<table>
<tr><td>实验名称</td><td colspan="3">实验二 传感器的动态特性</td></tr>
<tr><td>姓　　名</td><td>张厚今</td><td>组　别</td><td></td></tr>
<tr><td>同组实验者</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>指导教师</td><td>徐文正</td><td>实验日期</td><td>2020 年 4 月 26 日</td></tr>
<tr><td>指
导
教
师
评
语</td><td colspan="3">指导教师签名：
______年_____月_____日</td></tr>
<tr><td>实验成绩</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

实验二 传感器的动态特性

一、实验目的

掌握传感器的动态特性分析方法，掌握对检测系统的动态分析的步骤。

二、实验要求

对一阶二阶系统进行分析，来掌握对检测系统的动态分析的步骤。

三、实验步骤

3.1 检测系统的动态特征

动态特征是指系统的输入、输出都随时间而快速变化的特性。动态标定以经过校准的动态标准信号(如标准正弦信号、阶跃信号等)作为传感器或测试系统的输入，从而测量输出－输入的关系曲线(幅频特性曲线、相频特性曲线、阶跃响应曲线)，然后求出一阶测试系统的时间常数，二阶测试系统的阻尼度、固有角频率。所采用的标准输入信号的误差应为所要求测量结果误差的三分之一到五分之一或更小。研究动态特性的目的是检测波形失真情况以及响应的快慢。

检测系统的动态分析的步骤如下：

（1）建立系统的数学模型---微分方程

（2）得到传递函数------拉氏变换

（3）计算频率特性

（4）系统的频率特性分析

检测系统的数学模型

1. 微分方程

$$a_n\frac{d^ny(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)$$
$$=b_m\frac{d^mx(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t)$$

实际上虽然工程中检测系统的种类和形式很多，但其结构常数b_i中除$b_1\neq 0$外，其余项$b_1=b_2=b_m=0$，故上式可改写成

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=b_0x$$

2. 传递函数

复频域描述的拉普拉斯变换公式为：

$$X(s)=\int_0^{\infty}x(t)e^{-st}dt$$

$$L\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right]=s^n X(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

H(s)与输入、物理结构及系统的初始状态无关 ，只反映系统的传输、转换和响应特性。分母取决于系统的结构参数，分子取决于输入方式等。

3. 频率特性

初始初始条件为零时，系统的输出量y_t的傅里叶变换Y(jω)与输入量X(t)的傅里叶变换X(jω) 的比值称为检测系统的频率响应特性，简称为频率特性。

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{b_m(j\omega)^m+b_{m-1}(j\omega)^{m-1}+\cdots+b_1(j\omega)+b_0}{a_n(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\cdots+a_1(j\omega)+a_0}$$

$$H(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

幅频特征是指在不同频率的简谐信号激励下，稳态输出信号与输入信号的幅值比。

$$A(\omega)=|H(j\omega)|=\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)}$$

相频特征是指在不同频率的简谐信号激励下，稳态输出信号与输入信号的相位差。

$$\varphi(\omega)=\angle H(j\omega)=arc\tan\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

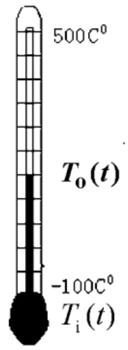
频率响应函数直观地反映了测试系统对不同频率简谐信号激励下的失真情况。

3.2 常见的检测系统的数学模型

3.2.1 一阶系统的频率特征

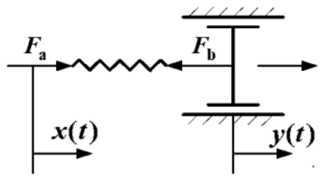
常见的一阶系统有温度计、弹簧和 RC 电路，其频率特征分别为

（1）温度计



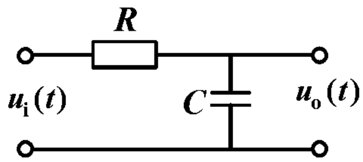
$$\frac{c}{\alpha}\frac{dT_0(t)}{dt}+T_0(t)=T_i(t)$$

(2)弹簧系统



$$\frac{c}{k}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

(3)RC 电路



$$\mathrm{RC}\frac{du_0(t)}{dt}+u_0(t)=u_i(t)$$

在一阶系统中使用τ表示时间常数，S表示静态灵敏度，则

$$a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_0x(t)$$

$$\tau\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=Sx(t)$$

$$\mathrm{H(s)}=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{1+\tau s}$$

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{1}{1+j\omega\tau}$$

$$\mathrm{A}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan(\omega\tau)$$

τ 越小，频率响应特性越好，$\omega\tau\ll 1$ 时，$\mathrm{A}(\omega)\approx 1$，$\varphi(\omega)\approx 0$，表明系统输出与输入呈线性关系，且相位差很小，输出能反映输入的变化规律。

理想情况下，$A(\omega)=1$，$\varphi(\omega)=0$，此时

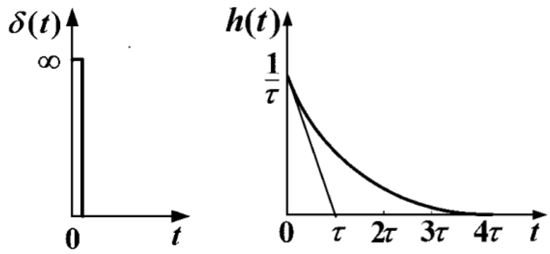
$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan(\omega\tau)$$

3.2.2 一阶检测系统的时域特性

（1）一阶系统脉冲响应

$$h(t)=L^{-1}[H(s)]=\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$$



(2)一阶系统阶跃响应

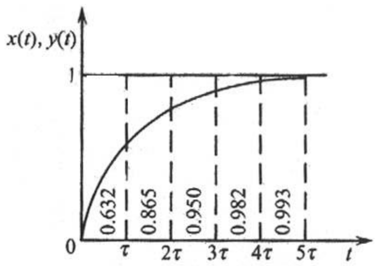
$$y_u(t)=\int h(t)dt=1-e^{-t/\tau}$$

以阶跃信号激励为例，分析一阶的动态特性。设一阶检测系统的传递函数为

$$H(s)=\frac{k}{1+\tau s}$$

当输入一个单位阶跃信号时，系统的输出信号为

$$y(t)=k\left(1-e^{-1/\tau}\right)$$



根据检测系统的输出特性曲线，可以选择以下几个特征时间点作为其时域动态性能指标：

1）时间常数：输出由零上升到稳态值的 63%所需的时间。

2）调节时间t_s：输出由零上升到并保持在稳态值的偏差的对值在±2%或±5%的范围内所需的时间。

3）延迟时间t_d：输出由零上升到稳态值的一半所需的时间。

4）上升时间t_r：输出由 10%上升到 90%的所需的时间。

3.2.3 二阶系统的频率特性

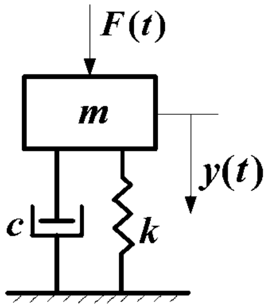
衡量检测系统对正弦信号激励响应的频域特性指标主要如下：

1）通频带：使系统输出量保持在一定值（幅频特性曲线上相对于幅值衰减 3dB）内所对应的频率范围。

2）工作频带：系统输出幅值误差为±5%（或±10%）时所对应的频率范围。

3）相位误差：在工作频带范围内输出量的相位偏差应小于 5 度。

以惯性式拾振器力学模型为例，研究二阶系统的频率特性。



$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

$$\xi = c/2\sqrt{km}$$

$$S = 1/k$$

根据牛顿定律

$$F = ma$$

合力为

$$F = F_{(t)} + F_{k(t)} + F_{C_{(t)}}$$

其中弹性阻力为

$$F_k = -ky$$

粘性阻力为

$$F_C = -C\frac{dy}{dt}$$

所以

$$F - ky - C\frac{dy}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + C\frac{dy}{dt} + ky = F$$

$$\frac{d^2u_0(t)}{dt^2}+2\xi\omega_n\frac{du_0(t)}{dt}+{\omega_n}^2u_0(t)=S{\omega_n}^2u_i(t)$$

$$a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_0y(t)=b_0x(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\xi\omega_n\frac{dy(t)}{dt}+{\omega_n}^2y(t)=S{\omega_n}^2x(t)$$

$$\mathrm{H(s)}=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{{\omega_n}^2}{S^2+2\xi\omega_ns+{\omega_n}^2}$$

频率特性

$$\mathrm{H(j\omega)}=\frac{Y(\mathrm{j\omega})}{X(\mathrm{j\omega})}=\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+2j\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

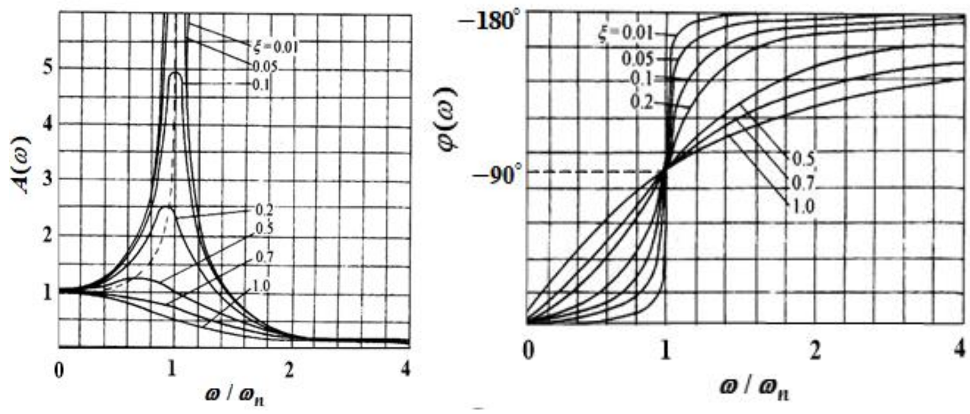
幅频特征

$$\mathrm{A(\omega)}=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

相频特性

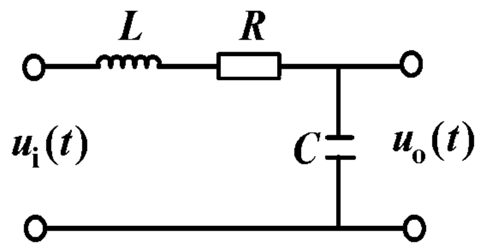
$$\varphi(\omega)=-\arctan\frac{2\xi(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

理想情况下，$\mathrm{A(\omega)}=1$，$\varphi(\omega)$ 很小，即$\omega_n\gg\omega$



阻尼度 $\xi=0.7$，固有频率 f_n 越高，失真越小。

若以 LRC 振荡电路分析，可得



$$\mathrm{LC}\frac{d^2u_0(t)}{dt^2}+RC\frac{du_0(t)}{dt}+u_0(t)=u_i(t)$$

$$\frac{d^2u_0(t)}{dt^2}+2\xi\omega_n\frac{du_0(t)}{dt}+{\omega_n}^2u_0(t)=S{\omega_n}^2u_i(t)$$

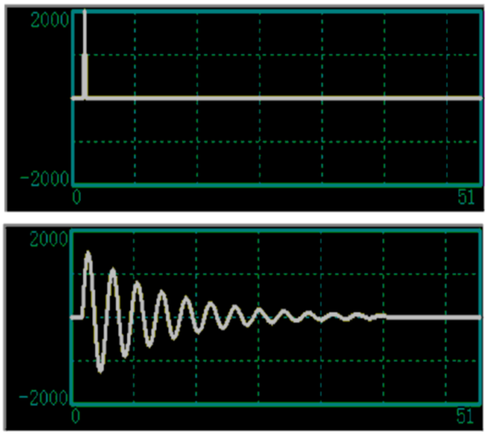
$$\begin{cases}\omega_n=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}\\ \xi=R\dfrac{\sqrt{C/L}}{2}\\ S=1\end{cases}$$

其固有角频率$\omega_n=\frac{1}{\sqrt{LC}}$，阻尼度$\xi=R\frac{\sqrt{C/L}}{2}$，静态灵敏度$S=1$

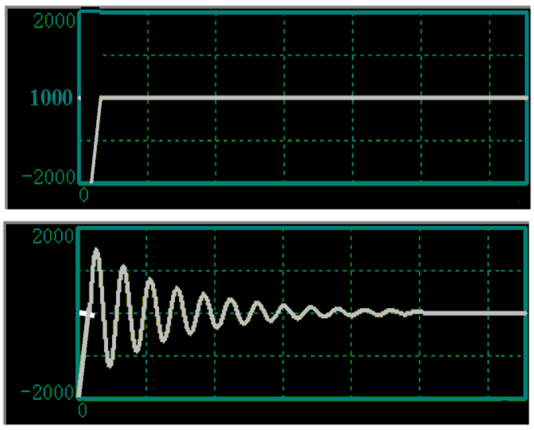
4. 二阶检测系统的时域特性

设二阶检测系统的传递函数为

$$\mathrm{H(s)}=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{{\omega_0}^2}{S^2+2\xi\omega_0S+{\omega_0}^2}$$



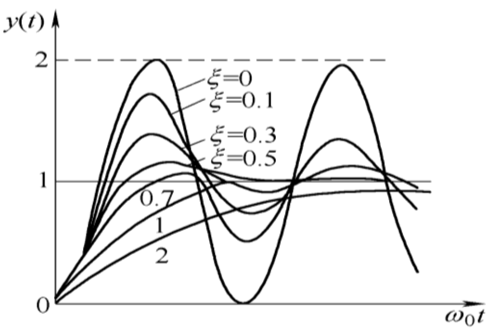
二阶系统脉冲响应



二阶系统阶跃响应

阻尼度 $\xi=0.7$，固有频率 f_n 越高，响应越快。

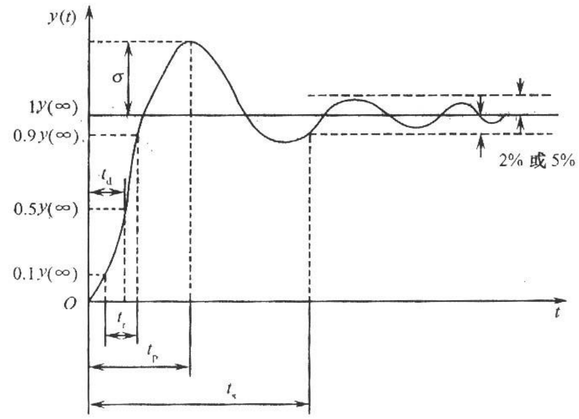
当输入为单位阶跃函数时，系统的输出与固有角频率ω_0与阻尼比ξ密切相关。固有频率ω_0由系统结构参数决定，ω_0越大，检测系统响应速度越快；当ω_0为常数时，系统响应速度取决于阻尼比ξ。



单位阶跃响应曲线

阻尼比 $\xi = 0$ 时，为临界阻尼，超调量 100%，$\xi > 1$时，为过阻尼无超调，也无振荡； $\xi < 1$时，为欠阻尼，产生衰减振荡； $\xi = 1$时，达到稳态输出所需的时间最短。

二阶检测系统性能指标的单位阶跃响应曲线如下图所示：



二阶系统的主要性能指标如下：

1）上升时间t_r：传感器输出从稳定值的 10%上升到稳定值的 90%所需时间

2）延迟时间t_d：传感器输出达到稳定值的 50%所需时间。

3）峰值时间t_p：响应曲线达到超调量第一个峰值所需要的时间。

4）调节时间t_s：响应曲线达到并永远保持在一个允许误差范围内所需的最短时间。用稳态值的百分数（通常取 5%或 2%）作误差范围。

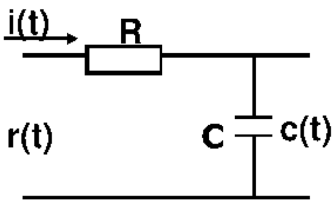
5）超调量σ：输出响应的最大偏离量$y(t_p)$与终值y之差的百分比，即

$$\sigma = \frac{y(t_p - y(\infty))}{y(\infty)} \times 100\%$$

四、实验结果

4.1 一阶系统分析

一阶系统是以一阶微分方程作为运动方程的控制系统。常见的一阶系统有弹簧、RC 电路等，下面以 RC 电路为例，分析一阶系统的特征。



4.1.1 一阶系统的数学模型

在上面的 RC 电路中，c(t)为输出电压，r(t)为输入电压，$c(0)=0$。可得方程

$$\begin{cases} R_i(t)+c(t)=r(t) \\ \mathrm{i(t)}=\mathrm{C}\dfrac{dc(t)}{dt} \\ \mathrm{c(0)}=0 \end{cases}$$

$$\therefore \mathrm{T}\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t)$$

其中，$\mathrm{T}=\mathrm{RC}$为时间常数。经过拉氏变换得

$$T_sC(s)+C(s)=R(s)$$

4.1.2 一阶系统得传递函数

一阶系统传递函数为

$$\Phi(\mathrm{s})=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ts+1}$$

4.1.3 单位跃阶响应

设输入信号为单位阶跃输入

$$R(s)=\frac{1}{s}$$

$$\mathrm{H(s)}=\Phi(\mathrm{s})\mathrm{R(s)}=\frac{1}{s}\frac{1}{Ts+1}$$

$$=\frac{1}{s(Ts+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{1/T}$$

单位阶跃响应$\mathrm{h(t)}$为

$$\mathrm{h(t)}=1-\mathrm{e}^{-t/T}$$

4.1.4 单位脉冲响应

当输入为单位脉冲函$\mathrm{r(t)}=\delta(\mathrm{t})$，求其脉冲响应。

因为$\mathrm{R(s)}=1$，则系统得输出为

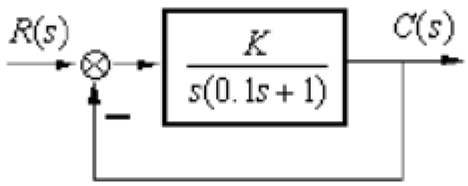
$$\mathrm{K(s)}=\frac{1}{TS+1}R(s)=\frac{1}{TS+1}=\Phi(\mathrm{s})$$

$$k(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{TS+1}\right]=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

一阶系统得脉冲响应为单调下降的指数曲线，其衰减到初值的 5%所需的时间为$t_s=3T$。故系统的惯性越小，响应过程的快速性越好。

4.2 二阶系统分析

设某控制系统的结构图如下所示：



（1）开环增益 K =10 时,求系统的动态性能指标，

（2）确定使系统阻尼比ξ =0.707 的 K 值。

K = 10时，系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{100}{s^2+10s+100}$$

可得，阻尼度$\xi=\frac{10}{2\times10}=0.5$，$\omega_n=\sqrt{100}=10$，$t_p=\frac{\pi}{\sqrt{1-0.5^2}\times10}=0.363$

$$\Phi(s)=\frac{10K}{s^2+10s+10K}$$

$$\begin{cases}\omega_n=\sqrt{10K}\\ \xi=\dfrac{10}{2\sqrt{10K}}\end{cases}$$

令$\xi=0.707$得，$K=\frac{100\times2}{4\times10}=5$

五、收获与心得

本次实验学习了传感器的动态特性分析方法，熟悉了检测系统的动态分析步骤。通过对一二阶系统的分析，熟悉了检测系统的动态分析的步骤。通过例题计算，了解了一二阶系统的特性指标。