$\boxed{304}$

(1) Pour cela, montrons que la Frel de la matrice $P = [\vec{v_1}\ \vec{v_2}\ \vec{v_3}]$ est égale à l'identité I_3.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \text{puis} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2/(-3) \quad \text{puis} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow -3L_3 \quad \text{puis} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{2} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{5} L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{Frel}(P)$$

, par conséquent $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Notons-là B.

(2) Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice $\left[P \,\vdots\, I_3 \right]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$L_2 \leftarrow L_2/(-3)$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$
$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -5/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & -2/3 & -5/3 & 1 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow -3L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & -3 \end{array}\right] = \left[I_3 \,\vdots\, P^{-1} \right]$$

D'où $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & 9 & -5 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

(3) D'après le cours, $P[\vec{u}]_B = \vec{u}$,

donc en multipliant à gauche par P^{-1} on obtient

$$[\vec{u}]_B = P^{-1}\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & 9 & -5 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ -7 \end{bmatrix}_B$$

$$= 5\vec{v}_1 - 13\vec{v}_2 - 7\vec{v}_3$$

(4) Notons A la matrice de f dans la base canonique.

$[f(\vec{x})]_B = C[\vec{x}]_B$ donc $f(\vec{x}) = PC[\vec{x}]_B$,

et $f(\vec{x}) = A\vec{x} = AP[\vec{x}]_B$, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

On en déduit que $PC = AP$

donc $A = PCP^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & 9 & -5 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -12 & -10 \\ -2 & 4 & 4 \\ -6 & -18 & 11 \end{bmatrix}$$

(5) Si f est une projection orthogonale sur une droite ou un plan, alors les vecteurs colonnes de C (et A) appartiennent tous à cette droite ou ce plan, donc le rang de C (et A) est égal à 1 ou 2.

Or $\operatorname{Frel}(C) = I_3$ donc $\operatorname{rang}(C) = 3$, c'est donc impossible.

La matrice C suggère que f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite L dirigée par $\vec{v_1}$.

<u>Rappel</u>: $$\text{sym}_L(\vec{x}) = \frac{2(\vec{x}\cdot\vec{v_1})\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|^2} - \vec{x}$$

Cette formule est aussi vraie dans la base $\mathcal{B} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$

$$\text{sym}_L[\vec{x}]_B = 2([\vec{x}]_B \cdot [\vec{v_1}]_B)[\vec{v_1}]_B - [\vec{x}]_B$$

où les calculs montrent qu'on obtient la matrice C :

$$\text{sym}_L[\vec{v_1}]_B = 2\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_B \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_B\right)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_B - \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_B = [\vec{v_1}]_B$$

$$\text{sym}_L[\vec{v_2}]_B = 2\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}_B \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_B\right)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_B - \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}_B = 0 - \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}_B = -[\vec{v_2}]_B$$

$$\text{sym}_L[\vec{v_3}]_B = 2\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}_B \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_B\right)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_B - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}_B = 0 - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}_B = -[\vec{v_3}]_B$$

d'où $$\text{sym}_L = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix} = C.$$