Sn :

304 :

1) Pour montrer les vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$, on doit montrer les vecteurs sont linéairement indépendants. On peut utiliser la matrice augumentée $C = [v_1\ v_2\ v_3 \mid 0]$, si $Frel(C) = [I_3 \mid 0]$, les vecteurs sont linéairement indépendants.

Pont : $C = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow Frel(C) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ est bien la forme $[I_n \mid 0]$,

donc $\vec{0} = \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \lambda_3 \vec{v_3}$ où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ sont indépendant,

une base $\mathcal{B}$ : $Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$

2) pour déterminer l'inverse de la matrice $P$, on va utiliser la technique de la matrice augumentée soit $C = [P \mid I]$, on calcul $Frel(C)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow (-\frac{1}{3})L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3 \\ L_3 \leftarrow (-3)L_3 \end{array}$$

$$Frel(C) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & -3 \end{array}\right] \quad \therefore P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & 9 & -5 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

3) $\vec{u} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, on doit déterminer $[x]_{\mathcal{B}}$, où $\vec{u} = P \cdot [\vec{u}]_{\mathcal{B}}$

$$\therefore [\vec{u}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & 9 & -5 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \vec{u} = 5\vec{v_1} - 13\vec{v_2} - 10\vec{v_3}$$

4) D'après le cours, on sait $AP = PC \Rightarrow A = PC \cdot P^{-1}$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & 9 & -5 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 4 \\ -6 & -18 & 11 \end{bmatrix}$$

5) Non car $A = [T(\vec{e_1})\ T(\vec{e_2})\ T(\vec{e_3})]$, si $f$ est une projection, $T(\vec{e_1}) = \lambda_1 T(\vec{e_2}) \cdot \lambda_2 T(\vec{e_3})$ ou $T(\vec{e_3}) = \alpha T(\vec{e_1}) + \beta T(\vec{e_2})$, et biens vu la premiere ligne de $T(\vec{e_2})$ et $T(\vec{e_3})$ son nul, donc, les deux l'égation sont faux. $f$ n'est pas une projection. Si $f$ est une symetrie, soit $T(\vec{e}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, on a besion $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1$, ici, bien vu c'est faux. Donc $f$ est pas une projection ni une symétrie.

303 :

1) on a l'équation $x - 2y + 0z = 0$, dont $[1\ -2\ 0 \mid 0]$, les solutions de ce système set

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\beta \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2)$$

donc une base de $P$ est $\operatorname{Vect}\left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

2) La matrice de la symétri orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $\mathcal{P}$ dans la base de $\mathcal{P}$ est $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, et d'après le cours $AP = PB \Rightarrow A = PBP^{-1}$

Ici $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, on peut calcul $C = [P \mid I]$ pour obtenir $P^{-1}$.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} =$$

3) On calcul $[v_1 \mid v_2] \Rightarrow \left[\begin{array}{c|c} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ donc il n'y a pas une $\lambda$ qui $\vec{v_2} = \lambda \vec{v_1}$,

et $\vec{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, car la derniere ligne de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont nul mais $\vec{v_3}$ est 1, donc il n'est pas possible $\vec{v_3} = \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2}$, donc $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ forment une base

$\mathcal{B} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$

4) $\vec{u} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2} + 3\vec{e_3} = 2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$, on doit déterminer $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$ où $\vec{u} = P \cdot [\vec{u}]_{\mathcal{B}}$

$$\therefore [\vec{u}]_{\mathcal{B}} = P^{-1} \cdot \vec{u} = \begin{bmatrix}2 & -\frac{1}{2} & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$\therefore \vec{u} = -\vec{v_1} + 0\vec{v_2} + 3\vec{v_3}$$

5) La matrice de la symétrie orthogonale $g$ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$B = \begin{bmatrix}[T(\vec{v_1})]_{\mathcal{B}} & [T(\vec{v_2})]_{\mathcal{B}} & [T(\vec{v_3})]_{\mathcal{B}}\end{bmatrix}$, $T(\vec{v_1}) = \vec{v_1}$, $T(\vec{v_2}) = \vec{v_2}$, $T(\vec{v_3}) = -\vec{v_3}$

Car $\vec{v_1} \cdot \vec{v_3} = 0$ et $\vec{v_2} \cdot \vec{v_3} = 0$, donc $\vec{v_3}$ est le vecteur orthogonale de $Vect(\vec{v_1}, \vec{v_2})$

$$\therefore B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$