Rappel : Changement de base avec $P = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$

$$\begin{array}{ccc} \vec{x} & \xrightarrow{\quad A \quad} & T(\vec{x}) \\ \uparrow{\scriptstyle P} & & \uparrow{\scriptstyle P} \\ [\vec{x}]_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\quad B \quad} & [T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} \end{array}$$

$$\boxed{AP = PB, \quad B = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = PBP^{-1}.}$$

P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique.

Rappel

Definition

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. On dit qu'elles sont **semblables** si il existe une matrice P **inversible** telle que

$$AP = PB \quad \text{ou bien de manière équivalente} \quad B = P^{-1}AP.$$

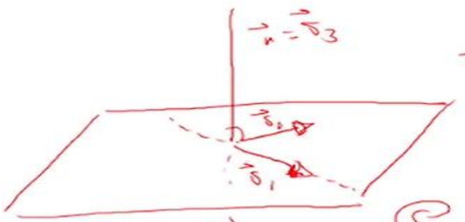
En clair, deux matrices sont semblables si elles représentent la même application linéaire mais dans des bases différentes.

- Une homothétie possède la même matrice dans toutes les bases
- Deux projections sur un sous-espace de même dimension sont semblables.
- Deux symétries par rapport à un sous-espace de même dimension sont semblables.

EXERCICE

Soit $\mathcal{P}$ le plan dans $\mathbb{R}^3$ d'équation $3x + y - z = 0$.

1. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $proj_{\mathcal{P}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sur le plan $\mathcal{P}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale $proj_{\mathcal{P}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sur le plan $\mathcal{P}$ dans la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.



$\vec{x} \longmapsto proj(\vec{x})$

$\mathcal{B}$

$\vec{v}_1 \longmapsto \vec{v}_1$

$\vec{v}_2 \longmapsto \vec{v}_2$

$\vec{v}_3 \longmapsto \vec{0}$

$\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ base de $\mathbb{R}^3$

la matrice de la proj dans la base $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ \end{array}$$
$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\vec{v}_1 \to \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$

$\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$

Si $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base dans laquelle la matrice de $proj_{\mathcal{P}}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $proj_{\mathcal{P}}(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$, $proj_{\mathcal{P}}(\vec{v}_2) = \vec{v}_2$ et $proj_{\mathcal{P}}(\vec{v}_3) = \vec{0}$.

Pour trouver une base de $\mathcal{P}$ il faut résoudre $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ dont la Frel est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$ et donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dans la base $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ la matrice de $proj_{\mathcal{P}}$ est de la forme cherchée.

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{x} & \xrightarrow{\quad A \quad} & T(\overrightarrow{x}) \\ \uparrow P & & \uparrow P \\ [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\quad B \quad} & [T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}} \end{array}$$

$A = PBP^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{11} & \frac{10}{33} & \frac{1}{33} \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{33} & \frac{10}{33} \\ \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & \frac{-1}{11} \end{bmatrix}$$

$$A = PBP^{-1} \begin{bmatrix} 2/11 & -3/11 & 3/11 \\ -3/11 & \frac{10}{11} & 1/11 \\ 3/11 & 1/11 & \frac{10}{11} \end{bmatrix}$$

Chapitre 2 Chapitre 3

Appl : Système d'équ diff linéaires (hom, coeff const)

$$\left\{ \begin{array}{lcll} x_1' & = & \frac{3}{2}x_1 & -\frac{1}{2}x_2 \\ x_2' & = & \frac{-1}{2}x_1 & \end{array} \right. \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Pour $X' = AX$ on pose $X = PY$ ou encore $Y = P^{-1}X$.
$(PY)'P'Y + PY' = A(PY)$ et donc $Y' = (P^{-1}AP)Y$.

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & y_1 \\ y_2' & = & \frac{1}{2}y_2 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha e^x \\ \beta e^{\frac{1}{2}x} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha e^x \\ \beta e^{\frac{1}{2}x} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \alpha e^x + \beta e^{\frac{1}{2}x} \\ x_2 & = & \alpha e^x + 2\beta e^{\frac{1}{2}x} \end{array} \right.$$

Encore un exemple d'utilisation

Soit u_0 et u_1 deux réels. On définit une suite récurrente par $u_n = \frac{3}{2}u_{n-1} - \frac{1}{2}u_{n-2}$ pour $n \geq 2$. Soit vecteur $\vec{X}_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$.

1. Déterminez A telle que $\vec{X}_n = A\vec{X}_{n-1}$. En déduire $\vec{X}_n$ en fonction de $\vec{X}_1$.
2. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \vec{X}_n$. En déduire $\lim_{n\to\infty} u_n$

$u_n = \frac{3}{2}u_{n-1} - \frac{1}{2}u_{n-2}$ implique

$$\vec{X}_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix} = A\vec{X}_{n-1}$$

$$\vec{X}_n = A^{n-1}\vec{X}_1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \vec{X}_n = \lim_{n\to\infty} A^{n-1}\vec{X}_1$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

$$X_n = A^{n-1}X_1 = PD^{n-1}P^{-1}X_1 = \begin{bmatrix} 2-\frac{1}{2^{n-1}} & -1+\frac{1}{2^{n-1}} \\ 2-\frac{1}{2^{n-2}} & -1+\frac{1}{2^{n-2}} \end{bmatrix} X_1$$

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\frac{1}{2^{n-1}} & -1+\frac{1}{2^{n-1}} \\ 2-\frac{1}{2^{n-2}} & -1+\frac{1}{2^{n-2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}$$

$$u_n = (2-\frac{1}{2^{n-1}})u_1 + (-1+\frac{1}{2^{n-1}})u_0$$

$\lim_{n\to\infty} u_n = 2u_1 - u_0$

Comment “diagonaliser”

On cherche λ tel que

- il existe un vecteur non nul $\vec{x}$ tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$
- $(A - \lambda\mathbf{Id})\overrightarrow{x} = \vec{0}$
- $\ker(A - \lambda\mathbf{Id}) \neq \{\vec{0}\}$
- $A - \lambda\mathbf{Id}$ non inversible
- $\det(A - \lambda\mathbf{Id}) = 0.$

1. On cherche λ :

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}\lambda + \lambda^2 + \frac{1}{2} = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - 1)$$

2. On cherche $\vec{0} \neq \vec{x} \in \ker(A - \lambda\mathbf{Id})$

- $\lambda = 1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2}-1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 1 & 0-1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda = 1/2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2}-\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Comment “diagonaliser”

On cherche λ tel que

- il existe un vecteur non nul $\vec{x}$ tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$
- $(A - \lambda \mathbf{Id})\vec{x} = \vec{0}$
- $\ker(A - \lambda \mathbf{Id}) \neq \{\vec{0}\}$
- $A - \lambda \mathbf{Id}$ non inversible
- $\det(A - \lambda \mathbf{Id}) = 0$