§1.4 群的同态与同构

定义 1.4.1 设 $\{G_1; \cdot\}$、$\{G_2; *\}$ 为群。

设 f 为 G_1 到 G_2 的映射，如果 $f(a\cdot b) = f(a) * f(b)$，$\forall a, b \in G_1$。

称 f 为 G_1 到 G_2 的同态映射，简称为同态。

若同态 f 为单射，称 f 为单同态。

若同态 f 为满射，称 f 为满同态。

若同态 f 为双射，称 f 为同构。这时称 G_1 与 G_2 同构，记为 $G_1 \simeq G_2$。

例 1： 设 $\mathbb{P}$ 为数域，$GL(n, \mathbb{P}) = GL_n(\mathbb{P})$。

定义 $f: GL(n,\mathbb{P}) \longrightarrow \{\mathbb{P}^*; \cdot\}$。（$f(A) = \det A$）

则 $f(AB) = f(A)\cdot f(B)$，f 为同态，f 为满同态。

$V/\mathbb{P}$ n 维线性空间，$GL(V)$

$f: GL(V) \longrightarrow \mathbb{P}^*$

$f(A) = \det A$

为满同态。

例 2： 设 $\mathbb{P}$，V 如上，取定 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots \alpha_n$。

定义 $\sigma: GL(V) \longrightarrow GL(n, \mathbb{P})$。

$A \longmapsto M(A; \alpha_1, \cdots \alpha_n)$

则 σ 为同态，σ 为双射，故 $GL(V) \simeq GL(n, \mathbb{P})$

例3　设 $H \lhd G$，$\pi: G \longrightarrow G/H$ 为自然映射.

π 为群的同态，称为自然同态（满的）.

命题1.4.1　设 $f: G_1 \longrightarrow G_2$，$g: G_2 \longrightarrow G_3$ 为群同态.

则 $gf: G_1 \longrightarrow G_3$ 为同态.

若 f、g 均为单同态（满同态），则 gf 为单同态（满同态）

若 f、g 均为同构，则 gf 为同构.

若 f 为同构，则 f^{-1} 为同构.

命题1.4.2　设 $f: G_1 \longrightarrow G_2$ 为群的同态.

则 $f(e_1) = e_2$，$f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

（e_1 为 G_1 的幺元，e_2 为 G_2 的幺元）

命题1.4.3　设 $f: G_1 \longrightarrow G_2$ 为群的同态，则 $f(G_1) < G_2$

定义1.4.2　设 $f: G_1 \longrightarrow G_2$ 为同态，定义 $\ker f = \{a \in G_1 \mid f(a) = e_2\}$.

称为 f 的核.

命题1.4.4　$\ker f \lhd G_1$

例4：　设 $H \lhd G$，$\pi: G \longrightarrow G/H$ 为自然同态，则 $\ker \pi = H$.

命题1.4.5　同态 $f: G_1 \longrightarrow G_2$ 为单同态 $\Longleftrightarrow \ker f = \{e_1\}$.

定理 1.4.6 (群的同态基本定理).

设 $f: G_1 \longrightarrow G_2$ 为满同态，则 $G_1/\ker f \simeq G_2$

证，设 $N = \ker f$，定义 $\phi: G_1/N \longrightarrow G_2$ 使 $\phi(aN) = f(a)$，若 $a_1N = a_2N$

$f(a_1) = f(a_2)$，故 ϕ 定义合理 (well-defined).

ϕ 的定义即右边图为交换图.

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & G_2 \\ & G_1/N \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

即 $\phi \cdot \pi = f$

推论 1.4.7　设 $f_1 : G_1 \longrightarrow G_2$ 为群同态.

则 $G_1/\ker f \simeq f(G_1)$.

定理 1.4.8　设 $f: G_1 \longrightarrow G_2$ 为满同态，$N = \ker f$

(1) f 建立 G_1 包含 N 的子群与 G_2 的子群之间的一一对应.

$\{K < G_1 \mid N \subseteq K\} \longrightarrow \{K' < G_2\}$

(2) 上述对应将正规子群对应到正规子群.

$\{K \lhd G_1 \mid N \subseteq K\} \longrightarrow \{K' \lhd G_2\}$

(3) 若 $H \lhd G_1$ 且 $N \subseteq H$，则 $G_1/H \simeq G_2/f(H)$.

推论 1.4.9　设 $N \lhd G$，π 为自然同态。$\pi: G \longrightarrow G/N$

则建立了 G 中包含 N 的子群到 G/N 的子群之间的一一对应

将正规子群对应到正规子群. 若 $H \lhd G$，且 $N \subseteq H$ 则 $G/H \simeq \dfrac{G/N}{H/N}$

$(\pi(H) = H/N)$.

定理 1.4.10　设 $N \lhd G$，$\pi: G \longrightarrow G/N$ 为自然同态，$H < G$.

则 (1) HN 为 G 中包含 N 的子群，且 $HN = \pi^{-1}(\pi(H))$

即 HN 为 $\pi(H)$ 的原像.

(2) $(H \cap N) \lhd H$，$\ker(\pi|_H) = H \cap N$

(3) $HN/N \simeq H/H \cap N$