SEN1- Electronique Numérique

L1 Portail IE

Johanne Bézy

Fonctions logiques élémentaires / Algèbre de Boole

1. Variables et Fonctions logiques

- Les circuits logiques utilisés dans les calculateurs, les automatismes et les dispositifs combinatoires ou séquentiels sont réalisés à l'aide d'éléments possédant deux états caractéristiques par exemple :
    - contact ouvert ou fermé
    - transistor bloqué ou saturé
- L'analyse et la conception de tels circuits sont grandement facilitées par l'utilisation de l'algèbre de Boole. Cette algèbre manipule des variables qui ne peuvent prendre que deux valeurs, ce qui est le cas en logique classique.
- Une variable logique est une grandeur qui ne peut prendre qu'un nombre fini d'états discrets.

- Une variable logique binaire ou variable booléenne est une variable logique qui ne peut prendre que **2 états** :
  - On attribue à ces deux états respectivement les symboles 0 et 1.
  - Une variable logique est représentée par une lettre comme en algèbre classique.

- **L'algèbre de Boole** peut être définie comme l'étude du comportement
  - des variables prenant leurs valeurs dans l'ensemble (0,1)
  - des fonctions de ces variables prenant leurs valeurs dans le même ensemble.

- Ainsi, étant donné n variables binaires indépendantes x_1, x_2, $\ldots x_n$, une fonction logique $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ est une fonction qui, pour chaque combinaison des variables binaires, prend un état bien déterminé 0 ou 1.

Exemple

- Soit une fonction de 3 variables $f(x_1, x_2, x_3)$. Elle peut par exemple prendre la forme suivante :

  $f(0,0,0)=1$

  $f(0,0,1)=0$

  $f(1,1,1)=0$

  ..etc.

- Il y a 2^3 combinaisons binaires possibles pour les 3 variables x_1, x_2 et x_3 soit 8 combinaisons.

- Soit une fonction de 4 variables $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Elle peut par exemple prendre la forme suivante :

  $g(0,0,0,1)=1$

  $g(0,1,0,1)=0$

  $g(1,0,1,1)=1$

  $g(0,0,1,1)=0$

  ..etc.

- Il y a 2^4 combinaisons binaires possibles pour les 4 variables x_1, x_2, x_3 et x_4 soit 16 combinaisons.

Fonctions logiques élémentaires / Algèbre de Boole

2. Portes OU, ET, NON

- L'algèbre booléenne est plus facile à manipuler que l'algèbre ordinaire parce qu'il n'y a que deux valeurs possibles.

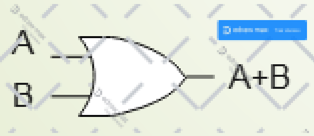
- En algèbre booléenne : pas de fraction, de partie décimale, de nombre négatif, de racine carrée… On a trois opérations élémentaires :

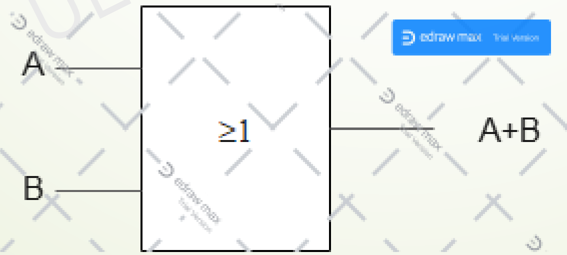
- Addition logique | Mutliplication logique | Inversion

Addition logique	Mutliplication logique	Inversion
"Opération **OU**"	"Opération **ET**"	"Opération **NON**"
+	•	-
		(barre de surlignement)

2.1. Fonction logique OU

- L'opération OU (OR), a au moins deux entrées. La sortie d'une fonction OU est dans l'état 1 si au moins une de ses entrées est dans l'état 1.
- Si l'une quelconque des variables d'entrée = 1 alors la sortie vaut 1.
- Si toutes les variables d'entrée = 0 alors la sortie vaut 0.
- Symbole : 2 symboles possibles





- Table de vérité

La plupart des circuits logiques ont plusieurs entrées mais seulement une sortie. Uneréaction d'un circuit logique table de vérité nous donne la (sa valeur de sortie) aux différentes combinaisons de niveaux logiques appliqués aux entrées.

Table de vérité d'une porte OU à deux entrées :

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Table de vérité du OU à 3 entrées

A	B	C	A+B+C
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

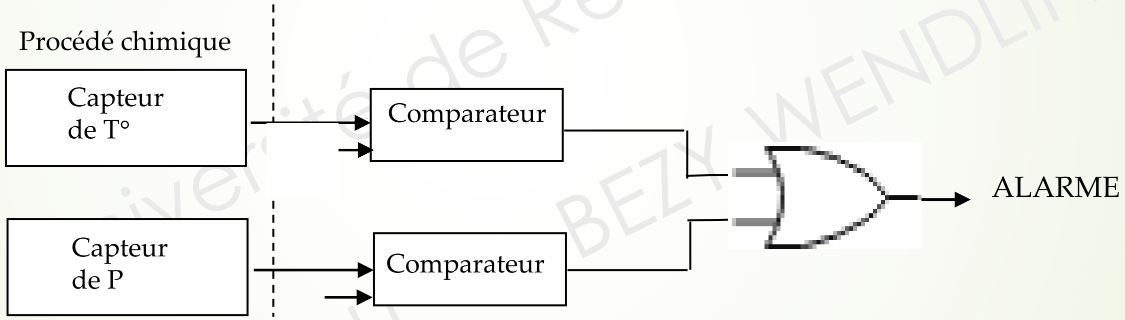
- Les propriétés de la fonction OU :

  - ✓ l'associativité : $(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C$
  - ✓ la commutativité : $A+B = B+A$
  - ✓ l'idempotence : $A+A = A$
  - ✓ l'élément neutre est le 0 : $A+0 = A$
  - ✓ Autres propriétés $A+\bar{A} = 1$

    $A+1 = 1$

Exemple d’utilisation du OU

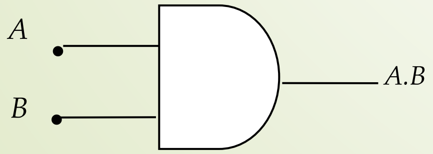
- Dans certains systèmes de régulation industriels, on veut que la fonction de sortie se mette en marche quand une des valeurs entrées dépasse un seuil. Par exemple, dans un procédé chimique, l'alarme doit se déclencher quand la température dépasse une valeur maximale **OU** quand la pression dépasse une certaine limite.
- Le montage suivant peut alors être utilisé :

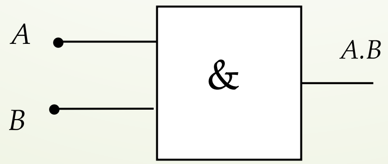


- Dans ce système, la sortie des comparateurs passe à un niveau logique 1 quand la température atteint la température maximale (idem P).
- Composants : les constructeurs de circuits intégrés proposent les boîtiers suivants :
  - 4 portes OU à 2 entrées : CI 7432
  - 6 portes OU à 2 entrées : CI 74832

2.2. Fonction logique ET

- L'opération ET (AND) a au moins deux entrées. La sortie est dans l'état 1 si et seulement si toutes ses entrées sont dans l'état 1.
- Mêmes règles que la multiplication ordinaire des 0 et des 1.
  - Si toutes les variables d'entrée = 1 alors la sortie vaut 1.
  - Si au moins une des entrées =0 la sortie vaut 0.
- Symbole : 2 symboles possibles





- Table de vérité

La table de vérité d'une porte ET à deux entrées est la suivante :

A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Table de vérité du ET à 3 entrées

A	B	C	A.B.C
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

- Les propriétés de la fonction ET :

✓ l'associativité : $(A.B).C = A.(B.C) = A.B.C$

✓ la commutativité : $A.B = B.A$

✓ l'idempotence : $A.A = A$

✓ l'élément neutre est le 1 : $A.1 = A$

✓ la distributivité du ET par rapport au OU :

$$A(B+C) = AB+AC$$

✓ <u>Autres propriétés</u> : $A.\bar{A} = 0$

$A.0 = 0$

✓ Rm : le OU est également distributif par rapport au ET :

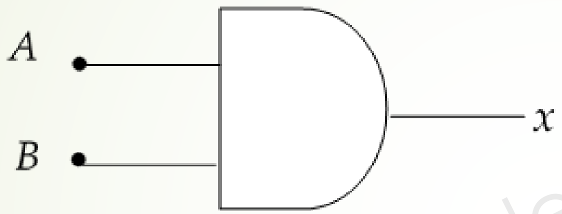
$$A+(B.C)=(A+B).(A+C)$$

Exemple d'utilisation du ET

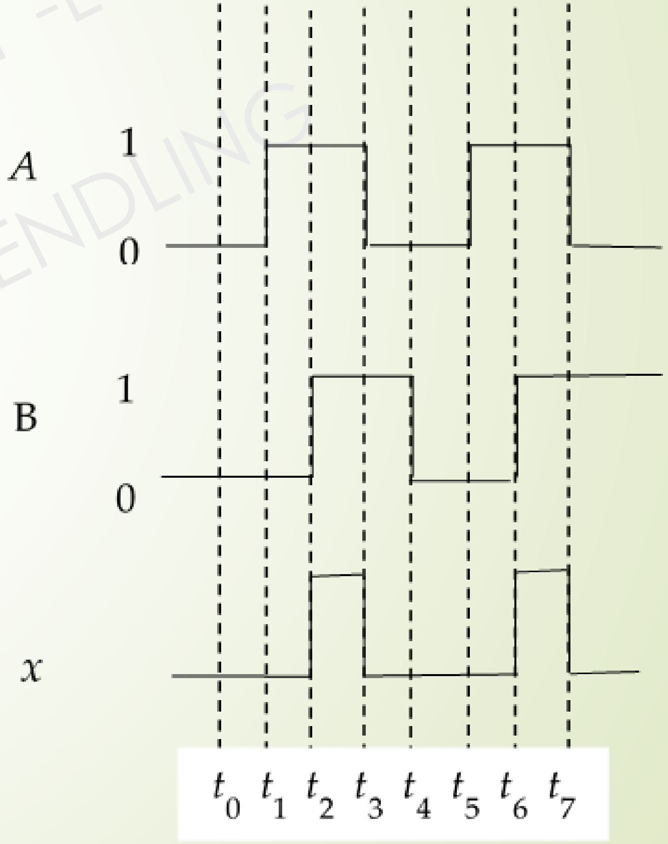
- Il s'agit de déterminer la sortie x de la porte ET suivante pour les formes d'ondes des entrées :

Exemple d'utilisation du ET

- Il s'agit de déterminer la sortie x de la porte ET suivante pour les formes d'ondes des entrées :

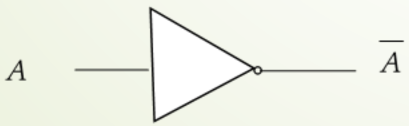


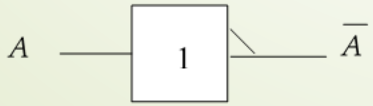
x sera égal à 1 seulement quand A=1 et B=1 en même temps. Ceci est vérifié uniquement pendant les intervalles $[t_2, t_3]$ et $[t_6, t_7]$



2.3. Fonction logique NON

- L'opération NON possède une seule entrée et une seule sortie. La sortie d'une fonction **NON prend l'état 1 si et seulement si son entrée est dans l'état 0.**
- On peut dire :
  - "Y égale NON A"
  - "Y est l'inverse de A"
  - "Y est le complément de A"
- Cette opération s'appelle aussi l'inversion ou la complémentation.
- Symbole : 2 symboles possibles :





- Table de vérité

La table de vérité d'une porte NON :

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

- Propriété de la fonction NON

- $\bar{\bar{A}} = A$
- $A + \bar{A} = 1$
- $A.\bar{A} = 0$
- $A + \bar{A}.B = A + B$

Fonctions logiques élémentaires / Algèbre de Boole

3. Théorèmes de De Morgan

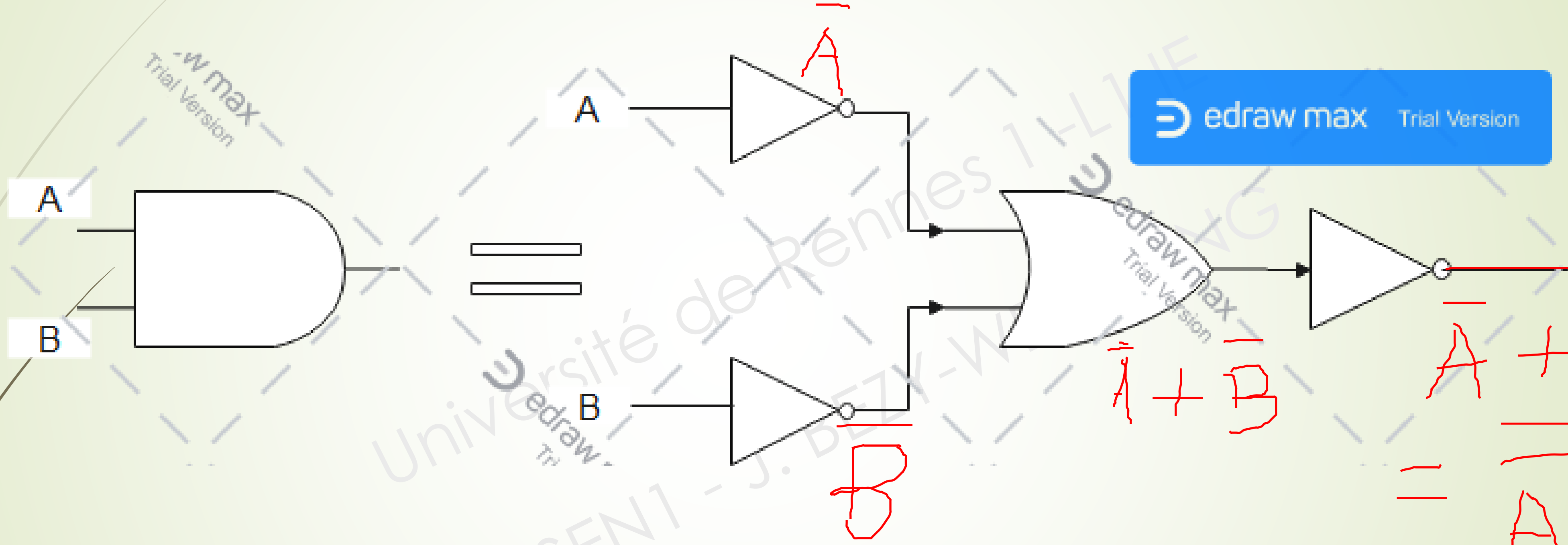
- De Morgan a exprimé deux des plus importants théorèmes de l'algèbre booléenne :

$$\overline{A.B.C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

$$\overline{A+B+C} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$$

- Ces théorèmes sont très utiles pour simplifier des expressions comprenant des sommes ou des produits de variables complémentés.
- Ces deux théorèmes montrent que :
  - Une fonction ET peut être fabriquée à partir des fonctions OU et NON
  - Une fonction OU peut être fabriquée à partir des fonctions ET et NON

Fonction ET réalisée à partir de portes NON et de portes OU :



$\overline{\bar{A} + \bar{B}}$

$= \overline{\overline{A.B}}$

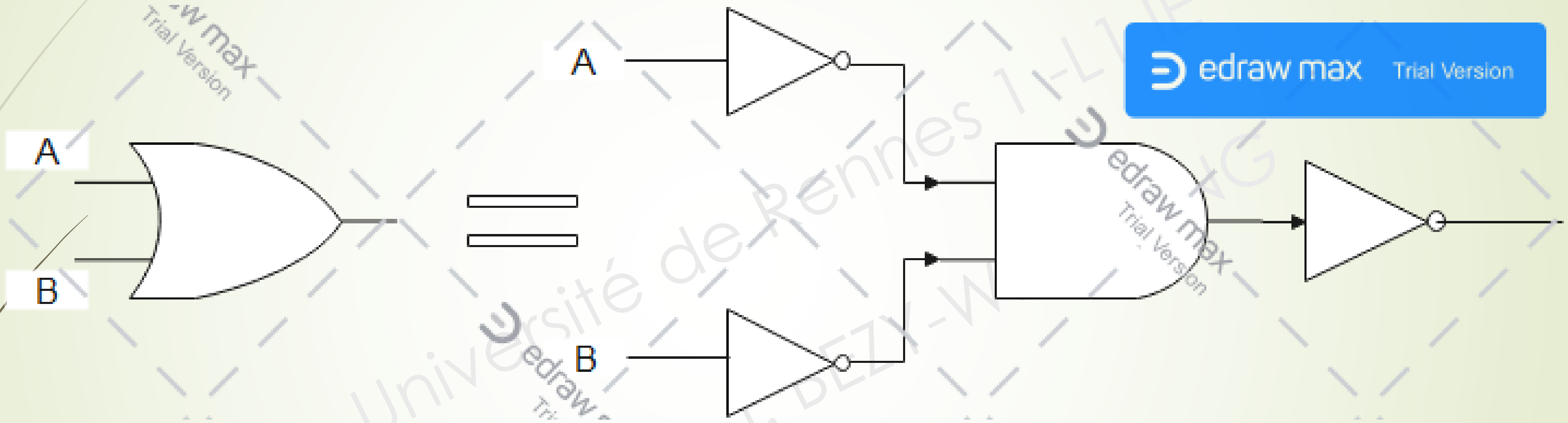
$= A.B$

Démonstration :

La première forme du théorème de De Morgan permet d'écrire :

$$A.B = \overline{\overline{A.B}} = \overline{\bar{A} + \bar{B}}$$

Fonction OU réalisée à partir de portes NON et de portes ET :



Démonstration :

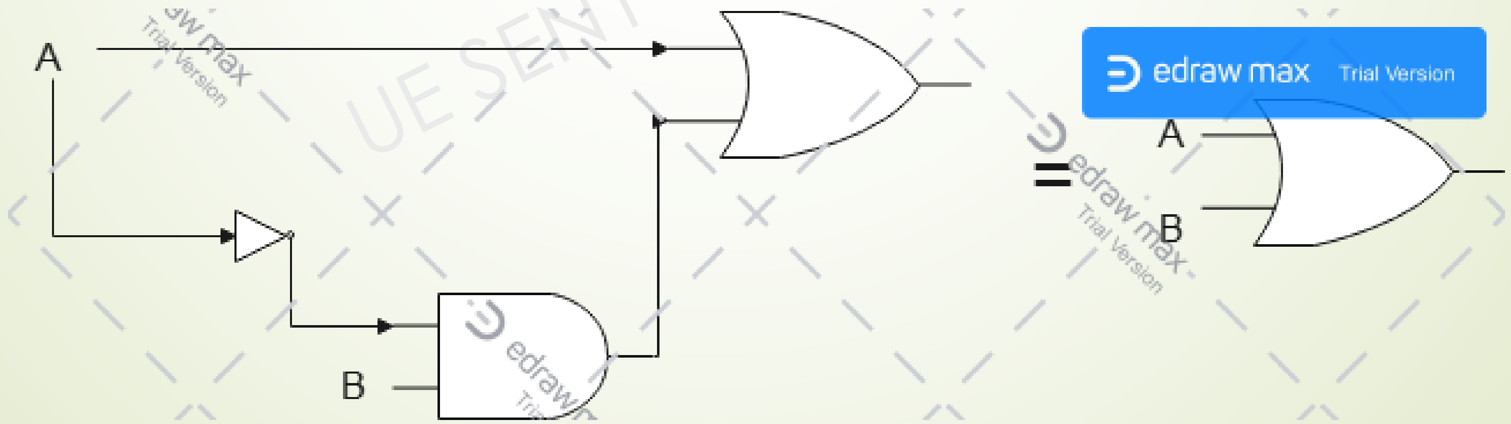
La deuxième forme du théorème de De Morgan permet d'écrire :

$$A + B = \overline{\overline{A + B}} = \overline{\bar{A}.\bar{B}}$$

Utilisation du théorème de De Morgan pour montrer la propriété : $A + \bar{A}B = A + B$

Démonstration : le théorème de De Morgan, et les propriétés de l'algèbre de Boole permettent d'écrire :

$$A + \bar{A}B$$
$$= \overline{\overline{A + \bar{A}B}}$$
$$= \overline{\bar{A}.\overline{\bar{A}B}}$$
$$= \overline{\bar{A}.(A + \bar{B})}$$
$$= \overline{\bar{A}A + \bar{A}\bar{B}}$$
$$= \overline{\bar{A}\bar{B}} = A + B$$

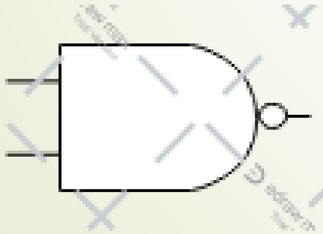


Fonctions logiques élémentaires / Algèbre de Boole

4. Fonctions logiques NON ET, NON OU, OU EXCLUSIF

2.1. Fonction logique NON ET *(NAND)*

- Une porte NON ET (NAND = NOT AND) est constituée par un inverseur à la sortie d'une porte ET.
- Les portes NAND sont très utilisées dans la réalisation des circuits logiques.
- Toute expression logique est réalisable en n'utilisant que des portes NAND.
- Symbole : 2 symboles possibles



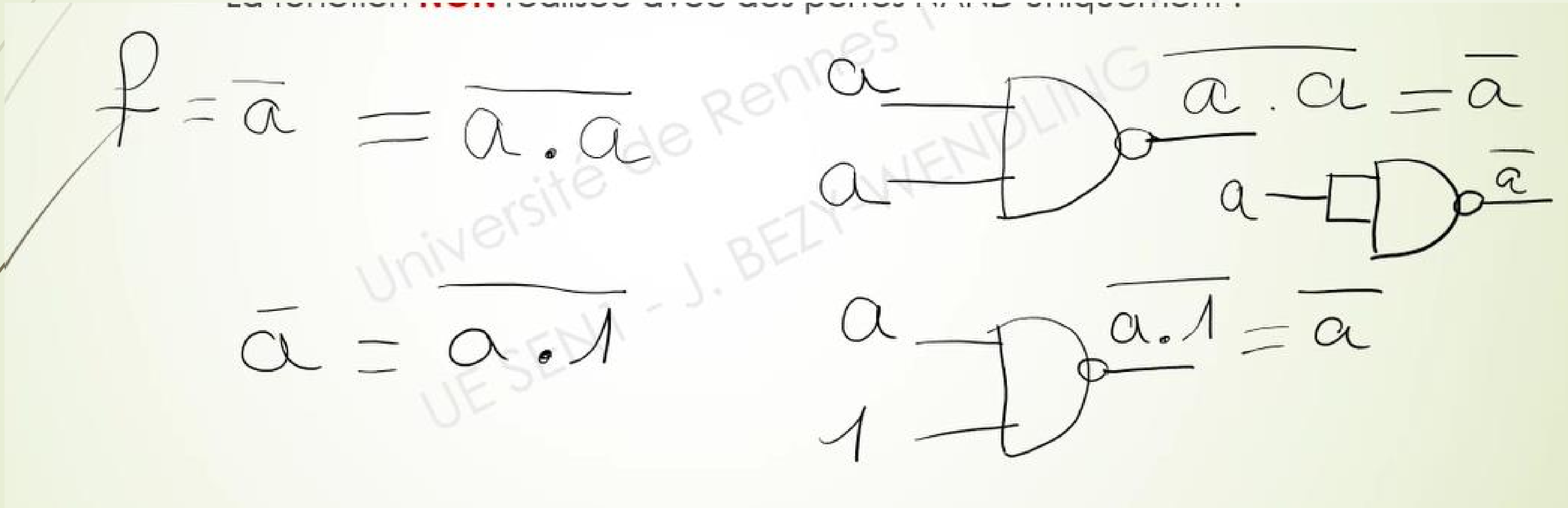
- <u>Table de vérité</u>

A	B	$\overline{A.B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- *Rm : On retrouve l'inverse de la table de vérité du ET.*

Réalisation des trois opérations booléennes avec des NAND (1/3)

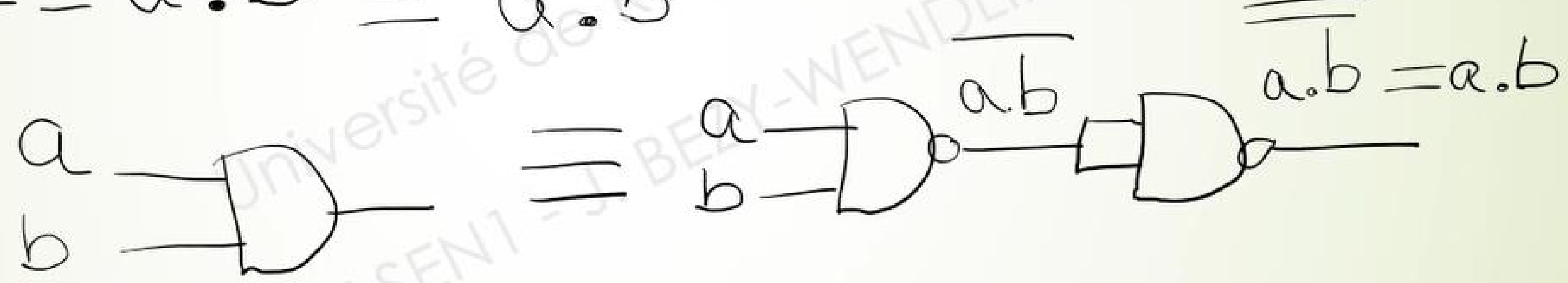
- La fonction **NON** réalisée avec des portes NAND uniquement :



Réalisation des trois opérations booléennes avec des NAND (2/3)

- La fonction **ET** réalisée avec des portes NAND uniquement :

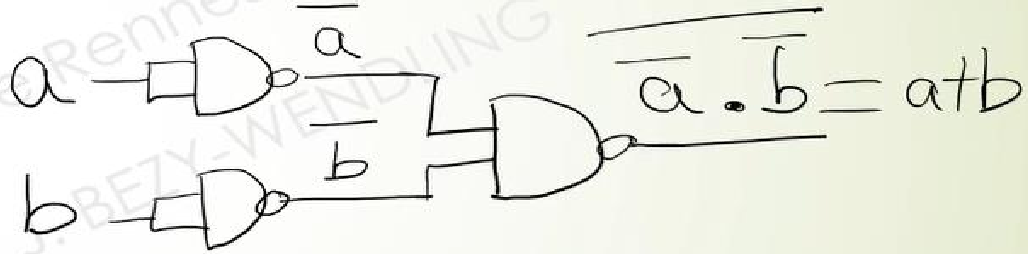
$$f = a.b = \overline{\overline{a.b}}$$



Réalisation des trois opérations booléennes avec des NAND (3/3)

- La fonction **OU** réalisée avec des portes NAND uniquement :

$$f = a + b = \overline{\overline{a+b}} = \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}}$$



Exemple d'utilisation des portes NAND pour réaliser un circuit quelconque

- **Cahier des charges** : un concepteur de circuits logiques doit réaliser un circuit dont l'expression de sortie est : $X = A.B + C.D$

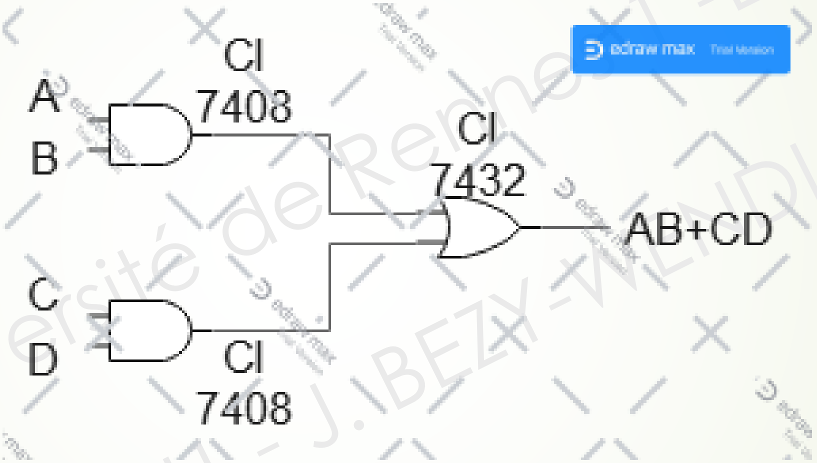
- **Contraintes** : il doit utiliser le moins de circuits intégrés (CI) possible.

- **Hypothèses** : il dispose des Circuits Intégrés (CI) suivants :
  - 1 boîtier 7400 (4 portes NAND 2 entrées)
  - 1 boîtier 7408 (4 portes ET 2 entrées)
  - 1 boîtier 7432 (4 portes OU 2 entrées).

- **Solutions** : 2 solutions possibles
  - Avec les portes ET, OU
  - Avec les portes NAND uniquement

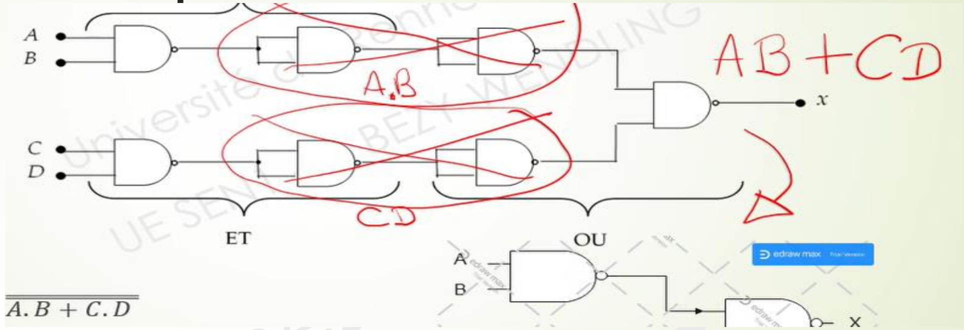
Solution 1 (solution directe) : avec les portes ET, OU

- $X = A.B + C.D$

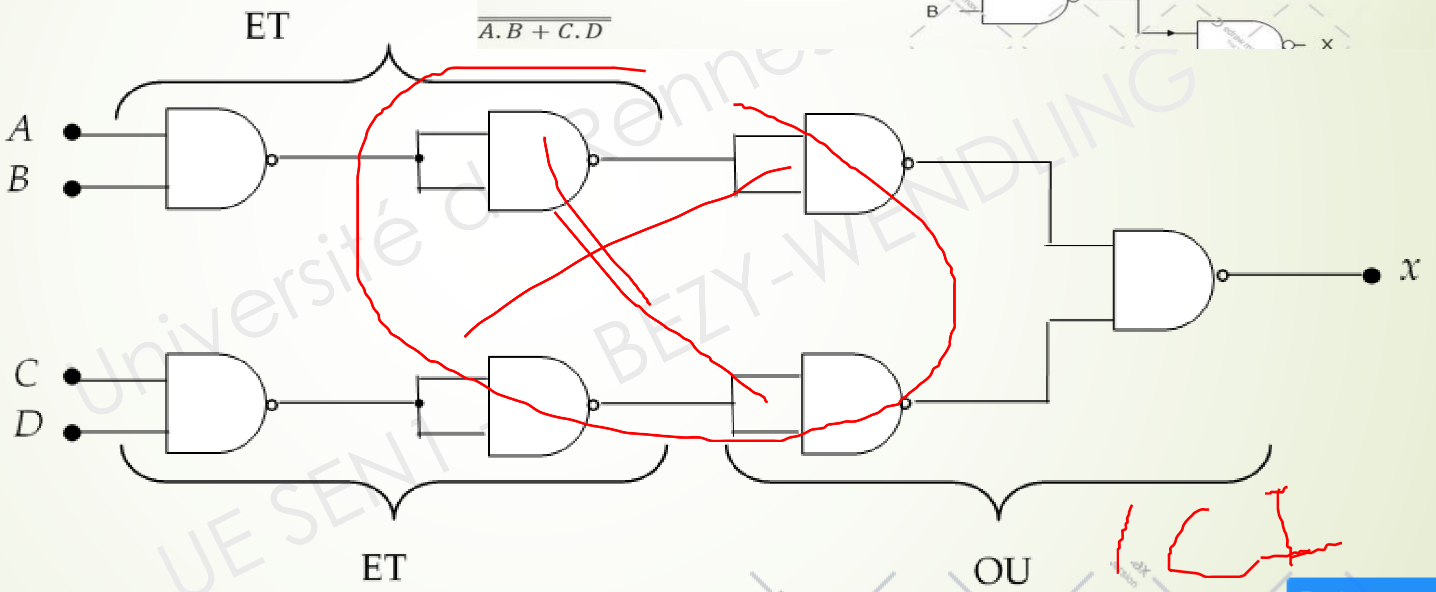


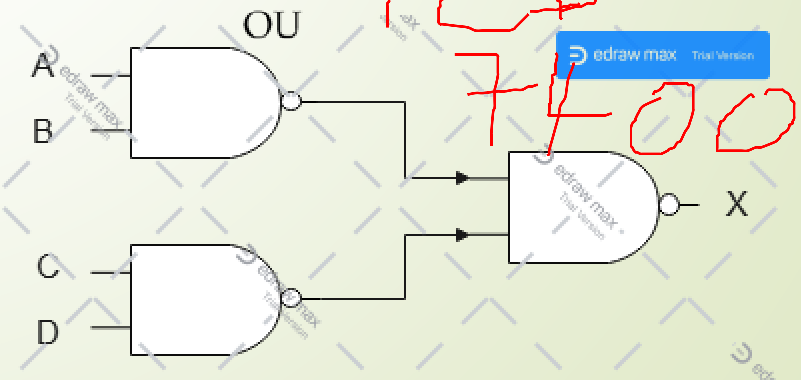
- 2 portes ET, 1 porte OU
- 2 composants à câbler : le CI 7408, le CI 7432
- Dans chaque CI, des portes ne sont pas utilisées

Solution 2 : avec les portes NAND uniquement



- $X = A.B + C.D$

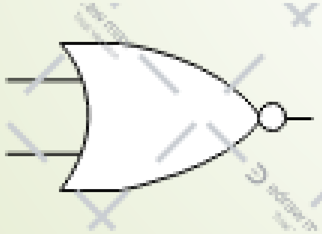


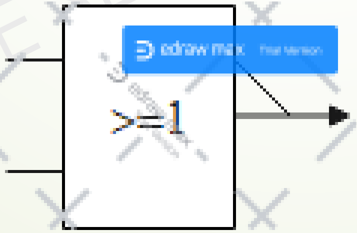


- $X = \overline{\overline{A.B + C.D}}$
- $X = \overline{\overline{A.B}.\overline{C.D}}$

2.2. Fonction logique NON OU *(NOR)*

- Une porte NOR a un fonctionnement analogue à une porte OU suivie d'un inverseur.
- Son expression de sortie est $X = \overline{A + B}$
- Toute expression logique est réalisable en n'utilisant que des portes NOR.
- Symbole : 2 symboles possibles :





- Table de vérité

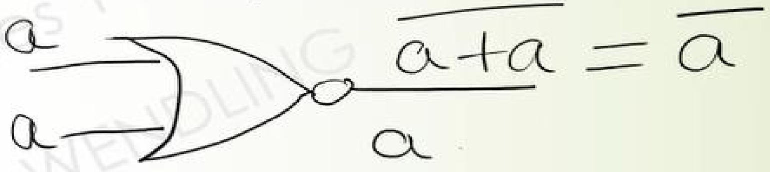
A	B	$\overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- *Rm : On retrouve l'inverse de la table de vérité du OU.*

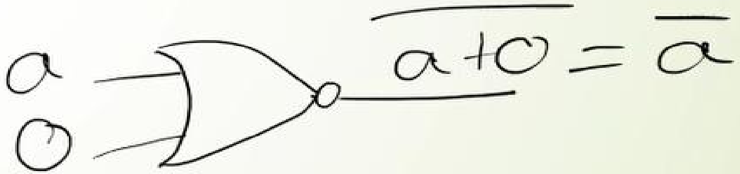
Réalisation des trois opérations booléennes avec des NOR (1/3)

- La fonction **NON** réalisée avec des portes NOR uniquement

$$f = \bar{a} = \overline{a + a}$$

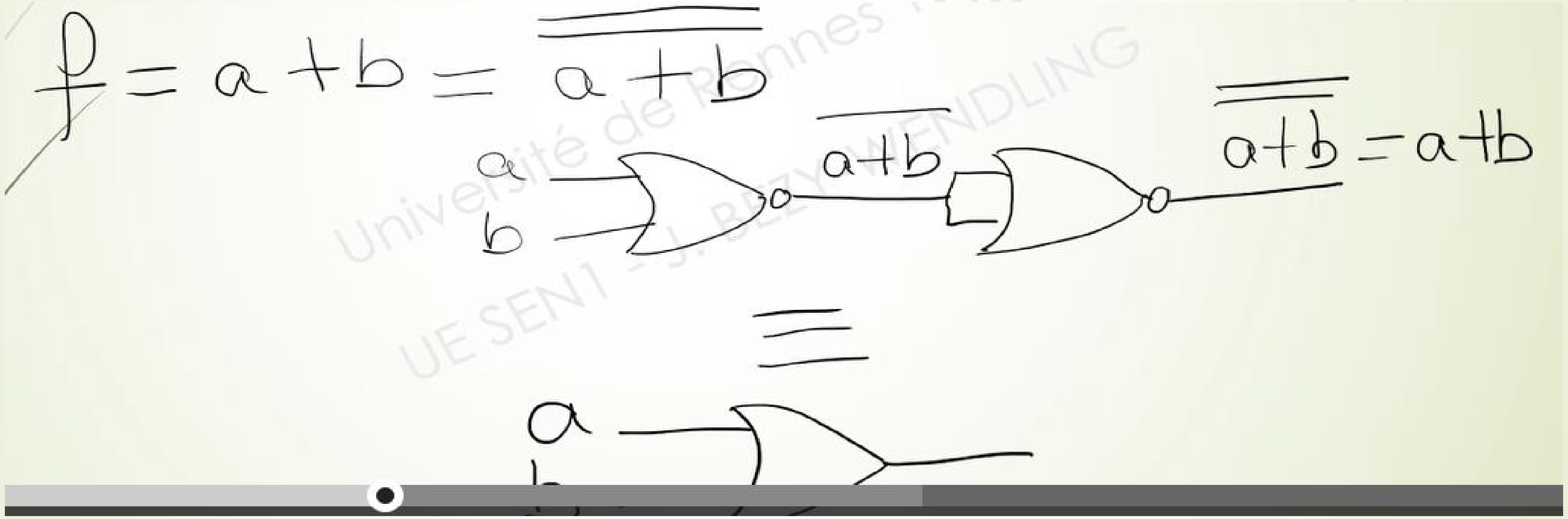


$$f = \bar{a} = \overline{a + 0}$$



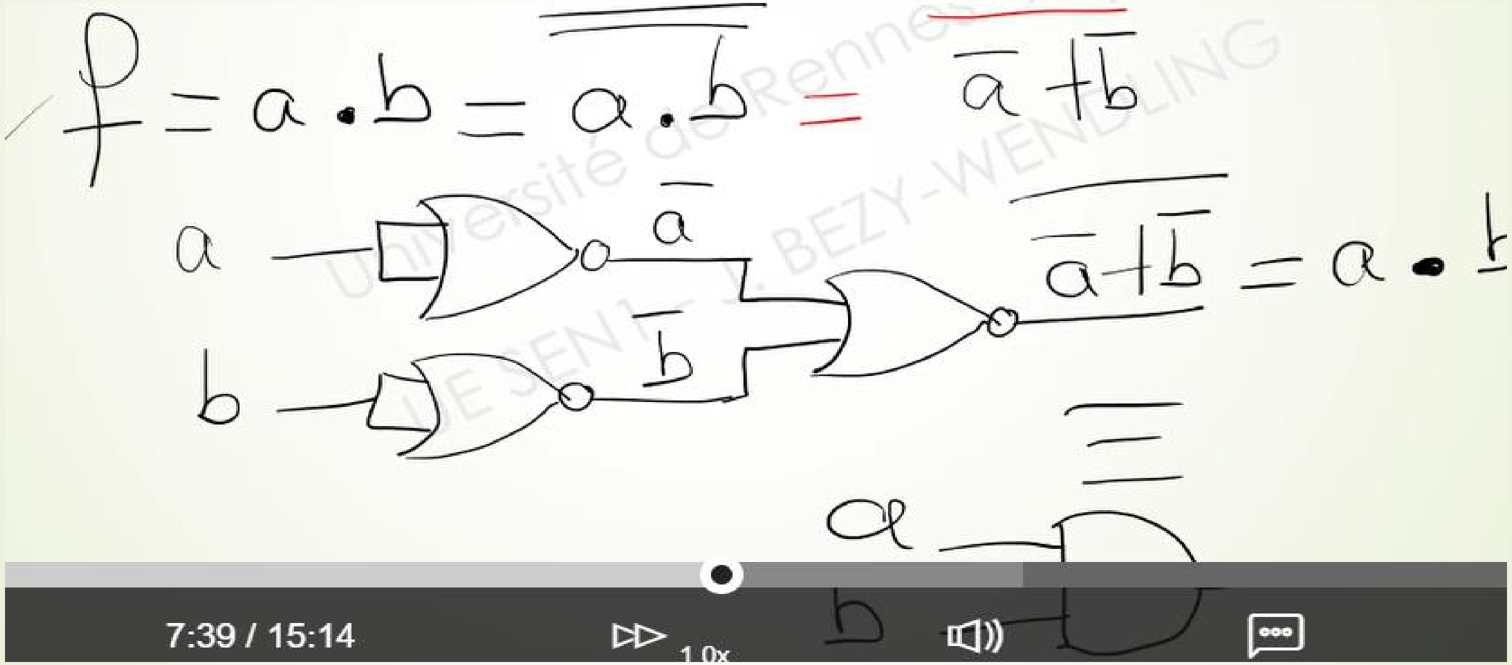
Réalisation des trois opérations booléennes avec des NOR (2/3)

- La fonction **OU** réalisée avec des portes NOR uniquement



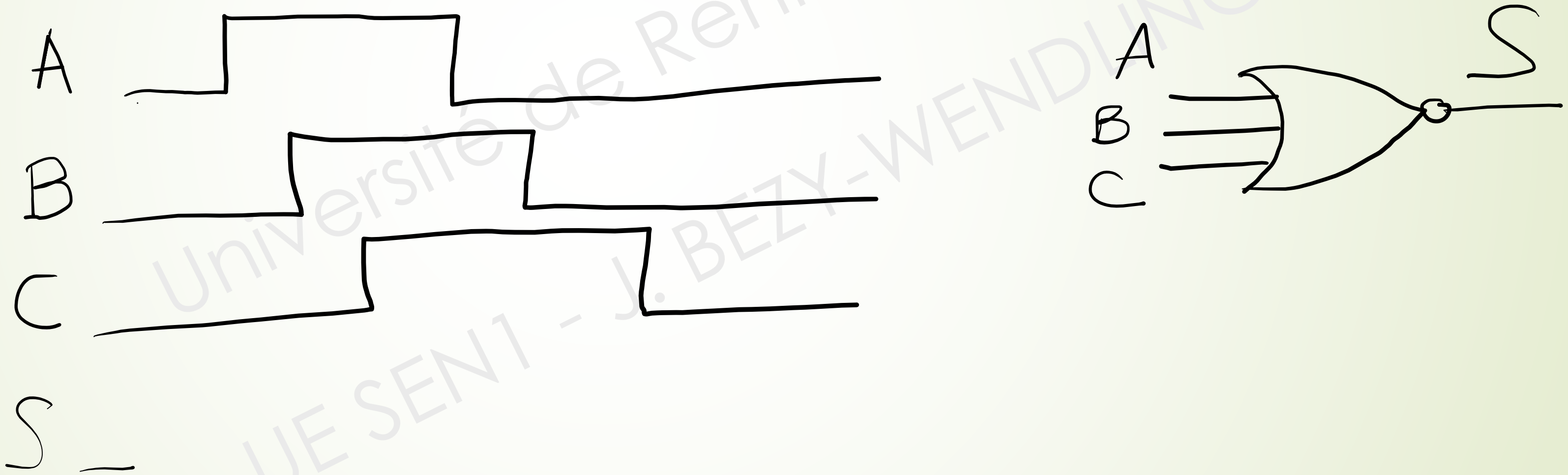
Réalisation des trois opérations booléennes avec des NOR (3/3)

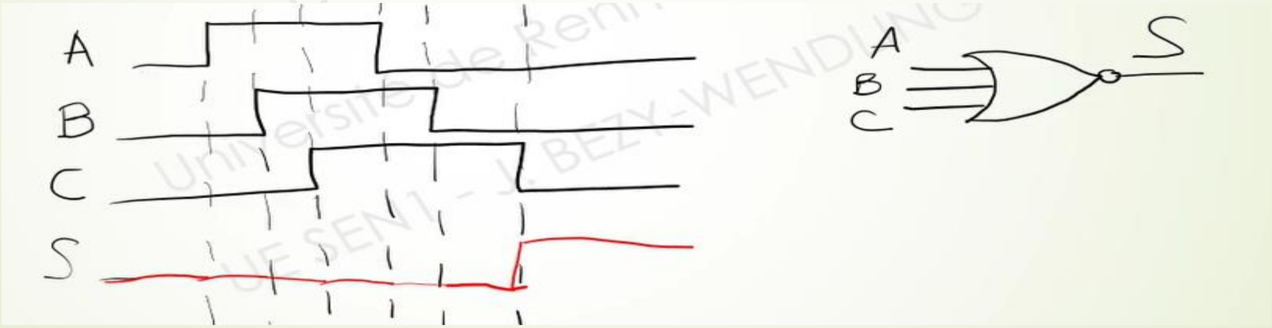
- La fonction **ET** réalisée avec des portes NOR uniquement



Exercice d'application de la fonction NOR

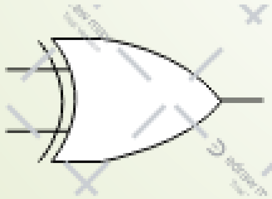
- Dessinez la forme d'onde de sortie de la porte NOR par rapport à celles de ses 3 entrées en fonction du temps :

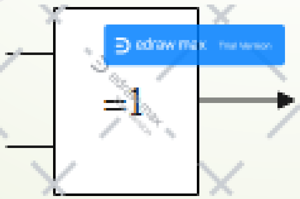




2.2. Fonction logique OU EXCLUSIF (XOR)

- Cette fonction logique est égale à 1 si on a un nombre impair de 1 à l’entrée.
- La sortie d'une fonction OU EXCLUSIF (XOR) à deux entrées est dans l'état 1 si une entrée et seulement une est dans l'état 1 ↔ niveau haut en sortie quand les signaux sur les deux entrées sont opposés.
- Symbole : 2 symboles possibles





- Table de vérité

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- $A \oplus B$ égal à 1 si (A=0 ET B=1) OU si (A=1 ET B=0)
- On a donc l’égalité suivante :

$$A \oplus B = \overline{A}.B + A.\overline{B}$$

Les propriétés de la fonction OU EXCLUSIF :

- ✓ l'associativité :

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C$$

- ✓ la commutativité :

$$A \oplus B = B \oplus A$$

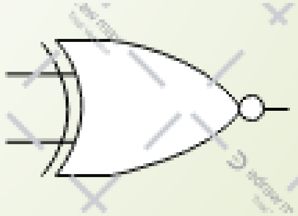
- ✓ <u>Autres propriétés</u>
  - $A \oplus 0 = A$
  - $A \oplus A = 0$
  - $A \oplus \overline{A} = 1$
  - $A \oplus 1 = \overline{A}$

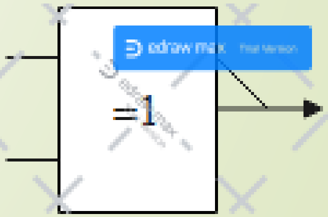
NON OU EXCLUSIF

- ✓ S'appelle « fonction COINCIDENCE »
- ✓ Existe également comme Circuit intégré (CI 74LS266)
- ✓ Peut s'écrire :

$$\overline{A \oplus B} = \overline{A}.\overline{B} + A.B$$

- ✓ Table de vérité : inverse de la table de vérité du OU EXCLUSIF
- ✓ Symboles :



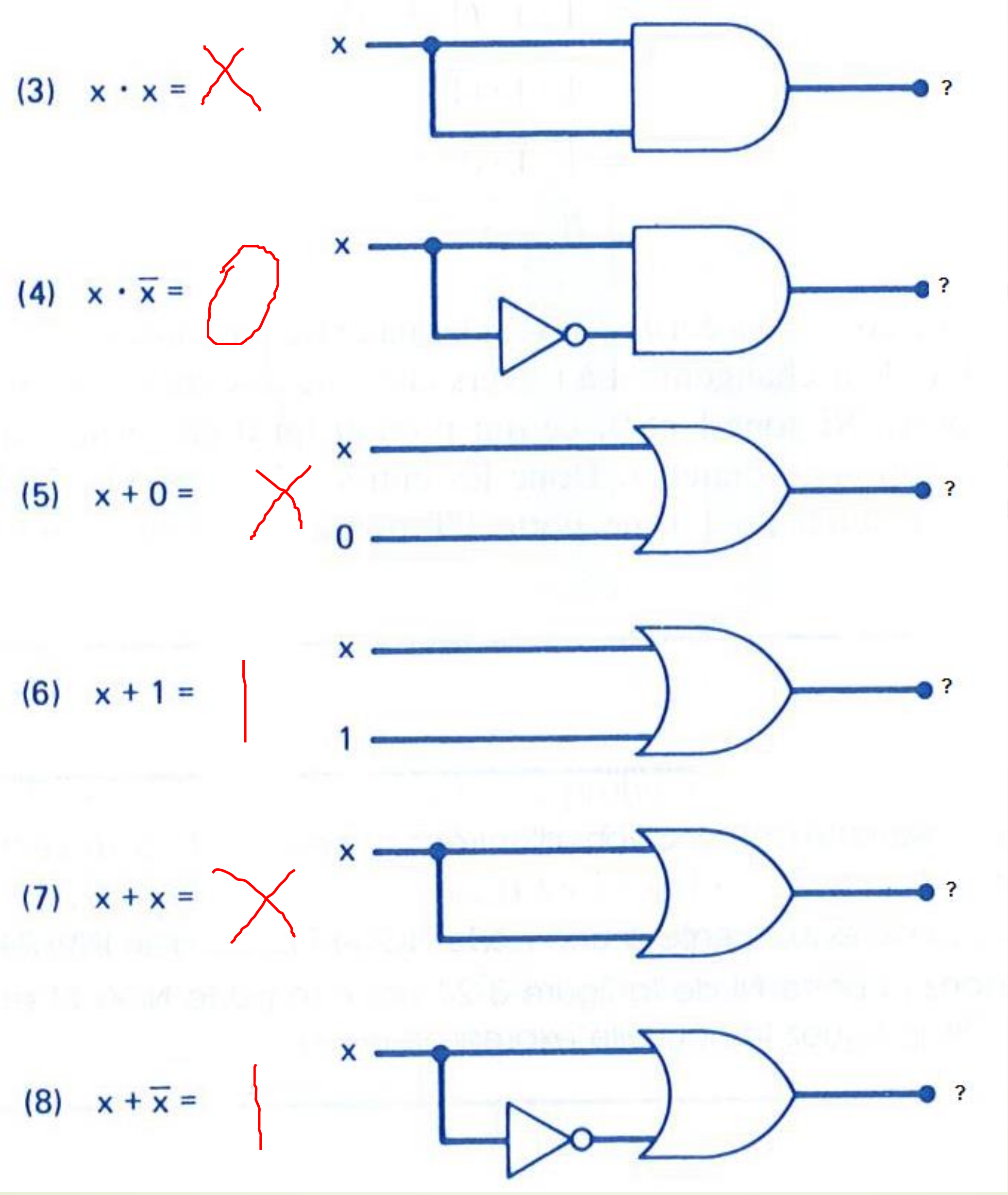


Fonctions logiques élémentaires / Algèbre de Boole

Exercices d'application

Exercice 1 : Théorèmes pour 1 variable

Complétez les théorèmes de Boole suivants. X représente une variable binaire prenant soit la valeur 0, soit la valeur 1.



Exercice 2 : Propriétés des fonctions logiques élémentaires

a) En utilisant les propriétés vues pendant le cours, donner une autre expression de z, qui sera plus simple :

$$z = (\bar{A} + B)(A + B) = B + (A.\bar{A}) = B + 0 = B$$

b) Même question pour x :

$$x = ACD + \bar{A}BCD$$

$$x = CD(A + \bar{A}B)$$

$$= CD(A + B)$$

$$= CDA + CDB$$

Exercice 3 : Théorèmes de De Morgan

Démontrez les théorèmes de De Morgan, en utilisant tous les cas possibles.

Exercice 4 : Matérialisation de circuits à partir d'expression booléennes

Tracer le schéma logique correspondant aux expressions suivantes, en utilisant les portes logiques OU, ET et NON :

$$y = AC + B\bar{C} + \bar{A}BC$$
$$z = \left(\overline{A + B + \bar{C}D\bar{E}}\right) + \bar{B}C\bar{D}$$