S10 :

Exo 27 : on bien sait que $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ sont linéairement indépendances.
une base $\mathcal{B}$ = Vect ($\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$)

Pour trouver $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$, on sait : $P\cdot[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \vec{x}$ où $P = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$,

car v_1, v_2, v_3 sont les vecteurs indépendance, donc P est la matrice unitaire et P est inversable, alors on a $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\cdot\vec{x}$.

Pour trouver P^{-1}, on utilise la technique de la matrice augmenté soit $B = [P \vdots I_3]$

On calcul Frel(B) . $\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right]$ $\begin{array}{l}L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{array}$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right]$

Et Frel(B) = $\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right]$, donc on a $P^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$

$\underbrace{\qquad}_{I_3}$ $\underbrace{\qquad}_{P^{-1}}$

$\therefore [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\cdot\vec{x} = \begin{bmatrix}-1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\7\\13\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\4\\12\end{bmatrix}$

Exo 28b : une Base $\mathcal{B}$ = Vect ($\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$) $\Rightarrow P = \begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$

1er manière) : $B = P^{-1}\cdot A\cdot P$, ici $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$

$\therefore B = \begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5&-3\\6&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4&-2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}$

2em manière) : $B = \left[[T(\vec{v_1})]_{\mathcal{B}} \ [T(\vec{v_2})]_{\mathcal{B}}\right]$, $T(\vec{v_1}) = A\cdot\vec{v_1} = \begin{bmatrix}5&-3\\6&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

$T(\vec{v_2}) = A\cdot\vec{v_2} = \begin{bmatrix}5&-3\\6&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$

$\therefore [T(\vec{v_1})]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\cdot T(\vec{v_1}) = \begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$

$[T(\vec{v_2})]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\cdot T(\vec{v_2}) = \begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

$\therefore B = \begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}$