EXERCICES UE MAT2 DU PORTAIL IE (2020/21)
La majorité des exercices qui suivent sont la traduction française par G. Casale et A. Chambert-Loir des exercices des chapitres 1 – 3 du livre *Linear Algebra with Applications*, 3rd edition, Otto Bretscher, Prentice Hall, ISBN : 013145336X. Chapitres 1. -3.

BUT. — Dans les exercices suivants, déterminez les solutions des systèmes suivants par la méthode d'élimination. Vérifiez votre solution.

1. $$\left|\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 4y + 7z &= 2 \\ 3x + 7y + 11z &= 8 \end{aligned}\right|$$

2. $$\left|\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ 3x + 5y &= 17 \end{aligned}\right|$$

BUT. Utiliser la méthode d'élimination de Gauss-Jordan pour résoudre les systèmes linéaires. Montrez votre travail.

3. $$\left|\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x - y &= 5 \\ 3x + 4y &= 2 \end{aligned}\right|$$

4. $$\left|\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_4 &= 0 \end{aligned}\right|$$

5. $$\left|\begin{aligned} x_4 + 2x_5 - x_6 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 - x_6 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 &= 2 \end{aligned}\right|$$

6. Les étudiants achètent leurs livres pour le nouveau semestre. Eddy achète le livre d'écologie statistique, et le livre de théorie des ensembles, pour un total de 178€. Léa, qui achète des livres pour elle-même et son ami, dépense 319€ pour deux livres d'écologie statistique un de théorie des ensembles et un de psychologie infantile. Ahmed achète le livre de psychologie infantile et le livre de théorie des ensembles et a dépensé 147€. Combien coûte chaque livre ?

BUT. — Utiliser la forme réduite échelonnée par lignes de la matrice augmentée pour déterminer le nombre de solutions d'un système linéaire. Appliquer la définition du rang d'une matrice. Calculer le produit $A\vec{x}$ en fonction des colonnes ou des lignes de A. Représenter un système linéaire sous forme vectorielle ou matricielle.

7. Les formes réduites échelonnées par lignes de matrices augmentées sont données ci-dessous. Combien de solution le système linéaire correspondant a-t-il ?

a. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

b. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$

c. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

Dans les exercices suivants, déterminer le rang des matrices indiquées.

8. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

11. Considérons le système suivant :
$$\left|\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ 3x - 5y + 13z &= 18 \\ x - 2y + 5z &= k \end{aligned}\right|,$$
où k est un nombre arbitraire.

a. Pour quelles valeurs de k le système a-t-il au moins une solution ?

b. Pour chaque valeur de la question a), déterminez le nombre de solutions du système.

c. Déterminez toutes les solutions pour chaque valeur de k.

12. Considérons le système suivant :

$$\begin{vmatrix} x + \ \ y - \qquad\quad z = 2 \\ x + 2y + \qquad\quad z = 3 \\ x + \ \ y + (k^2-5)z = k \end{vmatrix},$$

où k est un nombre arbitraire. Pour quelles valeurs de k le système a-t-il une unique solution ? Pour quelles valeurs de k le système a-t-il une infinité de solutions ? Pour quelles valeurs de k le système est-il inconsistant ?

13. Considérons les équations

$$\begin{vmatrix} x + 2y + \qquad\ 3z = 4 \\ x + ky + \qquad\ 4z = 6 \\ x + 2y + (k+2)z = 6 \end{vmatrix},$$

où k est une constante arbitraire.

a. Pour quelles valeurs de la constante k ce système a-t-il une seule solution ?

b. Quand n'a-t-il pas de solution ?

c. Quand a-t-il une infinité de solutions ?

14. Considérons les équations

$$\begin{vmatrix} \qquad\ \ y + 2kz = 0 \\ x + 2y + \ \ 6z = 2 \\ kx \qquad\ + \ \ 2z = 1 \end{vmatrix},$$

où k est une constante arbitraire.

a. Pour quelles valeurs de la constante k ce système a-t-il une seule solution ?

b. Quand n'a-t-il pas de solution ?

c. Quand a-t-il une infinité de solutions ?

15. Pour $k \in \mathbb{R}$, on considère la matrice suivante $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & k^2-1 & k \end{bmatrix}$.

(a) Discuter le rang de A suivant les valeurs du paramètre k.

(b) Discuter le nombre de solutions du système linéaire

$$\begin{vmatrix} x + y + \qquad z \qquad = 1 \\ 2x + y + \qquad 3z \qquad = 4 \\ x + 2y + (k^2-1)z = k \end{vmatrix}$$

suivant les valeurs du paramètre k.

16. Considérons les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ de $\mathbb{R}^2$, esquissés sur la figure ci-dessous. Les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont parallèles. Combien de solutions x, y, le système

$$x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 = \vec{v}_3$$

a-t-il ? Raisonner géométriquement.

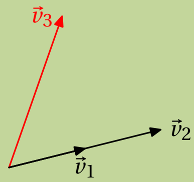

FIGURE 16A

17. Considérons les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ de $\mathbb{R}^2$, représentés ci-dessous. Combien de solutions x, y, le système

$$x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 = \vec{v}_3$$

a-t-il ? Raisonner géométriquement.

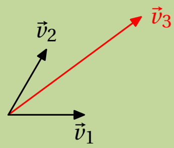

FIGURE 17A

18. Considérons les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ de $\mathbb{R}^2$, représentés sur la figure ci-dessous. En raisonnant géométriquement, déterminer deux solutions x, y, z du système linéaire

$$x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 = \vec{v}_4.$$

Pourquoi ce système a-t-il une infinité de solutions ?

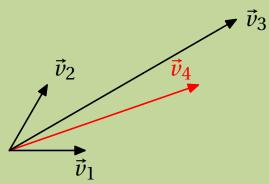

FIGURE 18A

Dans les exercices suivants, calculer (si les produits sont définis) les produits $A\vec{x}$. Dans chaque cas, calculer le produit de deux façons : en fonction des *colonnes de A (définition 1.3.6) et en fonction des lignes de A (fait 1.3.8).*

19. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

24. Si le rang de la matrice 4×4, A, est égal à 4, que vaut $\text{frel}(A)$?

25. Si le rang de la matrice 5×3, A, est égal à 3, que vaut $\text{frel}(A)$?

26. Trouver une matrice 3×3, A, telle que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

27. Trouver une matrice 2×2 non nulle, A, telle que $A\vec{x}$ soit parallèle au vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, pour tout $\vec{x}$ dans $\mathbb{R}^2$.

28. Trouver une matrice 3×3 non nulle, A, telle que $A\vec{x}$ soit perpendiculaire au vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, pour tout $\vec{x}$ dans $\mathbb{R}^3$.

29. On dit d'un système de la forme

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

qu'il est *homogène*. Justifiez les faits suivants :

a. Tous les systèmes homogènes sont consistants.

b. Un système homogène avec moins d'équations que d'inconnues a une infinité de solutions.

c. Si $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont des solutions du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$, alors $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ est aussi une solution.

d. Si $\vec{x}$ est une solution du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ et k est un scalaire arbitraire, alors $k\vec{x}$ est aussi une solution.

30. Est-ce que le vecteur $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$ est une combinaison linéaire de

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \ ?$$

Déterminez si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

31. Un système de quatre équations linéaires à trois inconnues est toujours inconsistant.

32. Il existe une matrice 3×4 de rang 4.

33. Si la matrice 4×4, A, est de rang 4, n'importe quel système linéaire dont la matrice des coefficients est A possède une solution et une seule.

34. Le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

35. Le système $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ est inconsistant.

36. Considérons l'application linéaire T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix},$$

$$\text{et} \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Déterminer la matrice de T.

37. Considérons l'application T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Cette transformation est-elle linéaire ? Si oui, donner sa matrice.

38. Le *produit scalaire* de deux vecteurs

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

de $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Remarquez que le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire. On dit que les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont *perpendiculaires* si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Trouvez tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont perpendiculaires à

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Faites un dessin.

39. Trouvez tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui sont perpendiculaires aux trois vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

(Voir l'exercice 38.)

40. Calculer deux vecteurs unitaires (de norme 1) qui sont respectivement des multiples des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ avec $A = (1; 0; 3)$, $B = (0; 2; 0)$. Trouver un point $C \notin \{O, A, B\}$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ soient orthogonaux deux à deux.

41. Dans les cas suivants décider si les points définissent un plan de l'espace. Si oui, donner l'équation ainsi qu'un vecteur normal de ce plan :

(1) $A(1; 2; 3)$, $B(2; 1; 5)$ et $C(2; 2; 6)$

(2) $A(0; 0; 1)$, $B(1; 0; 0)$ et $C(0; 1; 0)$.

(3) $A(1; 1; 1)$, $B(2; 0; 1)$ et $C(-1; 2; 4)$.

42. Trouver un vecteur normal au plan $2x - y + z = 2$, ainsi que 3 points non alignés de ce plan.

43. (ABC) est un triangle dans lequel $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = 3$. De plus $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$. Ce triangle est-il rectangle ? (Si oui, préciser en quel sommet)

Dans les exercices suivants, déterminer si la matrice indiquée est inversible. Trouver son inverse s'il existe. Dans le dernier exercice, la constante k est arbitraire.

44. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

45. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

46. $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

47. Soit L la droite de $\mathbb{R}^3$ formée des multiples du vecteur $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Déterminer la projection orthogonale du vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sur L.

48. Soit L la droite de $\mathbb{R}^3$ formée des multiples du vecteur $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Déterminer l'image du vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ par la symétrie par rapport à la droite L.

49. Décrivez géométriquement l'application linéaire T donnée par :

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

50. Décrivez géométriquement l'application linéaire T donnée par :

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

51. Déterminer la matrice de la projection sur la droite L de $\mathbb{R}^2$ représentée sur la figure ci-dessous.

52. Déterminer la matrice de la symétrie par rapport à la droite L définie dans l'exercice 51.

Dans les exercices suivants, déterminer les matrices des applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ indiquées. Certaines de ces applications n'ont pas été définies

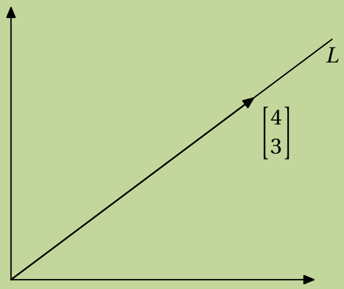

FIGURE 51A

formellement dans le cours : faites usage de bon sens. Vous pouvez supposer que ces applications sont bien linéaires.

53. La projection orthogonale sur le plan xy.

54. La symétrie par rapport au plan xz.

55. La rotation autour de l'axe des z d'un angle de $\pi/2$, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre lorsqu'on l'observe depuis le demi-axe des z positifs.

56. La rotation autour de l'axe des y d'un angle θ, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre lorsqu'on l'observe depuis le demi-axe des y positifs.

57. La symétrie par rapport au plan $y = z$.

58. a. Déterminer la matrice A de l'homothétie qui applique $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ sur $\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}$.

b. Déterminer la matrice B de la projection qui applique $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ sur $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

c. Déterminer la matrice C de la rotation qui applique $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ sur $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

d. Déterminer la matrice D de la transvection qui applique $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ sur $\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$.

e. Déterminer la matrice E de la symétrie qui applique $\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ sur $\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

59. Considérons les matrices A à E suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}36 & -0{,}48 \\ -0{,}48 & 0{,}64 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ -0{,}6 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Remplissez les blancs dans les assertions ci-dessous (il y a une solution dans chaque cas).

La matrice ____ représente une homothétie.

La matrice ____ représente une projection.

La matrice ____ représente une transvection.

La matrice ____ représente une symétrie.

La matrice ____ représente une rotation.

60. Chacune des applications linéaires *a*) à *e*) correspond à une (et une seule) des matrices A à J, laquelle ?

a. homothétie ; b. transvection ; c. rotation
d. projection ; e. symétrie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ -0{,}8 & -0{,}6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 0{,}8 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{bmatrix}$$

61. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère le plan $\mathbf{P}$ d'équation $x - \sqrt{2}y + z = 0$.

(1) Donner un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à ce plan.

(2) Déterminer l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ appartenant au plan $\mathbf{P}$.

(3) Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathbf{P}$.

62. Décrivez géométriquement chacune des applications définies par les matrices des questions $a)$ à $c)$, comme la composition d'une transformation bien connue et d'une homothétie dont vous préciserez le rapport.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

BUT. — Pour les matrices suivantes, décider si les matrices indiquées sont inversibles. Si oui, calculer leur inverse. Faites les calculs à la main. Justifiez toutes les étapes du calcul.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

63. a. Considérons une matrice $n \times m$, A, telle que $\text{rang}(A) < n$. Montrez qu'il existe un vecteur $\vec{b}$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que le système $A\vec{x} = \vec{b}$ soit inconsistant. *Indication :* Si $E = \text{frel}(A)$, montrez qu'il existe un vecteur $\vec{c}$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que le système $E\vec{x} = \vec{c}$ soit inconsistant ; travaillez alors « à l'envers ».

b. Considérons une matrice $n \times m$, A, où $n > m$. Montrez qu'il existe un vecteur $\vec{b}$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que le système $A\vec{x} = \vec{b}$ soit inconsistant.

64. Si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix},$$

déterminez un vecteur $\vec{b}$ dans $\mathbb{R}^4$ tel que le système $A\vec{x} = \vec{b}$ soit inconsistant. Voir l'exercice précédent.

65. Montrer qu'une matrice qui a deux colonnes égales n'est pas inversible.

66. Pour quelles valeurs des constantes a, b et c la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

67. Déterminer toutes les matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ telles que $ad - bc = 1$ et $A^{-1} = A$.

68. Parmi les applications linéaires T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui suivent, lesquelles sont inversibles ? Donner l'inverse quand il existe.

a. La symétrie par rapport à un plan

b. La projection sur un plan

c. Une homothétie de rapport 5 (c'est-à -dire que $T(\vec{v}) = 5\vec{v}$ pour tout vecteur $\vec{v}$)

d. Une rotation autour d'un axe

Pour les matrices suivantes, décider si elles sont inversibles. Si oui, calculer leur inverse. Faites les calculs à la main. Justifiez toutes les étapes du calcul.

69. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

70. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

71. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

72. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

73. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

74. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 11 \\ 3 & 7 & 14 & 25 \\ 4 & 11 & 25 & 50 \end{bmatrix}$

75. Pour quelles valeurs de k la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{bmatrix}$$

76. Pour quelles valeurs des constantes b et c la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & b \\ -1 & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

77. Pour quelles valeurs des constantes a, b et c la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

78. Déterminer toutes les matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ telles que $ad - bc = 1$ et $A^{-1} = A$.

79. Considérons des matrices de la forme $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, où a et b sont des constantes arbitraires. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $A^{-1} = A$?

80. Considérons la matrice diagonale

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

a. Pour quelles valeurs de a, b et c la matrice A est-elle inversible ? Lorsqu'elle l'est, que vaut A^{-1} ?

81. Parmi les applications linéaires T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui suivent, lesquelles sont inversibles ? Donner l'inverse quand il existe.

a. La symétrie par rapport à un plan

b. La projection sur un plan

c. Une homothétie de rapport 5 (c'est-à -dire que $T(\vec{v}) = 5\vec{v}$ pour tout vecteur $\vec{v}$)

Dans les exercices suivants, calculer, lorsqu'ils sont définis, les produits de matrices indiqués.

82. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

83. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

84. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

85. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

86. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

87. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

88. Calculer le produit de matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Expliquez pourquoi le résultat ne contredit pas la proposition 2.4.4 du cours.

Soit A et B des matrices $n \times n$ inversibles. Parmi les formules des exercices 16 à 25, lesquelles sont vraies indépendamment du choix de A et B.

89. $(I_n - A)(I_n + A) = I_n - A^2$

90. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

91. A^2 est inversible et $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$

92. $A+B$ est inversible et $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

93. $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

94. $ABB^{-1}A^{-1} = I_n$

95. $ABA^{-1} = B$

96. $(ABA^{-1})^3 = AB^3A^{-1}$

97. $(I_n + A)(I_n + A^{-1}) = 2I_n + A + A^{-1}$

98. $A^{-1}B$ est inversible et $(A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}A$.

99. Déterminer une matrice 2×2 non nulle, A, telle que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

100. On note $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la symétrie par rapport à la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(1) Determiner la matrice de l'application S.

(2) Est-ce que la matrice S est-elle inversible ? Si oui, trouver S^{-1}.

101. Soit

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculer A^2 et en déduire que A est inversible ainsi que le calcul de A^{-1}.

102. La matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ est- elle inversible ? Calculer les produits AB et BA.

103. Déterminez toutes les matrices 2×2, X telles que $AX = B$, où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

104. Déterminez toutes les matrices inversibles S telles que

$$S^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad .$$

105. Déterminez toutes les matrices inversibles S telles que

$$S^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

106. Déterminer les matrices 2×2, X, qui commutent à toute matrice 2×2.

107. Soit A et B deux matrices 2×2 telles que

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad .$$

Déterminez A.

108. Déterminez une matrice 2×2, $A \neq I_2$, telle que $A^3 = I_2$.

109. Déterminez toutes les applications linéaires T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telles que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad .$$

Indication : Il s'agit de trouver les matrices 2×2, A, telles que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad .$$

Ces deux équations peuvent être combinées en l'équation matricielle, d'inconnue A,

$$A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad .$$

110. En utilisant l'exercice précédent comme guide, justifiez l'assertion suivante. Soit $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ des vecteurs de $\mathbb{R}^m$ tels que la matrice

$$S = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

soit inversible. Soit $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ des vecteurs quelconques dans $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une application linéaire T, et une seule, de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $T(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ pour tout entier i entre 1 et m. Déterminez la matrice A de cette application linéaire en fonction de S et de la matrice

$$B = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{w}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{w}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad .$$

111. Déterminez la matrice A de l'application linéaire T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad .$$

(Cf. l'exercice 110.)

112. Déterminez la matrice A de l'application linéaire T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad .$$

(Cf. l'exercice 110.)

Dans les exercices suivants, déterminez toutes les matrices qui commutent avec la matrice donnée, A.

113. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

114. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

115. $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

116. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

117. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

118. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

119. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

Déterminez si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

120. La fonction T donnée par $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x-y\\y-x\end{bmatrix}$ est une application linéaire.

121. La matrice $\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\1/2 & 1/2\end{bmatrix}$ représente une rotation.

122. La formule $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ est vérifiée quelle que soit la matrice inversible A.

123. Si A est une matrice 3×4 et B est une matrice 4×5, alors AB est une matrice 5×3.

124. La fonction T donnée par $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y\\1\end{bmatrix}$ est une application linéaire.

125. La matrice $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{bmatrix}$ est inversible.

126. La matrice $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ est inversible.

127. Il existe une matrice triangulaire supérieure 2×2, A, telle que $A^2 = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$.

128. La matrice $\begin{bmatrix}k & -2\\5 & k-6\end{bmatrix}$ est inversible quel que soit le nombre réel k.

129. Il existe un nombre réel k tel que la matrice $\begin{bmatrix}k-1 & -2\\-4 & k-3\end{bmatrix}$ ne soit pas inversible.

130. Il existe un nombre réel k tel que la matrice $\begin{bmatrix}k-2 & 3\\-3 & k-2\end{bmatrix}$ ne soit pas inversible.

131. La matrice $\begin{bmatrix}-0{,}6 & 0{,}8\\-0{,}8 & -0{,}6\end{bmatrix}$ représente une rotation.

132. Si $A^2 = I_2$, la matrice A est ou bien I_2 ou bien $-I_2$.

133. Si les matrices A et B sont inversibles, la matrice $A + B$ est aussi inversible.

134. Pour toute matrice 2×2, A, qui représente une projection, on a $A^2 = A$.

135. Si A est une matrice 2×2 qui représente une symétrie, alors $A^{-1} = A$.

136. Si A est une matrice $n \times n$ telle que $A^2 = 0$, alors la matrice $I_n + A$ est inversible.

137. Il existe une matrice inversible 2×2, A, telle que $A^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$.

138. Il existe une matrice A telle que

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} \quad .$$

139. Il existe une matrice A telle que

$$A\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix} \quad .$$

140. Il existe une matrice A telle que

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} \quad .$$

Pour chaque matrice A des exercices suivants, trouvez des vecteurs qui engendrent le noyau de A.

141. $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$

142. $A = \begin{bmatrix}2 & 3\\6 & 9\end{bmatrix}$

143. $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

144. $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 3 & 5\end{bmatrix}$

145. $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

146. $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\\3 & 2 & 1\end{bmatrix}$

147. $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 4\\0 & 1 & -3 & -1\\3 & 4 & -6 & 8\\0 & -1 & 3 & 4\end{bmatrix}$

148. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

149. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Pour chaque matrice A des exercices suivants, trouvez des vecteurs qui engendrent l'image de A. Donnez aussi peu de vecteurs que possible.

150. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

151. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

152. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

153. Pour quelles valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m-8 & -15 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Dans ces cas, déterminer l'inverse.

Pour chaque matrice A des exercices suivants , décrivez l'image de la transformation $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ géométriquement (en tant que droite, plan, etc. dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$).

154. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

155. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$

156. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \end{bmatrix}$

157. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

158. $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 1 & 9 & 2 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

159. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

160. Donnez un exemple de matrice A dont l'image est engendrée par le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

161. Donnez un exemple de matrice A dont l'image est le plan orthogonal au vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$.

162. Donnez un exemple d'application linéaire dont l'image est engendrée par $\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$.

163. Donnez un exemple de transformation linéaire dont le noyau est le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

164. Donnez un exemple de transformation linéaire dont le noyau est la droite engendrée par $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$.

165. Soit A la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Décrivez l'image et le noyau des matrices A, A^2 et A^3 géométriquement.

166. Considérons une matrice carrée A.

a. Quelle relation y a-t-il entre $\ker(A)$ et $\ker(A^2)$? Sont-ils nécessairement égaux ? L'un est-il nécessairement inclus dans l'autre ? Plus généralement, que pouvez-vous dire de $\ker(A)$, $\ker(A^2)$, $\ker(A^3)$, $\ker(A^4)$,... ?

b. Que pouvez-vous dire de $\mathrm{im}(A)$, $\mathrm{im}(A^2)$, $\mathrm{im}(A^3)$,... ? *Indice :* on peut s'aider de l'exercice 165.

167. Soit $M_a = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ où a est un paramètre réel.

(1) Pour quelles valeurs de a la matrice M_a est-elle inversible ?

(2) Pour ces valeurs, déterminer l'inverse de M_a.

168. Considérons $A = \begin{bmatrix} 0,36 & 0,48 \\ 0,48 & 0,64 \end{bmatrix}$.

a. Décrivez $\ker(A)$ et $\operatorname{im}(A)$ géométriquement.

b. Déterminez A^2. Si $\vec{v}$ est dans l'image de A, que pouvez vous dire de $A\vec{v}$?

c. Décrivez géométriquement l'application linéaire donnée par $T(\vec{x}) = A\vec{x}$.

169. Ecrivez l'image de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

comme le noyau d'une matrice B.

Indication : l'image de A consiste en tous les vecteurs $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^4$ tel que le système $A\vec{x} = \vec{y}$ soit consistant. Ecrivez le système de manière plus explicite :

$$\left| \begin{array}{llll} x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = y_1 & & & \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = & y_2 & & \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = & & y_3 & \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = & & & y_4 \end{array} \right|.$$

Puis mettez le sous forme échelonnée réduite :

$$\left| \begin{array}{rl} x_1 - x_3 + 8x_4 = & 4y_3 - 3y_4 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = & -y_3 + y_4 \\ 0 = & y_1 - 3y_3 + 2y_4 \\ 0 = & y_2 - 2y_3 + y_4 \end{array} \right|.$$

Pour quels vecteurs $\vec{y}$ ce système est-il consistant ? La réponse vous permettra d'exprimer $\operatorname{im}(A)$ comme le noyau d'une matrice 2×4.

170. En utillisant l'exercice 169, expliquez comment vous pouvez écrire l'image de n'importe quelle matrice A comme le noyau d'une autre matrice B.

171. Considérons une matrice A et posons $B = \operatorname{frel}(A)$.

a. Le noyau $\ker(A)$ est-il nécessairement égal à $\ker(B)$? Expliquez.

b. L'image $\operatorname{im}(A)$ est-elle nécessairement égale à $\operatorname{im}(B)$? Expliquez.

172. Considérons une matrice $n \times m$, A, telle que $\operatorname{rang}(A) = r < m$. Expliquez comment on peut écrire $\ker(A)$ comme espace engendré par $m - r$ vecteurs.

173. Considérons une matrice 3×4, A, sous forme réduite échelonnée. Que peut-on dire de l'image de A ? Décrivez tous les cas en fonction de $\operatorname{rang}(A)$ et dessinez un schéma dans chaque cas.

174. Soit T la projection suivant une droite L_1 sur une droite L_2. Décrivez géométriquement l'image et le noyau de T.

175. Considérons une matrice 2×2, A, avec $A^2 = A$.

a. Si $\vec{w}$ est dans l'image de A, quelle relation y a-t-il entre $\vec{w}$ et $A\vec{w}$?

b. Que peut-on dire sur A si $\operatorname{rang}(A) = 2$? Et si $\operatorname{rang}(A) = 0$?

c. Si $\operatorname{rang}(A) = 1$, montrez que la transformation linéaire donnée par $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ est la projection sur $\operatorname{im}(A)$ suivant $\ker(A)$.

BUT. — Vérifier si un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace. Appliquer le concept d'indépendance linéaire. Appliquer le concept de base. Quels ensembles W des exercices 1 à 3 sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$?

176. $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x + y + z = 1 \right\}$

177. $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x \leq y \leq z \right\}$

178. $W = \left\{ \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{bmatrix} : \begin{array}{c} x, y, z \\ \text{des nombres} \\ \text{arbitraires} \end{array} \right\}$

179. Considérons des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs est-il toujours un sous-espace de $\mathbb{R}^n$? Justifiez votre réponse.

180. Donnez une description géométrique de tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$. Justifiez votre réponse.

181. Considérons deux sous-espaces V et W de $\mathbb{R}^n$.

a. Est-ce que l'intersection $V \cap W$ est toujours un sous-espace de $\mathbb{R}^n$?

b. Est-ce que l'union $V \cup W$ est toujours un sous-espace de $\mathbb{R}^n$?

182. Considérons un ensemble non vide dans $\mathbb{R}^n$ stable par addition et par multiplication par un nombre. Est-ce toujours un sous-espace de $\mathbb{R}^n$? Expliquez.

183. Trouvez une relation non triviale entre les vecteurs suivant :

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

Dans les exercices suivants, identifiez les vecteurs redondants. Ainsi, déterminez si les vecteurs donnés sont linéairement indépendants.

184. $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$

185. $\begin{bmatrix}7\\11\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\7\end{bmatrix}$

186. $\begin{bmatrix}7\\11\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

187. $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

188. $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

189. $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

190. $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\5\\4\end{bmatrix}$

191. $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix}$

192. $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\4\\7\\10\end{bmatrix}$

193. $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\5\\0\end{bmatrix}$

194. Considérons les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{w} = \begin{bmatrix}m\\m\\1\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix}1\\1\\m\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}$$

avec $m \in \mathbb{R}$.

(a) Pour quelles valeurs de m le vecteur $\overrightarrow{w}$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$?

(b) Pour chaque valeur de m de la question (a), déterminez toutes les combinaisons linéaires possibles.

Dans les exercices suivants, trouvez un vecteur colonne redondant de la matrice A donnée et écrivez-le comme combinaison linéaire des colonnes précédentes. Utilisez cette représentation pour trouver une relation non triviale entre les colonnes et trouver un vecteur non nul dans le noyau de A. (Cette procédure est illustrée dans le cours.). Pour $A =$

195. $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$

196. $\begin{bmatrix}1&3\\2&6\end{bmatrix}$

197. $\begin{bmatrix}0&1\\0&2\end{bmatrix}$

198. $\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$

199. $\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&3&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

Dans les exercices suivants, trouvez une base de l'image des matrices données.

200. $\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}$

201. $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&5\\1&3&7\end{bmatrix}$

202. $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$

203. $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

204. $\begin{bmatrix}1&5\\2&6\\3&7\\5&8\end{bmatrix}$

205. $\begin{bmatrix}0&1&2&0&0&3\\0&0&0&1&0&4\\0&0&0&0&1&5\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

206. $\begin{bmatrix}0&1&2&0&3&0\\0&0&0&1&4&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

207. Considérons la matrice 5×4

$$A = \begin{bmatrix}| & | & | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 \\ | & | & | & |\end{bmatrix}.$$

Si le vecteur $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$ est dans le noyau de A, écrivez $\vec{v}_4$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

208. Considérons une application linéaire T de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et des vecteurs linéairement dépendants $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ de $\mathbb{R}^n$. Les vecteurs $T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_m)$ sont-ils nécessairement linéairement dépendants ? Comment pouvez-vous le prouver ?

209. Considérons des vecteurs linéairement indépendants $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ de $\mathbb{R}^n$ et un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ qui ne soit pas contenu dans l'espace engendré par $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$. Les vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}$ sont-ils nécessairement indépendants ? Justifiez votre réponse.

210. Considérons trois vecteurs linéairement indépendants $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ de $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ sont-ils linéairement indépendants ? Comment le prouvez-vous ?

211. Les colonnes d'une matrice inversible sont-elles linéairement indépendantes ?

212. Trouvez une base du noyau de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Justifiez votre réponse soigneusement, c'est-à-dire, expliquez pourquoi les vecteurs que vous avez trouvés sont linéairement indépendants et pourquoi ils engendrent le noyau.

213. Exprimez le plan d'équation $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0$ de $\mathbb{R}^3$ comme le noyau d'une matrice A puis comme l'image d'une matrice B.

214. Exprimez la droite L de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ comme l'image d'une matrice A puis comme le noyau d'une matrice B.

215. Considérons deux sous-espaces V et W de $\mathbb{R}^n$. Soit $V + W$ l'ensemble de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v}$ dans V et $\vec{w}$ dans W. Est-ce que $V + W$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$?

Si V et W sont deux droites distinctes de $\mathbb{R}^3$, qu'est $V + W$? Faites un dessin.

216. Considérons deux sous-espaces V et W de $\mathbb{R}^n$ dont l'intersection ne contient que le vecteur nul $\vec{0}$.

a. Considérons des vecteurs linéairement indépendants $\vec{v}_1$, ... , $\vec{v}_p$ de V et des vecteurs linéairement indépendants $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_q$ de W. Expliquez pourquoi les vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_q$ sont linéairement indépendants.

b. Considérons une base $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ de V et une base $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_q$ de W. Expliquez pourquoi $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_q$ est une base de $V + W$ (voir l'exercice précédent).

BUT. — Dans les exercices suivants, trouvez sans calculs les colonnes redondantes des matrices données. Trouvez une base de l'image de la matrice et une base du noyau de la matrice.

217. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

218. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

219. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

220. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

221. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

222. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

223. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

224. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

225. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

226. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

227. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

228. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

229. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

230. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

231. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

232. Pour quelles valeurs des constantes a, b, c, d, e et f les vecteurs

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \\ 0 \end{bmatrix}$$

sont-ils linéairement indépendants ? Justifiez votre réponse.

233. Considérons un sous-espaces V de $\mathbb{R}^n$. On définit son complémentaire orthogonal $V^{\perp}$ comme l'ensemble des vecteurs $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux à tous les vecteurs de V, c'est-à -dire $\vec{w}\cdot\vec{v} = 0$ pour tout $\vec{v}$ dans V. Montrez que $V^\perp$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

Dans les exercices suivants, trouvez la forme échelonnée réduite de la matrice A. Trouvez ensuite une base de l'image et une base du noyau.

234. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

235. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}$

236. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

237. $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

238. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

239. Considérons les matrices

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Quelles matrices de la liste ont le même noyau que C ?

b. Quelles matrices de la liste ont la même image que C ?

c. Quelles matrices de la liste ont une image différente de toutes les images des autres matrices de la liste ?

240. Déterminez si les vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix},$$

forment une base de $\mathbb{R}^4$.

241. Pour quelle(s) valeur(s) de k, les vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ k \end{bmatrix},$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$?

242. Trouvez une base du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0.$$

243. Trouvez une base du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par l'équation

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0.$$

244. Soit V le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par l'équation

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0.$$

Trouvez une application linéaire T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ telle que $\ker(T) = \{\vec{0}\}$ et $\operatorname{im}(T) = V$. Décrivez T par sa matrice.

245. Trouvez une base du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ formé de tous les vecteurs orthogonaux à

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

246. Un sous-espace V de $\mathbb{R}^n$ est appelé *hyperplan* si V est défini par une équation linéaire homogène

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = 0$$

dont au moins un coefficient c_i est non nul. Quelle est la dimension d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$? Justifiez votre réponse soigneusement. Qu'est-ce qu'un hyperplan de $\mathbb{R}^3$? Qu'est-ce qu'un hyperplan de $\mathbb{R}^2$?

247. Considérons deux sous-espaces V et W de $\mathbb{R}^n$, V étant contenu dans W. Expliquez pourquoi $\dim(V) \leq \dim(W)$. (Ceci parait évident mais ne comptez pas trop sur votre intuition dans $\mathbb{R}^n$.)

248. Considérons deux sous-espaces V et W de $\mathbb{R}^n$, V étant contenu dans W. Montrez que si $\dim(V) = \dim(W)$ alors $V = W$.

249. Considérons un sous-espaces V de $\mathbb{R}^n$ avec $\dim(V) = n$. Expliquez pourquoi $V = \mathbb{R}^n$.

250. Pouvez-vous trouver une matrice 3×3, A, telle que $\mathrm{im}(A) = \ker(A)$? Expliquez.

251. Donnez un exemple de matrice 4×5, A, avec $\dim(\ker(A)) = 3$.

252. a. Considérons une application linéaire T de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$. Quelles sont les valeurs possibles de $\dim(\ker(T))$? Expliquez.

b. Considérons une application linéaire T de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^7$. Quelles sont les valeurs possibles de $\dim(\mathrm{im}(T))$? Expliquez.

253. Si une matrice 3×3, A, représente la projection sur un plan de $\mathbb{R}^3$, quel est le rang de A ?

254. Considérons une application linéaire Q de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^7$. Quelles sont les valeurs possibles de $\dim(\ker(Q))$? Expliquer.

255. Considérons une application linéaire T de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}^2$.

(1) Quelles sont les valeurs possibles de $\dim(\ker(T))$? Expliquer.

(2) Si T est surjective, que vaut $\dim(\ker(T))$? Expliquer.

256. Considérons les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1&0&2&0&4&0 \\ 0&1&3&0&5&0 \\ 0&0&0&1&6&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

et

$$B = \begin{bmatrix} 1&0&2&0&4&0 \\ 0&1&3&0&5&0 \\ 0&0&0&1&7&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}.$$

Montrez que les noyaux et les images de A et B sont différents.

Indication : Pensez à écrire la cinquième colonne comme combinaison linéaire des premières colonnes.

257. Considérons les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1&0&2&0&4&0 \\ 0&1&3&0&5&0 \\ 0&0&0&1&6&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

et

$$B = \begin{bmatrix} 1&0&2&0&0&4 \\ 0&1&3&0&0&5 \\ 0&0&0&1&0&6 \\ 0&0&0&0&1&7 \end{bmatrix}$$

Montrez que les noyaux et les images de A et B sont différents.

Indication : Pensez à écrire la cinquième colonne comme combinaison linéaire des premières colonnes.

BUT. — Utiliser le concept de coordonnées. Appliquer la définition de matrice d'une application linéaire par rapport à une base. Trouver cette matrice à partir de la matrice standard de l'application. Trouver la matrice d'une application linéaire (dans n'importe quelle base) colonne par colonne. Utiliser le concept de matrices semblables.

Dans les exercices suivants , déterminez si le vecteur $\vec{x}$ est dans l'espace V engendré par les vecteurs $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_m$ (donnez la réponse sans calculs si possible et en utilisant la forme échelonnée réduite si nécessaire). Si $\vec{x}$ est dans V déterminez ses coordonnées dans la base $\mathfrak{B} = (\vec{v}_1, \dots \vec{v}_m)$ de V et écrivez $[\vec{x}]_{\mathfrak{B}}$.

258. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

259. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

260. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 31 \\ 37 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 23 \\ 29 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 31 \\ 37 \end{bmatrix}$

261. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 23 \\ 29 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 46 \\ 58 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 61 \\ 67 \end{bmatrix}$

262. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$

263. $\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

264. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

265. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

266. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

267.$\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

268.$\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

269.$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

270.$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

271. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

272. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

273. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

274. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

275. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dans les exercices suivants trouvez la matrice B de l'application linéaire donnée par $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ dans la base $\mathfrak{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Pour vous entraîner, faites les calculs de trois manières : (a) utilisez la formule $B = S^{-1}AS$, (b) utilisez un diagramme commutatif et (c) construisez B colonne par colonne.

276. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

277. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

278. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

279. $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

280. $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

281. $A = \begin{bmatrix} 13 & -20 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

Dans les exercices suivants trouvez la matrice B de l'application linéaire $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ dans la base $\mathfrak{B} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m)$.

282. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

283. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

284. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

285. $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

286. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

287. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Dans les exercices suivants, trouvez une base $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de l'application linéaire T dans la base $\mathfrak{B}$ soit diagonale.

288. La projection orthogonale sur la droite de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

289. La symétrie par rapport à la droite de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

290. La symétrie par rapport à la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

291. La projection orthogonale sur la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

292. La projection orthogonale sur le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $3x_1+x_2+2x_3 = 0$.

293. La symétrie par rapport au plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

294. Considérons le plan d'équation $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ avec pour base les vecteurs $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Si $[\vec{x}]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, trouvez $\vec{x}$.

295. Considérons le plan d'équation $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$ avec pour base les vecteurs $\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Si $[\vec{x}]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, trouvez $\vec{x}$.

296. Considérons le plan d'équation $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$. Trouvez une base $\mathfrak{B}$ du plan telle que le vecteur $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ s'écrive $[\vec{x}]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

297. Considérons le plan d'équation $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$. Trouvez une base $\mathfrak{B}$ du plan telle que le vecteur $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ s'écrive $[\vec{x}]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

298. Trouvez une base $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{R}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{\mathfrak{R}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

299. Montrez qu'une matrice 3×3 représentant une symétrie par rapport à un plan est semblable à la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

300. La matrice $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ est-elle semblable à $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$?

301. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ est-elle semblable à $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$?

302. Trouvez une base $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice en base $\mathfrak{B}$ de l'application linéaire

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -5 & -9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{soit} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

303. Trouvez une base $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice en base $\mathfrak{B}$ de l'application linéaire

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{soit} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

304. Soit $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(1) Montrer que les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer l'inverse de la matrice $P = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix}$ dont les colonnes sont les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$.

(3) On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, déterminez les coordonnées du vecteur $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

(4) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer la matrice de f dans la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

(5) L'application f est-elle une projection orthogonale ou une symétrie orthogonale ? Expliquer.

305.

(1) Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2y = 0$. Déterminer une base de $\mathcal{P}$.

(2) Soit g la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan $\mathcal{P}$. Déterminer la matrice de g dans la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

(3) Montrer que les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ forment une base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

(4) Soit $\vec{v} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$. Déterminer les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

(5) Déterminez la matrice de la symétrie orthogonale g dans la base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

306. Soit $\mathcal{P}$ le plan dans $\mathbb{R}^3$ d'équation $3x + y - z = 0$.

(1) Déterminer la matrice de la projection orthogonale $proj_{\mathcal{P}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sur le plan $\mathcal{P}$ dans la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$
Attention : il ne s'agit pas d'une projection sur une droite !

(2) Pour $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ déterminer $proj_{\mathcal{P}}(\vec{v})$.

(3) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $proj_{\mathcal{P}}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

307. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice relativement à la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est A.

(1) Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer les coordonnées de $\vec{w} = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ dans la base $\mathcal{B}$.

(3) Déterminer la matrice B de l'application linéaire T relativement à la base $\mathcal{B}$.

308. Les matrices $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Dans les exercices suivants, décider si l'affirmation est vraie ou fausse :

309. L'image d'une matrice 3×4 est un sous espace de $\mathbb{R}^4$.

310. L'espace engendré par les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2 \ldots$, $\vec{v}_n$ est formé de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{v}_1$,$\vec{v}_2 \ldots$,$\vec{v}_n$.

311. Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$ alors ils forment une base de $\mathbb{R}^n$.

312. Il existe une matrice 5×4 dont l'image est $\mathbb{R}^5$.

313. Le noyau d'une matrice inversible ne contient que le vecteur nul.

314. La matrice identité est semblable à
toutes les matrices inversibles.

315. Les vecteurs-colonnes d'une matrice 5×4 sont linéairement dépendants.

316. Si A est une matrice 5×6 de rang 4 alors la dimension de son noyau est égale à 1.

317. Si le noyau d'une matrice A ne contient que le vecteur nul alors les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

318. Si l'image d'une matrice $n \times n$ est $\mathbb{R}^n$ alors cette matrice est inversible.

319. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ est semblable à $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

320. Les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

321. La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est semblable à $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

322. Les vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendants ?

323. Si la matrice 2×2, R, représente une symétrie par rapport à une droite de $\mathbb{R}^2$ alors R est semblable à $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

324. Si A est semblable à B alors il existe une unique matrice S telle que $S^{-1}AS = B$.

Calculer Calculer les déterminants des matrices suivantes :

325. $\begin{bmatrix} 7 & 11 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$

326. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

327. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

328. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

329. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

330. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

331. $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Déterminer pour quelles valeurs de λ, la matrice suivante est inversible :

332. $\begin{bmatrix} 7-\lambda & 11 \\ -8 & -4-\lambda \end{bmatrix}$

333. $\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -4 & -6-\lambda \end{bmatrix}$

334. $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$

335. $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$