S7 :

89

$$(I_n - A)(I_n + A) = (I_n - A) I_n + (I_n - A) \cdot A$$
$$= I_n^2 - A \cdot I_n + I_n \cdot A - A^2$$
$$= I_n - A^2$$

90

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + B \cdot A + A \cdot B + B^2$

Soit $A \cdot B = I_n$, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Soit $A \cdot B \neq I_n$, $(A+B)^2 = A^2 + B \cdot A + A \cdot B + B^2$, car $A \cdot B \neq B \cdot A$

91 Car A est la matrice carrée inversible de taille n.

$\therefore$ On a $(A^2)^{-1} = (A \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1} = (A^{-1})^2$

94

$$A B B^{-1} A^{-1} = A (B B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$$

93

$$A B A^{-1} = (AB) \cdot A^{-1} = A (B A^{-1}) \neq (A \cdot A^{-1}) \cdot B \neq I_n B \neq B$$

96

$$(A B A^{-1})^3 = (A B A^{-1})(A B A^{-1})(A B A^{-1}) = AB(A^{-1} \cdot A) \cdot B (A^{-1} \cdot A) \cdot B A^{-1}$$
$$= A B \cdot I_n \cdot B \cdot I_n \cdot B A^{-1}$$
$$= A B \cdot B \cdot B A^{-1} = A \cdot B^3 \cdot A^{-1}$$

103 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\therefore$ Soit $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

On a $AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

On a $\begin{cases} a+2c = 0 \\ b+2d = 0 \\ 2a+4c = 0 \\ 2b+4d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ -2\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\therefore X = \begin{bmatrix} -2\alpha & -2\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$

104 $S^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, Soit $S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow S \cdot S^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} S = S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow I_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} S = S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} S = S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

On a $\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & -d \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} a = c \\ d = -b \end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\therefore S = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

109 Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

On a $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+2b & c+2d \\ 2a+5b & 2c+5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a+2b = 2 \\ c+2d = 1 \\ 2a+5b = 1 \\ 2c+5d = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$