

## § 1.5 循环群

定义 1.5.1 设  $G$  为群, 若存在  $a \in G$ , 使  $G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , 则  $G$  为循环群.  
记为  $G = \langle a \rangle$ , 称  $a$  为生成元.

例 1. ①  $\{\mathbb{Z}; +\}$  为循环群,  $\pm 1$  为生成元.

②  $U_m = \{c \in \mathbb{C}^* \mid c^m = 1\}$  对乘法成群, 为循环群. 本原根为生成元.

命题 1.5.1 : 循环群为 Abel 群

命题 1.5.2 : 循环群的子群为循环群.

推论 1.5.3 :  $\{\mathbb{Z}; +\}$  的任何子群, 形如  $m\mathbb{Z}$ ,  $m \geq 0$ .

定理 1.3.4 设  $G$  为循环群, 若  $|G| = \infty$ , 则  $G \simeq \{\mathbb{Z}; +\}$ .

若  $|G| = m > 0$ , 则  $G \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m (\simeq U_m)$



两个循环群同构  $\Leftrightarrow$  它们的阶相同.

命题 1.5.5 设  $G = \langle a \rangle$ ,  $|G| = m$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \mid m$ , 则  $G$  中存在唯一的  $n$  阶子群.

定理 1.5.6. 设  $G$  为有限群,  $|G| = M$ , 则  $G$  为循环群  $\Leftrightarrow$  对  $M$  的任何正整数因子  $n$ , 存在唯一的  $n$  阶子群.

命题 1.5.7. 设  $|G| = m$ ,  $a \in G$ , 则  $a$  的阶  $d \mid m$ .

循环群与加法群:  $\langle a \rangle = \{ma \mid m \in \mathbb{Z}\}$

$$G = \langle a \rangle$$

$G$  任意群,  $S \subseteq G$  非空子集

生成子群如何定义:

$\langle a \rangle = \{a^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ , 令  $S_1 = \{a, a^{-1}\}$ ,  $\langle a \rangle$  可看成为  $S_1$  中有限个元素的积组成的集合. 令  $S^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in S\}$ .

令  $\langle S \rangle = \{x_1 x_2 \cdots x_m \mid x_i \in S \cup S^{-1}, m \in \mathbb{N}\}$  为  $G$  的子群

称为由  $S$  生成的子群. 若  $G = \langle S \rangle$ , 称  $S$  为一组生成元.

$\langle S \rangle = G$  中包含  $S$  的最小子群 =  $G$  中包含  $S$  的子群的交.

若  $G$  中存在有限集合  $S$ , 使  $G = \langle S \rangle$ , 称  $G$  为有限生成群.

有限群为有限生成群. 反之不对. (eg.  $\{\mathbb{Z}, +\}$ )