(287)

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ est $P = [\vec{V_1}\ \vec{V_2}\ \vec{V_3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

et d'après le cours on sait $AP = PB \Rightarrow B = P^{-1}AP$

et si on calcule, on peut trouver la matrice $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

par la technique de la matrice augmentée $C = [P \vdots Id]$

$$\therefore B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(334) On sait pour déterminer si une matrice est inversible, alors sa déterminant ne peut pas égale 0. Alors on a $A = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$ est $Det(A) \neq 0$

Et $Det(A) = 0 \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1) + \lambda - 1$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 2 = -\lambda^2(\lambda-1) + 2(\lambda-1) = (2-\lambda^2)(\lambda-1) \neq 0$$

On résoudre pour obtenir $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}, 1\}$