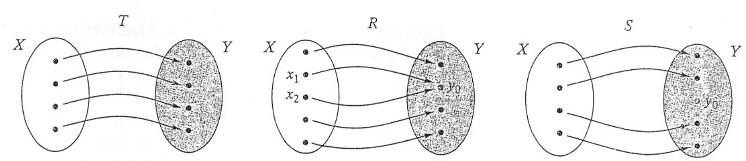
Réciproque d'une application linéaire

Definition (Fonctions inversibles)

Une application $T : X \to Y$ est dite inversible si, pour tout $y \in Y$, l'équation $T(x) = y$ admet une unique solution $x \in X$.

Exemples d'applications :



Definition (Réciproque, ou inverse)

Soit $T : X \to Y$ inversible. Sa **réciproque** (ou inverse) est

$$\begin{aligned} T^{-1} : Y &\to X \\ y &\mapsto (\text{l'unique } x \in X \text{ tel que } T(x) = y) \end{aligned}$$

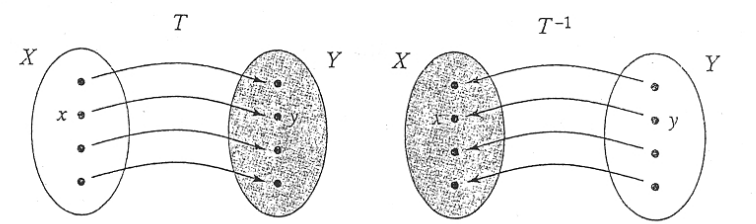
Autrement dit, $T^{-1}(y) = x$ est équivalent à $T(x) = y$.
Alors T^{-1} est une application avec

$$\forall x \in X, \quad T^{-1}(T(x)) = x, \quad (T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}_X)$$

tandis que

$$\forall y \in Y, \quad T(T^{-1}(y)) = y, \quad (T \circ T^{-1} = \mathrm{Id}_Y)$$

Donc T^{-1} est inversible et on a l'identité $(T^{-1})^{-1} = T$.



- Les rotations sont inversibles,
- les symétries sont inversibles,
- les transvections (cisaillement) sont inversibles,
- Les projection othogonales de $\mathbb{R}^2$ sur une droite ou de $\mathbb{R}^3$ sur une droite ou un plan **ne sont pas** inversibles.

Quelles sont les matrices correspondant à une application linéaire inversible ?

On considère l'application linéaire T de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\overrightarrow{y} = T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x},$$

où A est une matrice de taille $n \times m$. Par définition, cette application est inversible si et seulement si pour chaque $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$, le système linéaire $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ admet une solution unique $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m$.

Cas 1 : $n < m$

A la matrice $n \times m \rightsquigarrow$ application linéaire de $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

moins d'équations que d'inconnues $\Rightarrow \exists$ variable libre

Le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ a moins d'équations (n) que d'inconnues (m). $\Rightarrow \exists$ variable libre

$\Rightarrow$ Le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ admet soit une infinité de solution, soit est inconsistant

$\Rightarrow$ L'application $\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}$ n'est pas inversible.

Cas 2 : $n = m$ $(\mathrm{Rang} A \leq n = m)$

Autant d'équations que d'inconnues.

Si $\mathrm{Rang} A < n$ alors il y a une variable libre.
$\Rightarrow$ L'application $\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}$ n'est pas inversible.

Donc le système admet une unique solution si et seulement si

$$\mathrm{Frel}(A) = \mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}.$$

$\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}$ inversible $\Leftrightarrow \mathrm{Frel}(A) = \mathrm{I}_n \Leftrightarrow \mathrm{Rang} A = n$.

Cas 3 : $n > m$ (on a toujours $\mathrm{Rang}A \leq m$)

Si $\mathrm{Rang}A < m$ **:** $A\vec{x} = \vec{y}$ inconsistant ou infinité de solutions. $\vec{y} = A\vec{x}$ n'est pas inversible.

Si $\mathrm{Rang}A = m$ **:** $frel(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \vdots & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & \vdots & . \\ . & . & . & . & . & . & . & \vdots & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & \vdots & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \vdots & . \\ . & . & . & . & . & . & . & \vdots & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \vdots & . \end{bmatrix}$.

On prend $\vec{e}_{m+1}$ pour un système inconsistant et on "revient" à $\vec{y} = A\vec{x}$ en faisant tout à l'envers.

Application linéaires inversibles

- L'application linéaire T de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

  $$\vec{y} = T(\vec{x}) = A\vec{x},$$

  où A est une matrice de taille $n \times m$, n'est **jamais inversible** si $n \neq m$.
- L'application linéaire T de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

  $$\vec{y} = T(\vec{x}) = A\vec{x},$$

  où A est une **matrice carrée** de taille $n \times n$, est **inversible** si et seulement si $\mathrm{Frel}(A) = \mathrm{I}_n$, c'est à dire si et seulement si $\mathrm{Rang}A = n$.

Proposition (Inversion et systèmes linéaires)

Soit A une matrice de taille $n \times n$.
a) Si il existe $\overrightarrow{b}_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}_0$ admet une solution unique, la matrice est inversible. Autrement dit, si A n'est pas inversible, alors pour tout $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$ le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ a soit une infinité de solutions, soit aucune.

b) On considère le cas particulier d'un système homogène. Le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ admet toujours $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ comme solution. Si $\overrightarrow{0}$ est l'unique solution de ce système, A est inversible.

- Les rotations sont inversibles,
- les symétries sont inversibles,
- les transvections (cisaillement) sont inversibles,
- Les projection othogonales de $\mathbb{R}^2$ sur une droite ou de $\mathbb{R}^3$ sur une droite ou un plan **ne sont pas** inversibles.

L'inverse d'une application linéaire est linéaire ?

Theorem (Caractérisation des applications linéaires)

Soit $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application. L'application T est linéaire (i.e. il existe une matrice $n \times m$ A telle que pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m$, $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$) si et seulement si

(a) $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^m, \forall \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^m$ on a $T(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{w})$

(b) $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^m, \forall k \in \mathbb{R}$ on a $T(k\overrightarrow{v}) = kT(\overrightarrow{v})$.

Montrons que l'inverse d'une application linéaire (si elle existe) est linéaire :

$$T^{-1}(\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{y_2}) = T^{-1}\left(T\overrightarrow{x_1} + T\overrightarrow{x_2}\right) = T^{-1}\left(T(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2})\right)$$

$$= \left(T^{-1} \circ T\right)\left(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}\right) = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} = T^{-1}\overrightarrow{y_1} + T^{-1}\overrightarrow{y_2}$$

Definition

Une matrice A est dite **inversible** si l'application $\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}$ est inversible. La matrice de l'application réciproque est notée A^{-1}.

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, et on se demande si elle est inversible. Pour cela, on lui applique l'algorithme de Gauss-Jordan.

Calcul pratique de A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}.$$

Il faut résoudre pour les inconnues x_1, x_2, x_3 :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_1 & & \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & & y_2 & \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & = & & & y_3 \end{array} \right. \longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & \quad y_2 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & = & \qquad y_3 \end{array}\right. \longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lllcrcrcr} x_1 & & & = & 10y_1 & - & 6y_2 & + & y_3 \\ & x_2 & & = & -2y_1 & + & y_2 & & \\ & & x_3 & = & -7y_1 & + & 5y_2 & - & y_3 \end{array}\right. ,$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il est maintenant possible de calculer des antécédents...

Calculs sous la forme matricielle

$$\vec{y} = A\vec{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right]$$

Algorithme

Pour trouver l'inverse d'une matrice A de taille $n \times n$, on forme la matrice $C = [A \vdots \mathrm{I}_n]$ de taille $n \times (2n)$ et on calcule $\mathrm{Frel}(C)$.

- *Si $\mathrm{Frel}(C)$ est de la forme $[\mathrm{I}_n \vdots B]$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.*
- *Si $\mathrm{Frel}(C)$ a une autre forme i.e. si sa partie de gauche n'est pas égale à I_n, alors A n'est pas inversible.*
- *Dans tous les cas, la moitié gauche de $\mathrm{Frel}(C)$ est égal à $\mathrm{Frel}(A)$.*

Proposition (Inverse et déterminant d'une matrice 2×2)

a) La matrice 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
La quantité $ad - bc$ est appelée le **déterminant** *de la matrice A et est noté $\mathrm{Det}(A)$,*

$$\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

b) Si la matrice A est inversible, alors

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

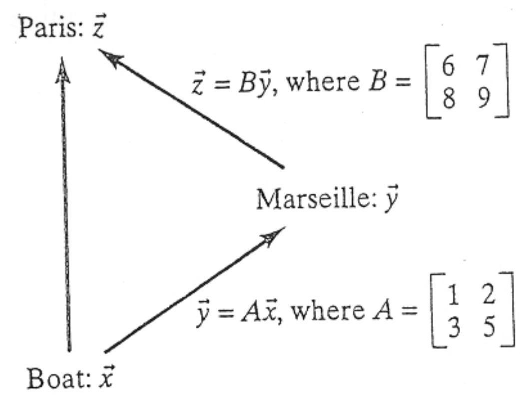
Pour quelles valeurs des constantes b et c la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

Chapitre 1 Chapitre 2 Chapitre 3

Composition d'applications linéaires

Composée de deux applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^2$ est linéaire ? quelle est sa matrice ?



On écrit les formules composantes par composante :

$$\overrightarrow{z} = B\overrightarrow{y} = B(A\overrightarrow{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{z} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \overrightarrow{x} \right)$$

$$(1) \begin{cases} z_1 = 6y_1 + 7y_2, \\ z_2 = 8y_1 + 9y_2, \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2, \\ y_2 = 3x_1 + 5x_2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= 6(x_1 + 2x_2) + 7(3x_1 + 5x_2) \\ &= (6 \cdot 1 + 7 \cdot 3)x_1 + (6 \cdot 2 + 7 \cdot 5)x_2 \quad = 27x_1 + 47x_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 8(x_1 + 2x_2) + 9(3x_1 + 5x_2) \\ &= (8 \cdot 1 + 9 \cdot 3)x_1 + (8 \cdot 2 + 9 \cdot 5)x_2 \quad = 35x_1 + 61x_2, \end{aligned}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 6 \cdot 1 + 7 \cdot 3 & 6 \cdot 2 + 7 \cdot 5 \\ 8 \cdot 1 + 9 \cdot 3 & 8 \cdot 2 + 9 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 47 \\ 35 & 61 \end{bmatrix}.$$

Proposition (Composition d'applications linéaires)

Soient B une matrice de taille $n \times p$ associée à l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

$$U(\overrightarrow{y}) = B\overrightarrow{y}$$

et A une matrice de taille $p \times m$ associée à l'application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^p$

$$T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}.$$

L'application composée

$$(U \circ T)(\overrightarrow{x}) = B(A\overrightarrow{x}),$$

de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, est linéaire .

Démonstration.

$$\begin{aligned}(U\circ T)(\vec{v}+\vec{w}) &= B(A(\vec{v}+\vec{w}))\\ &= B(A\vec{v}+A\vec{w})\\ &= B(A\vec{v})+B(A\vec{w})\\ &= (U\circ T)(\vec{v})+(U\circ T)(\vec{w})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(U\circ T)(k\vec{v}) &= B(A(k\vec{v}))\\ &= B(kA\vec{v})\\ &= kB(A\vec{v})\\ &= k(U\circ T)(\vec{v}).\end{aligned}$$

□

Definition (Produit de matrices)

Soient B une matrice de taille $n\times p$ associée à l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

$$U(\vec{y}) = B\vec{y}$$

et A une matrice de taille $p\times m$ associée à l'application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^p$

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}.$$

le **produit** BA, de taille $n\times m$ est défini comme étant la matrice de l'application linéaire composée

$$(U\circ T)(\vec{x}) = B(A\vec{x})$$

qui a tout $\vec{x}\in\mathbb{R}^m$ associe $(U\circ T)(\vec{x})\in\mathbb{R}^n$. Le produit BA est donc une matrice de taille $n\times m$ et on a

$$(U\circ T)(\vec{x}) = B(A\vec{x}) = (BA)\vec{x}.$$

Remarque

Si le nombre de colonnes de B n'est pas égal au nombre de lignes de A, les applications $\overrightarrow{z} = B\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}$ ne peuvent pas être composées car l'ensemble d'arrivée de $\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}$ est différent de l'ensemble de départ de de $\overrightarrow{z} = B\overrightarrow{y}$. Autrement dit, la sortie de l'application $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$ n'est pas une entrée pour l'application $U(\overrightarrow{y}) = B\overrightarrow{y}$. Dans ce cas, la produit BA n'est pas défini.

Comment "calculer" le produit de deux matrices ?

Soient B une matrice de taille $n \times p$ et A une matrice de taille $p \times m$. Étudions les colonnes de la matrice produit BA :

$$\begin{aligned}(i^{\text{ème}}\text{colonne de } BA) &= (BA)\overrightarrow{e}_i \\ &= B(A\overrightarrow{e}_i) \\ &= B(i^{\text{ème}}\text{colonne de } A).\end{aligned}$$

En notant $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m$ les colonnes de A, on a alors

$$BA = B\begin{bmatrix}\overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & \cdots & \overrightarrow{v}_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B\overrightarrow{v}_1 & B\overrightarrow{v}_2 & \cdots & B\overrightarrow{v}_m\end{bmatrix}$$

Proposition (Colonnes d'une matrice produit)

Soient B une matrice de taille $n \times p$ et A une matrice de taille $p \times m$. On note $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m$ les colonnes de A. alors le prduit BA est défini par

$$BA = B\begin{bmatrix}\overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & \cdots & \overrightarrow{v}_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B\overrightarrow{v}_1 & B\overrightarrow{v}_2 & \cdots & B\overrightarrow{v}_m\end{bmatrix}$$

Pour déterminer BA il suffit d'effectuer la multiplication de B par chaque colonne de A et de recombiner en matrice l'ensemble des vecteurs ainsi déterminés.

$$BA = B\begin{bmatrix}\overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & \cdots & \overrightarrow{v}_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B\overrightarrow{v}_1 & B\overrightarrow{v}_2 & \cdots & B\overrightarrow{v}_m\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}6 & 7\\ 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\cdot 1+7\cdot 3 & 6\cdot 2+7\cdot 5\\ 8\cdot 1+9\cdot 3 & 8\cdot 2+9\cdot 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}27 & 47\\ 35 & 61\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}6 & 7\\ 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\cdot 1+7\cdot 3 & 6\cdot 2+7\cdot 5\\ 8\cdot 1+9\cdot 3 & 8\cdot 2+9\cdot 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}27 & 47\\ 35 & 61\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}6 & 7\\ 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\cdot 1+7\cdot 3 & 6\cdot 2+7\cdot 5\\ 8\cdot 1+9\cdot 3 & 8\cdot 2+9\cdot 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}27 & 47\\ 35 & 61\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}6 & 7\\ 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\cdot 1+7\cdot 3 & 6\cdot 2+7\cdot 5\\ 8\cdot 1+9\cdot 3 & 8\cdot 2+9\cdot 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}27 & 47\\ 35 & 61\end{bmatrix}.$$

exemples

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} = ? \qquad \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = ?$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix} = ?$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = ?$$