

# FAST主动反射面的形状调节

## 摘要

500 m口径球反射面射电望远镜FAST 是如今国际上最大最灵敏的天文射电望远镜,它的落成建立,对我国乃至全世界在科学前沿实现重大原创突破、加快创新驱动发展具有重要意义。其建设将推动众多高科技领域的发展. 本文旨在介绍FAST在基准态和工作态的两种不同工作方式下的运行方式, 评述关键技术的预研究现状, 同时对未来项目发展提出建议。

问题一中, 天体在基准球面正上方, 即当 $\alpha=0^\circ$ ,  $\beta=90^\circ$ 时确定此刻的理想抛物面。由于抛物面的对称性, 将三维问题转化为二维。我们利用笛卡尔坐标系建立方程, 利用平面解析几何的方法, 通过横坐标由-150到150以0.01为步长便遍历求解出抛物线与基准圆之间距离的最大值与最小值。为求出最优的抛物线方程, 在工作态在照明区域为300m, 且边界条件为边缘区域的节点位置坐标不变的条件下, 使得促动器调节幅度最大值和最小值的绝对值之和最小, 从而确定抛物线中p和c的值, 并扩张到三维坐标系中, 即可得到理想抛物面方程。抛物面方程为:  $x^2 + y^2 - 599.8076z - 167940 = 0$

问题二中, 欲求解待测天体处于  $\alpha=36.795^\circ$ ,  $\beta=78.169^\circ$ 时的理想抛物面, 只需将第一问求解的理想抛物面进行空间方位变换, 即乘对应的转换矩阵, 即可得出该观测角的理想抛物面方程。题目二中要求所求反射面尽量贴近所求的理想抛物面, 且附录中给出多种约束条件, 为满足约束条件, 使得促动器的形成尽可能地小, 将抛物面离开基准球面距离的幅值作为优化目标使其最小, 求得其此刻的对应的p和c。对于主索节点改变前后位置的确定。利用旋转矩阵对理想抛物面进行旋转, 确定理想抛物面顶点的位置。随后利用300米口径的距离限制的几何约束确定哪些是需要改变的主索节点, 然后利用逆旋转矩阵对主索节点坐标进行旋转, 方便求解。通过平面解析几何联立的方法, 求出主索节点改变后的位置。并再次利用转换矩阵将对应序号进行转换, 之后求出主索节点的真实位置坐标进和各促动器的伸缩量。

问题三是基于2问的反射面调节模型, 来计算调节后馈源舱的接受比和基准反射球面的接收比, 馈源舱在不同位置的对应照明区域的接收比一样, 故我们计算馈源舱在最低点时对应的照明区域的有效接收比来代替旋转照明区域接收比, 由于光线在反射之前可默认为平行光, 反射过后变为不同方向的光, 在不同单位空间内的光密度一致性被破坏, 故计算接收比时应该以未折射之前的光线计算, 只要将反射后能打到馈源舱的光的边界条件找出, 并以整个照明区域设为单位1, 以面积比代替接收比, 以此计算得出调节后的接收比和基准反射面接收比为 $\eta = \frac{S_{有效}}{S_{吸收}} \times 100\% = 73.4\%$ , 说明在工作态时的接收比远大于基准态的接收比。

关键词: FAST主动反射面 平面解析几何 空间方位旋转变换 遍历求解

# 1 问题重述

## 1.1 题目背景

中国天眼—FAST500米口径球面射电望远镜，是目前世界上口径最大，灵敏度最高的射电望远镜，其反射面相当于30个足球场的射电望远镜，灵敏度达到世界第二大望远镜的2.5倍以上，以此开创了建造巨型望远镜的新模式。由于采用光机电一体化的馈源平台，加之二次调整，它在馈源与反射面之间无刚性连接的情况下，可实现毫米级指向跟踪，确保精确地聚集和监听宇宙中微弱的射电信，大幅拓展人类的视野，探索宇宙起源和演化。

## 1.2 问题重述

问题一，要求观测天体位于正上方，即球心与天体连线SC线竖直，工作面位于基准面底部时，依靠反射面板调节考虑到因素，确定理想的抛物面。

问题二，当观测天体位于所给方位时，确定新的理想抛物面。同时根据反射面板调节使反射面贴近理想抛物面，确定理想抛物面的顶点坐标、调节后工作面的主索节点编号、位置、促动器伸缩量。

问题三，在问题二的工作状态下计算此时馈源舱有效区域接收到的信号比工作面反射信号总量之比，与基准球面状态下接收比进行比较。

# 2 模型假设与约定

- 1 真实情况下的主动反射面是由一块块三角形面板组成的，而为了确保反射面板在变位时不会被挤压拉扯而变形，所以每块面板的形状大小保持不变。
- 2 化直为曲—构圆，由于该反射面在基准态时为球面结构，且一块三角形反射面远小于半径300m，所以不同情况下的面板的微观直面结构在宏观上近似看为曲面结构。
- 3 默认促动器始终朝向圆心，促动器的调动只改变节点的位置，不改变角度与方向。
- 4 忽略光线在通过不同介质（稀薄大气，云层等）时发生的折射现象，默认始终是平行光打到反射面板上。
- 5 默认在基准态下，所有的主索节点均位于基准球面上。
- 6 馈源舱移动的范围始终位于以基准球面同心的焦面上运动。
- 7 由于实际位点并不完全符合抛物面和球面方程，故在基准状态下，促动器的径向伸缩量可能会大于0.6米

### 3 符号说明及名词解释

表 1: 符号说明

符号	名称	说明
$x$	x方向坐标	
$y$	y方向坐标	
$z$	z方向坐标	
$p$	焦距距	抛物线参数
$c$	常数	
$\Delta$	促动器伸缩距离等效值	
$\delta$	促动器伸长规范值	
$r$	工作面半径	
$\alpha$	天体到望远镜连线在xy面投影与xz面夹角	
$\beta$	天体到望远镜连线与xy面夹角	

## 4 模型建立与问题求解

### 4.1 抛物面基本模型——问题一的分析与求解

在求解抛物面基本方程时，考虑到基准球面和旋转抛物面的旋转对称特性，简化为二维平面问题。因此，原基准球面变为基准圆，理想抛物面变为抛物线。以基准圆圆心为坐标原点，建立平面直角坐标系的曲线方程。以此设立的两个曲线方程都是在平面上以中心轴为对称轴的轴对称图形，基准圆是以原点为中心，半径300m的圆。可得基准圆方程

$$x^2 + y^2 = 300^2 \quad (1)$$

以此设立抛物线方程

$$x^2 + 2py + c = 0 \quad (2)$$

其中 $p, c$ 均为抛物线参数。通过确定这两个参数就可以得到确定抛物线，以此得到工作状态的旋转抛物面。

#### 4.1.1 依靠优化条件确定理想抛物面

为确定抛物面形状，应确定优化条件以确定最佳的抛物线模型，达到在不影响性能的条件下最大程度提高可靠性、效率的目的。

考虑到工作状态的变化过程依靠促动器，拉索进行调节，为确保整个索网结构的连续性，以及尽可能确保机械系统的可靠性，稳定性，我们认为当促动器伸缩距离较小时，整个系统的力学特性最为可靠。因此我们以变化后的抛物线与基准圆的距离的最大值与最小值的绝对值之和最小为优化目标，以

此确定抛物线参数，得到抛物线方程。

同时，由于工作区域与索网其余部分相接，为使工作抛物面边缘索网形状保持连续，避免应力突增，还要控制抛物线工作区边缘与基准圆相交。在平面坐标系上即表示为抛物线方程经过点 $(150, -150\sqrt{3})$

将该关系代入抛物线方程，得到抛物线的两个未知参数之间的关系式，得到用一个自变量，一个未知参数表示的二次方程：

$$x^2 + 2py + 300\sqrt{3}p - 150^2 = 0 \quad (3)$$

我们使用竖直方向的伸缩路程为优化条件，具体表示为

$$\Delta = \left| \max \left\{ \frac{-c^2 - x^2}{2p} + \sqrt{300^2 - x^2} \right\} \right| + \left| \min \left\{ \frac{-c^2 - x^2}{2p} + \sqrt{300^2 + x^2} \right\} \right| \quad (4)$$

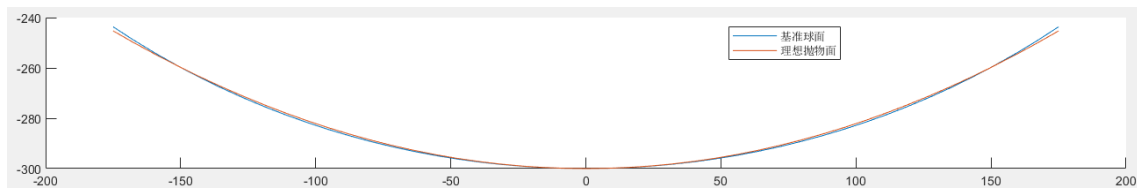
确定优化条件后，通过MATLAB令x在 $(-150, 150)$ 区间中以0.01为步长遍历，确定含参数p的抛物面距离基准球面的最大值与最小值。然后确定参数p，使得最大值与最小值之和为最小，得到到令工作面上 $\Delta$ 最小的抛物线参数，得到的基本抛物线参数为

$$\begin{cases} p = -279.9038 \\ c = -1.6794 \times 10^5 \end{cases} \quad (5)$$

与题中所给的139.8相比十分符合，可见优化效果较好。以此确定基本抛物线方程

$$x^2 + 2 \times (-279.9038)y - 1.6794 \times 10^5 = 0 \quad (6)$$

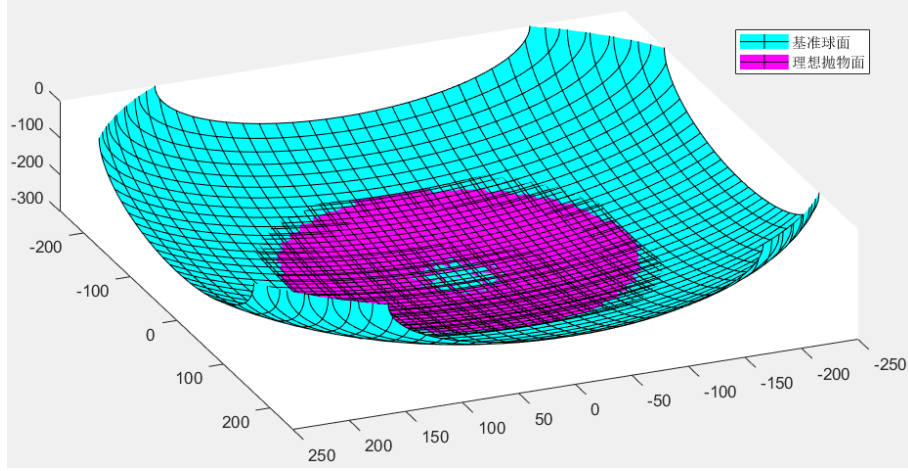
如图所示



扩张到三维坐标系，即可得到基本抛物面方程，作为理想抛物面。其中纵坐标使用z代替y确定垂直方向位置，该方程的x,y坐标确定水平面上点的位置。理想抛物面方程如下：

$$x^2 + y^2 + 2 \times (-279.9038)z - 1.6794 \times 10^5 = 0 \quad (7)$$

理想抛物面绘图如下



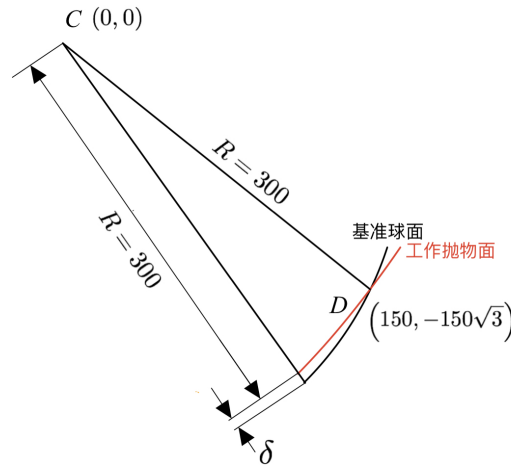
## 4.2 抛物面优化模型——问题二的分析与求解

### 4.2.1 优化条件与优化实际抛物面方程确定

实际工程应用中，还应考虑到促动器的最大伸缩距离、拉索节点变化距离等限制条件。已知促动器径向伸缩范围为 $-0.6 \sim +0.6$ 米,相邻节点距离变化幅度不超过0.07%,我们以抛物线与基准圆的 $\delta$ 小于0.06为约束条件，有约束方程

$$\delta = \left| \sqrt{x^2 + y^2} - 300 \right| \leq 0.6 \quad (8)$$

即抛物线上一点到基准圆的距离等于该点与圆心的距离减去基准圆到圆心的距离，以此简化，确定 $\delta$ 小于0.06，如图所示



事实上，对于 $x^2 + 2py + c = 0$ 这种形式的抛物线，其与坐标原点的距离的最大值为 $\frac{c^2}{4p^2} - \left( \frac{c}{2p} + p \right)^2$ ，故约束条件可改为

$$\left| \frac{c^2}{4p^2} - \left( \frac{c}{2p} + p \right)^2 - 300 \right| \leq 0.6 \quad (9)$$

为获得能够实际应用的最贴近理想抛物面的抛物线模型，我们再以变化后的抛物线与基准圆的距离幅值最小为优化目标，以此确定抛物线参数，得到抛物线方程。

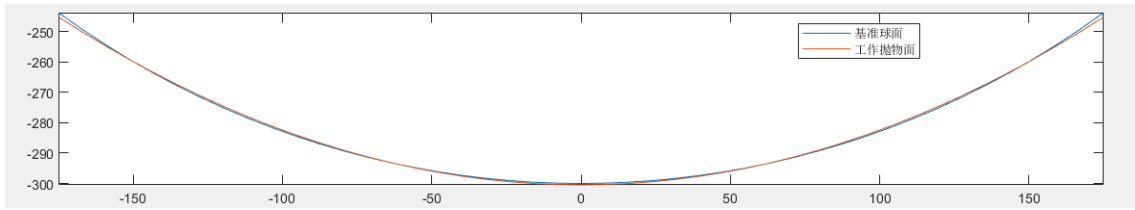
我们使用竖直方向的伸缩路程为优化条件，具体表示为

$$\Delta = \left| \max \left\{ \frac{-c^2 - x^2}{2p} + \sqrt{300^2 - x^2} \right\} \right| \quad (10)$$

通过MATLAB令x在（-150,150）区间中以0.01为步长遍历，确定含参数p的抛物面距离基准球面的距离幅值。然后确定参数p，使得距离幅值最小，即工作面上Δ最小的抛物线参数。得到实际的最优工作抛物线参数为

$$\begin{cases} p = -276.6749 \\ c = -1.6625 \times 10^5 \end{cases} \quad (11)$$

抛物线如图所示

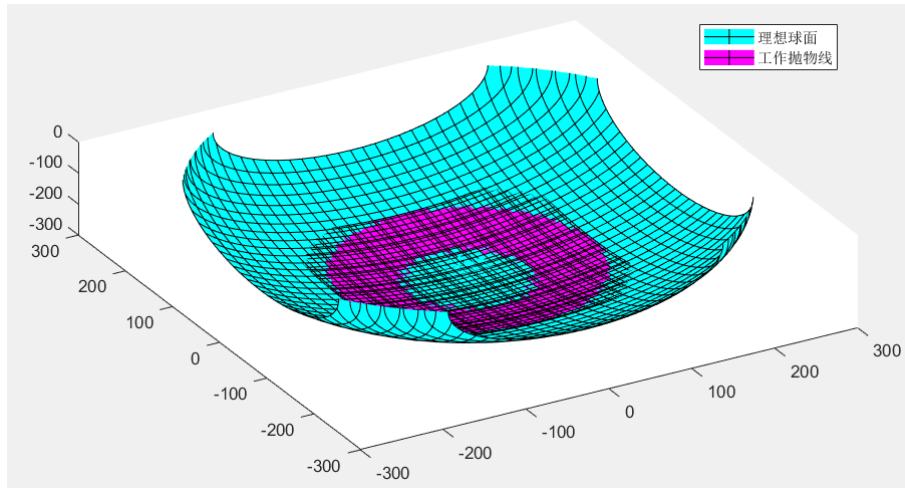


实际最优工作抛物线方程

实际最优工作抛物面方程为

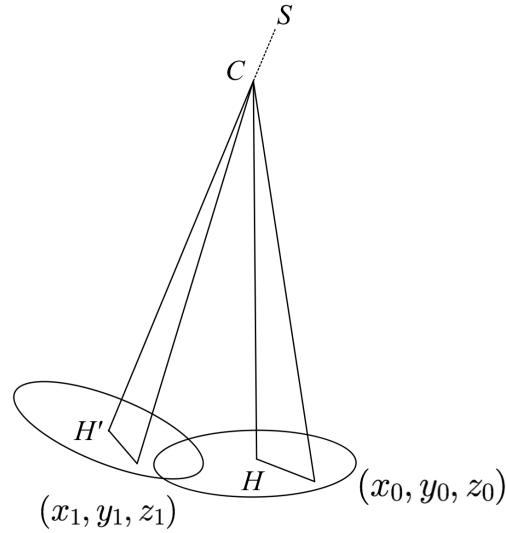
$$x^2 + y^2 + 2 \times (-276.6749)z - 1.6625 \times 10^5 = 0 \quad (12)$$

如下图所示

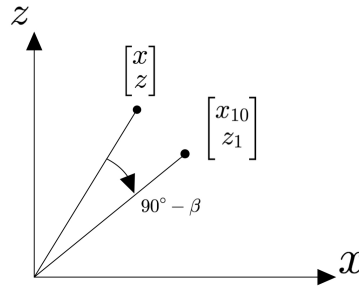


#### 4.2.2 基于观测方向的抛物面位置转换

由于射电望远镜据观测天体的距离尺度较望远镜本身的几何参数十分巨大，来自目标天体的电磁波看做平行电磁波，经工作抛物面反射后会聚到其焦点处，被馈源舱接收。当目标天体的方位改变时，工作面接收到与铅锤方向有一定夹角，。由于整个望远镜较大球面的一部分，可看做将第一问接收垂直波束的理想抛物面绕c点旋转，旋转依托星体的变换位置 $\alpha = 36.795^\circ, \beta = 78.169^\circ$ 。旋转示意图如下



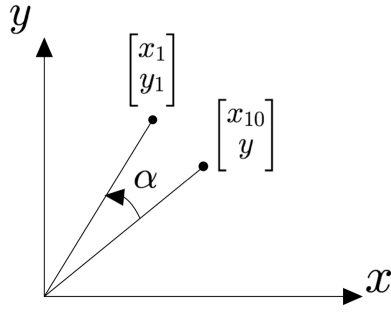
为简化求解思路，我们通过两步变换将抛物线坐标旋转到对应位置。



仰角变换

如图，先进行仰角变换，由  $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$  转换为  $\begin{bmatrix} x_{10} \\ z_1 \end{bmatrix}$

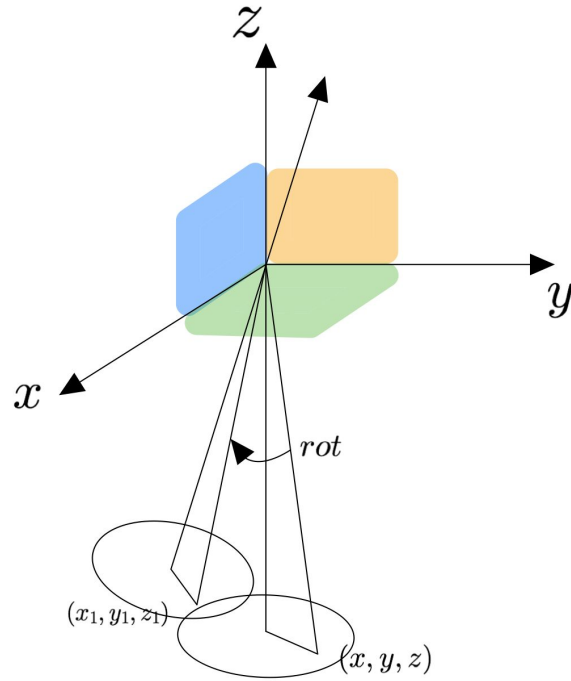
$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(90 - \beta) & -\sin(90 - \beta) \\ -\sin(90 - \beta) & \cos(90 - \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$



方位角变换

然后进行方位角变换，如图所示

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ y \end{bmatrix}$$



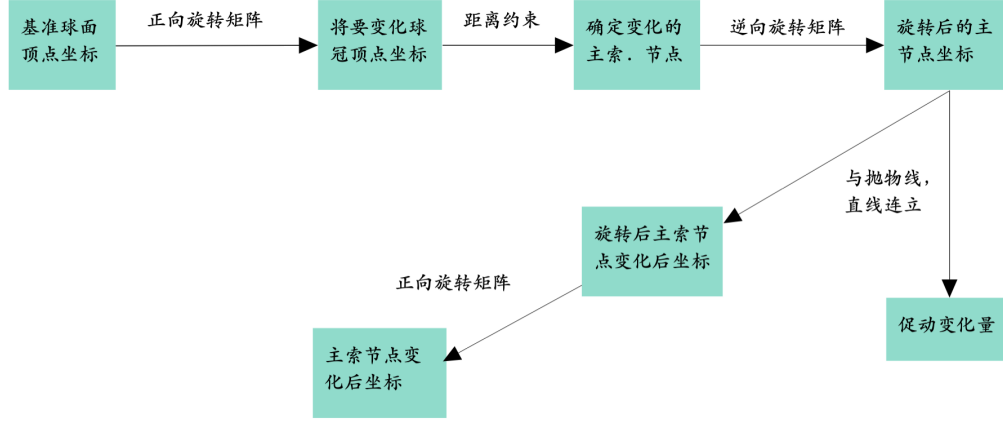
综合变换过程，总坐标变换公式为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos (90 - \beta) & 0 & \sin (90 - \beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin (90 - \beta) & 0 & \cos (90 - \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (13)$$

如此，我们便可得到变换后新的工作面方程



$$114.794x - 547.9154z + (0.5862x + 0.8008y + 0.1228z)^2 + (0.7838x - 0.5990y + 0.1642z)^2 - 1.6794 \times 10^5 = 0 \quad (14)$$



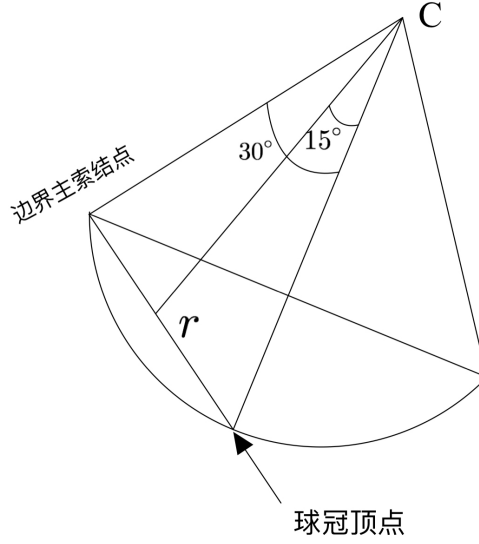
在本问题的求解中，筛出所需变化单元后，为简化计算过程，我们在求解时将工作面通过逆变换转动至其对称轴SC到垂直状态进行计算。计算完成后，再将其坐标变换回本题状态。坐标逆变换转其对称轴SC到垂直状态所需要的变换公式即总坐标变换公式的逆变换，为

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(90 - \beta) & 0 & \sin(90) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(90 - \beta) & 0 & \cos(90 - \beta) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

以此将工作面转回底部，进行伸缩量计算。

#### 4.2.3 调节单元确定

要令所需区域由球面变为抛物面，需要依托促动器进行调节，首先确定需要进行伸缩的促动器编号。我们以SC线（即抛物面对称轴线）与基准球面的交点为球心 $K$ ，包拢所需调节的节点，从而得到需要调节的促动器编号。确定边缘处的需要调节的主索节点距离球面顶端的距离 $r$ ：



$$r = 2 \times 300 \times \sin 15^\circ = 155.2914 \quad (16)$$

将所有与中心 $K$ 距离小于该半径 $r$ 的节点筛出，得到观察该星体时所有需要变化的促动器编号。发现需要调节的主索节点个数为692个。（调节编号在附件中呈现）

#### 4.2.4 促动器伸缩量确定

找到所需调节的促动器编号后，使用逆坐标变换将工作面转回底部（坐标逆变换见章节4.3.1）。为求得各促动器伸缩后其顶点在工作面上的位置坐标 $(x_j, y_j, z_j)$ ，首先依靠其伸缩前在基准球面上的坐标 $(x_i, y_i, z_i)$ 得出球面坐标与坐标原点（球面中心）的连线所在直线，再取得其与工作面方程的交点，该交点即为促动器伸缩后其顶点的位置 $(x_j, y_j, z_j)$ 。再求得各促动器伸缩量。

$$x^2 + y^2 - 553.3498z - 1.6625 \times 10^5 = 0 \quad (17)$$

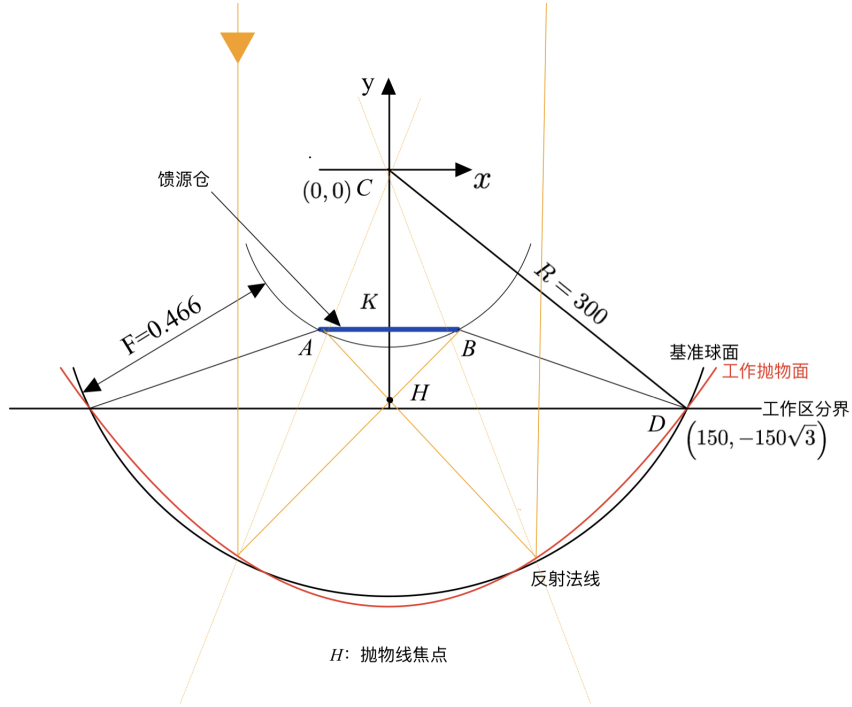
$$\begin{cases} x = t_i x_i \\ y = t_i y_i \\ z = t_i z_i \end{cases} \quad (18)$$

其中， $t$ 暂定义为伸缩量

上式联立工作面方程与促动器伸缩前顶点与球心连线直线，即可得到每一个需要伸缩的促动器伸缩后的顶点坐标 $(x_j, y_j, z_j) = (t_i x_i, t_i y_i, t_i z_i)$ 。最后，使用 $(1 - t_i) \times 300$ 即可求得每个促动器的伸缩量，结果存于附件中。

### 4.3 接受比-问题三的分析与求解

#### 4.3.1 抛物面接收比



由题，两同心球面的半径为

$$F = 0.466R$$

且为同半径为300m的球，得出F与馈源舱的球形方程半径为160.2。

计算出焦面到基准球面的距离。（近似等于馈源舱和y轴的交点K到基准球面的距离）由题二可知真实情况下的抛物面的焦距为-138.3239，即焦点距离原点的距离为161.6761。用坐标表示该点为（0， -161.6761）

将x=-0.5时代入焦面方程

$$160.2^2 = x^2 + y^2 \quad (19)$$

求出在x=-0.5时焦面方程中的y值，并得出该点坐标为（-0.5， 160.1992），将两点代入直线方程，即可得出抵达馈源舱边界A的一道光束的方程，建立该点的方程为

$$y = -2.953x - 1616761$$

将该直线方程与真实抛物线方程进行联立求出边缘光束在抛物面上的交点，分析到达馈源舱的吸收光束和工作面的总吸收光束之比，就可得出馈源舱有效区域接收到的反射信号与300m口径内反射面的信号之比。

由于光线是平行光入射，在水平面上能够接收到均匀光束，故信号之比可等效于在工作区分界面上能够到达馈源舱的信号射入区域的面积与无法反射到达馈源舱的信号入射区域的面积之比，即两个面积之比。

$$S_{\text{有效}} = \pi r_{\text{有效}}^2 \quad (20)$$

$$S_{\text{吸收}} = \pi r_{\text{吸收}}^2 \quad (21)$$

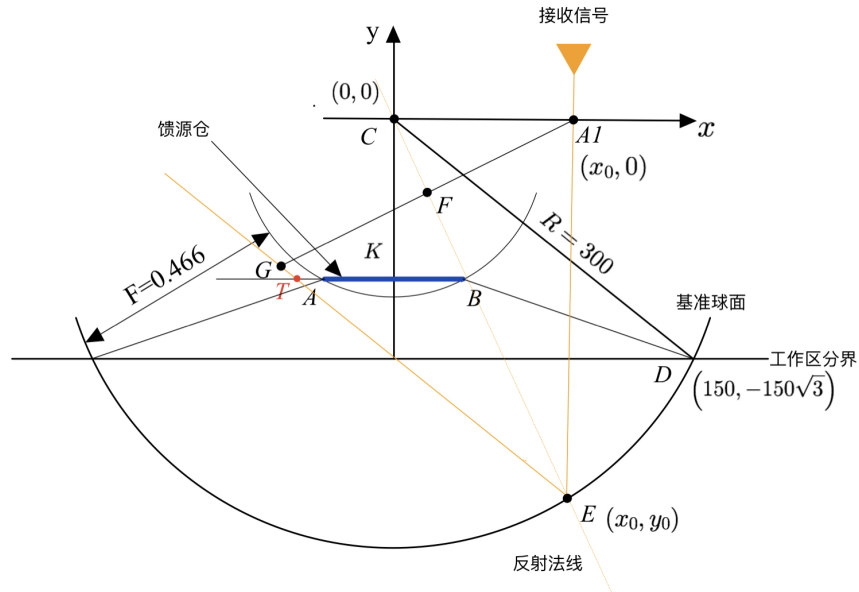
我们用能达到馈源舱边缘光束与300m照明区域的为有效区域光的边界点，计算该区域的面积，再与300m口径的反射面所能吸收总的区域面积进行比例运算，即可得出该有效区域的收到和吸收之比。即

$$\eta = \frac{S_{\text{有效}}}{S_{\text{吸收}}} \times 100\% \quad (22)$$

经计算得出调节后馈源舱的接受比为73.4%

#### 4.3.2 球面接收比

如下图所示，当使用基准球面接收信号时，有信号进入直线A1E，经E点反射（法线过圆心）后交馈源舱K(0, r)所在平面于T点。通过入射直线A1E与反射直线GE对称，我们能够很快的得到交点T的坐标 $(x_a, y_a)$ 。以T点横坐标作为能否成功接收信号的判定依据：当T与馈源舱圆盘中心距离小于0.5m时，能够成功接收信号。



计算过程如下：A1点坐标 $(x_0, y_0)$ ，E点在圆上，可得

$$x_0^2 + y_0^2 = 300^2 \quad (23)$$

以此得到 $y_0 = \sqrt{300^2 - x_0^2}$ ，以及CE线方程：

$$y = \frac{y_0}{x_0}x \quad (24)$$

通过与CE垂直的直线A1F，求得F坐标 $(x_0, y_0)$

$$\text{A1F: } y = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \quad (25)$$

$$F: \begin{cases} x_1 = \frac{\frac{x_0^2}{y_0}}{\frac{x_0^2}{y_0} + \frac{y_0}{x_0}} \\ y_1 = \frac{x_0}{\frac{x_0^2}{y_0} + \frac{y_0}{x_0}} \end{cases} \quad (26)$$

得到关于CE对称点G坐标,进而确定GE直线方程：

$$G: \begin{cases} x_2 = 2x_1 - x_0 \\ y_2 = 2y_1 \end{cases} \quad (27)$$

$$y - y_0 = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}(x - x_0) \quad (28)$$

从而得到交点T横坐标 $x_a$ ；

$$x = \frac{t - y_0 + \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}}{\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}} \quad (29)$$

得到所有令 $x_a < 1$ 的 $x_0$ 坐标。经求解，符合的 $x_0$ 判断公式为

$$x \leq 0.24 \quad (30)$$

可得球形反射面只能接收据中心轴线0.24米内的信号。按照面积算法，球面的信号接收比为

$$\eta = \frac{0.24^2}{150^2} \times 100\% = 0.000256\% \quad (31)$$

球面信号接收比0.000256%。抛物面信号接收比73.4%与之相比，可见我们设计的抛物面能够大幅度改善信号接收能力。

## 5 模型评价

### 5.1 模型优点

FAST反射面支承结构本质上是一个轻型的跨度巨大、形式复杂、形状实时可调的高精度大型机械装置，本文模型结合主动反射面工作原理通过大量的计算，得出的理想抛物面和真实抛物面是基于理想条件和事实基础的，具有十分高的可信度。

## 5.2 未来改进方向

在今后的项目研究中,首要的时是需兼顾性能可靠性和成本对已有各关键技术不同的方案设计作优化和抉择,特别是光机电一体化的馈源支撑的索系构型优化,以及两种不同设计的选择。对于本模型的改进方向,我们认为在未来需要更多的数据 and 实践作为支撑材料,能够有更加强力的论述材料,使模型经过多次修正后更加趋近真实情况。

## 参考文献

- [1] 商文念. *FAST* 反射面支承结构优化研究[D]. 哈尔滨工业大学, 2007.
- [2] 南仁东. *FAST* 的进展——科学、技术与设备[J]. 《中国科学》, 2014, 44(10):1064-1073.
- [3] 沈世钊, 范峰, 钱宏亮. *FAST* 主动反射面支承结构总体方案研究[J]. 建筑结构学, 2010, 31(12):1-8.
- [4] 李明辉. *FAST* 瞬时抛物面变形策略优化分析[J]. 贵州大学学报( 自然科学版), 2012, 29(6):24-28.
- [5] 罗斌. *FAST*主动反射面索网结构设计与施工研究[M]. 1. 东南大学出版社, 2016 :13-23.