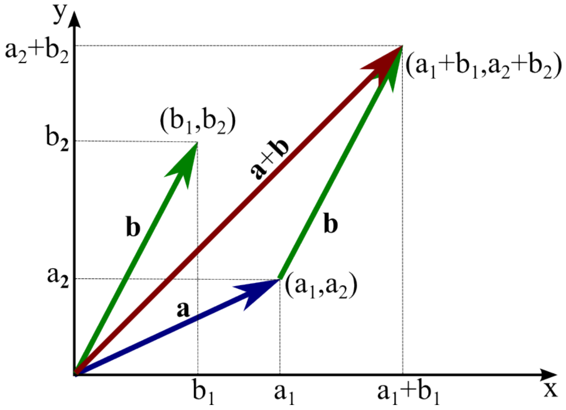
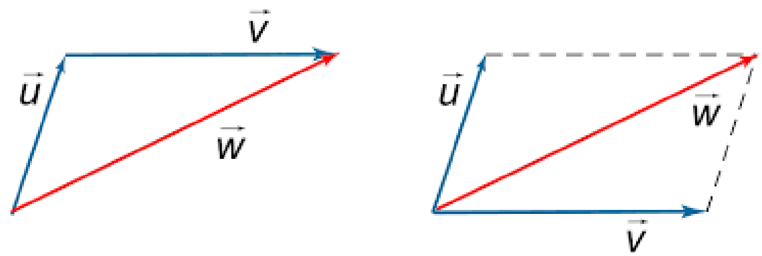
Rappels : somme de deux vecteurs



Somme de deux vecteurs



$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix},$$

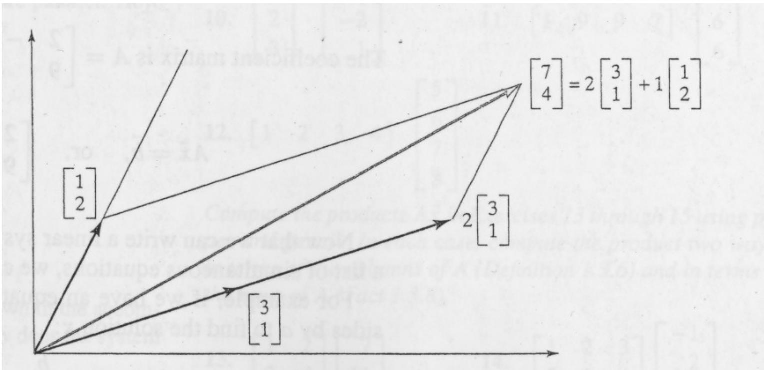


FIGURE – Décider si $\vec{b}$ est comb. lin. de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$

Rappel

Definition (Applications linéaires)

Une application $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une *application linéaire* si il existe une matrice A de taille $n \times m$, telle que pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m$.

$$T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}.$$

Notez que le **nombre de colonnes** de A est le nombre de composantes de l'**entrée** et que le **nombre de lignes** de A est le nombre de composantes de la **sortie**.

Pour $A = (\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_m)$ nous avons

$$T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x} = (\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_m)\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \overrightarrow{v}_i$$

Rappel

Proposition (Règles algébriques du produit matrice vecteur)

Soit A une matrice de taille $n \times m$, $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m$ et $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^m$ deux vecteurs, $k \in \mathbb{R}$ un scalaire. Alors on a

(a) $A(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = A\overrightarrow{x} + A\overrightarrow{y}$,

(b) $A(k\overrightarrow{x}) = k(A\overrightarrow{x})$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A = (\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Considérons l'application linéaire T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\11\end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\9\end{bmatrix},$$

$$\text{et} \quad T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-13\\17\end{bmatrix}.$$

m

n $\boxed{}$

$$\overset{3=m}{\mathbb{R}} \longrightarrow \overset{2=n}{\mathbb{R}}$$

$$\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$$

$$\vec{e}_1 \longmapsto (\vec{v}_1\vec{v}_2\vec{v}_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{v}_1$$

$$\vec{e}_2 \longmapsto (\vec{v}_1\vec{v}_2\vec{v}_3)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \vec{v}_2$$

$$\vec{e}_3 \longmapsto (\vec{v}_1\vec{v}_2\vec{v}_3)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{v}_3$$

Déterminer la matrice de T.

Proposition (colonnes de la matrice d'une application linéaire.)

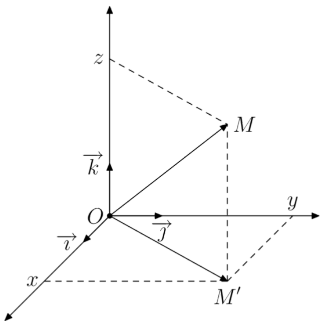
Soit $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire, A sa matrice. On pose

$$\overrightarrow{e}_j = \begin{bmatrix}0\\ \vdots \\ \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{bmatrix} \leftarrow j^{\text{ème}}\text{ligne} \quad \in \mathbb{R}^m.$$

Alors le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice A est le vecteur $T(\overrightarrow{e}_j) \in \mathbb{R}^n$.

$$A = (\overrightarrow{v}_1 \ldots \overrightarrow{v}_m) \Rightarrow T(\overrightarrow{e}_i) = A\overrightarrow{e}_i = \overrightarrow{v}_i$$

Tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire de $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$.
Dans $\mathbb{R}^3$:



Démonstration : ...

Theorem (Caractérisation des applications linéaires)

Soit $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application. L'application T est linéaire (càd il existe une matrice $n \times m$ A telle que pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m$, $T(\overrightarrow{x}) = A\,\overrightarrow{x}$) si et seulement si

(a) $\forall\, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^m, \forall\, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^m$ on a $T(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{w})$

(b) $\forall\, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^m, \forall k \in \mathbb{R}$ on a $T(k\overrightarrow{v}) = kT(\overrightarrow{v})$.

" $\Rightarrow$ " Règles algébriques du produit matrice vecteur

" $\Leftarrow$ " $T \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = T(x_1 \overrightarrow{e}_1 + \ldots x_m \overrightarrow{e}_m) =$

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & . & . & . & \overrightarrow{v}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix}$$

Applications linéaires en géométrie

Definition

$\forall k \in \mathbb{R}$, $H_k = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ définit une **homothétie vectorielle**, avec

$$H_k \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{bmatrix} = k\overrightarrow{x}.$$

Si $k > 1$, c'est une **dilatation**, si $k < 1$, c'est une **contraction**.

Si $k < 0$. c'est la composée de l'homothétie de rapport positif $-k$ et de la symétrie centrale $\overrightarrow{x} \to -\overrightarrow{x}$

Definition

Le **produit scalaire** $\vec{x} \cdot \vec{y}$ de $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans $\mathbb{R}^n$est le nombre réel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 \ldots + x_n y_n \in \mathbb{R}$$

La norme $\|\vec{x}\|$ est le nombre réel $\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

Proposition (propriétés du produit scalaire)

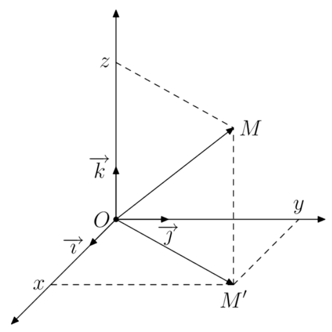
1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c}))$
3. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
5. $\|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

$$T_{\vec{a}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1,\ \vec{b} \mapsto \vec{a} \cdot \vec{b}$$

est une application linéaire (car donnée par une matrice)

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \rightsquigarrow T_{\vec{a}}(\vec{b}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

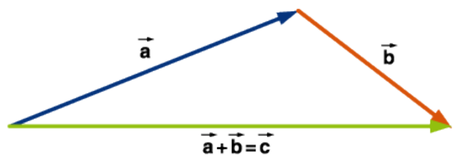
$\|\vec{a}\|$ est la "longueur" de $\vec{a}$



Theorem

Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, alors $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \|\vec{b}\|^2$$



Definition

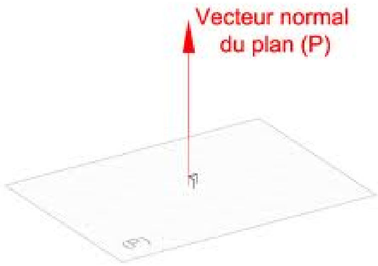
Soit $\vec{a}$ dans $\mathbb{R}^n$, alors $\vec{a}^{\perp} = \{\vec{b} \in \mathbb{R}^n | \vec{a} \cdot \vec{b} = 0\}$.

Pour $\vec{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, $\vec{a}^{\perp}$ est solution du système homogène $\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n & 0 \end{array}\right]$ et dépend de $n-1$ paramètres.

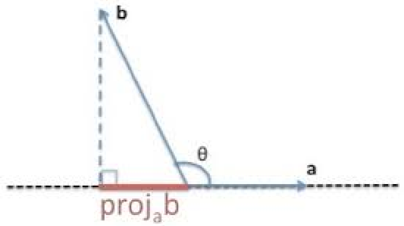
Exemple : $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

Definition

$\vec{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, $\vec{a}^{\perp} = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0\}$ est le **plan vectoriel orthogonal** à $\vec{a}$, $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$ est **l'équation du plan vectoriel orthogonal** à $\vec{a}$ et $\vec{a}$ est un **vecteur normal à ce plan vectoriel** .



Le vecteur obtenu par **projection orthogonale d'un vecteur** $\vec{b}$ sur une droite vectoriel $L =< a >= \{\lambda \vec{a} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ est le vecteur $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$



$$\left(\vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} \right) \cdot \vec{a} =$$

Pour un **vecteur unitaire** $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$ la projection de $\vec{b}$ sur $L =< a >$ est $(\vec{u} \cdot \vec{b})\, \vec{u}$

Droite vectorielle $L = \{\lambda \overrightarrow{w} | k \in \mathbb{R}\}$ et vecteur $\overrightarrow{x}$

unique décomposition $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{||} + \overrightarrow{x}^{\perp}$.

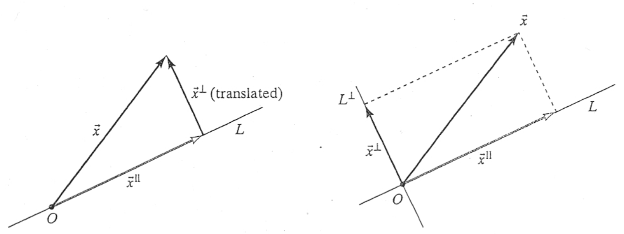


FIGURE – (a) (b)

Theorem (projection orthogonale de $\overrightarrow{x}$ sur la droite L)

$\overrightarrow{x}^{||} = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\ \overrightarrow{u}$ *avec* $\overrightarrow{u}$ *vecteur de L* *de norme* 1

Definition (Projections.)

Soit $\vec{a} \neq \vec{0}$ dans $\mathbb{R}^2$ et $L = < \vec{a} >$ une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^2$. Chaque vecteur $\overrightarrow{x}$ de $\mathbb{R}^2$ admet une unique décomposition

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{||} + \overrightarrow{x}^{\perp},$$

où $\overrightarrow{x}^{||}$ est parallèle à L et où $\overrightarrow{x}^{\perp}$ est orthogonal à L. L'application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \overrightarrow{x} \longrightarrow T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^{||}$ est la projection (orthogonale) sur la droite L, souvent notée proj_L.

Soit $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ vecteur directeur unitaire de L, alors

$$\mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}.$$

$\overrightarrow{x} \rightarrow \mathrm{proj}_L(\overrightarrow{x})$ est linéaire de matrice $\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\mapsto \operatorname{proj}_L(\vec{x}) = (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u} \end{aligned}$$

1. T est linéaire.
2. Calcul de la matrice de T.
3. Les cas $n = 2$ et $n = 3$.