S6 :

68 On forme la matrice $C = [A : I_n]$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\therefore$ $Frel(C)$ est de la forme $[I_n : B]$, alors A est la matrice inversible

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(70)

$$C = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\text{Frel}(C) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

∴ La partie de gauche de Frel(C) n'est pas égale à I_3

∴ A n'est pas inversible.

(73)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 3 & k^2-1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2-k \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & k^2-3k+2 \end{bmatrix}$$

a) Quand $k^2-3k+2=0 \Leftrightarrow (k-2)(k-1)=0 \Leftrightarrow k=2$ ou $k=1$, on a obtenir $\text{Frel}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2-k \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

~~Rang (A) < n, donc on n'a pas une solution~~

Frel (A) ≠ id, A n'est pas inversible.

b) quand $k \neq 2$ et $k \neq 1$, $\text{Frel}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = id$, A est inversible

(83)

$$\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1\times 3+1\times(-1) & 2\times 1+0\times(-1) \\ 3\times 0+1\times 2 & 2\times 0+0\times 2 \\ 2\times 3+1\times 1 & 2\times 2+1\times 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

(88)

$$\underset{2\times 3}{\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 11 \end{bmatrix}}} \underset{3\times 2}{\overset{B}{\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix} 8+(-2)+(-3) & -1+(-4)+5 \\ -16+5+11 & 2+10-11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

~~$C = [A : I_2]$~~

(100)

(1) $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \to 2(\vec{x}\cdot\vec{u})\vec{u} - \vec{x}$

$$S(\vec{e_1}) = 2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$S(\vec{e_2}) = 2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$S(\vec{e_3}) = 2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$C = [A : I_3] \leadsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$
$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$L_2 \leftarrow (-\frac{2}{3})L_2$
$L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2$
$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$
$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -6 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

$L_3 \leftarrow \frac{1}{9}L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \quad\quad\quad B \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \end{array}$$

$\therefore \mathrm{rref}(C) = [B : I_3]$

$\therefore A$ est inversible

$S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$

(29) $A = \begin{bmatrix} K-1 & -2 \\ -4 & K-3 \end{bmatrix}$, $Det(A) = (K-1)(K-3) - 8$

Soit $Det(A) = 0 \iff K^2 - 4K - 5 = 0$, on a $K = 5$ ou $K = -1$.

$\therefore$ C'est vrai, $K = 5$ ou $K = -1$

(29 2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}$ est le vecteur orthogonale du Plan V.

$\therefore \vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$T(x): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
$\vec{x} \rightarrow \vec{x} - (\vec{x}\cdot\vec{u})\cdot\vec{u}$

$T(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

$T(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}$

$T(\vec{e_3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\therefore A = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 5 & -3 & -6 \\ -3 & 13 & -2 \\ 6 & -2 & 10 \end{bmatrix}$