

§1.4 群的同态与同构

定义 1.4.1 设 $\{G_1, \cdot\}$, $\{G_2, *\}$ 为群.

设 f 为 G_1 到 G_2 的映射, 如果 $f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$, $\forall a, b \in G_1$.

称 f 为 G_1 到 G_2 的同态映射, 简称为同态.

若同态 f 为单射, 称 f 为单同态.

若同态 f 为满射, 称 f 为满同态.

若同态 f 为双射, 称 f 为同构. 这时称 G_1 与 G_2 同构, 记为 $G_1 \simeq G_2$.

例 1 : 设 \mathbb{P} 为数域, $GL(n, \mathbb{P}) = GL_n(\mathbb{P})$.

定义 $f: GL(n, \mathbb{P}) \rightarrow \{\mathbb{P}^*; \cdot\}$. ($f(A) = \det A$)

则 $f(AB) = f(A) \cdot f(B)$, f 为同态, f 为满同态.

V/\mathbb{P} n 维线性空间, $GL(V)$

$$f: GL(V) \rightarrow \mathbb{P}^*$$

$$f(A) = \det A$$

为满同态.

例 2 : 设 \mathbb{P} , V 如上, 取定 V 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

定义 $\sigma: GL(V) \rightarrow GL(n, \mathbb{P})$.

$$A \longmapsto M(A; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

则 σ 为同态, σ 为双射, 故 $GL(V) \simeq GL(n, \mathbb{P})$

例3 设 $H \triangleleft G$, $\pi: G \rightarrow G/H$ 为自然映射.
 π 为群的同态, 称为自然同态(满的).

命题 1.4.1 设 $f: G_1 \rightarrow G_2$, $g: G_2 \rightarrow G_3$ 为群同态.

则 $gf: G_1 \rightarrow G_3$ 为同态.

若 f, g 均为单同态(满同态), 则 gf 为单同态(满同态).

若 f, g 均为同构, 则 gf 为同构.

若 f 为同构, 则 f^{-1} 为同构.

命题 1.4.2 设 $f: G_1 \rightarrow G_2$ 为群的同态.

则 $f(e_1) = e_2$, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

(e_1 为 G_1 的么元, e_2 为 G_2 的么元)

命题 1.4.3 设 $f: G_1 \rightarrow G_2$ 为群的同态, 则 $f(G_1) \leq G_2$

定义 1.4.2 设 $f: G_1 \rightarrow G_2$ 为同态, 定义 $\ker f = \{a \in G_1 \mid f(a) = e_2\}$.
称为 f 的核.

命题 1.4.4 $\ker f \triangleleft G_1$

例4: 设 $H \triangleleft G$, $\pi: G \rightarrow G/H$ 为自然同态, 则 $\ker \pi = H$.

命题 1.4.5 同态 $f: G_1 \rightarrow G_2$ 为单同态 $\iff \ker f = \{e_1\}$.

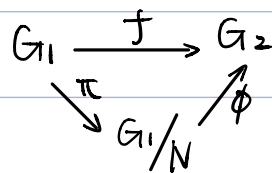
定理 1.4.6 (群的同态基本定理).

设 $f: G_1 \rightarrow G_2$ 为满同态, 则 $G_1/\ker f \cong G_2$

证, 记 $N = \ker f$, 定义 $\phi: G_1/N \rightarrow G_2$ 使 $\phi(aN) = f(a)$, 若 $a_1N = a_2N$ 则 $f(a_1) = f(a_2)$. 故 ϕ 定义合理 (well-defined).

ϕ 的定义和右边图为交换图.

即 $\phi \cdot \pi = f$



推论 1.4.7 设 $f: G_1 \rightarrow G_2$ 为群同态.

则 $G_1/\ker f \cong f(G_1)$.

定理 1.4.8 设 $f: G_1 \rightarrow G_2$ 为满同态, $N = \ker f$

(1) f 建立 G_1 包含 N 的子群与 G_2 的子群之间的一一对应.

$$\{K < G_1 \mid N \subseteq K\} \longrightarrow \{K' < G_2\}$$

(2) 上述对应将正规子群对应到正规子群.

$$\{K < G_1 \mid N \subseteq K\} \longrightarrow \{K' < G_2\}$$

(3) 若 $H < G_1$ 且 $N \subseteq H$, 则 $G_1/H \cong G_2/f(H)$.

推论 1.4.9 设 $N < G$, π 为自然同态. $\pi: G \rightarrow G/N$

则建立了 G 中包含 N 的子群到 G/N 的子群之间的一一对应

将正规子群对应到正规子群. 若 $H < G$, 且 $N \subseteq H$ 则 $G/H \cong (G/N)/(H/N)$ ($\pi(H) = H/N$).

定理 1.4.10 设 $N < G$, $\pi: G \rightarrow G/N$ 为自然同态, $H < G$.

则 (1) HN 为 G 中包含 N 的子群, 且 $HN = \pi^{-1}(\pi(H))$

即 HN 为 $\pi(H)$ 的原像.

(2) $(H \cap N) < H$, $\ker(\pi|_H) = H \cap N$

$$(3) \quad H^N/N \simeq H/H_{NN}$$