Definition (Vecteurs redondants, indépendance linéaires, bases)

Soit une famille de vecteur $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ dans $\mathbb{R}^n$.

- $\vec{v}_1$ est redondant s'il est nul. Un vecteur $\vec{v}_j, j > 1$ est *redondant* si il est combinaison linéaire des vecteurs qui le précèdent dans la liste, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_{j-1}$.
- Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ sont **linéairement indépendants** si aucun des vecteurs est redondant. Sinon, ils sont linéairement dépendants.
- La famille de vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ est une **base** d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$, si chaque vecteur $\vec{v}_j$ est dans V, si $V = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m)$ et si les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ sont linéairement indépendants.

Lorsque que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ sont **linéairement indépendants**, la famille $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ est **une famille libre**.
Lorsque que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ ne sont pas linéairement indépendants, ils forment une famille **liée**.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{Frel}(A|\vec{0}) = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\beta \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 + 0\vec{v}_4 + 0\vec{v}_5 + 0\vec{v}_6 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + (-1)\vec{v}_3 + 1\vec{v}_4 + 0\vec{v}_5 + 0\vec{v}_6 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_4 = \vec{v}_3$$

Résumé (Différentes caractéristiques des matrices inversibles)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice $n \times n$. Sont équivalentes :

i) *A est inversible,*

ii) $\forall \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$, $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ *admet une et une seule solution,*

iii) $\exists \overrightarrow{b}_0 \in \mathbb{R}^n$, $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}_0$ *admet une et une seule solution,*

iv) $\mathrm{Frel}(A) = I_n$,

v) $\mathrm{Rang}(A) = n$,

vi) $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$,

vii) $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$,

viii) *Les vecteurs colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$,*

ix) *Les vecteurs colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$,*

x) *Les vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendants.*

Caractérisation utile des bases.

Problem

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m)$ une base d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ et soit $\overrightarrow{v} \in V$. Combien de solutions $c_1, \cdots, c_m$ l'équation

$$\overrightarrow{v} = c_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_m\overrightarrow{v}_m \qquad (1)$$

admet-elle ?

Comme $\overrightarrow{v} \in V = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m)$ il existe une solution de l'équation (1) $c_1, \cdots, c_m$ avec $v = c_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_m\overrightarrow{v}_m$.
Soit $d_1, \cdots, d_m$ une autre solution éventuelle de l'équation (1) permettant de décomposer $\overrightarrow{v}$ suivant la base $\mathcal{B}$, à savoir

$$\overrightarrow{v} = d_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + d_m\overrightarrow{v}_m \tag{2}$$

En soustrayant (2) à (1), on obtient

$$(c_1 - d_1)\overrightarrow{v}_1 + \cdots + (c_m - d_m)\overrightarrow{v}_m = \overrightarrow{0}. \tag{3}$$

Puisque la famille $\mathcal{B}$ est une famille libre, on déduit de l'équation (3) que $c_1 - d_1 = 0, \cdots, c_m - d_m = 0$. Par conséquent les représentations données par (1) et (2) sont identiques.

Proposition (Bases et unicité des représentations)

Soit

$$\mathcal{B} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m)$$

une famille de vecteurs contenus dans un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$.
La famille $\mathcal{B}$ est une base de V si et seulement si chaque vecteur $\overrightarrow{v}$ peut être décomposé de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, à savoir il existe un unique "m-uplet" $c_1, \cdots, c_m$ de nombres réels tel que

$$\overrightarrow{v} = c_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_m\overrightarrow{v}_m.$$

Dans la suite on dira que les c_i sont les **coordonnées** *du vecteur $\overrightarrow{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

$[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$ *est le vecteur coordonnée de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

On a déjà prouvé : $\mathcal{B}$ est une base de V, alors tout $\vec{v} \in V$ s'écrit de manière unique

$$\overrightarrow{v} = c_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_m \overrightarrow{v}_m.$$

Réciproquement, si tout $\vec{v} \in V$ s'écrit de manière unique ainsi, alors

1. $V = \mathrm{Vec}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m)$, et donc $\mathcal{B}$ est un système générateur.
2. $\overrightarrow{0} = c_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_m \overrightarrow{v}_m$ implique $c_1 = \ldots = c_m = 0$ et donc la bamille est libre

Exercice

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textit{et} \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

et considérons le plan $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ *dans* $\mathbb{R}^3$*. Est-ce que le vecteur*

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

appartient à V *? Visualiser la réponse.*

On se demande s'il existe deux scalaires c_1 et c_2 tels que $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$. Cela revient à considérer le système linéaire qui a pour matrice augmentée

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 1 & 2 & \vdots & 7 \\ 1 & 3 & \vdots & 9 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathrm{Frel}(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Ce système est donc consistant et admet pour unique solution $c_1 = 3$ et $c_2 = 2$ de sorte que

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 \in V.$$

En fait $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de V.

Le **vecteur coordonnée** de $\vec{v} = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$ est "l'adresse" de $\vec{x}$ dans le système de coordonnées c_1, c_2.

En introduisant ce système de coordonnées, on a identifié V à $\mathbb{R}^2$.
(les coordonnées cartésiennes ont un sens également dans le cas d'axes obliques....)

On note $\mathcal{B}$ la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ le vecteur coordonnée de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Si

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2,$$

alors

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

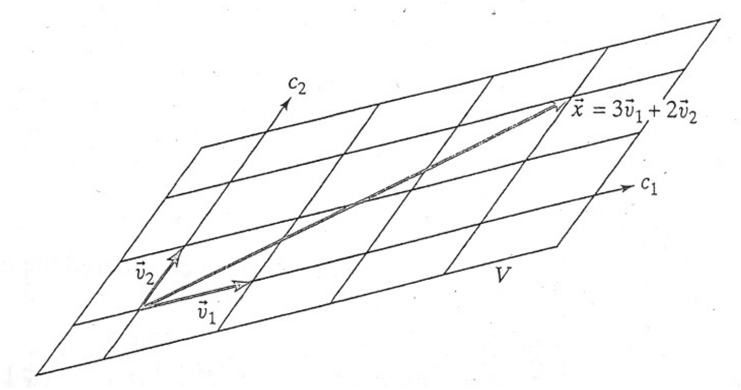

FIGURE – -

$$[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \text{ veut dire } \overrightarrow{x} = c_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_m \overrightarrow{v}_m.$$

On notera que l'on une relation matricielle

Proposition

$$\overrightarrow{x} = P\,[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}, \quad \textit{avec} \quad P = \begin{bmatrix} \overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & \cdots & \overrightarrow{v}_m \end{bmatrix},$$

P étant une matrice de taille $n \times m$.

L'équation $\overrightarrow{x} = P\,[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}$ résulte directement de la définition des coordonnées.

Dans l'exemple, nous avons considéré le cas

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\overrightarrow{x} = P[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} \quad \text{ou encore} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Proposition (Linéarité des coordonnées)

Soit $\mathcal{B}$ une base d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Alors on a :

(a) $\forall \overrightarrow{x} \in V, \forall \overrightarrow{y} \in V, \qquad [\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}]_{\mathcal{B}} = [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} + [\overrightarrow{y}]_{\mathcal{B}},$

(b) $\forall \overrightarrow{x} \in V, \forall k \in \mathbb{R}, \qquad [k\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = k[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}.$

Exercice

Considérons la base de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \vec{v}_1, \vec{v}_2$, *où* $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ *et* $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) *Soit* $\vec{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$. *Trouver* $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$.

(b) *Soit* $\vec{y}$ *tel que* $[\vec{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. *Déterminer* $\vec{y}$.

(a) Pour trouver les $\mathcal{B}$-coordonnées du vecteur $\vec{x}$, on écrit $\vec{x}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la base,

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ce système admet pour solution $c_1 = 4$, $c_2 = 2$ de sorte que $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Ici nous avons deux base de $\mathbb{R}^2$ et donc une matrice P carrée. Une autre méthode générique consiste à utiliser l'équation $\vec{x} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ autrement dit $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\vec{x}$, c'est-à-dire

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \vec{x} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Par définition, $[\overrightarrow{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ se traduit par

$$\overrightarrow{y} = 2\overrightarrow{v}_1 + (-1)\overrightarrow{v}_2 = 2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Autrement, on peut aussi directement utiliser la formule

$$\overrightarrow{y} = P[\overrightarrow{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

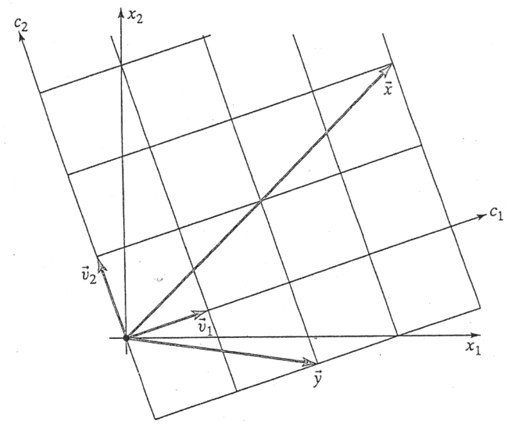

FIGURE – -

Base adaptée

Soit $L \subset \mathbb{R}^2$ la droite engendrée par le vecteur $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Soit T l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même qui projette chaque vecteur $\overrightarrow{x}$ orthogonalement sur la droite L.
On peut faciliter l'étude de T en introduisant un système de coordonnées dans lequel L serait un des axes avec deuxième axe l'axe othogonal à L. Cela revient à considérer une nouvelle base $\mathcal{B}$.
Suivant ce système de coordonnées, T transforme $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
Dans le système de coordonnées c_1, c_2, T est représenté par la matrice

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

car

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

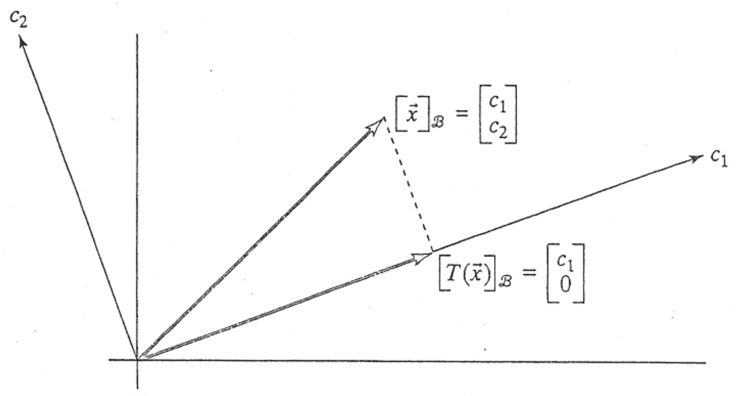

FIGURE – -

La matrice dans une base adaptée

Soit $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ telle que $\vec{v}_1$ est parallèle à la droite L et $\vec{v}_1$ est parallèle à la droite $L^{\perp}$. Par exemple $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Si $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$, alors $T(\vec{x}) = \mathrm{Proj}_L(\vec{x}) = c_1\vec{v}_1$, ou encore

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad \text{alors} \quad [T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

La matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ qui transforme $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ en $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ est "**la matrice de T relativement à la base $\mathcal{B}$**" (ou aussi $\mathcal{B}$-matrice de T) dans le sens où

$$[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = B[\vec{x}]_{\mathcal{B}}.$$

On peut représenter le travail sous forme d'un diagramme comme suit :

$$\begin{tikzcd} \vec{x} \arrow[r, "A"] & T(\vec{x}) \\ {[\vec{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[u, "P"'] \arrow[r, "B"] & {[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}}} \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd}$$

Definition (Matrice d'une application linéaire)

Soit $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. La matrice carrée B d'ordre n qui transforme $[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}$ en $[T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}}$ est la matrice de T relativement à la base $\mathcal{B}$,

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n, \quad [T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}} = B[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}.$$

La matrice B est construite en colonnes de la manière suivante, en notant $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_n)$,

$$B = \begin{bmatrix} [T(\overrightarrow{v}_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\overrightarrow{v}_n)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}.$$

Il faut vérifier que les colonnes de B sont bien les vecteurs $[T(\overrightarrow{v}_1)]_{\mathcal{B}} \cdots [T(\overrightarrow{v}_n)]_{\mathcal{B}}$. Soit $\overrightarrow{x} = c_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_n\overrightarrow{v}_n$. Comme T est linéaire, on a

$$T(\overrightarrow{x}) = c_1 T(\overrightarrow{v}_1) + \cdots c_n T(\overrightarrow{v}_n)$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} [T(\overrightarrow{x})]_{\mathcal{B}} &= c_1[T(\overrightarrow{v}_1)]_{\mathcal{B}} + \cdots c_n[T(\overrightarrow{v}_n)]_{\mathcal{B}} \\ &\begin{bmatrix} [T(\overrightarrow{v}_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\overrightarrow{v}_n)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = B[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

On peut utiliser cette méthode pour construire B, bien qu'il soit souvent plus simple d'utiliser un diagramme comme on l'a fait dans l'exemple précédent.

Changement de base avec une matrice P

$$\begin{array}{ccc} \vec{x} & \xrightarrow{A} & T(\vec{x}) \\ \uparrow P & & \uparrow P \\ [\vec{x}]_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{B} & [T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} \end{array}$$

Pour tout $\vec{x}$, nous avons $\vec{x} = P\,[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ et $T(\vec{x}) = P\,[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}}$
De même $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ et $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = B\,[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$.

Donc $T(\vec{x}) = A\vec{x} = AP\,[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ et $T(\vec{x}) = PB\,[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$

$$\boxed{AP = PB, \quad B = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = PBP^{-1}.}$$

P est la matrice de passage de la base $\mathcal{U}$ à la base $\mathcal{B}$ (P comme "passage")

Definition (Matrice de passage)

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire et $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Soit B la matrice de T relativement à la base $\mathcal{B}$, et A la matrice de T relativement à la base canonique $\mathcal{U} = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$. Enfin soit

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

la **matrice de passage** de la base $\mathcal{U}$ à la base $\mathcal{B}$. Alors

$$AP = PB, \quad B = P^{-1}AP, \quad A = PBP^{-1}.$$

On revient à l'exemple. Soit $L \subset \mathbb{R}^2$ la droite engendrée par le vecteur $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Soit T l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même qui projète chaque vecteur $\vec{x}$ orthogonalement sur la droite L. On avait vu que la matrice de T relativement à la base

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

était la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A = PBP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

matrice d'une symétrie

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et f la symétrie orthogonale par rapport au plan $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$

On cherche un vecteur $\vec{w}$ perpendiculaire à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ via les équations $\langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle$ et $\langle \vec{v}_2, \vec{w} \rangle$. On trouve $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

dans $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w})$ la matrice de f est $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ passage de $\mathcal{B}$ à $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

matrice d'une symétrie

On calcule $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Dans la base canonique on obtient

$$A = PBP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Definition

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. On dit qu'elles sont **semblables** si il existe une matrice P **inversible** telle que

$$AP = PB \quad \text{ou bien de manière équivalente} \quad B = P^{-1}AP.$$

En clair, deux matrices sont semblables si elles représentent la même application linéaire mais dans des bases différentes.

- Une homothétie possède la même matrice dans toutes les bases
- Deux projections sur un sous-espace de même dimension sont semblables.
- Deux symétries par rapport à un sous-espace de même dimension sont semblables.

Exercice

Est-ce que les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *sont semblables ?*

On cherche s'il existe une matrice inversible $P = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ telle que l'on ait $AP = PB$. Cette dernière relation s'écrit composante par composante sous la forme

$$\begin{bmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 4x + 3z & 4y + 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x & -y \\ 5z & -t \end{bmatrix},$$

ce qui fournit le système

$$x + 2z = 5x, \; y + 2t = -y, \; 4x + 3z = 5z, \; 4y + 3t = -t$$

ou encore $z = 2x, \quad t = -y$.

Donc toute matrice $P = \begin{bmatrix} x & y \\ 2x & -y \end{bmatrix}$ vérfie $AP = PB$.

Cependant, pour répondre à la question posée, il faut vérifier que parmi ces matrices, certaines sont inversibles. Or on a $\det(P) = -3xy$. Donc P est inversible si et seulement si $xy \neq 0$, et par exemple en prenant $x = y = 1$, on voit que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

est inversible et vérifie $AP = PB$. Par conséquent, les matrices A et B sont semblables.

Exercice

La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *est-elle semblable à* $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *?*

Exercice

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n semblables. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors les matrices A^k et B^k sont semblables.

$$A^k = \underbrace{A \times A \cdots \times A}_{k \text{ fois}}, \quad B^k = \underbrace{B \times B \cdots \times B}_{k \text{ fois}}.$$

Comme A et B sont semblables, il existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$. Par conséquent

$$B^k = \underbrace{(P^{-1}AP) \times (P^{-1}AP) \cdots \times (P^{-1}AP)}_{k \text{ fois}}.$$

En utilisant l'associativité de la multiplication des matrices, on a

$$(P^{-1}AP) \times (P^{-1}AP) = (P^{-1}A) \times (PP^{-1}) \times (AP).$$

Puisque $PP^{-1} = I_n$, on en déduit que

$$(P^{-1}AP) \times (P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P.$$

qui conduit de proche en proche à la relation

$$B^k = P^{-1}A^kP,$$

ce qui prouve que A^k et B^k sont semblables.