S8

2.36 Pour trouver la base du noyau, on doit d'abord résoudre l'équation $A\vec{x}=0$; car $Ker(A) = \{\vec{x} \text{ tel que } A\vec{x}=0\}$, on obtient la matrice augmenté B :

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -6 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow \frac{1}{12}L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$
$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Donc, les solutions du système $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\alpha \\ \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\alpha \in$

Donc on a trouvé $Ker(A) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Pour trouver la base de l'image, on bien sait que $Im(A)$ est un sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes, donc :

$\vec{V_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{V_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{V_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{V_4} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

D'après le cours, on sait que on peut obtenir les relations linéaires par les solutions du système B, on a donc $-4\vec{V_1} + \vec{V_2} + 0\vec{V_3} + \vec{V_4} = 0$

$\Leftrightarrow V_4 = 4\vec{V_1} - \vec{V_2}$ ....)

Alors $\vec{V_4}$ est un vecteur redondant, et d'après le Theorem $Dim(Im(A)) = m - Dim(Ker(A))$
$= 4 - 1 = 3$

Donc la base de l'image est engendré par une famille vecteurs qui contient 3 vecteurs, et on a bien montré $\vec{V_4}$ est un vecteur redondant, par conséquense $Im(A) = Vect(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3})$

En conclusion, Le vecteur $\begin{bmatrix}-4\\1\\0\\1\end{bmatrix}$ forme une base de $Ker(A)$,

les vecteurs $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ forment une base de $Im(A)$.

23)

a) $Ker(C) = \{\vec{x}$ tel que $C \cdot \vec{x} = 0\}$, on calcule la matrice augmenté $C\vec{x} = 0$ et trouver $\vec{x} = \begin{bmatrix}1\\-\alpha\\\alpha\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}$, donc $Ker(C) = \{\alpha\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\}$,

ainsi que $Ker(H) = \{\alpha\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\}$, $Ker(L) = \{\alpha\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\}$, $Ker(T) = \{\alpha\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\}$

$Ker(X) = \{\alpha\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\}$, $Ker(Y) = \{\alpha\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

En conclusion, La matrice L a le même noyau que C.

b) $Im(C)$ est un sous-espace vectoriel engendrée par les vecteurs colonnes.

$C = [v_1\ v_2\ v_3]$ où $\vec{V_1} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{V_2} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\vec{V_3}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, on peut directement trouver

$\vec{V_3} = \vec{V_2} \in Vect(\vec{V_1}, \vec{V_2})$ et $\vec{V_1}, \vec{V_2}$ sont linéairements indépendants, Donc

$Im(C) = Vect(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix})$. ainsi que $Im(H) = Vect(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix})$

$Im(L) = Vect(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})$, $Im(T) = Vect(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix})$, $Im(X) = Vect(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix})$

$Im(Y) = Vect(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix})$. En conclusion, il n'y a pas une matrice a la même l'image que C.

c) Toute les matrices ont pas la même l'image.