Rappel :Composition d'applications linéaires

$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p; \vec{x} \mapsto B\vec{x} = \vec{y}$ et $U : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n; \vec{y} \mapsto A\vec{y} = \vec{z}$ peuvent être composées en

$$U \circ T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n; \vec{x} \mapsto A(B\vec{x}) = AB\vec{x}$$

Proposition (Colonnes d'une matrice produit)

Soient B une matrice de taille $n \times p$ et A une matrice de taille $p \times m$. On note $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_m$ les colonnes de A. alors le prduit BA est défini par

$$BA = B\begin{bmatrix}\overrightarrow{v}_1 & \overrightarrow{v}_2 & \cdots & \overrightarrow{v}_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B\overrightarrow{v}_1 & B\overrightarrow{v}_2 & \cdots & B\overrightarrow{v}_m\end{bmatrix}$$

Pour déterminer BA il suffit d'effectuer la multiplication de B par chaque colonne de A et de recombiner en matrice l'ensemble des vecteurs ainsi déterminés.

$$BA = B\begin{bmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B\vec{v}_1 & B\vec{v}_2 & \cdots & B\vec{v}_m\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}6 & 7\\ 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\cdot1+7\cdot3 & 6\cdot2+7\cdot5\\ 8\cdot1+9\cdot3 & 8\cdot2+9\cdot5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}27 & 47\\ 35 & 61\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}6 & 7\\ 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\cdot1+7\cdot3 & 6\cdot2+7\cdot5\\ 8\cdot1+9\cdot3 & 8\cdot2+9\cdot5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}27 & 47\\ 35 & 61\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}6 & 7\\ 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\cdot1+7\cdot3 & 6\cdot2+7\cdot5\\ 8\cdot1+9\cdot3 & 8\cdot2+9\cdot5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}27 & 47\\ 35 & 61\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}6 & 7\\ 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\cdot1+7\cdot3 & 6\cdot2+7\cdot5\\ 8\cdot1+9\cdot3 & 8\cdot2+9\cdot5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}27 & 47\\ 35 & 61\end{bmatrix}.$$

La composition des fonctions n'est pas une opération commutative.

Remarque (La multiplication des matrices n'est pas commutative)

Soient B une matrice de taille $n \times p$ et A une matrice de taille $p \times n$. Alors AB est une matrice de taille $p \times p$ et BA de taille $n \times n$. Dans le cas où $p = n$, on peut comparer les produits AB et BA.

En général, $AB \neq BA$. Néanmoins, il arrive parfois que $AB = BA$; dans ce cas, on dit que les matrices ***commutent***.

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

1. Composition d'une projection avec elle même
2. Composition d'une symétrie avec elle même
3. Composition de deux rotations

Une formule pour les preuves

$$BA = B\left[\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \cdots \quad \vec{v}_m\right] = \left[B\vec{v}_1 \quad B\vec{v}_2 \quad \cdots \quad B\vec{v}_m\right]$$

le coefficient ij du produit BA est la $i^{\text{ième}}$ composante du vecteur $B\vec{v}_j$, qui est le produit de la $i^{\text{ième}}$ ligne de B par la $j^{\text{ième}}$ colonne de A.

Si on note $[BA]_{ij}$ le coefficient à la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice produit BA, on a alors

$$[BA]_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{ip}a_{pj} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}a_{kj}.$$

Calculs algébriques avec les matrices

Résumé (Matrice inverse)

A matrice carrée $n \times n$ est inversible si et seulement si $\exists A^{-1}$ matrice carrée $n \times n$ avec $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}_n$.

Résumé (Multiplication par la matrice identité)

A matrice carrée $n \times n$: $A\,\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n A = A$.

Résumé (diviseurs de 0)

Si un produit de deux matrices est nul (toutes les composantes sont nulles) il peut arriver qu'aucune des deux matrices ne soit nulle.

Exemple : $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

Résumé (Associativité du produit matriciel)

On a toujours

$$(AB)C = A(BC),$$

et on écrira ABC au lieu de $A(BC) = (AB)C$.

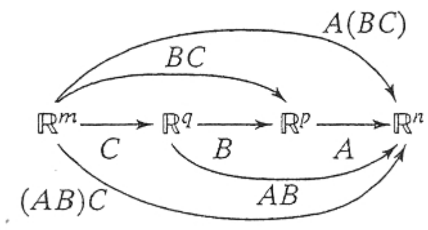


FIGURE – Associativité du produit matriciel

Proposition (Distributivité du produit matriciel)

Soient A et B deux matrices de taille $n \times p$, C et D de taille $p \times m$. On a alors

$$A(C+D) = AC + AD \quad et$$
$$(A+B)C = AC + BC.$$

Démonstration : soit $[AB]_{ij}$ le coefficient (i,j) du produit AB :

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

$$[A(B+C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}$$
$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj} = [AB]_{ij} + [AC]_{ij}$$

Proposition

Soit A une matrice de taille $n \times p$, B de taille $p \times m$, $k \in \mathbb{R}$. Alors

$$(kA)B = A(kB) = k(AB).$$

Démonstration : soit $[AB]_{ij}$ le coefficient (i,j) du produit AB :

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

$$[(kA)B]_{ij} = \sum_{k=1}^{p}(k\,a_{ik})\,b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\,(k\,b_{kj}) = A(kB)$$
$$= k\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = k(AB)$$

Remarque : on a aussi $k(C+D) = kC + kD$.

Proposition (Inverse d'un produit de matrices.)

Soient A et B deux matrices carrées inversibles de taille n. Alors le produit AB est inversible et on a

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

Attention à l'ordre des produits !

$$(A^{-1}B^{-1})(BA) = A^{-1}(B^{-1}B)A = A^{-1}(\mathrm{I}_n)A = A^{-1}A = \mathrm{I}_n,$$

$$(BA)(A^{-1}B^{-1}) = B(AA^{-1})B^{-1} = B(\mathrm{I}_n)B^{-1} = BB^{-1} = \mathrm{I}_n,$$

rappels

- A est **inversible** si l'application $\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}$ est inversible. La matrice de l'application réciproque est notée A^{-1}. On a $AA^{-1} = \mathrm{I}_n$ et $A^{-1}A = \mathrm{I}_n$. En particulier $(A^{-1})^{-1} = A$
- A et B carrées de taille n avec $AB = \mathrm{I}_n$ et $BA = \mathrm{I}_n$ alors A et B sont inversibles.
- A inversible $\Leftrightarrow$ A carrée et $\mathrm{Frel}(A) = \mathrm{I}_n$.
- A inversible $\Leftrightarrow$ A carrée et $\overrightarrow{0}$ unique solution de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$

1. la composée d'applications linéaires $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $T_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une application linéaire $T_{BA} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$
2. En général $AB \neq BA$ et $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$
3. $A(BC) = (AB)C$ (associatvité)
4. Si A est B sont $n \times n$ inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Proposition (Un critère d'inversibilité)

Soient A et B deux matrices carrées de taille n telles que

$$BA = \mathrm{I}_n.$$

Alors

a) A et B sont toutes les deux inversibles

b) $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$,

c) $AB = \mathrm{I}_n$.

$\Rightarrow$ l'équation $BA = \mathrm{I}_n$ à elle seule suffit pour assurer que A et B soient inversibles et inverses l'une de l'autre (à condition que B et A soient carrées)

$BA = \mathrm{I}_n \Rightarrow A$ et B inversibles ?

Démonstration.

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad BA\overrightarrow{x} = B\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

Comme $BA = \mathrm{I}_n$: $BA\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

D'où $\overrightarrow{0}$ unique solution de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, donc A est inversible.

$$BA = \mathrm{I}_n \Rightarrow (BA)A^{-1} = \mathrm{I}_n A^{-1} \Rightarrow B(AA^{-1}) = \mathrm{I}_n A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}$$

La matrice B étant l'inverse de A est aussi inversible, et $B^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$

Enfin, $AB = AA^{-1} = \mathrm{I}_n$. □

Trouver une matrice A

1. 2×2 avec $A^2 = \mathrm{id}_2$? Symetrie
2. 2×2 avec $A^3 = \mathrm{id}_2$? Rotation 120度
3. 2×2 non inversibles ?
4. 3×3 avec $A^2 = \mathrm{id}_3$?

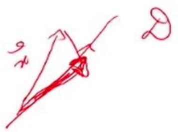
Trouver une matrice A

1. 2×2 avec $A^2 = \mathrm{id}_2$?
2. 2×2 avec $A^3 = \mathrm{id}_2$?
3. 2×2 non inversibles ?
4. 3×3 avec $A^2 = \mathrm{id}_3$?

$A^2 = A$

$T \circ T = T$

$\mathrm{proj}_{\mathcal{D}} \circ \mathrm{proj}_{\mathcal{D}} = \mathrm{proj}_{\mathcal{D}}$



$\vec{x} \to \mathrm{proj}_{\mathcal{D}} \vec{x} \to \mathrm{proj}_{\mathcal{D}}(\mathrm{proj}_{\mathcal{D}}(\vec{x})) = \mathrm{proj}_{\mathcal{D}}(\vec{x})$

EXERCICE (2018)

Déterminer, si elle existe, une matrice X telle que

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

CORRIGÉ :

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Vérifions que $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

EXERCICE Déterminer, si elle existe, une matrice X telle que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

EXERCICE

Déterminer, si elle existe, une matrice X telle que

$$X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$