模型求解

在T_i时刻，在基础的M/D/1模型一共可能存在 4 中情况：

情况	在时刻t 顾客数	在区间 $[t, t+\Delta t)$ 到达	在区间 $[t, t+\Delta t)$ 离去	在时刻 $t+\Delta t$ 顾客数
(*A*)	***n***	×	×	***n***
(*B*)	***n*+1**	×	○	***n***
(*C*)	***n*-1**	○	×	***n***
(*D*)	***n***	○	○	***n***

它们的概率分别是：

$$\begin{aligned}&P_n(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)\\&P_{n+1}(t)(1-\lambda\Delta t)\cdot\mu\Delta t\\&P_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t(1-\mu\Delta t)\\&P_n(t)\cdot\lambda\Delta t\cdot\mu\Delta t\end{aligned}\tag{1}$$

当 n=0 时，

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)(1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t\tag{2}$$

同理可得：

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t)\tag{3}$$

当模型处于平衡状态时满足条件：

$$\begin{cases}-\lambda P_0+\mu P_1=0\\ \lambda P_{n-1}+\mu P_{n+1}-(\lambda+\mu)P_n=0\quad n\geq 1\end{cases}\tag{4}$$

令 n=1 得到：

$$\begin{gathered}\mu P_2=(\lambda+\mu)(\lambda/\mu)P_0-\lambda P_0;\qquad(5)\\ \text{s.t: }P_2=(\lambda/\mu)^2P_0\\ P_n=(\lambda/\mu)^nP_0\end{gathered}$$

系统中的平均排队队长：

$$\begin{aligned}L_s&=\sum_{n=0}^{N}nP_n=\sum_{n=1}^{N}n(1-\rho)\rho^n\\&=\left(\rho+2\rho^2+3\rho^3+\cdots\right)-\left(\rho^2+2\rho^3+3\rho^4+\cdots\right)\\&=\rho+\rho^2+\rho^3+\cdots=\frac{\rho}{1-\rho},\quad 0<\rho<1\end{aligned}$$

系统中等待的平均顾客数：

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=1}^{N}(n-1)P_n = \sum_{n=1}^{N} nP_n - \sum_{n=1}^{N} P_n \\ &= L_s - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda} \end{aligned}$$

最终我们得到系统服务中顾客等待时间的期望值：

$$W_s = E[W] = \frac{1}{\mu-\lambda} \tag{6}$$

在蓄车池中司机排队时间的期望值：

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu-\lambda} \tag{7}$$

我们现在扩展服务台的数量为 k，各服务台工作是相互独立的(不搞协作)，且平均服务率相同

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_c = \mu \tag{8}$$

整个服务机构的平均服务率为$min(k\mu, n\mu)$,n 为人为设定的服务台上限，文章中 n=6。

令$\rho = \frac{\lambda}{k\mu}$，计算M/D/k/N/m/FCFS 模型中式中的$P_0$：

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{1}{k!}\frac{1}{1-\rho}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1} \tag{9}$$

生灭过程记为：

$$\begin{cases} \mu P_1 = \lambda P_0 \\ (n+1)\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} = (\lambda + n\mu)P_n & (1 \le n \le k) \\ k\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} = (\lambda + k\mu)P_n & (n > k) \end{cases} \tag{10}$$

得到差分方程：

$$\begin{cases} P_0 = \left[\sum_{k=0}^{k-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{1}{k!}\frac{1}{1-\rho}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1} \\ P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad (n \le k) \\ \frac{1}{k!k^{n-k}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 (n > k) \end{cases} \end{cases} \tag{11}$$

平均排队队长记做：

$$\begin{cases} \mathrm{L_s} = \mathrm{L_q} + \frac{\lambda}{\mu} \\ \mathrm{L_q} = \sum_{\mathrm{n=k+1}}^{\infty}(\mathrm{n-k})\mathrm{P_n} = \frac{(\mathrm{k}\rho)^{\mathrm{c}}\rho}{\mathrm{k!}(1-\rho)^2}\mathrm{P_0} \end{cases} \tag{12}$$

系统运行指标平均等待时间记做W_q^M：

$$W_{\mathrm{q}}^{\mathrm{M}}=\frac{(k\rho)^k\rho}{k!(1-\rho)^2\lambda}P_0 \tag{13}$$

系统运行指标平均服务时间记做W_S^M

$$W_{\mathrm{s}}^{\mathrm{M}}=\frac{(k\rho)^k\rho}{k!(1-\rho)^2\lambda}P_0+\frac{1}{\mu} \tag{14}$$