Rappel : Droite vectorielle $L = \{\lambda \overrightarrow{w} | k \in \mathbb{R}\}$ et vecteur $\overrightarrow{x}$

unique décomposition $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{||} + \overrightarrow{x}^{\perp}$.

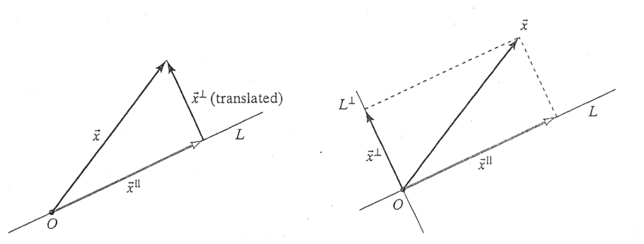


FIGURE – (a) (b)

Theorem (projection orthogonale de $\overrightarrow{x}$ sur la droite L)

$\overrightarrow{x}^{||} = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\ \overrightarrow{u}$ *avec* $\overrightarrow{u}$ *vecteur de L* *de norme* 1

Rappel

Theorem (Caractérisation des applications linéaires)

Soit $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application. L'application T est linéaire (càd il existe une matrice $n \times m$ A telle que pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m$, $T(\overrightarrow{x}) = A\ \overrightarrow{x}$) si et seulement si

(a) $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^m, \forall \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^m$ *on a* $T(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{w})$

(b) $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^m, \forall k \in \mathbb{R}$ *on a* $T(k\overrightarrow{v}) = kT(\overrightarrow{v})$.

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = T(x_1 \overrightarrow{e}_1 + \ldots x_m \overrightarrow{e}_m) = \left(T(\overrightarrow{e}_1) \ldots T\overrightarrow{e}_m)\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Definition (Projections.)

Soit $\vec{a} \neq \vec{0}$ dans $\mathbb{R}^2$ et $L = < \vec{a} >$ une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^2$. Chaque vecteur $\overrightarrow{x}$ de $\mathbb{R}^2$ admet une unique décomposition

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{||} + \overrightarrow{x}^{\perp},$$

où $\overrightarrow{x}^{||}$ est parallèle à L et où $\overrightarrow{x}^{\perp}$ est orthogonal à L. L'application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \overrightarrow{x} \longrightarrow T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^{||}$ est la projection (orthogonale) sur la droite L, souvent notée proj_L.

Soit $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ vecteur directeur unitaire de L, alors

$$\mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}.$$

$\overrightarrow{x} \to \mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x})$ est linéaire de matrice $\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \end{bmatrix}$.

Chapitre 1 Chapitre 2 Chapitre 3

Problem

Calculer la projection dans

- $\mathbb{R}^2$ *sur* $D = < \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} >$
- $\mathbb{R}^3$ *sur* $D = < \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} >$

Problem

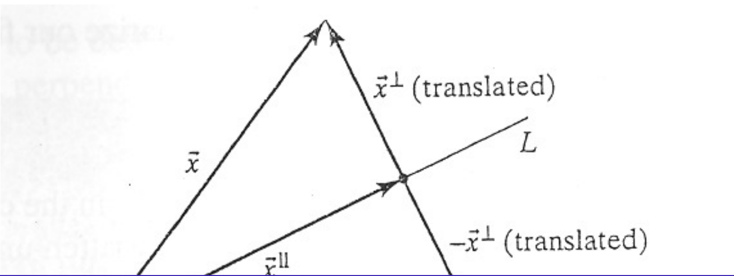
On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quelle matrice correspond à une projection ?

Symétries



Symétries

$T(\vec x_1+\vec x_2) = 2((\vec x_1+\vec x_2)\cdot\vec u) - (\vec x_1+\vec x_2)$

$= 2\left((\vec x_1\cdot\vec u)+(\vec x_2\cdot\vec u)\right) - \vec x_1 - \vec x_2$

$=(2(\vec x_1\cdot\vec u)-\vec x_1)+(2(\vec x_2\cdot\vec u)-\vec x_2)$

$= T(\vec x_1)+T(\vec x_2)$

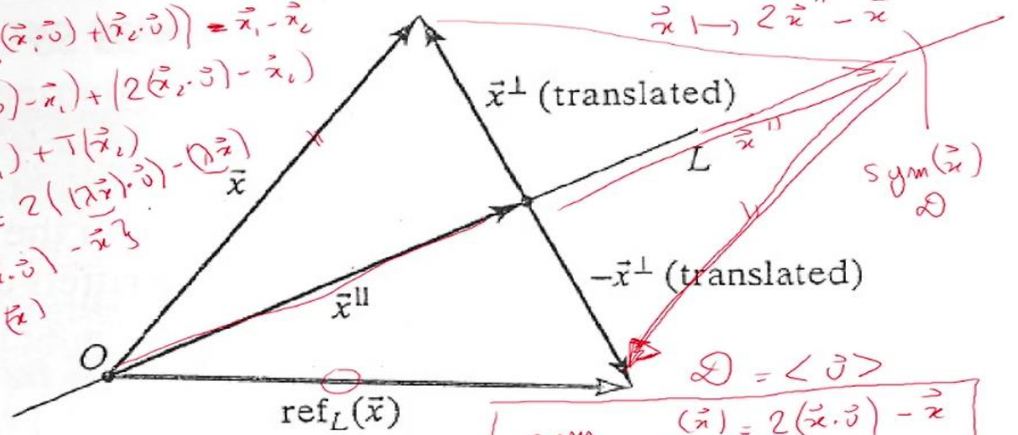
$T(\lambda\vec x) = 2((\lambda\vec x)\cdot\vec u) - (\lambda\vec x)$

$= \lambda\{2(\vec x\cdot\vec u)-\vec x\}$

$= \lambda T(\vec x)$

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\vec x \mapsto 2\vec x'' - \vec x$



$\mathcal{D} = \langle \vec u \rangle$

$\boxed{\mathrm{sym}_{\mathcal{D}=\langle\vec u\rangle}(\vec x) = 2(\vec x\cdot\vec u) - \vec x}$

FIGURE –

Résumé (Symétries)

Soit L une droite dans le plan qui passe par l'origine. On décompose un vecteur du plan $\overrightarrow{x}$ comme $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{\parallel} + \overrightarrow{x}^{\perp}$, où $\overrightarrow{x}^{\parallel}$ est parallèle à L et où $\overrightarrow{x}^{\perp}$ est orthogonal à L. L'application linéaire $T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^{\parallel} - \overrightarrow{x}^{\perp}$ est la symétrie par rapport à la droite L et est souvent notée sym_L et est donnée par $\mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^{\parallel} - \overrightarrow{x}^{\perp}$.
La formule suivante relie $\mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x})$ et $\mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x})$:

$$\mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x}) = 2\mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x} = 2(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{u})\overrightarrow{u} - \overrightarrow{x}$$

La matrice de la symétrie est de la forme

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2+b^2=1,$$

avec $a = u_1^2 - u_2^2$, $b = 2u_1u_2$ où u_1 et u_2 sont les coordonnées d'un vecteur unitaire de la droite L.

Problem

On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

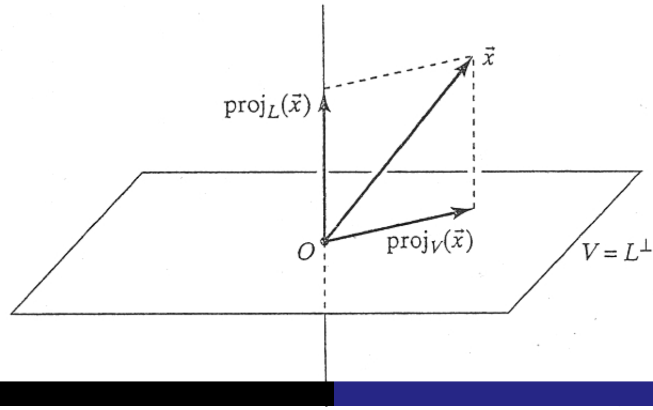
Quelle matrice correspond à une symétrie ?

Problem

Calculer la symétrie dans $\mathbb{R}^2$ *par rapport à la droite passant par* 0 *et de vecteur directeur* $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Projections et Symétrie dans l'espace

L une droite dans l'espace qui passe par l'origine. Un vecteur $\overrightarrow{x}$ se décompose en $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{||} + \overrightarrow{x}^{\perp}$, où $\overrightarrow{x}^{||}$ est parallèle à L et où $\overrightarrow{x}^{\perp}$ est orthogonal à L.



Résumé (Projections et symétries dans l'espace)

On a les formules, en fonction du vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ *de la droite* L

Projection sur la droite L $\quad \mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$

Symétrie par rapport à L $\quad \mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x}) = 2(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{u})\overrightarrow{u} - \overrightarrow{x}$

Projection sur le plan $V = L^{\perp}$ $\quad \mathrm{proj}_V(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - (\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$

Symétrie par rapport à $V = L^{\perp}$

$\mathrm{sym}_V(\overrightarrow{x}) = -\mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - 2(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$

Problem

Calculer la symétrie dans $\mathbb{R}^3$ *par rapport à la droite passant par* 0 *et de vecteur directeur* $\underbrace{\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}}_{\vec v}$

$$\rightsquigarrow \vec u = \frac{1}{\|\vec v\|}\vec v = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underbrace{\mathrm{sym}}_{\mathcal{D}}(\vec x) = \underbrace{2(x\cdot\vec u)\vec u - \vec x}_{T(\vec x)}}$$

$$T(\vec e_1) = 2\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 1\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3\\-2/3\\-2/3\end{pmatrix}$$

$$T(\vec e_2) = 2\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}(-1)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3\\-1/3\\-2/3\end{pmatrix}$$

$$T(\vec e_3) = 2\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}(-1)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\-1/3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\-2 & -1 & 2\\-2 & -2 & -1\end{pmatrix}}$$

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère le plan **P** d'équation $x - \sqrt{2}y + z = 0$.

1. Donner un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à ce plan.
2. Déterminer les vecteurs $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ appartenant à **P**.
3. matrice de la projection orthogonale sur le plan **P** ?
4. matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan **P** ?

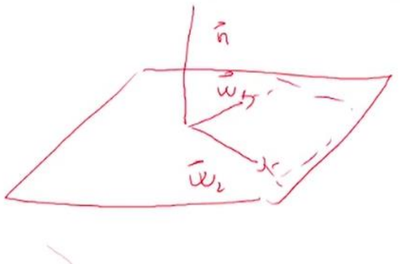
Dans $\mathbb{R}^3$ on considère le plan **P** d'équation $1x - \sqrt{2}y + 1z = 0$.

1. Donner un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à ce plan.
2. Déterminer les vecteurs $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ appartenant à **P**.
3. matrice de la projection orthogonale sur le plan **P** ?
4. matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan **P** ?

$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\alpha - \beta \\ \alpha + 0\beta \\ 0\alpha + 1\beta \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_2}$$



Rotations.

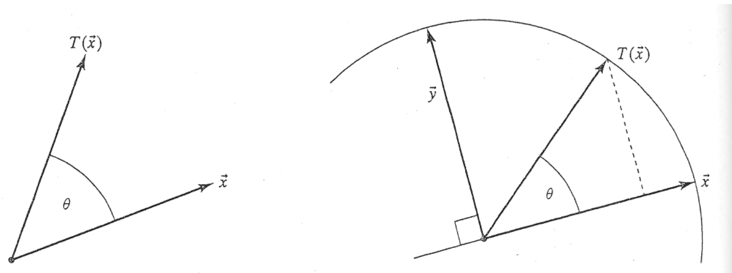


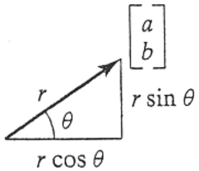
FIGURE – Rotation d'angle θ

Definition (Coordonnées polaire.)

A un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on associe un couple (r, ρ) où r est un réel positif ou nul et ρ un angle entre 0 ret 2π tels que

$$x = r\cos(\rho)$$

$$y = r\sin(\rho)$$



$$\cos(\rho + \theta) = \cos(\rho)\cos(\theta) - \sin(\rho)\sin(\theta)$$

$$\sin(\rho + \theta) = \cos(\rho)\sin(\theta) + \sin(\rho)\cos(\theta)$$

rotation d'angle θ :

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\rho) \\ r\sin(\rho) \end{bmatrix} \rightsquigarrow \vec{y} = \begin{bmatrix} r\cos(\rho+\theta) \\ r\sin(\rho+\theta) \end{bmatrix}$$

. Formules trigonométriques pour la somme des angles, on a

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} r\cos(\rho+\theta) \\ r\sin(\rho+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\rho)\cos(\theta) - r\sin(\rho)\sin(\theta) \\ r\cos(\rho)\sin(\theta) + r\sin(\rho)\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta)x_1 - \sin(\theta)x_2 \\ \sin(\theta)x_1 + \cos(\theta)x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Le calcul qui précède montre que T est bien linéaire et admet pour matrice la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Résumé (Rotation)

La matrice d'une rotation dans $\mathbb{R}^2$ d'angle θ est la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

Les colonnes sont des vecteurs unitaires

Similitude

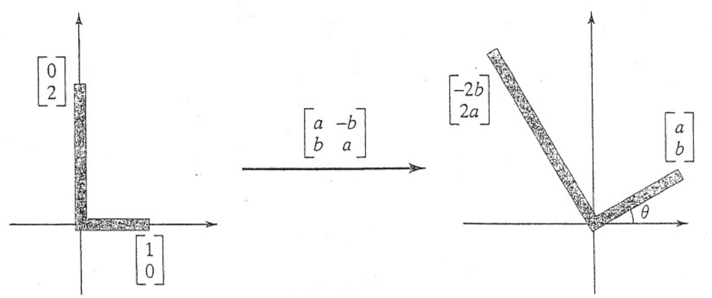


FIGURE – Similitude

Résumé (Rotation composée avec une homothétie : similitude)

Une matrice de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ *est la matrice d'une rotation composée avec une homothétie.*

On désigne par r et θ les coordonnées polaires du vecteur $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, *alors l'angle de la rotation est de mesure θ et r est le rapport de l'homothétie.*

Les colonnes sont de même taille

Résumé (Projections et symétries dans l'espace)

On a les formules, en fonction du vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ de la droite L

Projection sur la droite L $\quad \mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$

Symétrie par rapport à L $\quad \mathrm{sym}_L(\overrightarrow{x}) = 2(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u} - \overrightarrow{x}$

Projection sur le plan $V = L^\perp$ $\quad \mathrm{proj}_V(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$

Symétrie par rapport à $V = L^\perp$ $\quad \mathrm{sym}_V(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - 2(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$

Résumé (Rotation dans $\mathbb{R}^2$ d'angle θ)

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

Résumé (Transvection verticale et horizontale)

La matrice d'une transvection verticale est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$, *et la matrice d'une transvection horizontale est* $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, *où $k \in \mathbb{R}$.*

L'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ donnée par

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

représente soit une projection orthogonale soit une symétrie orthogonale.
Déterminer laquelle des affirmations suivantes est vraie :

1. T est une projection sur une droite qu'on indiquera.
2. T est une projection sur un plan dont on donnera l'équation.
3. T est une symétrie par rapport à une droite qu'on indiquera.
4. T est une symétrie par rapport à un plan dont on donnera l'équation.

Même question pour

1. $$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $$A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$