Université de Rennes 1 — UFR ISTIC

2018–2019 — Licence 1

Mat 2
Contrôle 3 (1h30)

Les documents, calculettes et téléphones ne sont pas autorisés
Justifiez toutes vos réponses, montrez vos calculs ! ! !
Le barème envisagé est entre parenthèses et est donné à titre indicatif.

EXERCICE 1 (Total 9 points)

On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et dans cette base on considère les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(1) (2 points) Déterminer l'inverse de la matrice $P = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix}$ dont les colonnes sont les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$.

(2) (1 point) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

(3) (3 points) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Donner une base de l'image et du noyau de f.

(4) (3 points) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

EXERCICE 2 (Total 11 points + 1 point bonus à la fin. Les question 3 et 5 valent ensemble 6 points)

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère le plan $\mathbf{P}$ d'équation $x + y - z = 0$.

(1) (0,5 point) Donner un vecteur $\vec{w}_1$ orthogonal à ce plan.

(2) (1,5 points) Donner deux vecteurs $\vec{w}_2$ et $\vec{w}_3$ qui forment une base du plan $\mathbf{P}$.

(3) Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ est une base de l'espace $\mathbb{R}^3$.

(4) (2 points) Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathbf{P}$.
   (a) Donner les images par g des vecteurs $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$.
   (b) En déduire (sans calculs) la matrice D de g dans la base $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$.

(5) On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice A de g dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

(6) (1 point) Les matrices A et D sont-elles semblables ?

(7) (Bonus : 1 point) Calculer A^{2019}.