Definition (Sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$)

Un **sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble W de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

(a) $\vec{0} \in W$ (contient le vecteur nul)

(b) Si $\vec{v}_1 \in W$ et $\vec{v}_2 \in W$, alors $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in W$ (stable pour l'addition)

(c) Si $\vec{v} \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \vec{v} \in W$ (stable pour la multiplication par un scalaire).

Un sous-espace vectoriel W est stable par combinaison linéaire :
Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s$ sont dans W, alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s$ dans $\mathbb{R}$ nous avons

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \vec{v}_i = \Big(\ldots ((\lambda_1 \vec{v}_1) + (\lambda_2 \vec{v}_2)) + \ldots + (\lambda_s \vec{v}_s) \Big) \in W$$

Exercice

Soit $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \, x \geq 0, \, y \geq 0 \right\}$. *Est-ce que W est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *?*

L'ensemble W est constitué de tous les vecteurs dans le premier quadrant du plan x, y. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car non stable par la multiplication par un scalaire négatif.

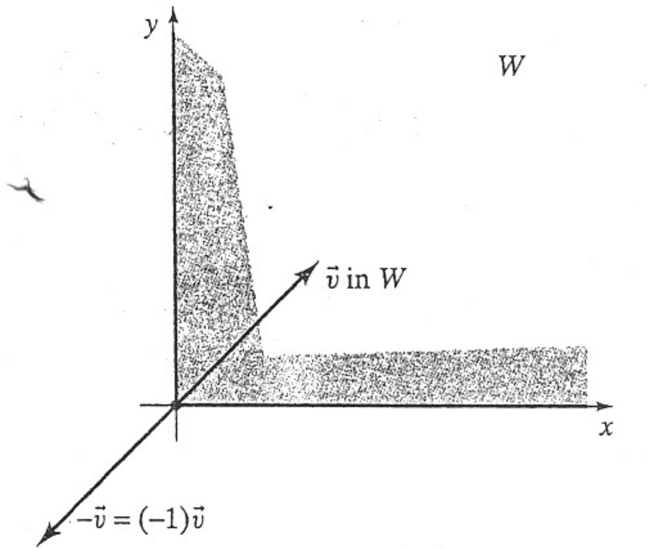


Image d'une fonction

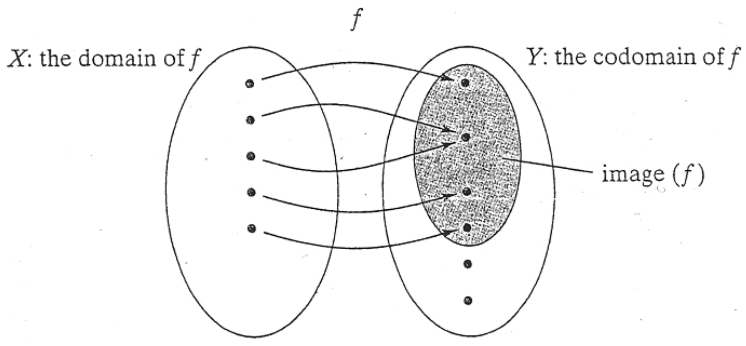


FIGURE – Image d'une fonction

Résumé (Propriétés de l'image d'une application linéaire)

L'image d'une application linéaire $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est l'espace vectoriel engendré noté $\mathrm{Im}(T)$. On a :

(a) $\overrightarrow{0} \in \mathrm{Im}(T)$,

(b) $\forall \overrightarrow{v}_1 \in \mathrm{Im}(T)$, $\forall \overrightarrow{v}_2 \in \mathrm{Im}(T)$, *alors* $\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 \in \mathrm{Im}(T)$, *(stabilité de l'addition)*

(c) $\forall \overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(T)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, *alors* $\lambda\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(T)$ *(stabilité de la multiplication par un scalaire).*

Il résulte des propriétés (b) et (c) que l'image d'une application linéaire T est stable par combinaisons linéaires : si des vecteurs $\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_p$ sont dans l'image de T, $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont des scalaires, alors $\lambda\overrightarrow{v}_1 + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{v}_p$ est encore dans l'image de T.

Propriétés de $\mathrm{Im}(T)$

(a) $\overrightarrow{0} \in \mathrm{Im}(T)$, car $\overrightarrow{0} = A\overrightarrow{0} = T(\overrightarrow{0})$.

(b) Soient $\overrightarrow{v}_1 \in \mathrm{Im}(T)$ et $\overrightarrow{v}_2 \in \mathrm{Im}(T)$.

$\Rightarrow$ $\exists \overrightarrow{w}_1 \in \mathbb{R}^m$ tel que $\overrightarrow{v}_1 = T(\overrightarrow{w}_1)$

$\Rightarrow$ $\exists \overrightarrow{w}_2 \in \mathbb{R}^m$ tel que $\exists \overrightarrow{w}_2 \in \mathbb{R}^m$ et $\overrightarrow{v}_2 = T(\overrightarrow{w}_2)$.

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 = T(\overrightarrow{w}_1) + T(\overrightarrow{w}_2) = T(\overrightarrow{w}_1 + \overrightarrow{w}_2) \in \mathrm{Im}(T)$

(c) Soient $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(T)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\exists \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^m$ tel que $\overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{w})$

$\Rightarrow$ $\lambda\overrightarrow{v} = \lambda T(\overrightarrow{w}) = T(\lambda\overrightarrow{w}) \in \mathrm{Im}(T)$

Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection orthogonale sur le plan x_1, x_2,
c'est-à-dire $T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Alors $\mathrm{Im}(T)$ est le plan x_1, x_2,
constitué par les vecteurs de la forme $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_i \in \mathbb{R}$.

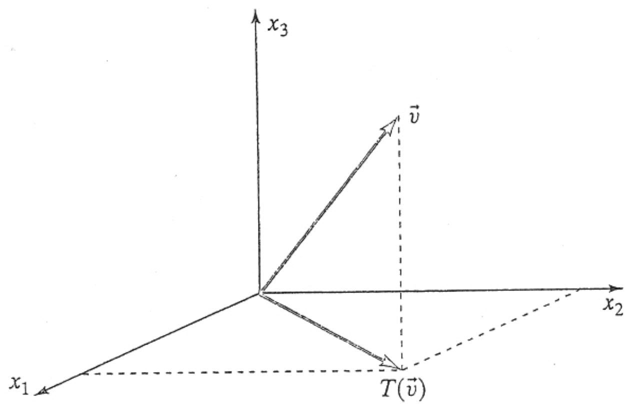


FIGURE – Projection orthogonale sur le plan x_1, x_2

Definition (Espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs)

Soit $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m$ une famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$.
L'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs est l'espace vectoriel engendré par cette famille de vecteurs .

$$\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m) = \{\lambda_1\overrightarrow{v}_1 + \lambda_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + \lambda_m\overrightarrow{v}_m, \quad \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

Si $V = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m)$, la famille $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m$ **engendre** V ou est une **famille génératrice** de V.

NB : $V = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m) \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

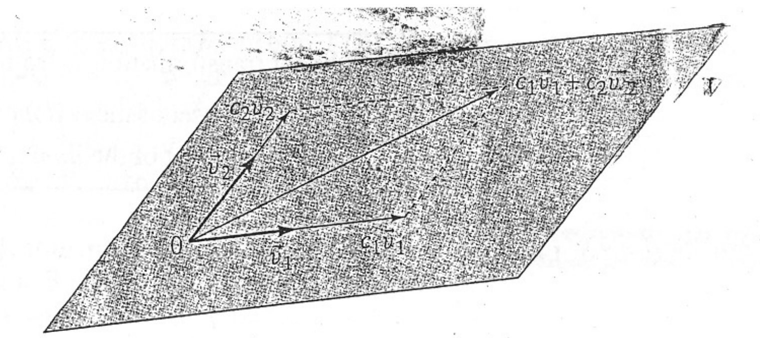


FIGURE – -

Proposition (Image d'une application linéaire)

L'image d'une application linéaire $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ *est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de A. On note cet espace* $\mathrm{Im}(T)$.

Démonstration

$$\begin{aligned} T(\vec{x}) = A\vec{x} &= \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \\ &= x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_m\vec{v}_m. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Im}(T) = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m).$$

$\mathbb{R}^n$ est engendré par les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$.

Problem

Déterminer $\mathrm{Im}(T)$, *où* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, *avec* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

L'image de T est l'ensemble des vecteurs "atteints" par T :

$$T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&3\\2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$
$$= x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 3x_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = (x_1+3x_2)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

$\mathrm{Im}(T)$ est la droite D de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

Ce qui précède assure que $\mathrm{Im}(T) \subset D$. Soit alors $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe une infinité de x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$, tels que $x_1 + 3x_2 = \lambda$ (par exemple $x_1 = \lambda$ et $x_2 = 0$).

Pour chaque x_1 et x_2 ainsi choisis, $T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \lambda\overrightarrow{u}$. Donc $D \subset \mathrm{Im}(T)$ et finalement $D = \mathrm{Im}(T)$.

On notera que les deux vecteurs colonnes de la matrice $A = \begin{bmatrix}1&3\\2&6\end{bmatrix}$ qui représente T, $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$ sont parallèles, ou bien encore "*colinéaires*"

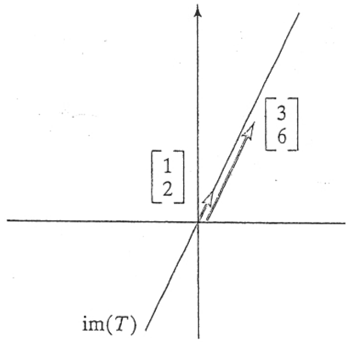


FIGURE – Image de T

Exercice

Déterminer $\mathrm{Im}(T)$*, où* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*,* $T(\vec{x}) = A\vec{x}$*, avec*
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$

L'image de T est l'ensemble des vecteurs "atteints" par T, c'est-à-dire tous les vecteurs de la forme

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

L'image de T est le plan **engendré** par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, aussi décrit comme le plan qui passe par l'origine et les deux extrémités des vecteurs v_1 et v_2.

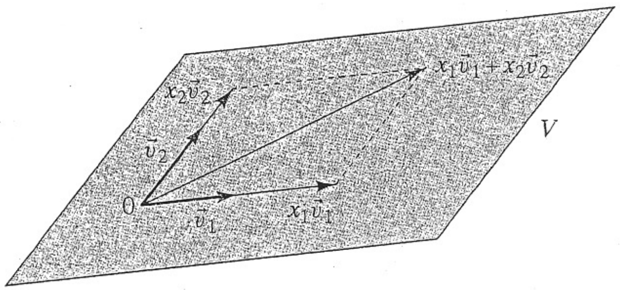


FIGURE – Image de T

les deux vecteurs colonne de A ne sont pas **colinéaires**

Antécédant par une application linéaire

On considère $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Trouver l'ensemble des $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tels que $T(\vec{x}) = \vec{v} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ce n'est pas un sous-espace vectoriel si $\vec{v} \neq \vec{0}$

Definition (Noyau d'une application linéaire)

Le noyau d'une application linéaire $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$ est l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{x}$ solutions de l'équation $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Cet ensemble est le plus souvent noté $\mathrm{Ker}(T)$ ou encore $\mathrm{Ker}(A)$ (de l'anglais "Kernel").
En d'autres termes le noyau de T est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}.$$

Chapitre 1 Chapitre 2 **Chapitre 3**

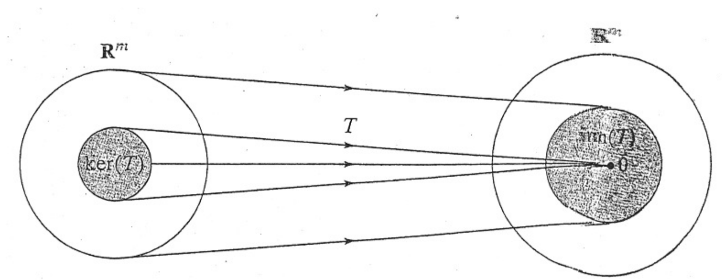


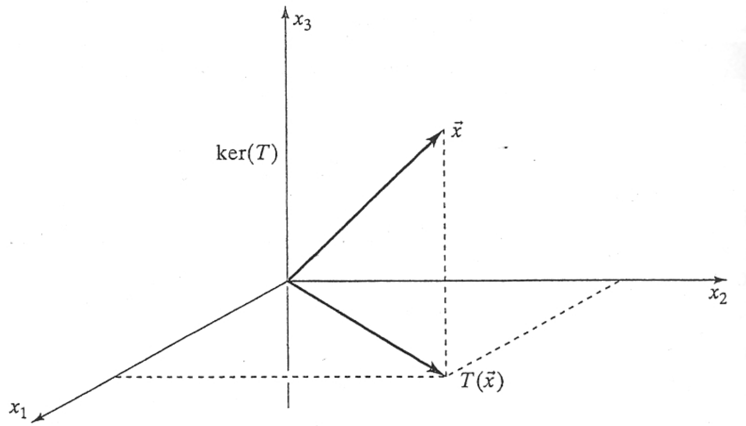
FIGURE – Noyau/Image

Résumé

Étant donnée une application linéaire $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$,

- *L'image $\mathrm{Im}(T) \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^n$.*
- *Le noyau $\mathrm{Ker}(T) \subset \mathbb{R}^m$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de départ $\mathbb{R}^m$.*

Soit T la projection orthogonale sur le plan x_1, x_2 dans $\mathbb{R}^3$. Son noyau est l'ensemble des solutions de l'équation $T(\vec{x}) = \vec{0}$. Cet ensemble est constitué de l'axe x_3, autrement dit $\mathrm{Vect}(\vec{e}_3)$.



Exercice

Trouver le noyau de l'application $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$T(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overrightarrow{x}.$$

On doit résoudre le système linéaire

$$T(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}.$$

En utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan, on obtient

$$\mathrm{Frel} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \vdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent les solutions de ce système sont de la forme

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = t\overrightarrow{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Donc $\mathrm{Ker}(T)$ dans ce cas est la droite engendrée par le vecteur

$$\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Pour $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$ avec $m > n$.

$A\overrightarrow{x} = 0$ a toujours des variables libres, et le système admet une infinité de solutions

$\Rightarrow \quad \mathrm{Ker}(T)$ contient une infinité de vecteurs.

Cela correspond à l'intuition qui nous dit qu'il y aura des "écrasements" si on cherche à plonger linéairement d'une manière ou d'une autre le "grand" espace $\mathbb{R}^m$ dans le "plus petit" espace $\mathbb{R}^n$.

Exercice

Trouver le noyau de l'application linéaire $T = \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ définie par $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$, où A est la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 8 & 10 & 12 \\ 1 & 6 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Frel}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & - & 6x_3 & & + & 6x_5 & = & 0 \\ & x_2 & + & 2x_3 & & - & 2x_5 & = & 0 \\ & & & & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} x_1 & = & 6x_3 & - & 6x_5 \\ x_2 & = & -2x_3 & + & 2x_5 \\ x_4 & = & & - & 2x_5 \end{array}\right],$$

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6s - 6t \\ -2s + 2t \\ s \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v},$$

Remarque : tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (engendré par m de vecteurs) est l'image d'une application linéaire $T : \mathbb{R}^m \to R^n$
Les exercices 169 et 170 (difficiles) montrent que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (engendré par un nb fini de vecteurs) est le noyau d'une application linéaire.

Exercice

On considère le plan $V \subset \mathbb{R}^3$ donné par l'équation
$3x_1 + 9x_2 + 12x_3 = 0$.

(a) *Trouver une matrice* B *telle que* $V = \mathrm{Im}(\cancel{A}B)$.

(b) *Trouver une matrice* A *telle que* $V = \mathrm{Ker}(A)$.

(a) L'image d'une matrice est engendrée par ses vecteurs colonnes. Il suffit donc de décrire (si possible) V comme sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.

(b) L'équation du plan peut sécrire $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$. Par conséquent $V = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 \end{bmatrix}$.

(b) L'équation du plan peut sécrire $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$. Par conséquent $V = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 \end{bmatrix}$.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in S = \mathrm{Sect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\Leftrightarrow \{ 3x_1 + 9x_2 + 12x_3 = 0 \Leftrightarrow [3 \; 9 \; 12 \,|\, 0]$ $\quad x_1 = -3x_2 - 4x_3$

$L_1 \leftarrow L_1 / 3 \quad [1 \; 3 \; 4 \,|\, 0]$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\alpha - 4\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Problem

Quelles sont les matrices $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ qui vérifient $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$. On donnera la réponse en terme du rang de A.

Solution.

On considère le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Celui-ci admet $\overrightarrow{0}$ comme unique solution si et seulement si il n'y pas de variable libre, d'après la proposition 2, et donc si et seulement si $\mathrm{Rang}(A) = m$. □

Chapitre 1 Chapitre 2 **Chapitre 3**

Résumé

Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$ si et seulement si $\mathrm{Rang}(A) = m$ (ce qui implique que $m \leq n$ puisque $m = \mathrm{Rang}(A) \leq n$).

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille $n \times n$. La matrice A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$.

Résumé (Différentes caractéristiques des matrices inversibles)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille $n \times n$. Les affirmations suivantes sont équivalentes.

(a) *A est inversible,*

(b) *Le système linéaire $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet une unique solution pour chaque $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$,*

(c) *Le système linéaire $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}_0$ admet une unique solution pour un certain $\overrightarrow{b}_0 \in \mathbb{R}^n$,*

(d) $\mathrm{Frel}(A) = \mathrm{I}_n$,

(e) $\mathrm{Rang}(A) = n$,

(f) $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$,

(g) $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$.

Chapitre 1 Chapitre 2 **Chapitre 3**

Problem

Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont

- $\mathbb{R}^2$ *lui-même,*
- $\{\overrightarrow{0}\}$,
- *toutes les droites passant par l'origine.*

1. $\{\overrightarrow{0}\}$ et $\mathbb{R}^2$ sont sous-espaces vectoriel $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\vec{u} \neq \vec{0}$ dans $\mathbb{R}^2$ la droite $D_{\vec{u}} = \{\lambda\vec{u} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $W \neq \vec{0}$, alors $\exists \vec{u} \neq \vec{0}$ dans W et $D_{\vec{u}} \subset W$.
    1. S'il n'existe pas $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus D_{\vec{u}}$, alors $W = D_{\vec{u}}$.
    2. S'il existe $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus D_{\vec{u}}$, alors le système $(\vec{u} \mid \vec{v})$ ne possède pas de solution et donc Frel de $A = (\vec{u}\ \vec{v})$ et Id_2. La matrice A est inversible et pour tout $\vec{w}$ dans $\mathbb{R}^2$ le système $(\vec{u}\vec{v} \mid \vec{w})$ possède une unique solution. Donc $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, donc $W = \mathbb{R}^2$.

Chapitre 1 Chapitre 2 **Chapitre 3**

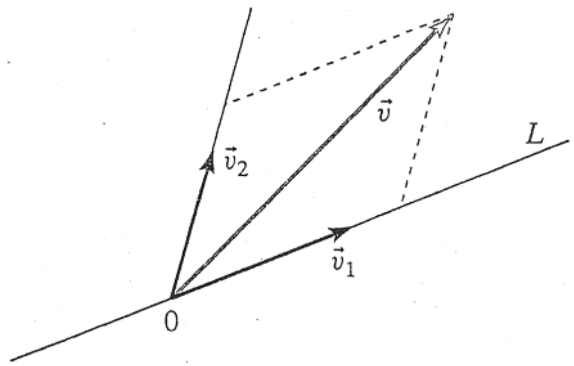


Figure – -

De même, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont

- $\{\vec{0}\}$ et $\mathbb{R}^3$ lui même,
- Les droites passant par l'origine (sous-espace vectoriel de dimension 1),
- Les plans passant par l'origine (sous-espace vectoriel de dimension 2),

La hiérarchie des sous-espaces vectoriels est liée à la **dimension** (concept qui sera explicite dans la section suivante).

	Sous-Espaces de $\mathbb{R}^2$	Sous-Espaces de $\mathbb{R}^3$
dimension 0	$\{\vec{0}\}$	$\{\vec{0}\}$
dimension 1	droites passant par $\vec{0}$	droites passant par $\vec{0}$
dimension 2	$\mathbb{R}^2$	plans passant par $\vec{0}$
dimension 3	aucun	$\mathbb{R}^3$

Chapitre 1 Chapitre 2 **Chapitre 3**

Bases et indépendance linéaire

Exercice

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Trouver des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ *qui engendrent l'image de* A*. Quel est le plus petit nombre de vecteurs nécessaires pour décrire* $\mathrm{Im}(A)$ *?*

$\mathrm{Im}(A)$ est engendré par les vecteurs colonnes de A,

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

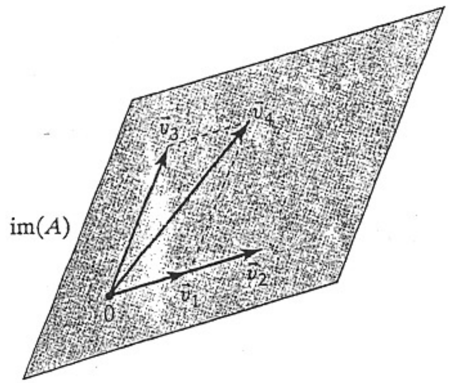


FIGURE – Image de A.

Chapitre 1 Chapitre 2 **Chapitre 3**

$$\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 \in \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_3), \quad \vec{v}_4 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3 \in \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_3).$$

Par conséquent les vecteurs $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_4$ sont redondants et on a

$$\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_3).$$

On observe enfin que les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_3$ ne sont pas parallèles, de sorte que l'image de A est engendrée par deux vecteurs et pas par un unique vecteur.

Vérifions par des calculs algébriques que $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_3)$. On a naturellement $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_3) \subset \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$. On va vérifier l'inclusion inverse. Soit $\vec{v} \in \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ quelconque. Alors $\vec{v}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_i$, et on a

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \lambda_4\vec{v}_4 \\ &= \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2(2\vec{v}_1) + \lambda_3\vec{v}_3 + \lambda_4(\vec{v}_1 + \vec{v}_3) \\ &= (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4)\vec{v}_1 + (\lambda_3 + \lambda_4)\vec{v}_3 \in \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_3),\end{aligned}$$

Definition (Vecteurs redondants, indépendance linéaires, bases)

Soit une famille de vecteur $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ dans $\mathbb{R}^n$.

- $\vec{v}_1$ est redondant s'il est nul. Un vecteur $\vec{v}_j, j > 1$ est *redondant* si il est combinaison linéaire des vecteurs qui le précèdent dans la liste, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_{j-1}$.
- Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ sont **linéairement indépendants** si aucun des vecteurs est redondant. Sinon, ils sont linéairement dépendants.
- La famille de vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ est une **base** d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$, si chaque vecteur $\vec{v}_j$ est dans V, si $V = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m)$ et si les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ sont linéairement indépendants.

Lorsque que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ sont **linéairement indépendants**, la famille $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ est **une famille libre**.
Lorsque que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ ne sont pas linéairement indépendants, ils forment une famille **liée**.

Dans la liste

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

qui constitue la liste des vecteurs colonnes de A, les vecteurs $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_4$ sont redondants, puisque $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$ et $\vec{v}_4 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3$. En retirant les vecteurs redondants, on observe que les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

sont linéairement indépendants (on vérifie aussi facilement que le système $x\vec{v}_1 + y\vec{v}_3 = \vec{0}$ n'admet que $x = 0$ et $y = 0$ comme unique solution). Donc la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_3)$ constitue une base de $V = \mathrm{Im}(A)$.

Résumé (Base de l'image d'une application linéaire)

Soit A une matrice (ou de manière équivalente on peut raisonner sur l'application linéaire qu'elle représente). On obtient une base de l'image de A, $\mathrm{Im}(A)$, en retirant de la famillle des vecteurs colonnes de A tous les vecteurs redondants.

Comment trouver les vecteurs redondants ? Dans les cas faciles, on peut le faire à l'aide d'observations élémentaires. Sinon algorithme systématique basé sur la réduction de Gauss-Jordan...