可能用到的数据：

$\Phi(1.5833)=0.9433$，$\Phi(1.25)=0.8944$，$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$，$\chi^2_{0.025}(8)=17.535$

$t_{0.025}(13)=2.16$，$t_{0.025}(14)=2.145$，$t_{0.05}(13)=1.771$，$t_{0.05}(14)=1.761$，

$F_{0.025}(1,13)=6.41$，$F_{0.05}(1,13)=4.67$，$F_{0.05}(5,20)=2.71$，$F_{0.05}(4,20)=2.87$

一、（**10 分**）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， $X_1,X_2,\cdots,X_{n+1}$为样本，令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则$V=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\frac{(X_{n+1}-\overline{X})}{\hat{\sigma}}$服从什么分布？（给出推导过程）

二、（**10 分**） $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体为 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本. 记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$， $T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$，试证明$T$ 是 μ^2 的无偏估计量.

三、(**15 分**)设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x\le\theta,\ 0<\theta<\infty\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为其样本。

(1) 求参数 θ 的矩法估计量;

(2) 求参数 θ 的极大似然估计量;

(3) 证明 $T_1=\dfrac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和 $T_2=\dfrac{n+1}{n}\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$ 都是 θ 的无偏估计量.

四、(**15 分**)设正态总体 $X\sim N(\mu,300^2)$,对 μ 作如下假设检验:

$$H_0:\mu=\mu_0=900, H_1:\mu>\mu_0$$

取 $n=25$ 的样本,若定 H_0 的接受域为 $\overline{X}\in(-\infty,995]$

(1)求犯第一类(弃真)错误的概率;

(2)若 H_0 不正确,而 $\mu=\mu_1=1070$,犯第二类(取伪)错误的概率是多少?

五、（15 分） 苹果装箱时，要求苹果的重量标准差应不大于 0.005 公斤．在一批苹果中随机取 9 个苹果称重，得其样本标准差为$S=0.007$公斤，试问：（1）在显著性水平$\alpha=0.05$下，可否认为该批苹果重量标准差达到要求？（2）如果调整显著性水平$\alpha=0.025$，结果会怎样？

六、（15 分）设 x（单位：英寸）与 Y（单位：英寸）分别表示人的脚长与手长，现随机选择 15 名女性，测得她们脚长 x 与手长 Y 的如下数据：

x	9	8.5	9.25	9.75	9	10	9.5	9	9.25	9.5	9.25	10	10	9.75	9.5
Y	6.5	6.25	7.25	7	6.75	7	6.5	7	7	7	7	7.5	7.25	7.25	7.25

假设 Y 与 x 之间呈线性相关关系：$Y = a + bx + \varepsilon$， $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$．经计算：

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 141.25,\quad \sum_{i=1}^{15} y_i = 104.5,\quad \sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 1332.8125,\quad \sum_{i=1}^{15} y_i^2 = 729.625,\quad \sum_{i=1}^{15} x_i y_i = 985.5$$

（1） 证明系数 b 的最小二乘估计 $\hat{b}$ 是 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 的线性组合并推断估计量 $\hat{b}$ 的无偏性；

（2） 求 y 关于 x 的线性回归方程 $y = a + \hat{b}x$；

（3） 对（2）回归方程的显著性进行检验（$\alpha = 0.05$）．

七、（10 分） 在 30 块面积相等的田块上采用 6 个稻种 A、5 个施肥方案 B 种植水稻, 设田块的自然条件及田间管理措施都一样,对产量的数据进行运算得以下方差分析表的部分数据：

方差来源	平方和	自由度	均方	F 值
因素 A	28.294			
因素 B				
误差	10.001			
总和	74.042			

（1）填充方差分析表的空白数据；

（2）检验因素不同水平下的结果是否有明显差异　$(\alpha = 0.0$

八、（10 分） 试分析“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”与“千军易得，一将难求”两句话中所蕴含的数学原理