## Comment "diagonaliser"

On cherche $\lambda$ tel que

- il existe un vecteur non nul $\vec{x}$ tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$
- $(A - \lambda\mathbf{Id})\vec{x} = \vec{0}$
- $\ker(A - \lambda\mathbf{Id}) \neq \{\vec{0}\}$
- $A - \lambda\mathbf{Id}$ non inversible
- $\det(A - \lambda\mathbf{Id}) = 0$



## Calcul du déterminant par développement le long d'une ligne ou d'une colonne

**Definition**

Si $A$ est une matrice de carrée $n \times n$, alors le **mineur** d'indice $i, j$, noté $A_{i,j}$, est la matrice de carrée $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en enlevant la $i^e$ ligne et la $j^e$ colonne de $A$.
Le déterminant de $A$ est le nombre
$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1})$ (développement le long de la 1re colonne)

**Proposition**

*Soit $A$ une matrice de carrée de taille $n \times n$ et $i$ et $j$ dans $\{1, \ldots, n\}$ :*

- $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$ *(le long de la $j^e$ colonne)*
- $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$ *(le long de la $i^e$ ligne)*

## Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(D) =$

$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-2)\cdot(-2) = 4$

$\rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$

$\ell_3 +$



1. Echanger deux ligne multiple le déterminant par $-1$
2. Multiplier une ligne par $s \neq 0$ multiplie le déterminant par $s$
3. Ajouter un multiple d'une ligne (d'une colonne) à une autre ligne (colonne) ne change pas le déterminant

**Proposition (Inversibilité et déterminant d'une matrice $n \times n$)**

*Une matrice $A$ de taille $n \times n$ est inversible si et seulement si le* **déterminant** *de la matrice $A$ est non nul.*

## Comment "diagonaliser"

Si dans $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ la matrice de $T$ est $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$, alors

$\vec{v}_i$ est un vecteur non nul avec

$$A(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$$

On cherche $\lambda$ tel que

- il existe un vecteur non nul $\vec{x}$ tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$
- $(A - \lambda\mathbf{Id})\vec{x} = \vec{0}$
- $\ker(A - \lambda\mathbf{Id}) \neq \{\vec{0}\}$
- $A - \lambda\mathbf{Id}$ non inversible
- $\det(A - \lambda\mathbf{Id}) = 0$



Pour diagonaliser $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, calculons

$$\det(A - X\mathbf{Id}) = \begin{vmatrix} -4-X & -1 & -2 \\ 2 & -1-X & 2 \\ 5 & 1 & 3-X \end{vmatrix}$$

$(\mathrm{L1}) \leftrightarrow (\mathrm{L1}) + (\mathrm{L3})$ donne $\begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1-X \\ 2 & -1-X & 2 \\ 5 & 1 & 3-X \end{vmatrix}$

$(\mathrm{C3}) \leftrightarrow (\mathrm{C3}) - (\mathrm{C1})$ donne $\begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 2 & -1-X & 0 \\ 5 & 1 & -2-X \end{vmatrix}$

$$\det(A - X\mathbf{Id})(X-1)(X+2)(X+1) \Rightarrow \lambda_i \in \{1, -2, -1\}$$

pour $\lambda_1 = 1$, cherchons $\vec{v}_1$ dans $\ker(A - 1\mathbf{Id})$ :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4-1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1-1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3-1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\vec{v}_{-2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_{-1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Equations différentielle linéaires (homogènes) à coefficients constants

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Par exemple $y(x)'' - 2y(x) - 3y(x) = 0$

La somme de deux solutions est solution et le multiple d'une solution est solution : Il y a un espace vectoriel de solution (de dimension au plus $n$)

- $y(x)' - 2y(x) = 0$ ou juste $y' = 2y$ a pour solution $\alpha_1 e^{2x}$.
- $y'' - 2y - 3y = 0$. On pose $y = e^{\lambda x}$ et on obtient $(\lambda^2 - 2\lambda - 3)e^{\lambda x} = 0$. Comme $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$ nous obtenons la solution générale $y = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{3x}$.

si la matrice B = | a 0|
|0 b|
Det(A) = ab