S13 :

314 Faux.

Car la matrice identité si et seulement si est semblable à la matrice identité. Pour l'équation $AP = PB$ on a A et B sont semblable. ici, A est la matrice identité $\Rightarrow Id \cdot P = PB \Leftrightarrow Id = PBP^{-1}$ et on sait que ssi $P \cdot P^{-1} = Id$, alors afin de faire tenir l'équation, B ssi est la matrice Identité, on a $P \cdot Id \cdot P^{-1} = Id$.

336 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ Mat $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

pour trouver la base, on cherche $\lambda$ tel que $\det(A - \lambda Id) = 0$.

$\det(A - \lambda Id) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$

$\det(A - \lambda Id) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$

pour $\lambda = 0$, cherchons $\vec{v_1}$ dans $\mathrm{Ker}(A - 0 \cdot Id)$ :

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, les solution : $\begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

on prend $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

pour $\lambda = 5$, cherchons $\vec{v_2}$ dans $\mathrm{Ker}(A - 5 Id)$ :

$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, les solution : $\begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$,

on prend $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

en conclusion ~~donc~~ la base $\mathcal{B}$ engendrée par les vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ :

$\Leftrightarrow \mathcal{B} = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ et $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

## 337

$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda Id) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (\lambda-2)(\lambda+2)$

$\det(A - \lambda Id) = 0 \iff (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$

pour $\lambda_1 = 2$, cherchons $\vec{v_1}$ dans $Ker(A - 2Id)$ :

Frel $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, les solutions : $\begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, on prend $\underline{\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

pour $\lambda_2 = -2$, cherchons $\vec{v_2}$ dans $Ker(A + 2Id)$ :

Frel $\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, les solutions : $\begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on prend $\underline{\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

en conclusion, la base $\mathcal{B}$ engendrée par les vecteurs $\vec{v_1}$ $\vec{v_2}$

$\iff \mathcal{B} = Vect(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = Vect\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ et $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

## CC3 2018 - 2019 :

### Exo 1 :

(1) $P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, pour déterminer l'inverse de $P$, on utilise la ~~te~~ technique de la matrice augmentée. soit $C = [P \vdots I]$. On calcul Frel (C) :

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow (-\frac{1}{2}) L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$ with $\underbrace{\phantom{xx}}_{I_3}$ $\underbrace{\phantom{xx}}_{P^{-1}}$ alors $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(2) $\vec{u} = 2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix}$, on doit déterminer $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$ où $\vec{u} = P\cdot[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$

donc $[\vec{u}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\cdot\vec{u} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ \frac{1}{2}\\ \frac{5}{2}\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$

$\Leftrightarrow \quad \vec{u} = 5\vec{v_1} + \frac{1}{2}\vec{v_2} + \frac{5}{2}\vec{v_3}$

(3) pour trouver la base du noyau, on doit d'abord résoudre l'équation $C\cdot\vec{x} = 0$, car $Ker(f) = \{\vec{x}$ tel que $C\vec{x} = 0\}$, on calcul $Frel([C:\vec{0}])$ :

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{array}\right] \begin{array}{l}L_2 \leftarrow L_2+L_1\\ L_3 \leftarrow L_3-L_1\end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 0\end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Les solutions du système $\vec{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \alpha\\ \alpha\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}$, donc on trouve $Ker(f) = Vect\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)$

pour trouver la base de l'image, on bien sait que $Im(C)$ est un sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes, donc on a :

$\vec{w_1} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{w_2} = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{w_3} = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$,

d'après le cours, on peut obtenir les relations linéaires par les solutions du système $Frel([C:\vec{0}])$, on a donc ~~$\vec{V_3} = \vec{V_2}$~~ $0\vec{w_1} + \vec{w_2} + \vec{w_3} = 0 \Leftrightarrow \vec{w_2} = -\vec{w_3}$

alors $\vec{w_3}$ est le vecteur redondant. Et selon le Theorem $m = Dim(Ker(f)) + Dim(Im(f))$

ici on a $3 = 1 + Dim(Im(f)) \Rightarrow Dim(Im(f)) = 2$, donc la base de l'image est engendré par les vecteur $\vec{w_1}, \vec{w_2} = Vect\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$.

En conclusion, $Vect\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)$ forme la base du noyau de $f$

$Vect\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$ forme la base de l'image de $f$.

(4) $P = [\vec{v_1}\ \vec{v_2}\ \vec{v_3}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ~~on~~ Notons $B$ la matrice de $f$ dnas la base $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$, d'après le cours, on sait que $C \cdot P = P \cdot B$,

pour trouver $B$ ~~on~~ tel que $B = P^{-1} \cdot C \cdot P$, on calcul $P^{-1}CP$ :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

Exo 2 :

(1) $\vec{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(2) pour trouver deux vecteurs qui forment une base du plan $P$, on doit résoudre l'équation $x + y - z = 0$, car $\vec{w_2}\ \vec{w_3}$ est les vecteurs tel que $\vec{w_2} \cdot \vec{w_1} = 0$ et $\vec{w_3} \cdot \vec{w_1} = 0$ : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$[1\ \ 1\ \ -1\ \ 1\ 0] \rightsquigarrow$ les solutions du système : $\vec{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta + \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

donc $\vec{w_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{w_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et par le theorem non nul, $\vec{w_2}$ et $\vec{w_3}$ sont les vecteur indépendants.

$P = \text{Vect}\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

(3) $\vec{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{w_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{w_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

pour cela, montrons que ~~la matrice~~ la Frel de la matrice $P = [\vec{v_1}\ \vec{w_2}\ \vec{w_3}]$ est égale à l'identité $I_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow (-1)L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{Frel}(P)$$

Par conséquent $\mathcal{B} = (\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})$ est une base de l'espace $\mathbb{R}^3$

(4) (a) car $\vec{w_2}$ et $\vec{w_3}$ sont les vecteurs qui forment une base du plan P,
donc les image symétries orthogonales par rapport au plan P sont elles-mêmes.

$Im(\vec{w_2}) = \vec{w_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Im(\vec{w_3}) = \vec{w_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, et $\vec{w_1}$ est le vecteur orthogonal au plan P, $Im(\vec{w_1}) = -\vec{w_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(5) $[g(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = D \cdot [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ donc $g(\vec{x}) = PD[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$

et $g(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} = AP[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, on en déduit que $AP = PD$

donc $A = PDP^{-1}$, d'abord on calcul $P^{-1}$ :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Frel : $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$ with $I_3$ on the left block and $P^{-1}$ on the right block $\therefore P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

donc $A = PDP^{-1}$ :

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(6) Oui car $AP = PD$ où $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(7) $\cancel{A^{2019}}$ $A = PDP^{-1}$ alors $A^{2019} = (PDP^{-1})^{2019} = \overbrace{PD\cancel{P^{-1}}\cdot \cancel{P}DP^{-1} \cdots PDP^{-1}}^{2019} = PD^{2019}P^{-1}$

$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\therefore D^{2019} = \begin{bmatrix} (-1)^{2019} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{2019} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{2019} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$

Donc $A^{2019} = PDP^{-1} = A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$