perp}|^2 + 2\beta\eta_r) \in \mathbb{R} \quad (\text{B-23})$$

上式中 $\eta_r = \Re(\xi_{\parallel}\xi_{\perp}^*)$, $\eta_i = \Im(\xi_{\parallel}\xi_{\perp}^*)$, $\xi_{\parallel} = \mathbf{w}_{\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_0)$, $\xi_{\perp} = \mathbf{w}_{\perp}^H \mathbf{a}(\theta_0)$ 。由于 β 和 ζ 为实数，我们有

$$\Re((\beta - j\zeta)\xi_{\parallel}\xi_{\perp}^*) = \beta\eta_r + \zeta\eta_i \quad (\text{B-24})$$

另一方面，不难由式(B-23)得到 $2\beta^2\eta_i = \zeta(|\xi_{\perp}|^2 + 2\beta\eta_r)$ ，进一步有 $2\beta^2\zeta\eta_i + 2\beta^3\eta_r = \zeta^2(|\xi_{\perp}|^2 + 2\beta\eta_r) + 2\beta^3\eta_r$ ，或等价地

$$2\beta^2(\beta\eta_r + \zeta\eta_i) = \zeta^2|\xi_{\perp}|^2 + 2(\beta^2 + \zeta^2)\beta\eta_r \quad (\text{B-25})$$

结合式(B-24)和式(B-25)，可以得到

$$\underbrace{\beta^2(|\xi_{\perp}|^2 + (\beta^2 + \zeta^2)|\xi_{\parallel}|^2 + 2\Re((\beta - j\zeta)\xi_{\parallel}\xi_{\perp}^*))}_{|\xi_{\perp} + (\beta - j\zeta)\xi_{\parallel}|^2} = (\beta^2 + \zeta^2) \underbrace{(|\xi_{\perp}|^2 + \beta^2|\xi_{\parallel}|^2 + 2\beta\eta_r)}_{|\xi_{\perp} + \beta\xi_{\parallel}|^2}$$

以及

$$\frac{(\beta^2 + \zeta^2)}{|\xi_{\perp} + (\beta - j\zeta)\xi_{\parallel}|^2} = \frac{\beta^2}{|\xi_{\perp} + \beta\xi_{\parallel}|^2} \quad (\text{B-26})$$

将 $\tilde{\mathbf{w}}_k = \mathbf{w}_{\perp} + \tilde{\beta}\mathbf{w}_{\parallel}$ 代入 $L_k(\theta_k, \theta_0)$ 中，同时结合式(B-26)，我们有

$$L_k(\theta_k, \theta_0) \Big|_{\mathbf{w}=\tilde{\mathbf{w}}_k} = \frac{(\beta^2 + \zeta^2)|\mathbf{w}_{\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2}{|\xi_{\perp} + (\beta - j\zeta)\xi_{\parallel}|^2} = \frac{\beta^2|\mathbf{w}_{\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2}{|\xi_{\perp} + \beta\xi_{\parallel}|^2} = L_k(\theta_k, \theta_0) \Big|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_k}$$

上式表明式(3-28)成立。而且，由式(B-22)可知，只要 $\beta \neq 0$, $\eta_i \neq 0$ ，则 $\tilde{\beta} \notin \mathbb{R}$ 。引理3.2.1证毕。

B.4 定理3.2.2的证明

将式(3-36b)代入式(3-36a)中，结合约束条件 $L_k(\theta_k, \theta_0) = \rho_k$ ，可以得到

$$G(\mathbf{w}_k) \propto J(\beta_k) \triangleq \frac{|\beta_k|^2 |\mathbf{w}_{\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2}{\|\mathbf{w}_{\perp}\|_2^2 + |\beta_k|^2 \|\mathbf{w}_{\parallel}\|_2^2} \quad (\text{B-27})$$

在此基础上，不难得到

$$\frac{\partial J(\beta_k)}{\partial |\beta_k|^2} = \frac{|\mathbf{w}_{\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 \|\mathbf{w}_{\perp}\|_2^2}{\left(\|\mathbf{w}_{\perp}\|_2^2 + |\beta|^2 \|\mathbf{w}_{\parallel}\|_2^2\right)^2} \geq 0 \quad (\text{B-28})$$

上式表明 $J(\beta_k)$ 随着 $|\beta_k|$ 的增加单调非减。从而有

$$\beta_{k,\triangleright} = \arg \max_{\beta_k \in \mathbb{C}_{\beta_k}} |\beta_k| \quad (\text{B-29})$$

\mathbb{C}_{β_k} 中具有最大模值的 β_k 是圆 \mathbb{C}_{β_k} 与穿过 O 的 \mathbf{c}_{β_k} 的直线的交点。数学上，可以得到

$$\beta_{k,\triangleright} = (|\mathbf{c}_{\beta_k}| + R_{\beta_k}) e^{j\angle g(\mathbf{c}_{\beta_k})} \quad (\text{B-30})$$

定理3.2.2证毕。

B.5 定理3.2.3的证明

下面分3步证明定理3.2.3。

第1步： 第1步中，我们将证明问题(3-39)的最优解（记为 $\mathbf{w}_{\triangleright}$ ）满足

$$\mathbf{w}_{\triangleright} \in \mathcal{R}([\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_k)]) \quad (\text{B-31})$$

为了证明(B-31)，首先注意到 N 维复空间 \mathbb{C}^N 满足

$$\mathbb{C}^N = \mathcal{R}([\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_k)]) \oplus \mathcal{R}^\perp([\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_k)]) \quad (\text{B-32})$$

换言之，对于 $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{C}^N$ ，可以将 \mathbf{w} 表示为

$$\mathbf{w} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 \quad (\text{B-33})$$

其中 $\mathbf{s}_1 \in \mathcal{R}([\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_k)])$ ， $\mathbf{s}_2 \in \mathcal{R}^\perp([\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_k)])$ ， $\mathbf{s}_1^H \mathbf{s}_2 = 0$ 。注意到

$$\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_k) = \mathbf{s}_1^H \mathbf{a}(\theta_k), \quad \|\mathbf{w}\|_2^2 = \|\mathbf{s}_1\|_2^2 + \|\mathbf{s}_2\|_2^2 \quad (\text{B-34})$$

不难发现，为了使式(3-39a)最大化，应该置 \mathbf{s}_2 为零。式(B-31)证毕。

第2步： 第2步中，我们将证明

$$\mathcal{R}([\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_k)]) = \mathcal{R}([\mathbf{w}_{\perp}, \mathbf{w}_{\parallel}]) \quad (\text{B-35})$$

为了证明上式，由 \mathbf{w}_\perp 和 \mathbf{w}_\parallel 的表达式可以得到

$$[\mathbf{w}_\perp, \mathbf{w}_\parallel] = [\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_k)]\mathbf{T} \quad (\text{B-36})$$

其中 \mathbf{T} 满足

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\mathbf{a}^H(\theta_k)\mathbf{a}(\theta_0)}{\|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^2} & \frac{\mathbf{a}^H(\theta_k)\mathbf{a}(\theta_0)}{\|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^2} \end{bmatrix} \quad (\text{B-37})$$

如果 $\mathbf{a}^H(\theta_k)\mathbf{a}(\theta_0) \neq 0$ ，可以发现 \mathbf{T} 为可逆矩阵。因此，式(B-36)表明 $[\mathbf{w}_\perp, \mathbf{w}_\parallel]$ 与 $[\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_k)]$ 张成相同的列空间。式(B-35)证毕。

第3步：我们证明完成定理3.2.3的证明，通过证明下式成立

$$\mathbf{w}_\triangleright = c \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp & \mathbf{w}_\parallel \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_{k,*} \end{bmatrix}^T, \quad c \neq 0 \quad (\text{B-38})$$

首先，回忆式(B-31)可以将问题(3-39)重新表述为

$$\max_{c_1, c_2 \in \mathbb{C}} G(\mathbf{w}) \quad (\text{B-39a})$$

$$\text{subject to } |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 / |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 = \rho_k \quad (\text{B-39b})$$

$$\mathbf{w} = c_1 \mathbf{a}(\theta_0) + c_2 \mathbf{a}(\theta_k) \quad (\text{B-39c})$$

需要指出的是上式中 $c_1 \neq 0$ ，否则将得到

$$\rho_k = |\mathbf{w}_\triangleright^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 / |\mathbf{w}_\triangleright^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 = |\mathbf{a}^H(\theta_k)\mathbf{a}(\theta_k)|^2 / |\mathbf{a}^H(\theta_k)\mathbf{a}(\theta_0)|^2 = \tilde{\rho}_k > 1 \quad (\text{B-40})$$

上式与 $\rho_k \leq 1$ 的假设相矛盾。根据式(B-36)， $\mathbf{w} = c_1 \mathbf{a}(\theta_0) + c_2 \mathbf{a}(\theta_k)$ 可以等价地表示为

$$\mathbf{w} = [\mathbf{w}_\perp, \mathbf{w}_\parallel] \mathbf{T}^{-1} [c_1, c_2]^T = c_1 [\mathbf{w}_\perp, \mathbf{w}_\parallel] [1, \gamma]^T \quad (\text{B-41})$$

其中 γ 为某参数，由 $c_1, c_2, \mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_k)$ 确定。与其解问题(B-39)或原问题(3-39)，我们建立下面问题：

$$\max_{\gamma \in \mathbb{C}} G(\mathbf{w}) \quad (\text{B-42a})$$

$$\text{subject to } |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 / |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 = \rho_k \quad (\text{B-42b})$$

$$\mathbf{w} = [\mathbf{w}_\perp, \mathbf{w}_\parallel] [1, \gamma]^T \quad (\text{B-42c})$$

上述问题与问题(3-36)等价。结合定理3.2.2的结果可以发现， \mathbf{w}_k 为问题(3-39)的最优解（特定合理假设的前提下）。定理3.2.3证毕。

B.6 定理3.2.4的证明

下面首先证明

$$T(\beta_{k,\star}) = \mu_{k,s} \Leftrightarrow \mathbf{c}_{\beta_k}(2) = 0 \text{ and } \mathbf{c}_{\beta_k}(1) \in [0, 1] \quad (\text{B-43})$$

为此, 定义 $\hat{\beta}_k \triangleq T^{-1}(\mu_{k,s})$ 。则不难得到

$$\mu_{k,s} = \arg \min_{\mu_k \in \mathbb{C}_{\mu_k}} |\mu_k| \Leftrightarrow \quad (\text{B-44a})$$

$$T(\hat{\beta}_k) = \arg \min_{T(\beta_k) \in \mathbb{C}_{\mu_k}} |T(\beta_k)| \Leftrightarrow \quad (\text{B-44b})$$

$$\hat{\beta}_k = \arg \min_{\beta_k \in \mathbb{C}_{\beta_k}} |T(\beta_k)| \Leftrightarrow \quad (\text{B-44c})$$

$$\hat{\beta}_k = \arg \min_{\beta_k \in \mathbb{C}_{\beta_k}} |\beta_k - 1| \quad (\text{B-44d})$$

由定理3.2.2可知, $\beta_{k,\star}$ 满足

$$\beta_{k,\star} = \arg \max_{\beta_k \in \mathbb{C}_{\beta_k}} |\beta_k| \quad (\text{B-45})$$

结合式(B-44)和(B-45)可以发现, $\mu_{k,s} = T(\beta_{k,\star})$ (或等价地 $\hat{\beta}_k = \beta_{k,\star}$) 当且仅当

$$\arg \min_{\beta_k \in \mathbb{C}_{\beta_k}} |\beta_k - 1| = \arg \max_{\beta_k \in \mathbb{C}_{\beta_k}} |\beta_k| \quad (\text{B-46})$$

由定理3.2.1可知, 式(B-46)成立当且仅当下面两个条件成立。

第一个条件为

$$\mathbf{c}_{\beta_k}(2) = 0 \quad (\text{B-47})$$

上式成立是因为式(B-46)等号右端的最优解为圆 \mathbb{C}_{β_k} 与连接 \mathbf{c}_{β_k} 和 \mathbf{O} 的直线的交点, 而式(B-46)等号左端的最优解为圆 \mathbb{C}_{β_k} 与连接 \mathbf{c}_{β_k} 和 $[1, 0]^T$ 的直线的交点。为了得到一个公共的 β_k 使得式(B-46)等号左右两端同时最优化, 需要 \mathbf{O} , \mathbf{c}_{β_k} 和 $[1, 0]^T$ 三点共线, 即 $\mathbf{c}_{\beta_k}(2) = 0$, 否则, 式(B-46)不能成立。

在第一个条件(即式(B-47))成立的基础上, 使式(B-46)成立的第二个条件为

$$\mathbf{c}_{\beta_k}(1) \in [0, 1] \quad (\text{B-48})$$

不难发现, 式(B-46)只有在式(B-47)和(B-48)同时成立时才能满足。

反之可知, 如果式(B-47)和(B-48)成立, 则式(B-46)成立。综上, $T(\beta_{k,\star}) = \mu_{k,s} = \mu_{k,\star}$ 当且仅当 (B-47)和(B-48)满足。 $T(\beta_{k,\star}) = \mu_{k,l}$ 可以进行类似证明, 这里省略。

另外, 如果 $\mathbf{c}_{\beta_k}(2) = 0$, $\angle g(\mathbf{c}_{\beta_k})$ 将等于0或1。结合式(3-37)中 $\beta_{k,\star}$ 的表达式, 不难发现如果 $T(\beta_{k,\star}) \in \{\mu_{k,s}, \mu_{k,l}\}$, 则 $\beta_{k,\star} \in \mathbb{R}$ 。定理3.2.4证毕。

B.7 推论3.2.1的证明

下面分3步证明推论3.2.1。

第1步： 第1步我们证明，如果 $\mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{a}(\theta_0)$ ，则

$$\mathbf{B}_k(1, 2) \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{B}_k(1, 2) \leq 0 \quad (\text{B-49})$$

为了证明(B-49)，将 \mathbf{w}_{k-1} 代入 $\mathbf{B}_k(1, 2)$ 得到

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{B}_k(1, 2)}{-\rho_k} &= \mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_\parallel \\ &= (\mathbf{w}_{k-1} - \mathbf{w}_\parallel)^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_\parallel \\ &= \frac{\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2 \cdot |\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{a}(\theta_k)|^2}{\|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^2} - \frac{|\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{a}(\theta_k)|^4}{\|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^4} \end{aligned} \quad (\text{B-50})$$

上式表明 $\mathbf{B}_k(1, 2) \in \mathbb{R}$ 。而且，由式(B-50)可以看出， $\mathbf{B}_k(1, 2) \leq 0$ 等价于

$$\frac{\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2 \cdot |\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{a}(\theta_k)|^2}{\|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^2} \geq \frac{|\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{a}(\theta_k)|^4}{\|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^4} \quad (\text{B-51})$$

或者更简洁地，

$$\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2 \cdot \|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^2 \geq |\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{a}(\theta_k)|^2 \quad (\text{B-52})$$

由于(B-52)是柯西-施瓦茨不等式的直接结果，可知 $\mathbf{B}_k(1, 2) \leq 0$ 成立。式(B-49)证毕。

第2步： 第2步中我们将证明，如果 $\rho_k < \tilde{\rho}_k$ ，则

$$\mathbf{B}_k(2, 2) > 0 \quad (\text{B-53})$$

为了证明上式，回忆 $\mathbf{B}_k(2, 2)$ 的表达式，可以将式 (B-53) 转换为

$$|\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 > \rho_k |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2 \quad (\text{B-54})$$

由于

$$\mathbf{w}_\parallel = \frac{\mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{w}_{k-1}}{\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k)} \quad (\text{B-55})$$

可以将式(B-54)进一步表示为

$$\rho_k < \frac{|\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2}{|\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} = \frac{\left| \frac{\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k)}{\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k)} \mathbf{a}(\theta_k) \right|^2}{\left| \frac{\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k)}{\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k)} \mathbf{a}(\theta_0) \right|^2} = \tilde{\rho}_k \quad (\text{B-56})$$

不难发现，如果 $\rho_k < \tilde{\rho}_k$ ，则式 (B-53) 成立。

由式(2-44)中 \mathbf{c}_{β_k} 的表达式以及**第1步**和**第2步**的结论可知，如果 $\mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{a}(\theta_0)$ ，

$0 \leq \rho_k < \tilde{\rho}_k$, 则有

$$\mathbf{c}_{\beta_k}(2) = 0 \text{ and } \mathbf{c}_{\beta_k}(1) \geq 0 \quad (\text{B-57})$$

第3步: 第3步中将证明如果 $\mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{a}(\theta_0)$, $0 \leq \rho_k \leq \min\{\tilde{\rho}_k, \bar{\rho}_k\}$, 且 $\rho_k \neq \tilde{\rho}_k$, 则有

$$\mathbf{c}_{\beta_k}(1) \leq 1 \quad (\text{B-58})$$

为了证明式(B-58), 首先注意到 $\rho_k < \tilde{\rho}_k$ 意味着 $\mathbf{B}_k(2, 2) > 0$ 。则 $\mathbf{c}_{\beta_k}(1) \leq 1$ 可以重新表述为

$$-\Re(\mathbf{B}_k(1, 2)) = -\mathbf{B}_k(1, 2) \leq \mathbf{B}_k(2, 2) \quad (\text{B-59})$$

上式利用了 $\mathbf{B}_k(1, 2) \in \mathbb{R}$ 。回忆式(B-50)和 $\mathbf{B}_k(2, 2)$ 的表达式, 可以将(B-59)重新整理为

$$\rho_k \mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\parallel} \leq |\mathbf{w}_{\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 \quad (\text{B-60})$$

或者进一步表示为

$$\frac{\rho_k \|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2 \cdot |\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{a}(\theta_k)|^2}{\|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^2} \leq |\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{a}(\theta_k)|^2 \quad (\text{B-61})$$

实际上, 式(B-61)等价于 $\rho_k \leq \bar{\rho}_k$ 。因此, 如果 $\mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{a}(\theta_0)$, $0 \leq \rho_k \leq \min\{\tilde{\rho}_k, \bar{\rho}_k\}$, $\rho_k \neq \tilde{\rho}_k$, 则 $\mathbf{c}_{\beta_k}(1) \leq 1$ 。

结合式(B-57)可知, 如果 $\mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{a}(\theta_0)$, $0 \leq \rho_k \leq \min\{\tilde{\rho}_k, \bar{\rho}_k\}$, $\rho_k \neq \tilde{\rho}_k$, 则有 $\mathbf{c}_{\beta_k}(2) = 0$, $\mathbf{c}_{\beta_k}(1) \in [0, 1]$ 。根据定理3.2.4, 可以得到 $T(\beta_{k,*}) = \mu_{k,s} = \mu_{k,*}$, 即 C²-WORD 与 A²RC 得到相同的权向量 \mathbf{w}_k 。推论3.2.1证毕。

B.8 推论3.2.2的证明

证明推论3.2.2之前, 首先介绍下面关于集合 \mathbb{V} 的性质 \mathcal{P} :

$$\mathcal{P}: \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{V}, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 \in \mathbb{V}$$

上述性质 \mathcal{P} 不难由集合 \mathbb{V} 的定义得到。下面分3步证明推论3.2.2。

第1步: 第1步中将证明

$$\Im(\mathbf{v}_1^H \mathbf{v}_2) = 0, \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{V} \quad (\text{B-62})$$

不失一般性, 下面假设 N 为偶数, 奇数情况的证明类似。则对于 $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$, 将其相关向量 \mathbf{d} 定义为

$$\mathbf{d} \triangleq [\mathbf{v}(1) \ \mathbf{v}(2) \ \cdots \ \mathbf{v}(N/2)]^T \quad (\text{B-63})$$

由集合 \mathbb{V} 的定义不难得到

$$\begin{bmatrix} \Re(\mathbf{v}) \\ \Im(\mathbf{v}) \end{bmatrix} = \mathbf{G}_1 \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{d}) \\ \Im(\mathbf{d}) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Im(\mathbf{v}) \\ -\Re(\mathbf{v}) \end{bmatrix} = \mathbf{G}_2 \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{d}) \\ \Im(\mathbf{d}) \end{bmatrix} \quad (\text{B-64})$$

其中 \mathbf{G}_1 和 \mathbf{G}_2 定义为

$$\mathbf{G}_1 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{J} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{J} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{B-65})$$

上式中 \mathbf{I} 为 $N/2 \times N/2$ 维单位矩阵， \mathbf{J} 为 $N/2 \times N/2$ 维交换矩阵，满足

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix} \quad (\text{B-66})$$

可以验证 $\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_2 = \mathbf{0}$ 。则对于 $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{V}$ ，满足

$$\Im(\mathbf{v}_1^H \mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{d}_1^T) & \Im(\mathbf{d}_1^T) \end{bmatrix} \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_2 \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{d}_2) \\ \Im(\mathbf{d}_2) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B-67})$$

其中 \mathbf{d}_1 和 \mathbf{d}_2 分别为 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 的相关向量。式(B-62)证毕。

第2步：下面证明如果 $0 \leq \rho_k < \tilde{\rho}_k$ ，则 $\mathbf{B}_k(2, 2) > 0$ 。证明过程参考附录B.7中推论3.2.1证明的**第2步**。

第3步：下面假设 $\mathbf{w}_{k-1} \in \mathbb{V}$ ，并考虑中心对称阵列($\mathbf{a}(\theta_0)$ 和 $\mathbf{a}(\theta_k)$ 均属于集合 \mathbb{V})，此时有 $\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{w}_{k-1} \in \mathbb{R}$ 。由性质 \mathcal{P} 可得 $\mathbf{w}_{\parallel} = \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{w}_{k-1} / \|\mathbf{a}(\theta_k)\|_2^2 \in \mathbb{V}$ 以及 $\mathbf{w}_{\perp} = \mathbf{w}_{k-1} - \mathbf{w}_{\parallel} \in \mathbb{V}$ 。因此， $\Im(\mathbf{w}_{\perp}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\parallel}) = 0$ 以及

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{\beta_k}(2) &= \Im(\mathbf{B}_k(1, 2)) / \mathbf{B}_k(2, 2) \\ &= -\rho_k \Im(\mathbf{w}_{\perp}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\parallel}) / \mathbf{B}_k(2, 2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B-68})$$

结合**第2步**的结果(更准确地，不等式(B-53))可知，如果 $\mathbf{w}_{\perp}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\parallel} \geq 0$ ，

$0 \leq \rho_k \leq \tilde{\rho}_k$ ，则有

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{\beta_k}(1) &= -\Re(\mathbf{B}_k(1, 2)) / \mathbf{B}_k(2, 2) \\ &= \rho_k \mathbf{w}_{\perp}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\parallel} / \mathbf{B}_k(2, 2) \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B-69})$$

另外，由 $\mathbf{w}_{\perp}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\parallel} \geq 0$ 可知 $\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\parallel} \geq \mathbf{w}_{\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\parallel}$ ，

进一步有

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{w}_{k-1}}{\mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k)} \\ &= \mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\parallel} \geq \mathbf{w}_{\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\parallel} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B-70})$$

基于此，如果 $\mathbf{w}_{\perp}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\parallel} \geq 0$ ，则有

$$\frac{\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{w}_{k-1}}{\mathbf{w}_{k-1}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{w}_{k-1}} = \check{\rho}_k \quad (\text{B-71})$$

其中 $\check{\rho}_k$ 的定义见(3-46b)。如果 $\rho_k \leq \check{\rho}_k$ 满足，则由(B-70), (B-71) 以及(B-55)中 \mathbf{w}_{\parallel} 的表达式可知

$$\rho_k \mathbf{w}_{\perp}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\parallel} \leq \mathbf{w}_{\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) \mathbf{w}_{\parallel} \quad (\text{B-72})$$

上式可以重新整理为 $0 \leq \rho_k \mathbf{w}_{\perp}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\parallel} \leq |\mathbf{w}_{\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 - \rho_k |\mathbf{w}_{\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2$ 或者更简洁地， $0 \leq -\Re(\mathbf{B}_k(1,2)) \leq \mathbf{B}_k(2,2)$ 。因此，可以得到

$$\mathbf{c}_{\beta_k}(1) = -\Re(\mathbf{B}_k(1,2)) / \mathbf{B}_k(2,2) \leq 1 \quad (\text{B-73})$$

由上述分析可知，对于中心对称阵列，如果 $\mathbf{w}_{k-1} \in \mathbb{V}$, $0 \leq \rho_k \leq \min\{\tilde{\rho}_k, \check{\rho}_k\}$, $\rho_k \neq \tilde{\rho}_k$, $\mathbf{w}_{\perp}^H \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\parallel} \geq 0$ ，则有 $\mathbf{c}_{\beta_k}(2) = 0$, $\mathbf{c}_{\beta_k}(1) \in [0, 1]$ 。由定理3.2.4可以得到 $T(\beta_{k,*}) = \mu_{k,*}$, $\beta_{k,*} \in \mathbb{R}$ 。因此，C²-WORD和A²RC 会得到相同的权向量 \mathbf{w}_k 。而且，可以进一步得到 $\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{\perp} + \beta_{k,*} \mathbf{w}_{\parallel} \in \mathbb{V}$ 。利用递推法不难发现如果 $\mathbf{w}_{k-1} \in \mathbb{V}$, 且(3-34)和(3-46b)成立，则 $\mathbf{w}_k \in \mathbb{V}$, $T(\beta_{k+1,*}) = \mu_{k+1,*}$ 。显然，如果取 $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{V}$, 条件(3-34)和(3-46b)对于任意 k 均满足，则有 $T(\beta_{k,*}) = \mu_{k,*}$ 对于 $k = 1, 2, \dots$ 均成立，此时 C²-WORD 和 A²RC 在第 k 步得到相同的权向量 \mathbf{w}_k , $k = 1, 2, \dots$ 。推论3.2.2证毕。

B.9 式(3-70)推导

为了简化符号，推导过程中省略下面 β 。根据式(3-69)中 ρ_a 的定义，我们有

$$\sqrt{\rho_a} = |\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_k)| / |\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)| \quad (\text{B-74})$$

由约束(3-67b)，可以将 ρ_a 展开为

$$\sqrt{\rho_a} = V_d(\theta_k) - \frac{\gamma(\theta_k) \|\mathbf{w}_k\|_2}{|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|} = V_d(\theta_k) - \frac{\sqrt{\rho_a} \gamma(\theta_k) \|\mathbf{w}_k\|_2}{|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_k)|} \quad (\text{B-75})$$

其中上式利用了等式(B-74)。将约束(3-67c)代入 \mathbf{w}_k 中，得到

$$\frac{|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2}{\|\mathbf{w}_k\|_2^2} = \frac{|\beta|^2 |\mathbf{w}_{\parallel}^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2}{\|\mathbf{w}_{\perp}\|_2^2 + |\beta|^2 \|\mathbf{w}_{\parallel}\|_2^2} \quad (\text{B-76})$$

则式(B-75)可以重新表述为

$$V_d(\theta_k) - \sqrt{\rho_a} = \frac{\sqrt{\rho_a}\gamma(\theta_k)}{\sqrt{\frac{|\beta|^2|\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2}{\|\mathbf{w}_\perp\|_2^2 + |\beta|^2\|\mathbf{w}_\parallel\|_2^2}}} \quad (\text{B-77})$$

或等价地,

$$|\beta|^2 = \frac{\left(\frac{\sqrt{\rho_a}\gamma(\theta_k)}{V_d(\theta_k) - \sqrt{\rho_a}}\right)^2 \|\mathbf{w}_\perp\|_2^2}{|\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 - \left(\frac{\sqrt{\rho_a}\gamma(\theta_k)}{V_d(\theta_k) - \sqrt{\rho_a}}\right)^2 \|\mathbf{w}_\parallel\|_2^2} \quad (\text{B-78})$$

另外, 由式(3-31)可知

$$|\beta| = |\mathbf{c}_\beta| + R_\beta \quad (\text{B-79})$$

其中

$$|\mathbf{c}_\beta| = \frac{\rho_a |\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)| \cdot |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)|}{|\mathbf{B}(2, 2)|} \quad (\text{B-80})$$

$$R_\beta = \frac{\sqrt{\rho_a} |\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)| \cdot |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|}{|\mathbf{B}(2, 2)|} \quad (\text{B-81})$$

上式中的矩阵 \mathbf{B} 满足

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_k) \\ \mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_k) \\ \mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k) \end{bmatrix}^H - \rho_a \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0) \\ \mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0) \\ \mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0) \end{bmatrix}^H \quad (\text{B-82})$$

因此可以得到

$$|\beta| = \frac{\rho_a |\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)| \cdot |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)| + \sqrt{\rho_a} |\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)| \cdot |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|}{|\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 - \rho_a |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} \quad (\text{B-83})$$

将式(B-83)中的 $|\beta|$ 代入式(B-78), 可以消掉 β 并得到下面关于 ρ_a 的等式

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho_a |\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)| \cdot |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)| + \sqrt{\rho_a} |\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)| \cdot |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|}{|\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 - \rho_a |\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2} \right)^2 \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{\rho_a}\gamma(\theta_k)}{V_d(\theta_k) - \sqrt{\rho_a}} \right)^2 \|\mathbf{w}_\perp\|_2^2}{|\mathbf{w}_\parallel^H \mathbf{a}(\theta_k)|^2 - \left(\frac{\sqrt{\rho_a}\gamma(\theta_k)}{V_d(\theta_k) - \sqrt{\rho_a}} \right)^2 \|\mathbf{w}_\parallel\|_2^2} \end{aligned} \quad (\text{B-84})$$

将上式展开得到

$$A\rho_a^2 + B\rho_a\sqrt{\rho_a} + C\rho_a + D\sqrt{\rho_a} + E = 0 \quad (\text{B-85})$$

其中系数 A, B, C, D, E 见式 (3-71)。式(B-85)可以重新表示为

$$A\rho_a^2 + C\rho_a + E = -\sqrt{\rho_a}(B\rho_a + D) \quad (\text{B-86})$$

将上式等号左右同时取平方得到

$$A^2\rho_a^4 + (2AC - B^2)\rho_a^3 + (2AE - 2BD + C^2)\rho_a^2 + (2CE - D^2)\rho_a + E^2 = 0 \quad (\text{B-87})$$

式(3-70)证毕。

B.10 方程(3-70)可行性的推导

为了研究方程(3-70)的可行性, 下面合理地假设 $V_d(\theta_k) > 0$ 。将式(3-69)中的 ρ_a 以及式(3-67c)的约束代入式 (3-67b)得到

$$\sqrt{\rho_a} = V_d(\theta_k) - \frac{\gamma(\theta_k)\|\mathbf{w}_k\|_2}{|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|} \quad (\text{B-88})$$

定义

$$f(\rho_a) \triangleq V_d(\theta_k) - \sqrt{\rho_a} - \frac{\gamma(\theta_k)\|\mathbf{w}_k\|_2}{|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|} \quad (\text{B-89})$$

注意到当 $\rho_a = 0$ 有 $\beta_\star = 0, \mathbf{w}_k = \mathbf{w}_\perp$ 。结合式(3-82)可以得到

$$\begin{aligned} f(0) &= V_d(\theta_k) - \frac{\gamma(\theta_k)\|\mathbf{w}_k\|_2}{|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|} \\ &= V_d(\theta_k) - \frac{[V_d(\theta_k)\varepsilon(\theta_0) + \varepsilon(\theta_k)] \cdot \|\mathbf{w}_\perp\|_2}{|\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)|} \\ &= V_d(\theta_k) \cdot \frac{(|\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)| - \varepsilon(\theta_0)\|\mathbf{w}_\perp\|_2)}{|\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)|} - \frac{\varepsilon(\theta_k)\|\mathbf{w}_\perp\|_2}{|\mathbf{w}_\perp^H \mathbf{a}(\theta_0)|} \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B-90})$$

另外, 不难验证

$$f(V_d^2(\theta_k)) = -\frac{\gamma(\theta_k)\|\mathbf{w}_k\|_2}{|\mathbf{w}_k^H \mathbf{a}(\theta_0)|} < 0 \quad (\text{B-91})$$

由于式(B-89)中的 $f(\rho_a)$ 为 ρ_a 的连续函数, 则结合式(B-90)和式(B-91)可知一定存在 $\check{\rho}_a \in [0, V_d^2(\theta_k))$ 满足

$$f(\check{\rho}_a) = 0 \quad (\text{B-92})$$

由附录B.9可知, 式(3-70)由 $f(\rho_a) = 0$ 导出。因此, 由(B-92)不难发现一定存在相同的 $\check{\rho}_a \in [0, V_d^2(\theta_k))$ 满足等式(3-70)。证毕。

C.1 定理4.2.1的证明

假设 $Q \leq N - 1$ (否则 $\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_Q)$ 线性相关), 下面分5步来推导定理4.2.1。

第1步: 第1步中, 我们将 $\mathbf{E}_{q|\check{\mathbf{A}}_{q-}}^H \mathbf{a}(\theta_0)$ 进行简化, $q = 1, \dots, Q$ 。根据式(4-3), 我们有

$$\mathbf{E}_{q|\check{\mathbf{A}}_{q-}}^H \mathbf{a}(\theta_0) = \mathbf{a}(\theta_q)(\mathbf{a}^H(\theta_q)\mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{q-}}^\perp \mathbf{a}(\theta_q))^{-1}\mathbf{a}^H(\theta_q)\mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{q-}}^\perp = \xi_q \mathbf{a}(\theta_q)\mathbf{a}^H(\theta_q)(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{q-}}) \quad (\text{C-1})$$

其中

$$\xi_q = (\mathbf{a}^H(\theta_q)\mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{q-}}^\perp \mathbf{a}(\theta_q))^{-1} \in \mathbb{R} \quad (\text{C-2})$$

$$\mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{q-}} = \check{\mathbf{A}}_{q-}(\check{\mathbf{A}}_{q-}^H \check{\mathbf{A}}_{q-})^{-1} \check{\mathbf{A}}_{q-}^H \quad (\text{C-3})$$

由式(C-1), 可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{q|\check{\mathbf{A}}_{q-}}^H \mathbf{a}(\theta_0) &= \xi_q (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{q-}}) \mathbf{a}(\theta_q) \mathbf{a}^H(\theta_q) \mathbf{a}(\theta_0) \\ &= \xi_q \cdot v(q, 0) \cdot [\mathbf{a}(\theta_q) - \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{q-}} \mathbf{a}(\theta_q)] \\ &= [\mathbf{a}(\theta_q), \check{\mathbf{A}}_{q-}] \mathbf{d}_q \end{aligned} \quad (\text{C-4})$$

其中

$$\mathbf{d}_q = \xi_q \cdot v(q, 0) \begin{bmatrix} 1 \\ -(\check{\mathbf{A}}_{q-}^H \check{\mathbf{A}}_{q-})^{-1} \check{\mathbf{A}}_{q-}^H \mathbf{a}(\theta_q) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{Q+1} \quad (\text{C-5})$$

不难发现

$$[\mathbf{a}(\theta_q), \check{\mathbf{A}}_{q-}] = \check{\mathbf{A}} \mathbf{J}_q \quad (\text{C-6})$$

其中 \mathbf{J}_q 为交换矩阵, 可以表示为

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} & \mathbf{I}_q & & \\ & \cdots & \cdots & \\ & 1 & & \\ & \cdots & \cdots & \\ & & & \mathbf{I}_{Q-q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(Q+1) \times (Q+1)} \quad (\text{C-7})$$

而且, 我们有

$$\mathbf{J}_q \mathbf{d}_q = \xi_q \cdot v(q, 0) \mathbf{h}_q \quad (\text{C-8})$$

其中 \mathbf{h}_q 满足

$$\mathbf{h}_q = [c_1^{(q)}, \dots, c_q^{(q)}, 1, c_{q+1}^{(q)}, \dots, c_Q^{(q)}]^T \in \mathbb{C}^{Q+1} \quad (\text{C-9})$$

其中 $c_i^{(q)}$ 表示向量 $-(\check{\mathbf{A}}_{q-}^H \check{\mathbf{A}}_{q-})^{-1} \check{\mathbf{A}}_{q-}^H \mathbf{a}(\theta_q)$ 的第 i 个元素, $i = 1, \dots, Q$ 。

结合式(C-4), (C-6)以及(C-8), 我们可以进一步将 $\mathbf{E}_{q|\check{\mathbf{A}}_{q-}}^H \mathbf{a}(\theta_0)$ 简化为

$$\mathbf{E}_{q|\check{\mathbf{A}}_{q-}}^H \mathbf{a}(\theta_0) = \check{\mathbf{A}} \mathbf{J}_q \mathbf{d}_q = \xi_q \cdot v(q, 0) \check{\mathbf{A}} \mathbf{h}_q \quad (\text{C-10})$$

第2步: 下面我们将 $(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_{0-}|0}^H) \mathbf{a}(\theta_0)$ 进行简化。由于 $\mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_{0-}|0} + \mathbf{E}_{0|\check{\mathbf{A}}_{0-}} = \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}}$, 我们可以得到

$$(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_{0-}|0}^H) \mathbf{a}(\theta_0) = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}}^H + \mathbf{E}_{0|\check{\mathbf{A}}_{0-}}^H) \mathbf{a}(\theta_0) = \mathbf{E}_{0|\check{\mathbf{A}}_{0-}}^H \mathbf{a}(\theta_0) \quad (\text{C-11})$$

上式中我们利用了 $\mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}}^H \mathbf{a}(\theta_0) = \mathbf{a}(\theta_0)$ 。结合**第1步**中的结果(C-10), 我们可以类似地得到

$$\mathbf{E}_{0|\check{\mathbf{A}}_{0-}}^H \mathbf{a}(\theta_0) = \xi_0 \|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2 \check{\mathbf{A}} \mathbf{h}_0 \quad (\text{C-12})$$

其中

$$\xi_0 = (\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{0-}}^\perp \mathbf{a}(\theta_0))^{-1} \quad (\text{C-13})$$

$$\mathbf{h}_0 = [1, c_1^{(0)}, \dots, c_Q^{(0)}]^T \in \mathbb{C}^{Q+1} \quad (\text{C-14})$$

$c_i^{(0)}$ 表示向量 $-(\check{\mathbf{A}}_{0-}^H \check{\mathbf{A}}_{0-})^{-1} \check{\mathbf{A}}_{0-}^H \mathbf{a}(\theta_0)$ 的第 i 个元素, $i = 1, \dots, q$ 。因此, 可以得到

$$(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_{0-}|0}^H) \mathbf{a}(\theta_0) = \xi_0 \|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2 \check{\mathbf{A}} \mathbf{h}_0 \quad (\text{C-15})$$

第3步: 下面对式(4-14)中的 \mathbf{w}_{OP} 进行重新表示。结合 (C-10)和(C-15)可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\text{OP}} &= \left((\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_{0-}|0}^H) + \sum_{q=1}^Q \eta_q \mathbf{E}_{q|\check{\mathbf{A}}_{q-}}^H \right) \mathbf{a}(\theta_0) \\ &= \xi_0 \|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2^2 \check{\mathbf{A}} \mathbf{h}_0 + \sum_{q=1}^Q \eta_q \cdot \xi_q v(q, 0) \check{\mathbf{A}} \mathbf{h}_q \\ &= \check{\mathbf{A}} \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda}_0 \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (\text{C-16})$$

其中系数矩阵 $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{(Q+1) \times (Q+1)}$, 对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_0 \in \mathbb{C}^{(Q+1) \times (Q+1)}$ 以及向量 $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^{Q+1}$, 可分别表示为

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_Q] = \begin{bmatrix} 1 & c_1^{(1)} & \cdots & c_1^{(Q)} \\ c_1^{(0)} & 1 & \cdots & c_2^{(Q)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_Q^{(0)} & c_Q^{(1)} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C-17})$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_0 = \text{Diag}([\xi_0 v(0, 0), \xi_1 v(1, 0), \dots, \xi_Q v(Q, 0)]) \quad (\text{C-18})$$

$$\boldsymbol{\eta} = [1, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_Q]^T \in \mathbb{C}^{Q+1} \quad (\text{C-19})$$

不难发现

$$\check{\mathbf{A}}\mathbf{h}_q = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{q-}}^\perp)\mathbf{a}(\theta_q) = \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{q-}}^\perp \mathbf{a}(\theta_q) \quad (\text{C-20})$$

基于此，可以将 $\check{\mathbf{A}}\mathbf{H}$ 表示为

$$\check{\mathbf{A}}\mathbf{H} = \left[\mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_0-}^\perp \mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_1-}^\perp \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_Q-}^\perp \mathbf{a}(\theta_Q) \right] \triangleq \mathbf{Y} \quad (\text{C-21})$$

第4步：假设 $\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_Q)$ 线性无关（即 $\check{\mathbf{A}}$ 为列满秩矩阵），下面证明式(C-21)中的 \mathbf{Y} 为列满秩矩阵，即

$$\text{rank}(\mathbf{Y}) = Q + 1 \quad (\text{C-22})$$

我们用反正法，首先假设

$$\text{rank}(\mathbf{Y}) < Q + 1 \quad (\text{C-23})$$

或者等价地， \mathbf{Y} 的各列线性相关。此时，由式(C-23)可知，存在非零系数向量 $\varsigma = [\varsigma_0, \varsigma_1, \dots, \varsigma_Q]^T$ 使得 $\mathbf{Y}\varsigma = \mathbf{0}$ ，即

$$\sum_{i=0}^Q \varsigma_i \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_i-}^\perp \mathbf{a}(\theta_i) = \mathbf{0} \quad (\text{C-24})$$

不失一般性，我们假设 $\varsigma_m \neq 0$ ，其中 $m \in \{0, 1, \dots, Q\}$ 。则可以将式(C-24)表示为

$$-\varsigma_m \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{m-}}^\perp \mathbf{a}(\theta_m) = \sum_{i=0}^{m-1} \varsigma_i \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_i-}^\perp \mathbf{a}(\theta_i) + \sum_{i=m+1}^Q \varsigma_i \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_i-}^\perp \mathbf{a}(\theta_i) \quad (\text{C-25})$$

需要注意的是，我们有 $\mathbf{a}(\theta_m) \in \mathcal{R}(\check{\mathbf{A}}_{m-})$ ， $0 \leq i \leq Q$, $i \neq m$ 。由此我们可以得到

$$\mathbf{a}^H(\theta_m) \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{i-}}^\perp = \mathbf{0}, \quad 0 \leq i \leq Q, \quad i \neq m. \quad (\text{C-26})$$

将式(C-25)等式左右两边左乘 $\mathbf{a}^H(\theta_m)$ 得到

$$-\varsigma_m \mathbf{a}^H(\theta_m) \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{m-}}^\perp \mathbf{a}(\theta_m) = 0 \quad (\text{C-27})$$

由前文假设 $\varsigma_m \neq 0$ ，结合上式可以得到

$$\mathbf{a}^H(\theta_m) \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{m-}}^\perp \mathbf{a}(\theta_m) = \|\mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{m-}}^\perp \mathbf{a}(\theta_m)\|_2^2 = 0 \quad (\text{C-28})$$

进一步有 $\mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{m-}}^\perp \mathbf{a}(\theta_m) = \mathbf{0}$ 或等价地 $\mathbf{a}(\theta_m) \in \mathcal{R}(\check{\mathbf{A}}_{m-})$ 。这与前文 $\check{\mathbf{A}}$ 为列满秩矩阵相矛盾。因此，式(C-23)不成立。由于 $Q + 1 \leq N$ ，很容易得到 $\text{rank}(\mathbf{Y}) = Q + 1$ 。

第5步：下面将证明如果 $\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_Q)$ 线性无关，且 $v(q, 0) \neq 0$ 对于任意 $q \in \{1, \dots, Q\}$ 均成立，则 $\mathbf{H}\Lambda_0$ 为可逆矩阵。

首先, 由第4步可知 \mathbf{Y} 为列满秩矩阵。由于 $\mathbf{Y} = \check{\mathbf{A}}\mathbf{H}$ 且 $\check{\mathbf{A}}$ 为列满秩矩阵, 可以得到 \mathbf{H} 可逆。

另一方面, $\check{\mathbf{A}}$ 为列满秩矩阵意味着 $\mathbf{a}(\theta_i) \notin \mathcal{R}(\check{\mathbf{A}}_{i-})$, 或者等价地, $\mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{i-}}^\perp \mathbf{a}(\theta_i) \neq \mathbf{0}$, $\forall i = 0, 1, \dots, Q$ 。因为, 我们可以得到

$$\xi_i = (\mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{i-}}^\perp \mathbf{a}(\theta_i))^{-1} = (\|\mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{i-}}^\perp \mathbf{a}(\theta_i)\|_2^2)^{-1} > 0, i = 0, 1, \dots, Q \quad (\text{C-29})$$

如此之外, 若 $v(q, 0) \neq 0$ 对于 $\forall q = 1, \dots, Q$ 均成立, 则式(C-18)中矩阵 Λ_0 的对角元素均非零。因此, Λ_0 为可逆矩阵。

由于 \mathbf{H} 和 Λ_0 均为可逆矩阵, 可以知道 $\mathbf{H}\Lambda_0$ 可逆。

由式(4-11)中的权向量 \mathbf{w}_* 可知, 对于任意 β_1, \dots, β_Q , 存在式(4-12)中的向量 \mathbf{u} 使得 $\mathbf{w}_* = \check{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{u}^T \end{bmatrix}^T$ 。由于 $\mathbf{H}\Lambda_0$ 可逆, 从式(C-16)可知一定存在 η_1, \dots, η_Q 或者向量 $\boldsymbol{\eta}$ 满足

$$\boldsymbol{\eta} = [1, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_Q]^T = h^{-1}(\mathbf{H}\Lambda_0)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{u}^T \end{bmatrix}^T \quad (\text{C-30})$$

以及 $c = h^{-1}$, 使得

$$\mathbf{w}_{\text{OP}} = \check{\mathbf{A}}\mathbf{H}\Lambda_0\boldsymbol{\eta} = h^{-1}\check{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{u}^T \end{bmatrix}^T = c\mathbf{w}_* \quad (\text{C-31})$$

其中 h 为向量 $(\mathbf{H}\Lambda_0)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{u}^T \end{bmatrix}^T$ 的第一个元素。证毕。

C.2 式(4-100)推导

首先, 可以将 $\mathbf{E}_{\mathbf{a}(\theta_i)|\check{\mathbf{A}}_{i-}}$ 展开为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{a}(\theta_i)|\check{\mathbf{A}}_{i-}} &= \mathbf{a}(\theta_i)(\mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{i-}}^\perp \mathbf{a}(\theta_i))^{-1} \mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{i-}}^\perp \\ &= \xi_i \mathbf{a}(\theta_i) \mathbf{a}^H(\theta_i) (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{i-}}), i = 0, 1, \dots, Q \end{aligned} \quad (\text{C-32})$$

其中 $\xi_i = (\mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{i-}}^\perp \mathbf{a}(\theta_i))^{-1}$ 为实数, $i = 0, 1, \dots, Q$ 。除此之外, 不难推导得到

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{i-}}) \mathbf{a}(\theta_i) = \check{\mathbf{A}} \mathbf{h}_i, i = 0, 1, \dots, Q \quad (\text{C-33})$$

其中 $\mathbf{h}_i \in \mathbb{C}^{Q+1}$ 通过在向量 $\mathbf{b}_i = -(\check{\mathbf{A}}_{i-}^H \check{\mathbf{A}}_{i-})^{-1} \check{\mathbf{A}}_{i-}^H \mathbf{a}(\theta_i)$ 中的第 $(i+1)$ 个元素插入元素1得到, $i = 0, 1, \dots, Q$ 。更具体地, \mathbf{h}_i 可以表示为

$$\mathbf{h}_i = [\mathbf{b}_i(1), \dots, \mathbf{b}_i(i), 1, \mathbf{b}_i(i+1), \dots, \mathbf{b}_i(Q)]^T, i = 0, \dots, Q \quad (\text{C-34})$$

在此基础上，结合式(4-61)可以得到

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_0 \mathbf{w}_{\text{pre}} &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\mathbf{A}_{0-} | \mathbf{a}(\theta_0)}^H \right) \mathbf{w}_{\text{pre}} \\
 &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}}^H + \mathbf{E}_{\mathbf{a}(\theta_0) | \check{\mathbf{A}}_{0-}}^H \right) \mathbf{w}_{\text{pre}} \\
 &= \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}}^{\perp} \mathbf{w}_{\text{pre}} + \xi_0 (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{0-}}) \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\text{pre}} \\
 &= \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}}^{\perp} \mathbf{w}_{\text{pre}} + c_0 \check{\mathbf{A}} \mathbf{h}_0
 \end{aligned} \tag{C-35}$$

以及

$$\begin{aligned}
 e^{-j\varphi_q} \mathbf{T}_q \mathbf{w}_{\text{new},q} &= e^{-j\varphi_q} \mathbf{E}_{\mathbf{a}(\theta_q) | \check{\mathbf{A}}_{q-}}^H \mathbf{w}_{\text{new},q} \\
 &= e^{-j\varphi_q} \xi_q (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}_{q-}}) \mathbf{a}(\theta_q) \mathbf{a}^H(\theta_q) \mathbf{w}_{\text{new},q} \\
 &= c_q e^{-j\varphi_q} \check{\mathbf{A}} \mathbf{h}_q
 \end{aligned} \tag{C-36}$$

其中 $c_0 \triangleq \xi_0 \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\text{pre}}$, $c_q \triangleq \xi_q \mathbf{a}^H(\theta_q) \mathbf{w}_{\text{new},q}$, $q = 1, \dots, Q$ 。因此，式(4-67)中的 \mathbf{w}_{new} 可以重新表示为

$$\mathbf{w}_{\text{new}} = \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}}^{\perp} \mathbf{w}_{\text{pre}} + \check{\mathbf{A}} \mathbf{H} \mathbf{c} \tag{C-37}$$

其中

$$\mathbf{H} \triangleq [\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_Q] \in \mathbb{C}^{(Q+1) \times (Q+1)} \tag{C-38}$$

$$\mathbf{c} \triangleq [c_0, c_1 e^{-j\varphi_1}, \dots, c_Q e^{-j\varphi_Q}]^T \in \mathbb{C}^{Q+1} \tag{C-39}$$

证毕。

C.3 式(4-101)的推导

对于给定的 $i \in \{0, 1, \dots, Q\}$, 首先定义

$$\mathbf{J}_{1i} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{2i \times 2} \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{O}_{[2(Q-i)+1] \times 2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2Q+3) \times 2} \tag{C-40a}$$

$$\mathbf{J}_{2i} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2i} & \mathbf{O}_{2i \times [2(Q-i)+1]} \\ \mathbf{O}_{2 \times 2i} & \mathbf{O}_{2 \times [2(Q-i)+1]} \\ \mathbf{O}_{[2(Q-i)+1] \times 2i} & \mathbf{I}_{2(Q-i)+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2Q+3) \times (2Q+1)} \tag{C-40b}$$

不难发现

$$\mathbf{Y}(\theta_i) = \check{\mathbf{C}} \mathbf{J}_{1i}, \quad \check{\mathbf{C}}_{i-} = \check{\mathbf{C}} \mathbf{J}_{2i}, \quad i = 0, 1, \dots, Q \tag{C-41}$$

在此基础上，可以将 $\mathbf{E}_{\mathbf{Y}(\theta_i)|\check{\mathbf{C}}_{i-}}^T$ 展开为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{\mathbf{Y}(\theta_i)|\check{\mathbf{C}}_{i-}}^T &= \mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}_{i-}}^\perp \mathbf{Y}(\theta_i) (\mathbf{Y}^T(\theta_i) \mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}_{i-}}^\perp \mathbf{Y}(\theta_i))^{-1} \mathbf{Y}^T(\theta_i) \\
 &= \left(\mathbf{I} - \check{\mathbf{C}}_{i-} (\check{\mathbf{C}}_{i-}^T \check{\mathbf{C}}_{i-})^{-1} \check{\mathbf{C}}_{i-}^T \right) \mathbf{Y}(\theta_i) (\mathbf{Y}^T(\theta_i) \mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}_{i-}}^\perp \mathbf{Y}(\theta_i))^{-1} \mathbf{Y}^T(\theta_i) \\
 &= \left(\mathbf{Y}(\theta_i) - \check{\mathbf{C}}_{i-} (\check{\mathbf{C}}_{i-}^T \check{\mathbf{C}}_{i-})^{-1} \check{\mathbf{C}}_{i-}^T \mathbf{Y}(\theta_i) \right) (\mathbf{Y}^T(\theta_i) \mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}_{i-}}^\perp \mathbf{Y}(\theta_i))^{-1} \mathbf{Y}^T(\theta_i) \\
 &= \left(\check{\mathbf{C}} \mathbf{J}_{1i} - \check{\mathbf{C}} \mathbf{J}_{2i} (\check{\mathbf{C}}_{i-}^T \check{\mathbf{C}}_{i-})^{-1} \check{\mathbf{C}}_{i-}^T \mathbf{Y}(\theta_i) \right) (\mathbf{Y}^T(\theta_i) \mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}_{i-}}^\perp \mathbf{Y}(\theta_i))^{-1} \mathbf{Y}^T(\theta_i) \\
 &= \underbrace{\check{\mathbf{C}} \left(\mathbf{J}_{1i} - \mathbf{J}_{2i} (\check{\mathbf{C}}_{i-}^T \check{\mathbf{C}}_{i-})^{-1} \check{\mathbf{C}}_{i-}^T \mathbf{Y}(\theta_i) \right)}_{\triangleq \mathbf{V}_i} (\mathbf{Y}^T(\theta_i) \mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}_{i-}}^\perp \mathbf{Y}(\theta_i))^{-1} \mathbf{Y}^T(\theta_i)
 \end{aligned} \tag{C-42}$$

其中 \mathbf{V}_i 的定义如上式所示， $i = 0, 1, \dots, Q$ 。

从式(C-42)可以得到

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Y}(\theta_q)|\check{\mathbf{C}}_{q-}}^T \tilde{\mathbf{u}}_q = \check{\mathbf{C}} \mathbf{V}_q \tilde{\mathbf{u}}_q, q = 1, \dots, Q \tag{C-43}$$

除此之外，注意到 $\mathbf{E}_{\check{\mathbf{C}}_{0-}|\mathbf{Y}(\theta_0)} + \mathbf{E}_{\mathbf{Y}(\theta_0)|\check{\mathbf{C}}_{0-}} = \mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}}$ ，或等价地 $\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{C}}_{0-}|\mathbf{Y}(\theta_0)} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}} + \mathbf{E}_{\mathbf{Y}(\theta_0)|\check{\mathbf{C}}_{0-}}$ 。因此可以得到

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{C}}_{0-}|\mathbf{Y}(\theta_0)}^T \right) \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}} = \left(\mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}}^\perp + \check{\mathbf{C}} \mathbf{V}_0 \right) \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}} \tag{C-44}$$

结合式(C-43)和(C-44)，可以将式(4-95)中的 $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}$ 表示为

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}} &= \mathbf{Z}_0 \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}} + \sum_{q=1}^Q \mathbf{Z}_q \tilde{\mathbf{u}}_q \\
 &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{C}}_{0-}|\mathbf{Y}(\theta_0)}^T \right) \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}} + \sum_{q=1}^Q \mathbf{E}_{\mathbf{Y}(\theta_q)|\check{\mathbf{C}}_{q-}}^T \tilde{\mathbf{u}}_q \\
 &= \left(\mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}}^\perp + \check{\mathbf{C}} \mathbf{V}_0 \right) \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}} + \sum_{q=1}^Q \check{\mathbf{C}} \mathbf{V}_q \tilde{\mathbf{u}}_q \\
 &= \mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}}^\perp \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}} + \check{\mathbf{C}} \mathbf{F} \boldsymbol{\alpha}
 \end{aligned} \tag{C-45}$$

其中

$$\mathbf{F} \triangleq [\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_Q] \in \mathbb{R}^{(2Q+3) \times 2N(Q+1)} \tag{C-46a}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \triangleq \left[\tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}}^T, \tilde{\mathbf{u}}_1^T, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_Q^T \right]^T \in \mathbb{R}^{2N(Q+1)} \tag{C-46b}$$

式(4-101)证毕。

C.4 式(4-103)推导

如果式(4-102)成立, 我们有 $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}} - \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}} \in \mathcal{R}(\check{\mathbf{C}})$ 。然后, 可以将 $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}} - \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}}$ 表示为

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}} - \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}} = \check{\mathbf{C}}\boldsymbol{\mu} \quad (\text{C-47})$$

其中 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{2Q+3}$ 为系数向量。

考虑到 $\mathbf{w}_{\text{new}} = [\mathbf{I}_N, j\mathbf{I}_N]\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}$, $\mathbf{w}_{\text{pre}} = [\mathbf{I}_N, j\mathbf{I}_N]\tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}}$, 同时结合 $\check{\mathbf{C}}$ 的表达式, 不难得到

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\text{new}} - \mathbf{w}_{\text{pre}} &= [\mathbf{I}_N, j\mathbf{I}_N]\check{\mathbf{C}}\boldsymbol{\mu} \\ &= [(\mu_1 - j\mu_2)\mathbf{a}(\theta_0), \dots, (\mu_{2Q+1} - j\mu_{2Q+2})\mathbf{a}(\theta_Q), \mu_{2Q+3}\mathbf{d}(\theta_0)] \\ &= [\check{\mathbf{A}}, \mathbf{d}(\theta_0)]\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\mu} \end{aligned} \quad (\text{C-48})$$

其中 μ_i 表示向量 $\boldsymbol{\mu}$ 的第 i 个元素, $i = 1, \dots, 2Q+3$, $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{C}^{(Q+2) \times (2Q+3)}$ 定义为

$$\boldsymbol{\Gamma} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & -j & & & & & \\ & 1 & -j & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 1 & -j & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C-49})$$

根据式(C-48), 可以发现

$$\mathbf{P}_{[\check{\mathbf{A}}, \mathbf{d}(\theta_0)]}^\perp(\mathbf{w}_{\text{new}} - \mathbf{w}_{\text{pre}}) = \mathbf{0} \quad (\text{C-50})$$

式(4-103)证毕。

C.5 式(4-104)推导

在式(4-53)中取 $\rho_q = L_{\text{pre}}(\theta_q, \theta_0)$, 由WORD算法可知 $\beta_q = 1$, $q = 1, \dots, Q$ 。因此, 从式(4-54)和(4-55)可以发现

$$\mathbf{w}_{\text{new},q} = \mathbf{w}_{\text{pre}}, q = 1, \dots, Q \quad (\text{C-51})$$

在上式的基础上, 如果式(4-67)中取 $\varphi_q = 0$, $q = 1, \dots, Q$, 所得到的 \mathbf{w}_{new} 满足

$$\mathbf{w}_{\text{new}} = \mathbf{T}_0\mathbf{w}_{\text{pre}} + \sum_{q=1}^Q \mathbf{T}_q\mathbf{w}_{\text{pre}} = \left(\sum_{i=0}^Q \mathbf{T}_i \right) \mathbf{w}_{\text{pre}} \quad (\text{C-52})$$

为了进一步证明 $\mathbf{w}_{\text{new}} = \mathbf{w}_{\text{pre}}$, 我们首先定义如下置换矩阵 \mathbf{J}_i

$$\mathbf{J}_i \triangleq \begin{bmatrix} & \mathbf{I}_i & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \mathbf{I}_{Q-i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(Q+1) \times (Q+1)}, i = 0, 1, \dots, Q \quad (\text{C-53})$$

不难发现 $[\mathbf{a}(\theta_i), \check{\mathbf{A}}_{i-}] = \check{\mathbf{A}}\mathbf{J}_i$, 以及 $[\mathbf{a}(\theta_i), \mathbf{0}_{N \times Q}] = [\mathbf{0}_{N \times i}, \mathbf{a}(\theta_i), \mathbf{0}_{N \times (Q-i)}] \mathbf{J}_i$, $i = 0, 1, \dots, Q$ 。因此, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^Q \mathbf{E}_{\mathbf{a}(\theta_i)|\check{\mathbf{A}}_{i-}} &= \sum_{i=0}^Q [\mathbf{a}(\theta_i), \mathbf{0}] \left((\check{\mathbf{A}}\mathbf{J}_i)^H (\check{\mathbf{A}}\mathbf{J}_i) \right)^{-1} (\check{\mathbf{A}}\mathbf{J}_i)^H \\ &= \sum_{i=0}^Q [\mathbf{a}(\theta_i), \mathbf{0}] \left(\mathbf{J}_i^H \check{\mathbf{A}}^H \check{\mathbf{A}}\mathbf{J}_i \right)^{-1} \mathbf{J}_i^H \check{\mathbf{A}}^H \\ &= \sum_{i=0}^Q [\mathbf{a}(\theta_i), \mathbf{0}] \mathbf{J}_i^{-1} \left(\check{\mathbf{A}}^H \check{\mathbf{A}} \right)^{-1} \check{\mathbf{A}}^H \\ &= \sum_{i=0}^Q [\mathbf{0}_{N \times i}, \mathbf{a}(\theta_i), \mathbf{0}_{N \times (Q-i)}] \left(\check{\mathbf{A}}^H \check{\mathbf{A}} \right)^{-1} \check{\mathbf{A}}^H \\ &= \check{\mathbf{A}} \left(\check{\mathbf{A}}^H \check{\mathbf{A}} \right)^{-1} \check{\mathbf{A}}^H \\ &= \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}} \end{aligned} \quad (\text{C-54})$$

结合式(4-61)中 $\mathbf{T}_i (i = 0, 1, \dots, Q)$ 的定义, 可以得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^Q \mathbf{T}_i &= \mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_{0-}|\mathbf{a}(\theta_0)}^H + \sum_{q=1}^Q \mathbf{E}_{\mathbf{a}(\theta_q)|\check{\mathbf{A}}_{q-}}^H \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{A}}_{0-}|\mathbf{a}(\theta_0)}^H - \mathbf{E}_{\mathbf{a}(\theta_0)|\check{\mathbf{A}}_{0-}}^H + \sum_{i=0}^Q \mathbf{E}_{\mathbf{a}(\theta_i)|\check{\mathbf{A}}_{i-}}^H \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}}^H + \mathbf{P}_{\check{\mathbf{A}}}^H \\ &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{C-55})$$

根据式(C-52)和(C-55), 可以发现 $\mathbf{w}_{\text{new}} = \mathbf{w}_{\text{pre}}$ 。式(4-104)证毕。

C.6 式(4-105)推导

与附录C.5中的证明相同, 可以发现如果取 $\rho_q = L_{\text{pre}}(\theta_q, \theta_0)$, 则有 $\mathbf{w}_{\text{new},q} = \mathbf{w}_{\text{pre}}$ 以及 $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new},q} = \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}}$, $q = 1, \dots, Q$ 。基于此, 在式(4-82)中若取 $\phi_q = 0$ ($q = 1, \dots, Q$), 则有

$$\tilde{\mathbf{u}}_q = \tilde{\mathbf{w}}_{\text{new},q} = \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}}, q = 1, \dots, Q \quad (\text{C-56})$$

则式(4-95)中的 $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}}$ 可以表示为

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\text{new}} = \left(\sum_{i=0}^Q \mathbf{Z}_i \right) \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}} \quad (\text{C-57})$$

与式(C-54)中的推导类似，不难得到

$$\mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{d}}(\theta_0)|\check{\mathbf{C}}_{\tilde{\mathbf{d}}-}} + \sum_{i=0}^Q \mathbf{E}_{\mathbf{Y}(\theta_i)|\check{\mathbf{C}}_{i-}} = \mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}} \quad (\text{C-58})$$

或等价地，

$$\sum_{q=1}^Q \mathbf{E}_{\mathbf{Y}(\theta_q)|\check{\mathbf{C}}_{q-}}^T = \mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}} - \mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{d}}(\theta_0)|\check{\mathbf{C}}_{\tilde{\mathbf{d}}-}}^T - \mathbf{E}_{\mathbf{Y}(\theta_0)|\check{\mathbf{C}}_{0-}}^T \quad (\text{C-59})$$

其中

$$\check{\mathbf{C}}_{\tilde{\mathbf{d}}-} \triangleq [\mathbf{Y}(\theta_0), \mathbf{Y}(\theta_1), \dots, \mathbf{Y}(\theta_Q)] \in \mathbb{R}^{2N \times (2Q+2)} \quad (\text{C-60})$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^Q \mathbf{Z}_i \right) \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}} &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\check{\mathbf{C}}_{0-}|\mathbf{Y}(\theta_0)}^T + \sum_{q=1}^Q \mathbf{E}_{\mathbf{Y}(\theta_q)|\check{\mathbf{C}}_{q-}}^T \right) \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}} \\ &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{d}}(\theta_0)|\check{\mathbf{C}}_{\tilde{\mathbf{d}}-}}^T \right) \tilde{\mathbf{w}}_{\text{pre}} \end{aligned} \quad (\text{C-61})$$

其中我们利用了下面的等式

$$\mathbf{P}_{\check{\mathbf{C}}} = \mathbf{E}_{\check{\mathbf{C}}_{0-}|\mathbf{Y}(\theta_0)}^T + \mathbf{E}_{\mathbf{Y}(\theta_0)|\check{\mathbf{C}}_{0-}}^T \quad (\text{C-62})$$

回忆式(C-57)，可以得到式(4-105)，证毕。

D.1 引理6.2.1的证明

首先定义

$$J(i) \triangleq Q(2, i) - Q(i+1, N), \quad 2 \leq i \leq N-1 \quad (\text{D-1})$$

回忆式(6-10)中 $Q(\cdot)$ 的定义，以及 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_N > 0$ ，不难发现随着 i ($2 \leq i \leq N-1$)的增加， $Q(2, i)$ 单调递增， $Q(i+1, N)$ 单调递减。基于此，可知 $J(i)$ 随 i 的增加而单调递增。下面分两种情况来推导式(6-12)，即

$$d_1 \geq \min_{i \in \{2, \dots, N-1\}} |J(i)| \quad (\text{D-2})$$

第一种情况，我们假设 $J(2) \geq 0$ 。由于 $J(i)$ 为单调递增函数，我们有

$$\min_{i \in \{2, \dots, N-1\}} |J(i)| = J(2) = d_2 - Q(3, N) < d_2 \leq d_1 \quad (\text{D-3})$$

所以当 $J(2) \geq 0$ 时，式(D-2)成立。

第二种情况，假设 $J(2) < 0$ 。由于 $J(N-1) = Q(2, N-1) - d_N \geq 0$ ，且 $J(i)$ 单调递增，则存在 $m \in \{2, \dots, N-2\}$ 使得

$$J(m) < 0, \quad J(m+1) \geq 0 \quad (\text{D-4})$$

基于此不难发现，当 $2 \leq i \leq m$ 时， $|J(i)|$ 随 i 的增加单调递减，当 $m+1 \leq i \leq N-1$ 时， $|J(i)|$ 随 i 的增加单调递增。从而可以得到

$$\min_{i \in \{2, \dots, N-1\}} |J(i)| = \min \{-J(m), J(m+1)\} \quad (\text{D-5})$$

而且，注意到

$$J(i+1) - J(i) = 2d_{i+1} \quad (\text{D-6})$$

由此得到 $J(m+1) - J(m) = 2d_{m+1}$ 。进一步有

$$\min \{-J(m), J(m+1)\} \leq \frac{J(m+1) - J(m)}{2} = d_{m+1} \quad (\text{D-7})$$

结合(D-5)，(D-7)以及 $d_1 \geq d_{m+1}$ ，可知 (D-2) 成立。所以当 $J(2) < 0$ 时，(D-2) 成立。

综上，引理6.2.1证毕。

D.2 定理6.3.1的证明

为了证明定理6.3.1，下面首先研究集合 \mathbb{X}_2 的非空性。假设式(6-11)成立，可以得到

$$d_1 - d_2 \leq d_1 + d_2 \quad (\text{D-8a})$$

$$d_1 - d_2 \leq \sum_{k=3}^N d_k \quad (\text{D-8b})$$

$$\max \left\{ 0, d_3 - \sum_{k=4}^N d_k \right\} \leq \min \left\{ d_1 + d_2, \sum_{k=3}^N d_k \right\} \quad (\text{D-8c})$$

上式利用了不等式 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_N > 0$ 。根据式(6-22)中 \mathbb{X}_2 的表达式，可以进一步得到 $x_{2,\min} \leq x_{2,\max}$ 。因此，如果 $d_1 \leq Q(2, N)$ 成立，则集合 \mathbb{X}_2 非空。

下面的推导中，下标 i 可以取为 $3, \dots, N-2$ 。此时，可以得到下面不等式

$$|x_{i-1} - d_i| \leq x_{i-1} + d_i \quad (\text{D-9})$$

由于 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_N > 0$, 不难得到

$$\max \left\{ 0, d_{i+1} - \sum_{k=i+2}^N d_k \right\} \leq \min \left\{ x_{i-1} + d_i, \sum_{k=i+1}^N d_k \right\} \quad (\text{D-10})$$

由式(6-31)中 \mathbb{X}_i 的表达式, 同时结合不等式(D-9), 可以发现集合 \mathbb{X}_i 非空只要下面不等式满足

$$|x_{i-1} - d_i| \leq \sum_{k=i+1}^N d_k \quad (\text{D-11})$$

假设 $x_{i-1} \in \mathbb{X}_{i-1}$, 可以进一步得知边 x_{i-1}, d_i, \dots, d_N 可以形成多边形。因此, 可以得到

$$x_{i-1} \leq d_i \leq x_{i-1} + \sum_{k=i+1}^N d_k \quad (\text{D-12})$$

或者

$$d_i < x_i \leq \sum_{k=i}^N d_k \quad (\text{D-13})$$

由于(D-12)和(D-13) 均可以导出(D-11), 因此如果 $x_{i-1} \in \mathbb{X}_{i-1}$, 则 \mathbb{X}_i 非空。综上, 定理6.3.1证毕。

E.1 引理7.2.2的证明

为了证明引理7.2.2, 下面首先说明集合 \mathbb{X}_1 的非空性。假设条件(7-18)成立, 则可以得到

$$||h_0| - |h_1|| < |h_0| + |h_1|. \quad (\text{E-1})$$

注意到 $||h_0| - |h_1|| = 2 \max\{|h_0|, |h_1|\} - |h_0| - |h_1|$, 则

$$\begin{aligned} ||h_0| - |h_1|| &\leq 2 \max\{|h_0|, |h_1|, \dots, |h_N|\} - |h_0| - |h_1| \\ &\leq \sum_{i=0}^N |h_i| - |h_0| - |h_1| = S(2) \end{aligned} \quad (\text{E-2})$$

而且, 根据(7-18), 我们可以推导出

$$\begin{aligned} 2|h|_{\max}(2) - S(2) &\leq 2 \max\{|h_0|, |h_1|, \dots, |h_N|\} - S(2) \\ &\leq \sum_{i=0}^N |h_i| - S(2) = |h_0| + |h_1| \end{aligned} \quad (\text{E-3})$$

除此之外，由于 $|h|_{\max}(2) < S(2)$ ，则下式成立

$$2|h|_{\max}(2) - S(2) < S(2) \quad (\text{E-4})$$

由式(7-23)中 \mathbb{X}_1 的表达式，并结合式(E-1)-(E-4)的结果，不难得到 $x_{1,\min} \leq x_{1,\max}$ 。因此，只要条件(7-18)满足，集合 \mathbb{X}_1 即为非空集合。

下面我们说明，如果 $x_{n-1} \in \mathbb{X}_{n-1}$ ，则有集合 \mathbb{X}_n 为非空集合， $n = 2, \dots, N-2$ 。

为了说明上述结果，我们给定 $\forall n \in \{2, \dots, N-2\}$ 。注意到如果 $x_{n-1} \in \mathbb{X}_{n-1}$ ，则有 $x_{n-1} \geq 0$ 。则可以得到

$$|x_{n-1} - |h_n|| \leq x_{n-1} + |h_n| \quad (\text{E-5})$$

除此之外，不难发现

$$2|h|_{\max}(n+1) - S(n+1) \leq S(n+1) \quad (\text{E-6})$$

而且，下面不等式组满足：

$$|h_n| - S(n+1) \leq 2|h|_{\max}(n) - |h_n| - S(n+1) \quad (\text{E-7a})$$

$$\leq 2|h|_{\max}(n) - S(n) \quad (\text{E-7b})$$

$$\leq x_{n-1} \leq S(n) = |h_n| + S(n+1) \quad (\text{E-7c})$$

从而进一步有

$$|x_{n-1} - |h_n|| \leq S(n+1) \quad (\text{E-8})$$

注意到在式(E-7)中，我们用到了 $|h|_{\max}(n) \geq |h_n|$ 以及 $x_{n-1} \in \mathbb{X}_{n-1}$ 。进一步，根据(E-7)，不难看出

$$\begin{aligned} 2|h|_{\max}(n+1) - S(n+1) &\leq 2|h|_{\max}(n) - S(n) + |h_n| \\ &\leq x_{n-1} + |h_n| \end{aligned} \quad (\text{E-9})$$

结合(E-5), (E-6), (E-8)和 (E-9)，以及式(7-31)中 $x_{n,\min}$ 和 $x_{n,\max}$ 的定义，我们有

$$x_{n,\min} \leq x_{n,\max} \quad (\text{E-10})$$

上述表明集合 \mathbb{X}_n 非空，其中 n 可以取为 $2, \dots, N-2$ 。证毕。

E.2 定理7.2.1的证明

1). 充分性证明.

不难发现只要 $x_{1,\min} < x_{1,\max}$, 则 Φ_1 为不可数集合。而且, 给定集合 Φ_1 以及任意 $\forall \phi_{1,*} \in \Phi_1$, 式(7-14)总存在一个解。由此可知, 只要 $x_{1,\min} < x_{1,\max}$, 则等式(7-14)有无穷个解。

另一方面, 解等式(7-14)中相位 ϕ_1, \dots, ϕ_N 的顺序可以任意设置。结合上述分析, 不难发现式(7-14)有无穷解, 只要存在 $p \in \{1, \dots, N\}$ 满足

$$x_{\min}^{(p)} < x_{\max}^{(p)} \quad (\text{E-11})$$

其中 $x_{\min}^{(p)}$ 和 $x_{\max}^{(p)}$ 的分别与式(7-23)中 $x_{1,\min}$ 和 $x_{1,\max}$ 的定义类似, 代表将相位 ϕ_p 放在第一步解时的相应值。具体地,

$$x_{\min}^{(p)} \triangleq \max \{ |h_0| - |h_p|, d(p) \} \quad (\text{E-12})$$

$$x_{\max}^{(p)} \triangleq \min \{ |h_0| + |h_p|, S(1) - |h_p| \} \quad (\text{E-13})$$

其中

$$d(p) \triangleq 2 \max \{ |h_1|, \dots, |h_{p-1}|, |h_{p+1}|, \dots, |h_N| \} - S(1) + |h_p| \quad (\text{E-14})$$

下面说明如果式(7-43)成立, 则总是存在 $p \in \{1, \dots, N\}$ 使得式(E-11)成立。

为了说明上述结果, 首先将不等式(E-11)重新表述为

$$|h_0| - |h_p| < |h_0| + |h_p| \quad (\text{E-15a})$$

$$|h_0| - |h_p| < S(1) - |h_p| \quad (\text{E-15b})$$

$$d(p) < |h_0| + |h_p| \quad (\text{E-15c})$$

$$d(p) < S(1) - |h_p| \quad (\text{E-15d})$$

由于 $|h_0|, |h_1|, \dots, |h_N| > 0$, 可知第一个不等式(E-15a)对于 $\forall p \in \{1, \dots, N\}$ 均满足。

根据式(7-43), 不难导出

$$\begin{aligned} |h_0| - |h_p| &= 2 \max \{ |h_0|, |h_p| \} - |h_0| - |h_p| \\ &\leq 2 \max \{ |h_0|, |h_1|, \dots, |h_N| \} - |h_0| - |h_p| \\ &< \sum_{i=0}^N |h_i| - |h_0| - |h_p| = S(1) - |h_p| \end{aligned} \quad (\text{E-16})$$

则第二个不等式(E-15b)成立, 其中 $p \in \{1, \dots, N\}$ 。第三个不等式(E-15c)可以重新整理为

$$2 \max \{ |h_1|, \dots, |h_{p-1}|, |h_{p+1}|, \dots, |h_N| \} < \sum_{i=0}^N |h_i| \quad (\text{E-17})$$

可知, 只要(7-43)满足, 上式即成立。对于第四个不等式(E-15d), 其等价于

$$\max\{|h_1|, \dots, |h_{p-1}|, |h_{p+1}|, \dots, |h_N|\} + |h_p| < S(1) \quad (\text{E-18})$$

同样对于 $\forall p \in \{1, \dots, N\}$ 均满足。综上, 式(E-15) (或其等价形式(E-11)) 对于 $\forall p \in \{1, \dots, N\}$ 都成立。因此, 如果式(7-43)成立, 则等式(7-14)有无穷多个解。必要性证毕。

2). 充分性证明。

下面证明, 如果式(7-14)有无穷多个解, 则不等式 (7-43)成立。

为了说明上述结果, 下面假设等式(7-14)有无穷多个解但是 (7-43)不满足。此时可得到

$$2 \max\{|h_0|, |h_1|, \dots, |h_N|\} = \sum_{i=0}^N |h_i| \quad (\text{E-19})$$

事实上, 上式意味着等式(7-14)只有一组解而不是无穷个解。为了说明这一点, 不失一般性假设 $|h_p| = \max\{|h_0|, |h_1|, \dots, |h_N|\}$, $p \in \{1, \dots, N\}$ 。此时, 所有的解应该满足

$$\left| |h_0| - \sum_{i=1, i \neq p}^N |h_i| e^{j\phi_i} \right| = |h_p| = \sum_{i=0, i \neq p}^N |h_i| \quad (\text{E-20})$$

可以发现如果取 $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_{p-1} = \phi_{p+1} = \dots = \phi_N = \pi$, $\phi_p = 0$, 则等式 (7-14)成立。在 $[0, 2\pi)$ 范围内取另外任意一组不同的相位取值(记为 ϕ'_i , $i = 1, \dots, N$), 则有

$$\left| |h_0| - \sum_{i=1, i \neq p}^N |h_i| e^{j\phi'_i} \right| < \sum_{i=0, i \neq p}^N |h_i| \quad (\text{E-21})$$

这与(E-20)矛盾。当 $|h_0| = \max\{|h_0|, |h_1|, \dots, |h_N|\}$ 时, 可以得到同样的结果。因此, 如果(7-43)不满足, 则等式(7-14)只有一组解。必要性证毕。

F.1 式(8-33)的证明

下面分3步证明式(8-33)。

第1步: 首先证明

$$\text{rank}(\mathbf{C}_{12}) = N - 1 \quad (\text{F-1})$$

容易得到

$$\mathbf{C}_{12} = \begin{bmatrix} & \mathbf{P}_{(N-1)/2} & \mathbf{I}_{(N-1)/2} & \mathbf{0} \\ \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & & & \mathbf{I}_{(N-1)/2} \\ \vdots & & \mathbf{P}_{(N-3)/2} & & 1 \\ & 0 & & & \end{bmatrix} \quad (\text{F-2})$$

不难验证

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{12} &\xrightarrow{r} \begin{bmatrix} & \mathbf{P}_{(N-1)/2} & \mathbf{I}_{(N-1)/2} & \mathbf{0} \\ & 0 & -1 & & \\ & & -1 & 1 & \\ \ddots & & \ddots & & 0 \\ & -1 & 1 & \mathbf{0} & \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{c} \begin{bmatrix} & \mathbf{I}_{(N-1)/2} & \mathbf{I}_{(N-1)/2} & \mathbf{0} \\ & -1 & 0 & \\ & 1 & -1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{r} \begin{bmatrix} & \mathbf{I}_{(N-1)/2} & \mathbf{I}_{(N-1)/2} & \mathbf{0} \\ & 1 & 2 & \\ & -\mathbf{I}_{(N-1)/2} & & \\ & & \vdots & \\ & & & (N-1)/2 \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{Q}_1 \end{aligned} \quad (\text{F-3})$$

其中 \xrightarrow{r} 和 \xrightarrow{c} 分别表示初等行操作和初等列操作。由于初等操作不改变矩阵的秩，且 $\text{rank}(\mathbf{Q}_1) = N - 1$ ，可知式(F-1)成立。

第2步: 下面证明

$$\text{rank}(\mathbf{C}_{13}) = \text{rank}(\mathbf{C}_{12}) \quad (\text{F-4})$$

容易得到

$$\mathbf{C}_{13} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{(N-1)/2} & \mathbf{I}_{(N-1)/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{(N-1)/2} & \mathbf{P}_{(N-3)/2} & \vdots \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{F-5})$$

不难验证

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{13} &\xrightarrow{r} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{(N-1)/2} & \mathbf{I}_{(N-1)/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 & \mathbf{0} \\ & 1 & -1 \\ & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{0} & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{c} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(N-1)/2} & \mathbf{I}_{(N-1)/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 & \mathbf{0} \\ & 1 & -1 \\ & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{0} & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \mathbf{Q}_1 \end{aligned} \quad (\text{F-6})$$

结合上式与式(F-1), 可知式(F-4)成立。

第3步: 下面证明

$$\text{rank}(\mathbf{C}_{23}) = N - 1 \quad (\text{F-7})$$

容易得到

$$\mathbf{C}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{I}_{(N-1)/2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \mathbf{P}_{(N-1)/2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F-8})$$

不难验证

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_{13} &\xrightarrow{c} \left[\begin{array}{ccc|cc|c} &&&0&0&1 \\ &&\mathbf{I}_{(N-1)/2}&1&0& \\ &&&\ddots&\ddots& \\ &&&0&1&0 \\ \hline 0&0&&0&1& \\ 1&0&&&&\mathbf{I}_{(N-1)/2} \\ \ddots&\ddots&&&&-1 \\ 0&1&0&&& \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{r} \left[\begin{array}{ccc|cc|c} &&&0&0&1 \\ &&\mathbf{I}_{(N-1)/2}&1&0& \\ &&&\ddots&\ddots& \\ &&&0&1&0 \\ \hline 0&&&&&-1 \\ 0&&\mathbf{I}_{(N-1)/2}&&&-2 \\ &&&&&\vdots \\ &&&&&-(N-1)/2 \end{array} \right] \tag{F-9}
 \end{aligned}$$

由上不难发现式(F-7)成立。

结合式(F-1), (F-4)以及 (F-7), 可以得到

$$\text{rank}(\mathbf{C}_{12}) = \text{rank}(\mathbf{C}_{13}) = \text{rank}(\mathbf{C}_{23}) = N - 1 \tag{F-10}$$

式(8-33)证毕。

攻读博士学位期间取得的成果

- [1] **X. Zhang**, X.-G. Xia, Z. He, et al. Phased-array transmission for secure mmWave wireless communication via polygon construction[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2020, 68(2):100–116
- [2] **X. Zhang**, Z. He, X.-G. Xia, et al. OPARC: Optimal and precise array response control algorithm—Part I: Fundamentals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(3):652–667
- [3] **X. Zhang**, Z. He, X.-G. Xia, et al. OPARC: Optimal and precise array response control algorithm—Part II: Multi-points and applications[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(3):668–683
- [4] **X. Zhang**, Z. He, B. Liao, et al. Flexible array response control via oblique projection[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(12):3126–3139
- [5] **X. Zhang**, Z. He, B. Liao, et al. Pattern synthesis for arbitrary arrays via weight vector orthogonal decomposition[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(5):1286–1299
- [6] **X. Zhang**, Z. He, B. Liao, et al. A²RC: An accurate array response control algorithm for pattern synthesis[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(7):1810–1824
- [7] **X. Zhang**, Z. He, B. Liao, et al. Fast array response adjustment with phase-only constraint: A geometric approach[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2019, 67(9):5602–5616
- [8] **X. Zhang**, Z. He, X. Zhang, et al. Robust sidelobe control via complex-coefficient weight vector orthogonal decomposition[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2019, 67(8):5411–5425
- [9] **X. Zhang**, Z. He, B. Liao, et al. Pattern synthesis via oblique projection-based multipoint array response control[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2019, 67(7):4602–4616
- [10] **X. Zhang**, Z. He, X. Zhang, et al. High-performance beampattern synthesis via linear fractional semidefinite relaxation and quasi-convex optimization[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2018, 66(7):3421–3431
- [11] **X. Zhang**, Z. He, B. Liao, et al. Pattern synthesis with multipoint accurate array response control[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2017, 65(8):4075–4088
- [12] **X. Zhang**, Z. He, X. Zhang, et al. DOA and phase error estimation for a partly calibrated array with arbitrary geometry[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2019, 55(3):1197–1207

- [13] **X. Zhang**, Z. He, B. Liao, et al. Robust quasi-adaptive beamforming against direction-of-arrival mismatch[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2018, 54(3):1197–1207
- [14] **X. Zhang**, Z. He, B. Liao, et al. DOA and phase error estimation using one calibrated sensor in ULA[J]. Multidimensional Systems and Signal Processing, 2018, 29(2):523–535
- [15] **X. Zhang**, Z. He, B. Liao, et al. A fast method for array response adjustment with phase-only constraint[C]. 2019 IEEE Radar Conference (RadarConf), Boston, 2019, 1–5
- [16] **X. Zhang**, Z. He, Y. Yang, et al. Oblique projection based array response control algorithm and its application to pattern synthesis[C]. 2018 IEEE Radar Conference (RadarConf18), Oklahoma City, 2018, 1250–1254
- [17] **X. Zhang**, Z. He, X. Zhang, et al. Pattern synthesis for arbitrary arrays by accurately controlling response level[C]. 2017 IEEE Radar Conference (RadarConf), Seattle, 2017, 0106–0111
- [18] **X. Zhang**, Z. He, X. Zhang, et al. Simultaneously estimating DOA and phase error of a partly calibrated ULA by data reconstruction[C]. 2016 IEEE 13th International Conference on Signal Processing (ICSP), Chengdu, 2016, 399–403
- [19] **X. Zhang**, Z. He, B. Liao, et al. Estimation of DOA and phase error using a partly calibrated sensor array with arbitrary geometry[C]. 2016 24th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Budapest, 2016, 1916–1920