Definition (Vecteurs redondants, indépendance linéaires, bases)

Soit une famille de vecteur $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ dans $\mathbb{R}^n$.

- $\vec{v}_1$ est redondant s'il est nul. Un vecteur $\vec{v}_j, j > 1$ est *redondant* si il est combinaison linéaire des vecteurs qui le précèdent dans la liste, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_{j-1}$.
- Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ sont **linéairement indépendants** si aucun des vecteurs est redondant. Sinon, ils sont linéairement dépendants.
- La famille de vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ est une **base** d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$, si chaque vecteur $\vec{v}_j$ est dans V, si $V = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m)$ et si les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ sont linéairement indépendants.

Lorsque que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ sont **linéairement indépendants**, la famille $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ est **une famille libre**.
Lorsque que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ ne sont pas linéairement indépendants, ils forment une famille **liée**.

Résumé (Base de l'image d'une application linéaire)

Soit A une matrice (ou de manière équivalente on peut raisonner sur l'application linéaire qu'elle représente). On obtient une base de l'image de A, $\mathrm{Im}(A)$, en retirant de la famille des vecteurs colonnes de A tous les vecteurs redondants.

Comment trouver les vecteurs redondants ? Dans les cas faciles, on peut le faire à l'aide d'observations élémentaires. Sinon algorithme systématique basé sur la réduction de Gauss-Jordan :

Pour trouver la base de $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \ldots, v_m)$ on considère la matrice dont ce sont les colonnes.

Exercice

Est-ce que la famille de vecteurs ci-dessous dans $\mathbb{R}^7$ est une famille libre, autrement dit est-ce que les vecteurs ci-dessous sont linéairement indépendants ?

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ \color{red}{0} \\ 1 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ \color{red}{0} \\ 1 \\ 9 \\ \color{blue}{0} \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \\ \color{blue}{0} \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ \color{green}{0} \\ 4 \\ \color{red}{0} \\ 1 \\ 9 \\ \color{blue}{0} \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ \color{green}{0} \\ 7 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \\ \color{blue}{0} \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ \color{green}{0} \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Résumé (Indépendance linéaire et composantes nulles)

Soit une famille de vecteurs

$$(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m).$$

On suppose que $\overrightarrow{v}_1$ n'est pas le vecteur nul, et que que chaque vecteur $\overrightarrow{v}_j$ admet une composante non nulle à un rang où les composantes correspondantes des vecteurs qui le précèdent, $\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_{j-1}$, sont toutes nulles. Alors les vecteurs $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m$ sont linéairement indépendants.

Remarque : Pour le calcul du noyau ca marche toujours

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{Frel}(A|\overrightarrow{0}) = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\beta \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercice

Est ce que les vecteurs suivants sont linéairement indépendants ?

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, on ne peut pas utiliser le critère avec des 0.
1) On note que $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ n'est pas redondant
2) Pour savoir si $\vec{v}_2$ appartient à $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1)$ il faut résoudre $(\vec{v}_1|\vec{v}_2)$
3) Pour savoir si $\vec{v}_3$ appartient à $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ il faut résoudre $(\vec{v}_1\,\vec{v}_2|\vec{v}_3)$.

$$M = \begin{bmatrix}1 & 4 & \vdots & 7\\ 2 & 5 & \vdots & 8\\ 3 & 6 & \vdots & 9\end{bmatrix}, \quad \mathrm{Frel}(M) = \begin{bmatrix}1 & 0 & \vdots & -1\\ 0 & 1 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix},$$

qui montre que ce système admet une et une seule solution $x = -1$ et $y = 2$, de sorte que $\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$. les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont linéairement dépendants. La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une famille liée.
Les mathématiciens écrivent leurs équations (quelque chose) $= 0$.

$$\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}.$$

On appelle cette équation une **relation linéaire** portant sur les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$.

Le vecteur $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ appartient au noyau de l'application linéaire de matrice $\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$

Definition (Relation linéaire)

Soit $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m)$ une famille de vecteurs. Une équation de la forme

$$\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + \lambda_m \overrightarrow{v}_m = \overrightarrow{0}$$

est appelée **une relation linéaire** entre les vecteurs $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m$. Si les seuls coefficients λ_i satisfaisant cette relation sont tous égaux à zéro, on dit que cette relation est **triviale**. On dit que la relation est **non triviale** si il y a au moins un coefficient λ_i non nul.

Proposition (Relations et dépendance linéaire)

Les vecteurs $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m$ sont linéairement dépendants si et seulement si il existe entre eux une relation linéaire non triviale.

Démonstration :

$\Rightarrow$ On suppose que les vecteurs $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m$ sont linéairement dépendants. Donc il existe un indice j tel que le vecteur $\overrightarrow{v}_j$ soit redondant. Il existe donc des scalaires λ_i tels que $\overrightarrow{v}_j = \lambda_{j-1}\overrightarrow{v}_{j-1} + \cdots + \lambda_1 \overrightarrow{v}_1$ que l'on peut écrire encore $(-1)\overrightarrow{v}_j + \lambda_{j-1}\overrightarrow{v}_{j-1} + \cdots + \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{0}$, ce qui est une relation non triviale puisque $-1 \neq 0$.

$\Leftarrow$ supposons qu'il y ait entre les vecteurs $\vec{v}_j$ une relation non triviale $\lambda_m \vec{v}_m + \lambda_{m-1}\vec{v}_{m-1} + \cdots + \lambda_1 \vec{v}_1 = \vec{0}$. Soit j le plus **grand indice** k tel que $\lambda_k \neq 0$. On peut écrire

$$\vec{v}_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\vec{v}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j}\vec{v}_2 - \cdots - \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j}\vec{v}_{j-1}.$$

Donc le vecteur $\vec{v}_j$ est redondant

Chapitre 2 Chapitre 3

Résumé (Noyau et relations linéaires)

Soit une matrice de taille $n \times m$. Les vecteurs contenus dans le noyau de A correspondent à une relation linéaire entre les vecteurs colonnes de A, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$. L'équation

$$A\vec{x} = \vec{0} \quad \textit{est équivalente à} \quad x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_m\vec{v}_m = \vec{0}.$$

En particulier, les vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendants si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$, ou bien encore de manière équivalente $\mathrm{Rang}(A) = m$.
Cette condition implique en particulier que $m \leq n$.

Frel montre : on ne peut pas trouver plus de n vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{Frel}(A|\vec{0}) = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\beta \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Une relation linéaire entre les colonnes de la matrice A d'une application linéaire T est un élément non nul de $\mathrm{Ker}(T)$.

- i^e vecteur de $\mathrm{Ker}(T) \rightsquigarrow$ colonne de A correspondant à la i^e variable libre est redondante
- pivots de la frel $\rightsquigarrow$ colonnes à pivots de A sont libres

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{Frel}(A|\vec{0}) = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\beta \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- i^e vecteur de $\mathrm{Ker}(T) \rightsquigarrow$ colonne de A correspondant à la i^e variable libre est redondante
- pivots de la frel $\rightsquigarrow$ colonnes de A qui correspondent aux colonnes à pivot de $\mathrm{Frel}(A)$sont libres

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{Frel}(A|\overrightarrow{0}) = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\beta \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1\overrightarrow{v}_1 + 0\overrightarrow{v}_2 + 0\overrightarrow{v}_3 + 0\overrightarrow{v}_4 + 0\overrightarrow{v}_5 + 0\overrightarrow{v}_6 = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{0}$$

$$0\overrightarrow{v}_1 + 0\overrightarrow{v}_2 + (-1)\overrightarrow{v}_3 + 1\overrightarrow{v}_4 + 0\overrightarrow{v}_5 + 0\overrightarrow{v}_6 = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{v}_4 = \overrightarrow{v}_3$$

Algorithme (Construction d'une base de l'image)

Pour construire une base de l'image d'une matrice A, il suffit de prendre les vecteurs colonnes qui correspondent aux colonnes qui ont un pivot dans $\mathrm{Frel}(A)$.

Il faut bien faire attention à prendre les vecteurs colonnes de A et pas ceux de $\mathrm{Frel}(A)$, car les matrices A et $\mathrm{Frel}(A)$ n'ont pas nécessairement les mêmes images.

Algorithme (Construction d'une base d'un sous-espace vectoriel)

Pour construire une base de $V = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m)$, il suffit de construire une base de l'image de $A = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m)$.

Résumé (Caractérisation de l'indépendance linéaire)

Soit $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ une famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$. Les énoncés suivants sont équivalents.

(a) *Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ sont linéairement indépendants, (càd $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ est une famille libre.)*

(b) *Aucun des vecteurs de la famille est redondant, à savoir qu'aucun vecteur n'est combinaison linéaire des vecteurs qui le précèdent dans l'énumération de la liste.*

(c) *Aucun des vecteurs $\vec{v}_j$ n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, \cdots, \vec{v}_m$.*

(d) $\operatorname{Ker}\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m \end{bmatrix} = \{\vec{0}\}$.

Chapitre 2 **Chapitre 3**

Résumé (Caractérisation de l'indépendance linéaire)

Soit $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ une famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$. Les énoncés suivants sont équivalents.

(a) *Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ sont linéairement indépendants, (càd $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ est une famille libre.)*

(b) *Aucun des vecteurs de la famille est redondant, à savoir qu'aucun vecteur n'est combinaison linéaire des vecteurs qui le précèdent dans l'énumération de la liste.*

(c) *Aucun des vecteurs $\vec{v}_j$ n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, \cdots, \vec{v}_m$.*

(d) $\operatorname{Ker}\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m \end{bmatrix} = \{\vec{0}\}$.

Résumé

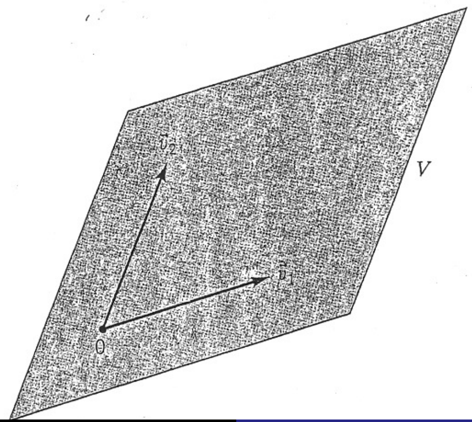
(e) *Le système* $x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_m\vec{v}_m = \vec{0}$ *n'admet que le vecteur nul pour solution, à savoir* $x_1 = 0, \cdots, x_m = 0$.

(f) $\operatorname{Rang}\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m \end{bmatrix} = m$.

une famille libre ne peut jamais contenir le vecteur nul !
une famille libre ne contient pas deux fois le même vecteur

Dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Soit V un plan dans $\mathbb{R}^3$. Intuitivement, on observe que toute base de V est constituée de deux vecteurs. En fait chaque paire de vecteurs non parallèles dans V fera l'affaire (voir figure 3.15).



Theorem (Théorème de la dimension (admis, montré dans le poly))

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Chaque base de V admet le même nombre de vecteurs.

Theorem

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ admet une base.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $V \neq \{\overrightarrow{0}\}$, choisissons $\overrightarrow{v}_1 \neq \overrightarrow{0}$ dans V. Si $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v}_1) \neq V$ on peut choisir $\overrightarrow{v}_2$ dans V tel que $\overrightarrow{v}_2 \notin \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v}_1)$. Si $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ n'est pas égal à V on peut choisir $\overrightarrow{v}_3 \in V$ tel que $\overrightarrow{v}_3 \notin \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$.Le processus se termine quand on a atteint une base de V, comprenant un nombre de vecteurs $\leq n$, puisqu'on a déjà vu qu'il ne peut pas y avoir dans $\mathbb{R}^n$ plus de n vecteurs linéairement indépendants.

Definition

La **dimension** d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ est le nombre d'éléments d'une base de V.

Chapitre 2 Chapitre 3

1. La dimension $\dim(W)$ d'un sous-espace W d'un sous-espace V de $\mathbb{R}^n$ est au plus $\dim(V)$
2. La dimension $\dim(V)$ d'un sous-espace V de $\mathbb{R}^n$ est au plus n.
3. Il est toujours possible de compléter la base d'un sous-espace W de V en une base de V.

Proposition (Familles libres et familles génératrices d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.)

Soit V sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension m (donc $m \leq n$)

(a) *On peut trouver au plus m vecteurs linéairement indépendants dans V,*

(b) *On a besoin d'au moins m vecteurs pour engendrer V,*

(c) *Si m vecteurs de V sont linéairement indépendants, alors ils forment une base de V,*

(d) *Si m vecteurs de V engendrent V, alors ils forment une base de V.*

La partie (a) permet de définir la dimension comme le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants dans V. D'après (b), cela peut aussi être le nombre minimal de vecteurs nécessaires pour engendrer V.

Base de l'image et du noyau

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta + \gamma \\ -\alpha - \gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

α, β, γ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lllllll} 0 \cdot \vec{v}_1 & -1 \cdot \vec{v}_2 & +1 \cdot \vec{v}_3 & +0 \cdot \vec{v}_4 & +0 \cdot \vec{v}_5 & +0 \cdot \vec{v}_6 & = \vec{0} \\ -1 \cdot \vec{v}_1 & +0 \cdot \vec{v}_2 & +0 \cdot \vec{v}_3 & +1 \cdot \vec{v}_4 & +1 \cdot \vec{v}_5 & +0 \cdot \vec{v}_6 & = \vec{0} \\ 1 \cdot \vec{v}_1 & -1 \cdot \vec{v}_2 & +0 \cdot \vec{v}_3 & +0 \cdot \vec{v}_4 & +0 \cdot \vec{v}_5 & +1 \cdot \vec{v}_6 & = \vec{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_3 &= 1 \cdot \vec{v}_2 \\ \vec{v}_5 &= 1 \cdot \vec{v}_1 - 1 \cdot \vec{v}_4 \\ \vec{v}_6 &= -1 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 \end{aligned}$$

Proposition (Dimension de l'image)

Soit A une matrice. Alors

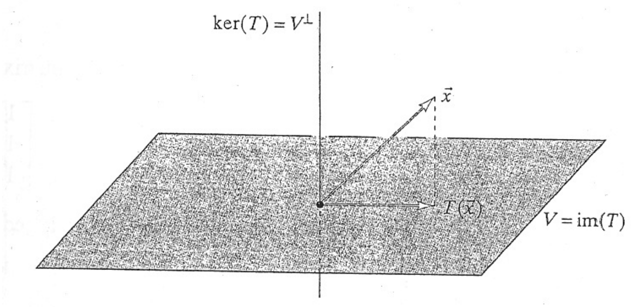
$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{Rang}(A).$$

Theorem (Formule fondamentale de l'algèbre linéaire)

$$m = \mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(A))$$

example

Soit T la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur un plan V.



Ici $m = 3$, le noyau de T est la droite $V^{\perp}$ et l'image est le plan V.
On a bien $1 + 2 = 3$.