SEN1- Electronique Numérique

1

L1 Portail IE

Johanne Bézy

Introduction

- La réalisation d’un dispositif logique comporte plusieurs étapes.
- **Analyser** le cahier des charges.
- **Représenter** le fonctionnement logique du système. On est alors amené à utiliser des équations logiques booléennes et il peut être utile de les simplifier.
- **Simplifier** pour diminuer le nombre de circuits nécessaires.
- **Réaliser** le dispositif.

- Une fonction logique peut être représentée par :
  - Une **table de vérité**
  - Une ou des **expressions logiques**
  - Une **liste** de nombres

- Elle peut être simplifiée par :
  - La méthode **algébrique**
  - La méthode de **Karnaugh**

Représentation et simplification des fonctions logiques

1. Représentation des fonctions logiques

1.1. Représentation par la table de vérité

- C'est une table qui permet de connaître la valeur de la fonction logique en fonction des diverses combinaisons des valeurs des variables d'entrée.
- Les valeurs des variables sont placées dans l'ordre binaire naturel.
- Pour une fonction qui dépend de n entrées, la table de vérité comporte 2^n lignes
  - 4 lignes pour 2 entrées,
  - 8 lignes pour 3 entrées
  - ..etc

- Exemple d'une table de vérité obtenue à partir de l'énoncé du problème qui décrit le fonctionnement d'un système logique :

« l'alarme se met en marche si la Pression est supérieure au seuil P_0 (condition P=1) ou si la pression est inférieure au seuil (condition P=0) et que la température est plus élevée que T_0 (condition T=1). »

P	**T**	***Alarme***
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

1.2. Représentation par une expression logique

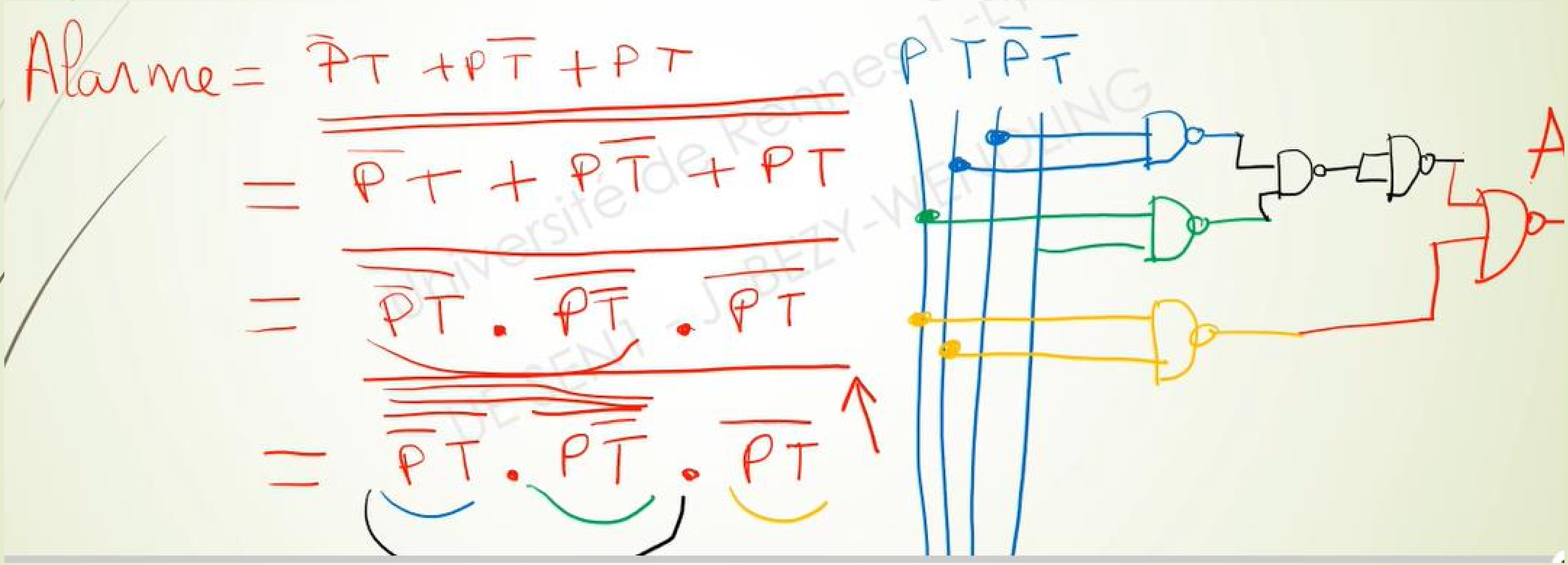
- A partir de la table de vérité, il suffit de considérer les combinaisons d'entrées pour lesquelles la sortie vaut 1.
- Pour chaque cas possible qui donne une sortie à 1 (3 combinaisons dans la table de vérité précédente), nous construisons le produit logique (ET logique) qui donne 1 quand la condition correspondant aux valeurs des entrées vaut 1
  - (ex : Produit P.T pour la condition P=1 ET T=1).
- Etant donné que la fonction de sortie vaut 1 quand l'une OU l'autre des 3 conditions est remplie, il suffit d'additionner logiquement (OU logique) les 3 termes obtenus (produits) pour garantir que la fonction de sortie vaut 1 si l'une des trois conditions est remplie.
- D'où la représentation de la fonction par l'expression logique.

P	T	*Alarme*	
0	0	**0**	
0	1	**1**	$\rightarrow \bar{P}T$
1	0	**1**	$\rightarrow P\bar{T}$
1	1	**1**	$\rightarrow PT$

- Il y a trois cas qui produisent une valeur 1 sur la sortie ***Alarme***
- Rm : chaque fois qu'une variable est égale à 0 dans une condition qui donne 1, elle est complémentée dans le produit logique
  - Ex : P=0 dans le cas (P=0 et T=1), le produit logique est donc $\bar{P}T$
  - Ex : T=0 dans le cas (P=1 et T=0), le produit logique est donc $P\bar{T}$
- L'**expression** ainsi obtenue est donc : $Alarme = \bar{P}T + P\bar{T} + PT$
- Cette forme d'expression est appelée « **Somme de produits** »
- Le circuit se construit alors facilement à partir de portes ET, OU, et NON
- La forme « **Somme de produits** » permet également d'obtenir une représentation de la fonction n'utilisant que des portes NON ET (NAND)

Exercice d'application n°1

- A partir de la forme Somme de produits de la fonction ***Alarme***, donner l'expression et le circuit logique de cette fonction qui n'utilisent que des portes NAND à 2 entrées.



Formes canoniques : définition

- Une fonction logique peut, comme vu précédemment être représenté sous sa forme « Somme de produit », mais elle peut aussi être représentée sous une autre forme standard, appelée « Produit de sommes ».
- Ces deux formes s'appellent les « formes canoniques »
- La **forme canonique « Somme de produits »** est un OU logique entre des produits (ET logiques)
  - Chaque produit logique doit contenir **toutes les variables logiques**, sous forme **normale** ou **complémentée**
  - Cette forme de représentation permet assez directement de réaliser la fonction avec uniquement des portes NAND
- La **forme canonique « Produits de sommes »** est un ET logique entre des sommes (OU logiques)
  - Chaque somme logique doit contenir toutes **les variables logiques**, sous forme **normale** ou **complémentée**
  - Cette forme de représentation permet assez directement de réaliser la fonction avec uniquement des portes NOR

Formes canoniques : construction

- La méthode de construction de la forme « somme de produits » a été vue précédemment
- Pour la forme « produit de sommes », la méthode consiste à :
  - **Construire toutes les sommes** logiques qui existent avec les variables dont dépend notre fonction
  - **Faire le produit des sommes** pour lesquelles la fonction vaut 0 (dans la table de vérité)

x	y	z	Somme logique (la somme doit valoir 0)
0	0	0	$x + y + z$
0	0	1	$x + y + \bar{z}$
0	1	0	$x + \bar{y} + z$
0	1	1	$x + \bar{y} + \bar{z}$
1	0	0	$\bar{x} + y + z$
1	0	1	$\bar{x} + y + \bar{z}$
1	1	0	$\bar{x} + \bar{y} + z$
1	1	1	$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$

- **Construction** des sommes logiques :
  - Pour chaque combinaison des entrées, la somme logique construite doit valoir 0, comme dans le tableau ci-contre
- **Produit des sommes** logiques :
  - On ne conserve que les sommes logiques correspondant aux combiaisons pour lesquelles **notre fonction** (celle dont on cherche la forme canonique Produit de sommes) **vaut 0**.

P	T	*Alarme*	
0	0	**0**	$\rightarrow \boldsymbol{\overline{P}\,\overline{T}}$
0	1	**1**	
1	0	**1**	
1	1	**1**	

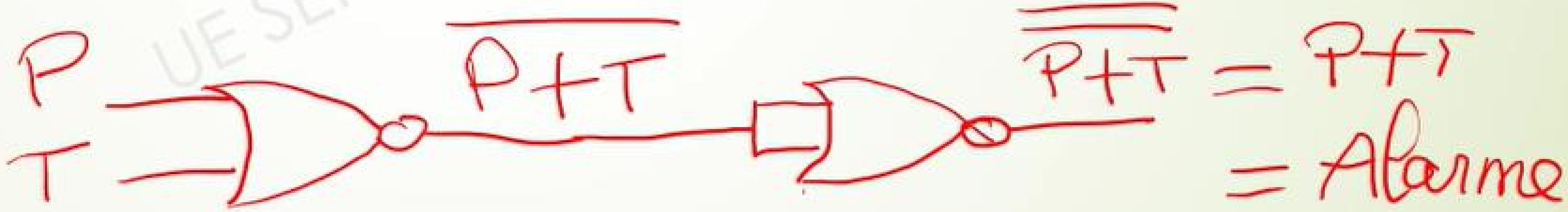
- Il y a un seul cas qui produit une valeur 0 sur la sortie ***Alarme***
- C'est la combinaison P=0, T=0. La somme logique correspondante (voir tableau page précédente) est P+T.
- L'**expression** ainsi obtenue est donc : $Alarme = (P + T)$
- Cette forme d'expression est appelée « **Produit de sommes** » (même si dans ce cas particulier il n'y a qu'une somme).
- Le circuit se construit alors facilement à partir de portes ET, OU, et NON
- La forme « **Produit de sommes**» permet également d'obtenir une représentation de la fonction n'utilisant que des portes NON OU (NOR)

Exercice d’application n°2

- Considérons à nouveau notre fonction Alarme dont on connaît la forme « Produit de sommes ». Donner l’expression et le circuit logique de cette fonction qui n’utilisent que des portes NOR à 2 entrées.

$$A = (P+T)$$

$$= \overline{\overline{P+T}}$$



Exercice d’application n°3

- A partir de la table de vérité de la **fonction suivante G**, donner dans un premier temps sa forme canonique « Produit de sommes », puis l’expression et le circuit logique de cette fonction qui n’utilisent que des portes NOR à 2 entrées.

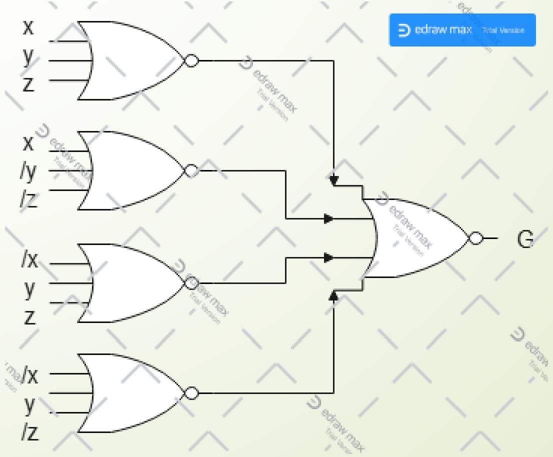
x	y	z	G
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

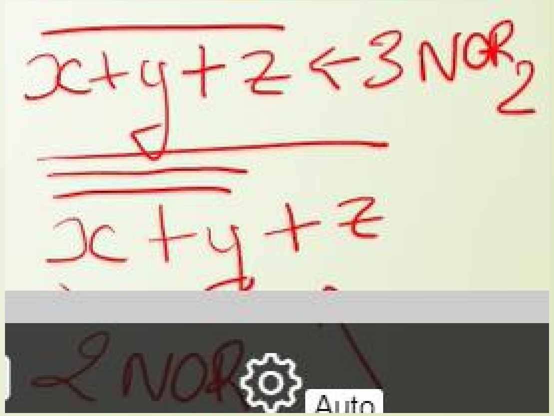
- Solution :

$$G = (x+y+z)(x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+y+\bar{z})$$

$$G = \overline{\overline{(x+y+z)(x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+y+\bar{z})}}$$

$$G = \overline{\overline{(x+y+z)} + \overline{(x+\bar{y}+\bar{z})} + \overline{(\bar{x}+y+z)} + \overline{(\bar{x}+y+\bar{z})}}$$





1.3. Représentation par une liste de nombres

- Encore appelée représentation par des **équivalents décimaux**
- Lorsque le nombre de variables devient important, il n'est pas toujours facile de manipuler la table de vérité ni la forme somme de produits.
- On peut alors utiliser **une autre représentation avec des équivalents décimaux**.
- Pour cela, on remplace chaque produit logique par son équivalent décimal, en définissant au préalable un **poids pour les variables**, et donc un poids pour chaque produit.
- La fonction est alors représentée par **la liste des poids des produits** qui sont présents dans la représentation somme de produits.

- Exemple : soit une fonction F(a,b,c,d).
  - Poids des variables a,b,c,d (choix arbitraire) :

  2^3 pour a, 2^2 pour b, 2^1 pour c, 2^0 pour d
- Poids d'un produit : somme des poids des variables à 1 dans le produit

  $\bar{a}b\bar{c}d$: poids 5

  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$: poids 0
- Au lieu de dire que la fonction F vaut 1 pour les combinaisons (par exemple) abcd=0101 et abcd=1000 et abcd=1001 et abcd=1110, on peut écrire :
  - F=1 pour (5, 8, 9, 14) ou encore
  - F=(5, 8, 9, 14)

Avantage : écriture plus concise

Exercice d'application n°4

- Donner la représentation sous forme de somme de produits, puis de liste de nombres, des deux fonctions suivantes, F_1 et F_2.

a	b	c	F1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

x	y	z	t	F2
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Solution fonction F1

a	b	c	F1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$$F_1 = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}.b.c + a\bar{b}\bar{c}$$

Poids des variables :

$a \longrightarrow 2^2$

$b \longrightarrow 2^1$

$c \longrightarrow 2^0$

$F_1 = 1$ pour $(1, 2, 3, 4)$

$F = (1, 2, 3, 4)$

Solution fonction F2

$f_2 = \bar{x}\bar{y}\bar{z}t + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}t + \bar{x}yz\bar{t}$
$+ x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + x\bar{y}zt + xy\bar{z}\bar{t} + xy\bar{z}t$

Poids : $x \rightarrow 2^3$
$y \rightarrow 2^2$
$z \rightarrow 2^1$
$t \rightarrow 2^0$

$F_2 = (1, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13)$

x	y	z	t	F2
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Représentation et simplification des fonctions logiques

2. Simplification des fonctions logiques

2.1. Simplification par la méthode algébrique

- Le principe de la simplification algébrique consiste à essayer de **minimiser le nombre de termes** de la fonction en appliquant les **propriétés de l'algèbre de Boole**.
- Par exemple, on peut utiliser la propriété de distributivité d'un produit par rapport à une somme de deux variables complémentaires :

$$ab + a\bar{b} = a(b + \bar{b}) = a$$

- On cherche systématiquement à fusionner deux à deux des termes dans lesquels une seule variable change en apparaissant sous forme directe dans l'un et complémentaire dans l'autre.

- **Exemple 1** : Considérons la fonction F dont la table de vérité est la suivante :

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- On en déduit tout d'abord sa forme canonique somme de produits :

$$F = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$$

- Cette expression peut être simplifiée en utilisant les théorèmes de l'algèbre de Boole :

$$
\begin{aligned}
F &= \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz \\
&= \left(\bar{x}yz + xyz\right) + \left(x\bar{y}z + xyz\right) + \left(xy\bar{z} + xyz\right) \\
&= yz\left(\bar{x} + x\right) + xz\left(\bar{y} + y\right) + xy\left(\bar{z} + z\right) \\
F &= yz + xz + xy
\end{aligned}
$$

- **Exemple 2** :

$$
\begin{aligned}
z &= ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C \\
z &= AB\left(C + \bar{C}\right) + A\bar{B}C \\
&= AB(1) + A\bar{B}C \\
&= A\left(B + \bar{B}C\right) \\
z &= A\left(B + C\right)
\end{aligned}
$$

Exemple 3 :

Supposons qu'on dispose de la forme somme de produits d'une fonction F :

$$F = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + ab\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c$$

Dans l'exemple on peut fusionner :

- le 1er terme avec le second $\rightarrow$ $\bar{a}\bar{c}$
- le 1er terme avec le 5ème $\rightarrow$ $\bar{b}\bar{c}$
- le 2ème terme avec le 3ème $\rightarrow$ $\bar{a}b$
- le 2ème terme avec le 4ème $\rightarrow$ $b\bar{c}$
- le 4ème terme avec le 5ème $\rightarrow$ $a\bar{c}$
- le 5ème terme avec le 6ème $\rightarrow$ $a\bar{b}$

$$F = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}b + b\bar{c} + a\bar{c} + a\bar{b}$$

- le 1er terme avec le 5ème $\rightarrow$ $\bar{c}$
- le 2ème terme avec le 4ème $\rightarrow$ $\bar{c}$
- le 3ème terme avec le 6ème sont irréductibles $\rightarrow$ $F = \bar{c} + a \oplus b$

- **Exemple 4** : on utilise essentiellement la propriété $x + \bar{x}y = xy$

$$
\begin{aligned}
F &= a + \bar{a}b + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}e \\
&= a + \bar{a}b + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c}(d + \bar{d}e) \\
&= a + \bar{a}b + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c}(d + e) \\
&= a + \bar{a}b + \bar{a}\bar{b}[c + \bar{c}(d + e)] \\
&= a + \bar{a}b + \bar{a}\bar{b}[c + d + e] \\
&= a + \bar{a}\left[b + \bar{b}(c + d + e)\right] \\
&= a + \bar{a}[b + c + d + e)] \\
&= a + b + c + d + e
\end{aligned}
$$

- **Inconvénients** : Avec la méthode algébrique, il n'est pas toujours facile de savoir quels théorèmes il faut utiliser pour obtenir le résultat minimal et on n'est pas sûr que le résultat obtenu soit la forme minimale et qu'il n'y ait pas d'autres simplifications possibles.

2.2. Simplification par la méthode de Karnaugh

- C'est une méthode **graphique**, plus **systématique**, méthodique, que la simplification algébrique, basée sur le regroupement de valeurs (1 ou 0) situées dans des cases adjacentes d'un tableau. Cette méthode est très utile quand le nombre de variables est inférieur à 6.

- La méthode de simplification de Karnaugh repose sur l'identité :

$$(A\cdot B)+(A\cdot\overline{B})=A\cdot(B+\overline{B})=A$$

- Elle est basée sur l'inspection visuelle des **tableaux disposés de façon telle que les cases adjacentes en ligne et en colonne ne diffèrent que par l'état d'une variable et une seule.**

- Nombre de cases du tableau d'une fonction F :

si une fonction F dépend de n variables, il y a 2^n produits (combinaisons des variables d'entrées) possibles, donc 2^n cases. Chacun des produits est représenté par une case dans un tableau.

2.2.1. Remplir les entrées du tableau

Tableau de Karnaugh d'une fonction à 2 variables

y \ x	0	1
0		
1		

Tableau de Karnaugh d'une fonction à 3 variables

yz \ x	0	1
00		
01		
11		
10		

z \ xy	00	01	11	10
0				
1				

Tableau de Karnaugh d'une fonction à 4 variables

zt \ xy	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Tableau de Karnaugh d'une fonction à 5 variables

ts \ xyz	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
11								
10								

- Cas particulier d'une fonction à 5 variables – elle peut être simplifiée à partir :
  - d'un seul tableau à 5 variables (attention dans ce cas aux règles de simplifications / symétrie pas évidentes (voir exemple plus loin dans le cours).
  - de deux tableaux à 4 variables (on isole alors une des 5 variables et les deux tableaux ne dépendent plus que des 4 variables restantes) – Voir plus loin dans le cours comment exprimer la forme simplifiée.

abc de	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
11								
10								

Un seul tableau de Karnaugh à 5 variables (a,b,c,d,e)

Deux tableaux de 4 variables, l'un pour a=0, l'autre pour a=1

bc de	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

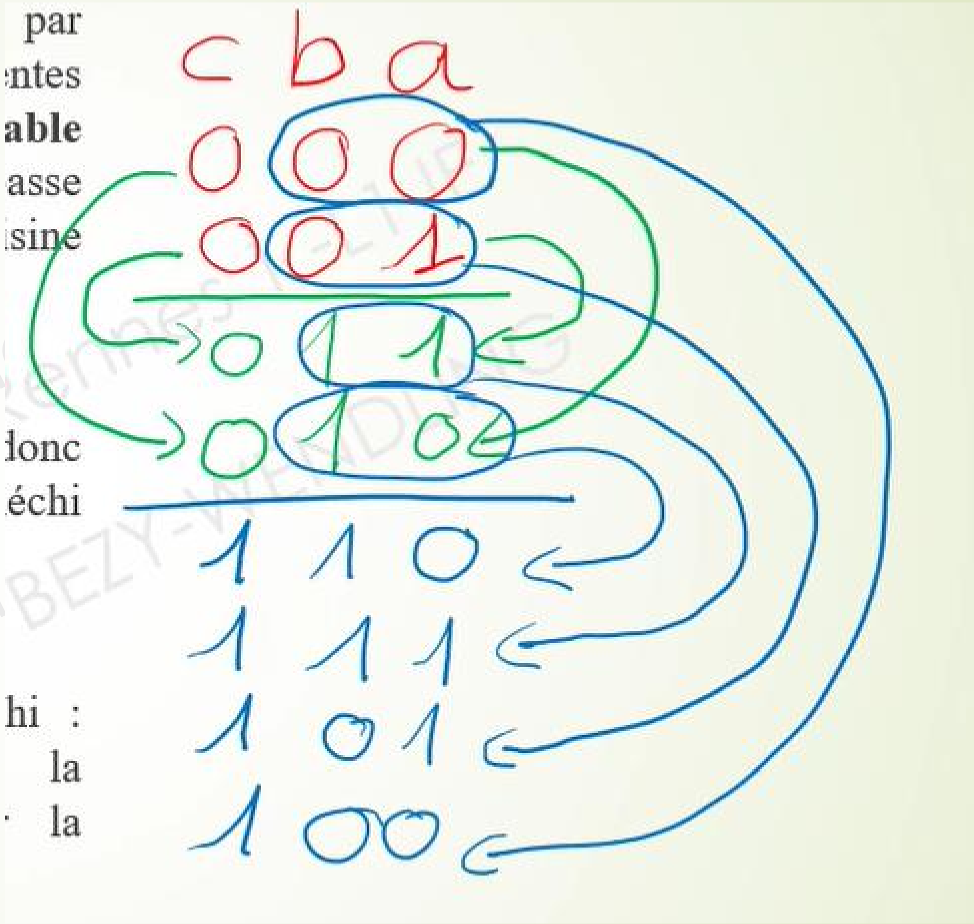
bc de	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

- Dans un tableau de Karnaugh, la propriété de simplification obtenue par regroupement de deux cases adjacentes ne s'applique que si **une seule variable change de valeur** lorsque l'on passe d'une case à une case voisine (horizontalement ou verticalement).

- Les variables d'entrées sont donc rangées selon le code binaire réfléchi (**Gray**).

- Code Gray = code binaire réfléchi : permet l'incrémentation ou la décrémentation d'une valeur par la modification d'un bit unique

- Construction du code Gray à 3 variables :



2.2.2. Remplir les cases du tableau

- Création du tableau de Karnaugh **à partir de la table de vérité** de la fonction :

a	b	c	x
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$x = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c}$$

Tableau de Karnaugh

ab\c	0	1	
00	1	0	
01	1	1	
11	1	0	
10	1	0	

- Création du tableau de Karnaugh **à partir d'une expression logique** :

* Ecrire des 1 dans les cases correspondant à chaque terme de la somme, et des zéros ailleurs :
* Exemple : $f = ab\bar{c} + \bar{a}b + cb$

c ab	0	1
00	0	0
01	1	1
11	1	1
10	0	0

2.2.3. Regrouper les cases pour simplifier

- Réunion de cases : il est possible de simplifier l'expression de sortie en combinant, selon des règles précises les carrés du diagramme de Karnaugh. Plus les regroupements sont de **taille importante et plus l'expression de la fonction sera simple.**

- Réunion de doublets : deux 1 voisins verticalement ou horizontalement peuvent être regroupés.

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	1	0
AB	1	0
$A\bar{B}$	0	0

$X = B\bar{C}$

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	1	1
AB	0	0
$A\bar{B}$	0	0

$X = \bar{A}B$

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	1	0
$\bar{A}B$	0	0
AB	0	0
$A\bar{B}$	1	0

$X = \bar{B}\bar{C}$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	1	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	0	0	1

$X = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{D}$

- Réunion de quartets (groupe de 4) : quatre cases de 1 adjacentes peuvent être regroupées.

0	1
0	1
0	1
0	1

0	1	0	0
0	0	0	0
1	1	1	1
0	0	0	0

0	0	0	0
0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0

0	0	0	0
0	0	1	0
1	0	0	1
1	1	0	1

1	0	0	1
0	0	0	0
0	0	0	0
1	0	0	1

- Simplification par la **méthode** de Karnaugh :

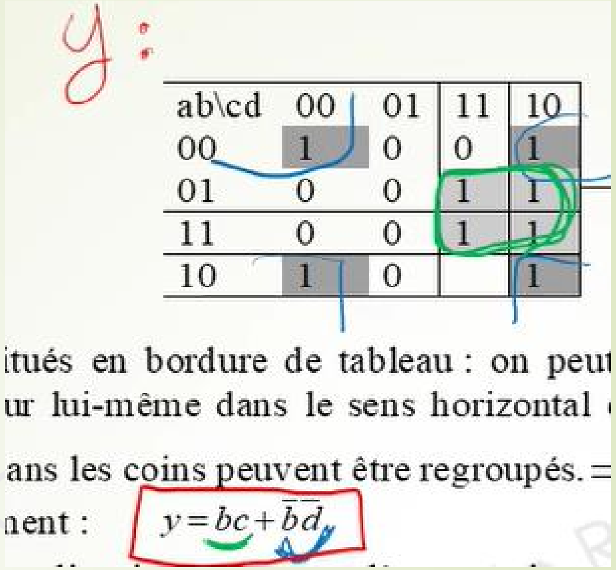
  - Transposer la table de vérité (ou l'expression non simplifiée de la fonction) dans un tableau de Karnaugh
  - Regrouper les cases comprenant des 1
  - Les regroupements ont les tailles 2, 4, 8… (puissance de 2)
  - On cherche à faire le moins de regroupements possible (donc chaque regroupement doit rassembler un maximum de cases)
  - Si une case ne peut pas être regroupée, le terme correspondant apparaît tel quel dans l'expression
  - Dans un groupement de 2 termes (2 cases), on élimine la variable qui change d'état, et on conserve le produit des variables (directes ou inverses) qui n'ont pas changé d'état dans le groupement (car $(ax + a\bar{x}) = a$)
  - Dans un groupement de 4 termes, on élimine les deux variables qui changent d'état et l'on conserve le produit des variables directes ou inverses qui n'ont pas changé d'état

- **L'expression logique finale (simplifiée) est un OU entre l'expression des groupements.**

- Exemple :

ab\cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	1	1
11	0	0	1	1
10	1	0		1

→ bc



Termes situés en bordure de tableau : on peut considérer que le tableau se referme sur lui-même dans le sens horizontal et dans le sens vertical $\Rightarrow$ les quatre 1 dans les coins peuvent être regroupés. $\Rightarrow$ $\bar{b}\,\bar{d}$

Finalement : $y = bc + \bar{b}\bar{d}$

- Exercices d'application : Donner l'expression simplifiée des fonctions F, G, H de 4 variables (x, y, z, t), représentées par les tableaux de Karnaugh suivants.

F :

zt / xy	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	**1**	**1**	0
11	0	0	0	0
10	**1**	**1**	**1**	**1**

G :

zt / xy	00	01	11	10
00	**1**	0	0	**1**
01	0	**1**	**1**	**1**
11	0	**1**	**1**	0
10	**1**	0	0	**1**

H :

zt / xy	00	01	11	10
00	0	**1**	**1**	0
01	**1**	**1**	**1**	0
11	**1**	**1**	**1**	0
10	0	**1**	**1**	0

F :

zt xy	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	**1**	**1**	0
11	0	0	0	0
10	**1**	**1**	**1**	**1**

G :

zt xy	00	01	11	10
00	**1**	0	0	**1**
01	0	**1**	**1**	**1**
11	0	**1**	**1**	0
10	**1**	0	0	**1**

H :

zt xy	00	01	11	10
00	0	**1**	**1**	0
01	**1**	**1**	**1**	0
11	**1**	**1**	**1**	0
10	0	**1**	**1**	0

Correction :

$$F = x\bar{y} + \bar{x}yt$$

$G = yt + \bar{y}\bar{t} + \bar{x}yz$ ou bien $G = \bar{y}\bar{t} + yt + \bar{x}zt$

(Notons que l'on peut réaliser des regroupements différents qui mènent à des formes simplifiées différentes, mais de même complexité pour la réalisation matérielle)

$$H = t + y\bar{z}$$

F :

zt / xy	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	**1**	**1**	0
11	0	0	0	0
10	**1**	**1**	**1**	**1**

G :

zt / xy	00	01	11	10
00	**1**	0	0	**1**
01	0	**1**	**1**	**1**
11	0	**1**	**1**	0
10	**1**	0	0	**1**

H :

zt / xy	00	01	11	10
00	0	**1**	**1**	0
01	**1**	**1**	**1**	0
11	**1**	**1**	**1**	0
10	0	**1**	**1**	0

Correction :

$$F = x\bar{y} + \bar{x}yt$$

$G = yt + \bar{y}\bar{t} + \bar{x}yz$ ou bien $G = \bar{y}\bar{t} + yt + \bar{x}z\bar{t}$

(Notons que l'on peut réaliser des regroupements différents qui mènent à des formes simplifiées différentes, mais de même complexité pour la réalisation matérielle)

$$H = t + y\bar{z}$$

2.2.5. Simplification des fonctions incomplètement définies par tableau de Karnaugh.

- Jusqu'à présent, on a supposé implicitement que **les fonctions logiques sont définies pour toutes les combinaisons des variables d'entrée**.
- Dans ce cas, on a affaire à des fonctions logiques **complètes** (ou complètement définies).
- Il arrive parfois que la valeur d'une fonction logique **ne soit pas spécifiée pour certaines combinaisons.**
- Il peut s'agir de:
  - ***combinaisons qui n'apparaissent jamais*** dans le fonctionnement normal du système
  - de combinaisons pour lesquelles la **fonction peut être indifféremment égale à 0 ou à 1**.
- On a à faire ici à des fonctions logiques **incomplètes**.
- Dans le tableau de Karnaugh, ces combinaisons sont représentées par le signe « indéterminé » :

X, -, ou encore Φ.

- Ex: soit la fonction F dont la table de vérité est la suivante :

a	b	c	d	F
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0

- Rm : il manque des lignes (normalement 2^4=16 lignes)
- F est incomplètement définie
- Pour les combinaisons absentes : F est indéterminée.

2.2.5. Simplification des fonctions incomplètement définies par tableau de Karnaugh.

a	b	c	d	F
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0

- Le tableau de Karnaugh de F est :

cd / ab	00	01	11	10
00	0	X	X	0
01	1	X	X	1
11	0	0	X	X
10	0	1	1	0

cd / ab	00	01	11	10
00	0	X	X	0
01	1	X	X	1
11	0	0	X	X
10	0	1	1	0

- La forme simplifiée est donc :

$F = \bar{b}d + \bar{a}b$

La forme simplifiée est donc :

Exercice d'application n°5

- **Représentation par équivalents décimaux**

Donnez la représentation par équivalents décimaux de la fonction suivante :

$$F(a,b,c,d) = a\bar{b}cd + ab\bar{c}\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + abcd$$

Poids : $a \rightarrow 2^3$, $b \rightarrow 2^2$, $c \rightarrow 2^1$, $d \rightarrow 2^0$

F = 1 pour (11, 12, 6, 8, 15)

F = (11, 12, 6, 8, 15)

Exercice d’application n°6

- **Simplification par la méthode algébrique**

Simplifiez la fonction G suivante en appliquant les propriétés de l’algèbre de Boole :

$$G = \bar{A}C\left(\overline{\bar{A}BD}\right) + \bar{A}B\bar{C}D + A\bar{B}C$$

$$G = \bar{A}C(A + \bar{B} + \bar{D}) + \bar{A}B\bar{C}D + A\bar{B}C$$

$$= \cancel{\bar{A}CA} + \bar{A}C\bar{B} + \bar{A}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + A\bar{B}C$$

$$= \bar{A}C\bar{B} + \bar{A}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + A\bar{B}C$$

$$= C\bar{B}(\cancel{A + \bar{A}}) + \bar{A}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D$$

$$= C\bar{B} + \bar{A}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D$$

$$= C\bar{B} + \bar{A}\bar{D}(C + \cancel{\bar{C}}B) = C\bar{B} + \bar{A}\bar{D}C + \bar{A}\bar{D}B$$

Exercice d’application n°7

- **Simplification par tableaux de Karnaugh**

Simplifiez la fonction H suivante, en utilisant la méthode de Karnaugh :

$$H = \bar{a}bcd + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}c\bar{d} + a\bar{b}cd + ab\bar{c}\bar{d} + ab\bar{c}d + abc\bar{d} + abcd$$

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

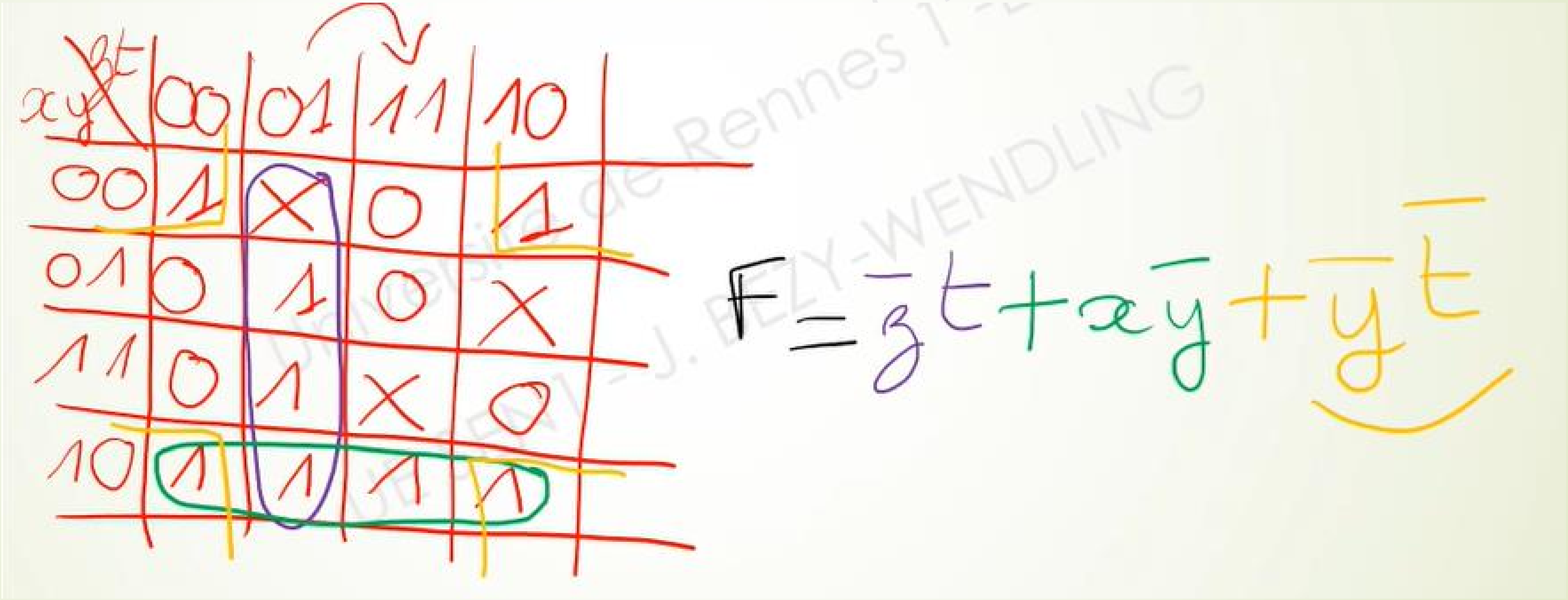
$$H = a + bcd$$

Exercice d'application n°8

xyzt	F
0000	1
0001	X
0010	1
0011	0
0100	0
0101	1
0110	X
0111	0
1000	1
1001	1
1010	1
1011	1
1100	0
1101	1
1110	0
1111	X

- **Simplification par tableaux de Karnaugh d'une fonction incomplète**

Simplifiez la fonction F suivante, en utilisant la méthode de Karnaugh :



Exercice d’application n°9

- **Simplification par tableaux de Karnaugh d’une fonction à 5 variables f(u,x,y,z,t) représentée par les deux tableaux à 4 variables suivants :**

zt / xy	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	0	0	1

u=0

zt / xy	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	1	0

u=1

u=0 u=1

$$f = yt + \bar{u} z \bar{t} + u x z t + \bar{x} \bar{y} \bar{z} \bar{t}$$