(13) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & k^2-1 & k \end{bmatrix}$

$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & k^2-2 & k-1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow (-1) \times L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k+1 \end{bmatrix}$

a) quand $K=1 \Rightarrow K^2-1=0$ et $K+1=2$, $Frel(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, Rang$(A)=3$

quand $K=-1 \Rightarrow K^2-1=0$ et $K+1=0$, $Frel(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, Rang$(A)=2$

quand $K \neq 1$ et $K \neq -1 \Rightarrow K^2-1 \neq 0$ et $K+1 \neq 0$, Rang$(A)=3$

b) $\left| \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ x + 2y + (k^2-1)z = k \end{array} \right| \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & (k^2-1) & k \end{array}\right] \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & (k^2-2) & k-1 \end{array}\right]$

$\begin{matrix} L_2 \leftarrow (-1) \times L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & (k^2-1) & k+1 \end{array}\right]$

1) quand $K=1 \Rightarrow K^2-1=0$ et $K+1=2$, $Frel(B) = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$, il y a $[0\ 0\ 0 : 2]$, donc, pas de solution.

2) quand $K=-1 \Rightarrow K^2-1=0$ et $K+1=0$, $Frel(B) = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2t \\ -2+t \\ t \end{pmatrix}_{t \in \mathbb{R}}$
donc, il y a une infinité de solutions.

3) quand $K \neq -1$ et $K \neq 1 \Rightarrow K^2-1 \neq 0$ et $K+1 \neq 0$, il y a une seul solution.

IE4-B | MAT2 | ZHILE ZHANG

(31) C'est false.

Par example. $\left|\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 4 \end{array}\right| \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$

On peut obtenir $Frel(B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, il y a une solution.

le systeme n'est pas inconsistant.

(32) C'est false.

Car pour une matrice 3×4, il y a au plus Rang $(A) = 3$.

(33) C'est vrai

Selon le Théorème 2, Si Rang $(A) = m$ et $n = m$, il y a un pivot par colonne et on n'a donc aucune ligne $[0 \dots 0 : 1]$ dans la forme réduite de la matrice augmentée. Donc le système a une solution unique.

(34) C'est vrai

Car on peut trouver des valeurs de x et y tels que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(35) C'est vrai.

Car $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$, la dernière ligne est toujours égale 0, donc il n'y a pas de possible que $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, le système est inconsistant.

29

a) Car $A\vec{x} = \vec{0}$, le formal du système est $[A \,\vdots\, \vec{b}]$, $\vec{b} = \vec{0}$, il y a donc aucune ligne $[0\ 0 \ldots 0 \,\vdots\, 1]$, tous les systèmes homogènes sont donc consistants.

b) Car $n < m$, donc $Rang(A) < m$ et $Rang(A) \leq n$, et car les systèmes homogènes sont toujours consistants, donc selon le Théorème 2 (d), le système a une infinité de solutions.

c) $A\vec{x_1} = \vec{0}$ et $A\vec{x_2} = \vec{0}$, donc $A \cdot (\vec{x_1} + \vec{x_2}) = A\vec{x_1} + A\vec{x_2} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

d) $A(K\vec{x}) = K(A\vec{x}) = K \cdot \vec{0} = \vec{0}$