Comment "diagonaliser"

On cherche λ tel que

- il existe un vecteur non nul \vec{x} tel que $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$
- $(A \lambda \mathbf{Id})\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$
- $\ker(A \lambda \mathbf{Id}) \neq \{\vec{0}\}$
- $A \lambda Id$ non inversible
- $det(A \lambda Id) = 0$

Chapitre 2 Chapitre 3

Calcul du déterminant par développement le long d'une ligne ou d'une colonne

Definition

Si A est une matrice de carrée $n \times n$, alors le **mineur** d'indice i,j, noté $A_{i,j}$, est la matrice de carrée $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en enlevant la $i^{\rm e}$ ligne et la $j^{\rm e}$ colonne de A. Le déterminant de A est le nombre $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1})$ (développement le long de la

Proposition

1^{re} colonne)

Soit A une matrice de carrée de taille $n \times n$ et i et j dans $\{1,\ldots,n\}$:

- $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$ (le long de la j^e colonne)
- $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$ (le long de la i^e ligne)

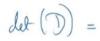
Exemples

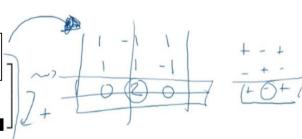
$$A = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \right]$$

$$D = \left[\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$





Chapitre 2 Chapitre 3

- Echanger deux ligne multiple le déterminant par -1
- ② Multiplier une ligne par $s \neq 0$ multiplie le déterminant par s
- **3** Ajouter un multiple d'une ligne (d'une colonne) à une autre ligne (colonne) ne change pas le déterminant

Proposition (Inversibilité et déterminant d'une matrice $n \times n$)

Une matrice A de taille $n \times n$ est inversible si et seulement si le **déterminant** de la matrice A est non nul.

Comment "diagonaliser"

Si dans
$$(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$$
 la matrice de T est $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$, alors

 \overrightarrow{V}_i est un vecteur non nul avec

$$A(\overrightarrow{v}_i) = \lambda_i \overrightarrow{v}_i$$

On cherche λ tel que

- il existe un vecteur non nul \vec{x} tel que $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$
- $(A \lambda \mathbf{Id})\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$
- $\ker(A \lambda \mathbf{Id}) \neq \{\vec{0}\}$
- $A \lambda \mathbf{Id}$ non inversible
- $\bullet \ \det(A \lambda \mathbf{Id}) = 0$

Pour diagonaliser
$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
, calculons
$$\det(A - X \mathbf{Id}) = \begin{vmatrix} -4 - X & -1 & -2 \\ 2 & -1 - X & 2 \\ 5 & 1 & 3 - X \end{vmatrix}$$

$$(L1) \leftrightarrow (L1) + (L3) \text{ donne} \begin{vmatrix} 1 - X & 0 & 1 - X \\ 2 & -1 - X & 2 \\ 5 & 1 & 3 - X \end{vmatrix}$$

$$(C3) \leftrightarrow (C3) - (C1) \text{ donne} \begin{vmatrix} 1 - X & 0 & 0 \\ 2 & -1 - X & 0 \\ 5 & 1 & -2 - X \end{vmatrix}$$

$$\det(A - X \operatorname{Id})(X - 1)(X + 2)(X + 1) \Rightarrow \lambda_i \in \{1, -2, -1\}$$

pour $\lambda_1 = 1$, cherchons \vec{v}_1 dans $\ker(A - 1 \operatorname{Id})$:

$$\begin{bmatrix} -4-1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1-1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3-1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -5 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$ightarrow \left[egin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \ 0 & 1 & -rac{1}{2} & 0 \ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}
ight]
ightarrow \left[egin{array}{ccc|c} 1 & 0 & rac{1}{2} & 0 \ 0 & 1 & rac{-1}{2} & 0 \ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}
ight]
ightarrow ec{v}_1 = \left[egin{array}{c} rac{-1}{2} \ rac{1}{2} \ 1 \end{array}
ight]$$

Chapitre 2 Chapitre 3
$$\vec{v}_{-2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_{-1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Equations différentielle linéaires (homogènes) à coefficients constants

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Par exemple y(x)'' - 2y(x) - 3y(x) = 0

La somme de deux solutions est solution et le multiple d'une solution est solution : Il y a un espace vectoriel de solution (de dimension au plus n)

- y(x)' 2y(x) = 0 ou juste y' = 2y a pour solution $\alpha_1 e^{2x}$.
- y'' 2y 3y = 0. On pose $y = e^{\lambda x}$ et on obtient $(\lambda^2 2\lambda 3)e^{\lambda x} = 0$. Comme $\lambda^2 2\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda 3)$ nous obtenons la solution générale $y = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{3x}$.

si la matrice
$$B = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$$

Det(A) = ab