摘要

出租车是乘客下飞机后去往目的地的主要交通工具之一，合理调配它的资源有利于提高出租车司机的收益和机场的客流运输能力。本文通过建立选择决策模型、多通道服务模型和服务优先模型，给出了司机的选择策略，设置了合适的"上车点"，确定了可行的乘车安排方案，最大化地提高了出租车司机的收益大小和总的乘车效率。并结合实际数据，对模型进行了分析和优化，为国内机场的乘车安排提供了参考。

关于问题一 先综合考虑影响出租车司机的估计收益进而影响其决策的相关因素，利用时间序列分析方法建立一个客流需求模型（ARIMA 模型），以预测机场中乘坐出租车的客流量。再根据司机的等待成本、载客收益和空载费用，比较前往到达区排队等待载客返回市区的收益和直接放空返回市区拉客的收益，确立决策判断指标，进而建立出租车司机的选择决策模型。决策判断指标的正负是司机做出选择的依据，当决策判断指标为正时，出租车司机选择前往到达区排队等待载客返回市区，反之，选择直接放空返回市区拉客。

关于问题二 首先在问题一的基础上，结合国内广州白云国际机场及其所在城市的出租车相关数据，确定机场的乘车客流量。再利用航班乘车客流量表达式和决策判断指标进行计算，将出租车司机的所有考虑因素转化为 "蓄车池"里已有的车辆数。用 MATLAB 软件求解，得到一天内"蓄车池"极限车辆数变化规律图。出租车司机根据送客到达机场的时间和当前"蓄车池"已有车辆数判断是否该留下排队载客，其极限等待车辆数是 5:00-23:00 时间段为 59 辆，23:00-次日 5:00 时间段为 83 辆。接着，对模型进行灵敏度分析，添加随机噪声项，利用 MATLAB 软件合成在噪声干扰情况下的需求与实际需求的对比图，发现在一定的干扰下模型偏差在允许范围内，进而得出所建的选择决策模型具有一定合理性。最后，利用控制单一变量的方法，通过调整不同影响因素的影响权重，得到不同的需求对比图，判断出客流需求模型对不同相关因素的依赖性由大到小依次为天气影响、时间段影响和节假日影响。

关于问题三 将整个出租车司机排队、乘客等车及其上车时间的服务系统视为一个排队论模型。在此模型中，将出租车司机视为顾客、设置的上车点视为服务台，由于上车点的数量未知，所以建立一个/M/D/k/N/m/FCFS 排队模型，并根据问题二已知的选择决策方案确立出租车进入"蓄车池"的数量。最后利用 MATLAB 数学软件对不同上车点数量的排队模型进行模拟，得出设置 4 个上车点可以使得总的乘车效率最高。

关于问题四 考虑单方面队列，将出租车视作顾客、乘客视作服务台，建立出租车与乘客之间的服务优先模型。由于司机不能选择乘客和拒载，不过允许多次往返载客，所以对出租车进行优先级划分，将短途载客再次返回的出租车视为 A 类优先级顾客，其余视为 B 类优先级顾客，然后建立强占优先级的 M/M/1 的排队模型，利用 MATLAB 软件编写程序进行求解，得到系统稳态下的各项指标，从而确立可行的"优先"方案。

1 问题重述

1.1 问题背景

出租车是乘客下飞机后去往目的地的主要交通工具之一，国内大多数机场都是将送客（出发）与接客（到达）通道分开的。送客到机场的出租车司机通常都会面临两个选择：(A) 前往到达区排队等待载客返回市区。这样出租车需要到指定的“蓄车池”排队等候，从而付出一定的时间成本。(B) 直接放空返回市区拉客。这样出租车司机需要付出空载费用并且可能损失潜在的载客收益。

司机可以确定的信息有在某时间段抵达的航班数量以及“蓄车池”里已有的车辆数。出租车司机通常根据个人经验做出决策，例如在某个季节或某时间段抵达航班的多少和可能乘客数量的多寡等。如果乘客在下飞机后想“打车”，就要到指定的“乘车区”排队乘车。机场的出租车管理人员负责“分批定量”将出租车放行进入“乘车区”，同时安排一定数量的乘客上车。

1.2 题目重述

现需要结合实际情况，考虑影响出租车司机决策的各种确定和不确定因素，建立数学模型解决以下问题：

问题一　分析研究与出租车司机决策相关因素的影响机理，综合考虑机场中客流量的变化规律以及出租车司机的收益大小，建立相关选择决策模型，并给出司机的选择策略。

问题二　收集国内某一机场及其所在城市出租车的相关数据，给出该机场出租车司机的选择方案，并分析所建模型的合理性以及对相关因素的依赖性。

问题三　机场中时常会出现出租车排队载客和乘客排队乘车的情况，现在某机场“乘车区”　有两条并行车道，要求管理部门设置合适的“上车点”，并合理安排出租车和乘客，在确保车辆和乘客安全的前提下，使得总的乘车效率最高。

问题四　已知出租车的载客收益与载客的行驶里程有关，出租车司机既不能选择乘客也不能拒载，但是允许多次往返载客。管理部门拟对某些短途载客并再次返回的出租车给予一定的“优先权”，使得机场中每辆出租车的收益能够尽量均衡，试给出一个可行的“优先”安排方案。

2 模型假设

1.假设航班上座率为理想数据，不受其余因素的影响；
2.假设司机做选择决策时，不考虑直接进入乘车区载客的方案；
3.假设到达乘车区的出租车数量服从复合泊松分布；
4.假设在未掌握真实数据的情况下，乘车服务时间服从负指数分布。

3 符号说明

变量	说明	量纲
n	排队期间抵达航班数	架
$A_i(i=1,2\cdots n)$	第 i 架航班乘车客流量	个
$\vartriangle t_i(i=1,2\cdots n)$	等待第 i 架航班时间	min
N	“蓄车池”已有车辆数	辆
V	航班座位数	个
r	上座率	%
$Cost$	空载费用	元
T	时间因子	
W	天气因子	
H	节假日因子	
ε_t	突发事件因子	
m	出租车等待时间单位收益	元$/_{min}$
w	单位车辆排队时间	$min/_{辆}$
P	载客收益	元
D	决策判断指标	

4 问题分析

4.1 问题一分析

关于问题一，出租车司机送客到机场后共有两个选择方案，一是选择前往到达区排队等待载客返回市区，二是直接放空返回市区拉客。司机要综合考虑多项确定和不确定的因素，这些相关因素主要通过影响出租车司机的估计收益进而间接影响司机的决策。

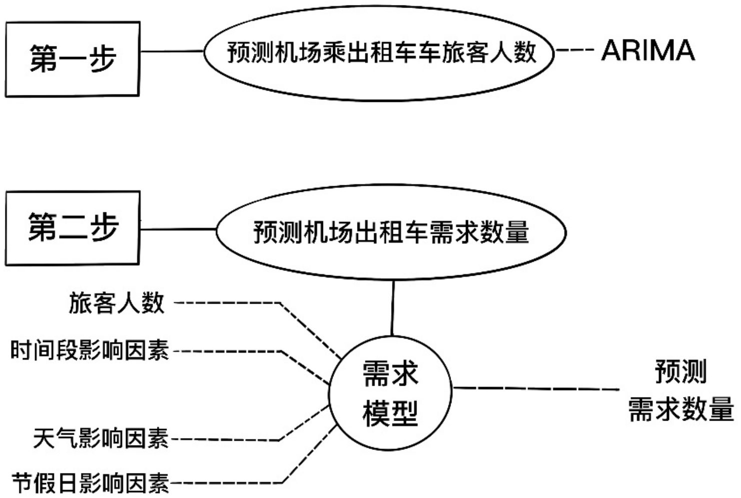
首先，司机主要纳入考虑范围的决策相关因素有抵达航班的多少和可能乘客的数量、在到达区排队等待载客的时间成本、直接返回市区的空载费用。其中，抵达航班的多少和可能乘客的数量受到航班座位数 V、上座率 r、时间因子 T、天气因子 W 以及节假日因子 H 的影响；在到达区排队等待载客的时间成本受到 “蓄车池” 已有车辆数 N、单位车辆排队时间 w、等待航班时间以及出租车等待时间单位收益的影响。

其次，基于时间序列分析，将乘车客流量的影响因素分解为四部分来看【1】，然后综合

这些因素建立一个客流需求模型（ARIMA 模型），以确定特定条件下乘车区的乘客数量，从而得出机场中乘客数量的变化规律。再根据等待成本、载客收益和空载费用，分别计算前往到达区排队等待载客返回市区的收益和直接放空返回市区拉客的收益。

最后，根据出租车司机两种选择的收益确立决策判断指标，比较两种选择的收益大小，建立选择决策模型。再根据决策判断指标的正负，给出司机的选择策略。

问题一总体思路分析图如下：



4.2 问题二分析

关于问题二，在问题一的基础上，赋予决策影响因素具体数值，再结合收集的国内广州白云国际机场及其所在城市出租车的相关数据，对选择决策模型作进一步的分析。

首先，利用不同影响因子（如时间因子、天气因子、节假日因子）下的乘客乘车数据，初步确定机场的乘车客流量。再利用航班乘车客流量表达式和决策判断指标，计算得出出租车司机的极限等待车辆数和 “蓄车池” 已有车辆数 N 随决策影响因素变化的规律，将出租车司机的所有考虑因素转化为肉眼可观测到的确定信息：“蓄车池” 里已有的车辆数，以此作为依据判断该做出何种决策。

其次，依据选择决策模型基于客流需求模型的事实，对客流需求模型进行灵敏度分析，添加随机噪声项，观察模型的稳健性，以此检验所建模型的合理性。即利用 MATLAB 数学软件合成噪声干扰情况下的需求与实际需求的对比图，进而分析所建模型的合理性。

最后，利用控制单一变量的方法，通过调整不同影响因素的影响权重，得到不同的需求对比图，再根据各个误差需求百分比的大小，判断客流需求模型对不同相关因素的依赖性大小。

4.3 问题三分析

关于问题三，已知机场中时常会出现出租车排队等客和乘客排队乘车的情况，出租车数量与乘客数量不均衡是造成这些情况的主要原因。出租车送客到机场的过程是分散的，而乘客下飞机等待出租车的过程是一些集中的时间段，正是这样的一个时间差造成了当没有飞机降落时，司机队列在 “蓄车池” 等待乘客，而当飞机下落时，乘客队列又要等待司机。在该问中，可以将司机排队、乘客等车以及其上车时间视为一个排队论模型，通过对排队论模型

的建立和分析，尝试探索当排队车道为两条并行道时，应该设置的上车点数量，使得乘客和司机的整体等待时间成本最小化。

在该排队论模型中，将司机视为顾客，k 个上车点视为 k 个服务台，上车的过程视为顾客接受服务的过程，司机在“蓄车池”等待视为顾客进入队列等待接受服务，排队按照先到先服务的规则，从而建立一个/M/D/k/N/m/FCFS 排队模型。

作为机场管理人员，可以得到未来航班的具体数据，同时结合在问题一、二中得到的需求预测模型，能得到在未来的时间段内出租车需求的变化曲线。通过第二问的选择决策模型，将司机在当前时间点能够容忍的极限排队长度视为排队论模型中的当前时间点的队长上限，当顾客数量超过队长上限时，关闭”蓄车池”入口，避免司机等待时间成本过高。

由于每增加一个上车点都会增加额外的服务时间和管理费用，当上车点设置过少的时候，服务的效率不够，而当上车点设置过多时又会使得安全管理成本过高和服务时间过长。通过模拟不同数量的上车点的排队论模型，找到最优的上车点数。

4.4 问题四分析

关于问题四，依旧从排队论模型出发，但只考虑单方面队列，即将出租车视作顾客、将乘客视作服务台，建立出租车与乘客之间的服务优先模型。由于司机不能选择乘客和拒载，不过允许多次往返载客，所以对出租车进行优先级划分，将短途载客再次返回的出租车视为 A 类优先级顾客，其余视为 B 类优先级顾客，然后建立强占优先级的 M/M/1 的排队模型，利用 MATLAB 软件编写程序进行求解，得到系统稳态下的各项指标，从而确立可行的“优先”方案。

5 模型建立与求解

5.1 问题一的模型建立与求解

5.1.1 问题一的模型建立

问题一中与出租车司机决策相关的因素有抵达航班的多少和可能乘客的数量、在到达区排队等待载客的时间成本、直接返回市区的空载费用。出租车司机送客到达机场后，会根据现场可观测到的确定信息，如某一时间段抵达的航班数量和“蓄车池”里已有的车辆数，和以往的个人经验（机场中乘客数量的变化规律）来判断自己在到达区可能付出的等待时间，再用可能等待时间乘以出租车等待时间单位收益计算等待载客的时间成本，将该时间成本与直接返回市区的空载费用进行比较，做出决策。

总而言之，出租车司机是将所有影响决策的相关因素转化为时间变量，以时间长短度量收益大小，从而做出决策。

首先，综合考虑航班座位数V、上座率r、时间因子T、天气因子W、节假日因子H以及突发事件影响ε_t的影响，给出航班乘车客流量表达式为

$$A=V\cdot\mathrm{r}\cdot(1+T)\cdot(1+W)\cdot(1+H)+\varepsilon_t \quad (5.1)$$

其中

$$r=\sum_{j=1}^{q}\omega_j\cdot s_j\cdot r_0 \quad (5.2)$$

q为影响上座率的因素个数，s_j为影响上座率的因素，ω_j为影响上座率的因素所占权重，r_0为理想状态上座率。

其次，利用时间序列分析方法，将乘车客流量的影响因素分解为周期性变化部分 $x(t)$，时间段影响 $y(t)$，天气影响 $z(t)$，节假日影响 $g(t)$ 和突发事件影响 ε_t，然后综合这些因素建立客流需求模型

$$A = x(t) + y(t) + z(t) + g(t) + \varepsilon_t \quad (5.3)$$

对于机场客流来说，趋势变化和周期性变化是导致客流序列非平稳的主要因素。对于这种非平稳的序列，需要转换为平稳序列进行处理，在建立合适的平稳模型之后，再通过逆变换得到非平稳序列的统计模型。由于 AR 模型、MA 模型和 ARMA 模型均要求客流序列是平稳的，而非平稳序列不能用 ARMA(p,q)模型来描述，因此所建立的客流需求模型要采用 ARIMA(d,p,q)模型（差分自回归移动平均模型），它是 ARMA 模型的延伸，并且这些数据经过 d 阶差分之后能够转换为一个平稳的时间序列。其中，p 是自回归项，q 为移动平均项数。【2】接着在客流需求模型的基础上，当“蓄车池”已有车辆数满足条件

$$\mathrm{c} \cdot N \le \sum_{i=1}^{n} A_i \quad (5.4)$$

时（c 为每辆出租车的平均有效载客数），出租车司机选择在到达区排队等待载客，此时预估等待载客的时间成本为

$$(w \cdot N + \sum_{i=1}^{n} \vartriangle t_i) \cdot m \quad (5.5)$$

最后，再结合载客收益 P 和空载费用 $Cost$ 确立决策判断指标

$$D = P - (w \cdot N + \sum_{i=1}^{n} \vartriangle t_i) \cdot m - Cost \quad (5.6)$$

完成选择决策模型的建立。

5.1.2 问题一的模型求解

将具体某一机场及其所在城市的实际数据，如单位车辆排队时间 w、出租车等待时间单位收益 m、当前“蓄车池”已有车辆数 N 等代入

$$D = P - (w \cdot N + \sum_{i=1}^{n} \vartriangle t_i) \cdot m - Cost \quad (5.6)$$

中，即可算出决策判断指标的大小。

当决策判断指标为正时，表明前往到达区排队等待载客返回市区的成本小于直接放空返回市区拉客的成本，出租车司机应选择前往到达区排队等待载客返回市区；当决策判断指标为负时，表明前往到达区排队等待载客返回市区的成本大于直接放空返回市区拉客的成本，出租车司机应选择接放空返回市区拉客。

5.2 问题二的模型建立与求解

5.2.1 问题二的模型建立

问题二是在问题一的基础上，根据决策影响因素的具体数值，再结合收集的国内广州白云国际机场及其所在城市出租车的相关数据，对选择决策模型作进一步的分析。

5.2.2 问题二的模型求解

航班乘车客流量表达式

$$A=V\cdot \mathrm{r}\cdot(1+T)\cdot(1+W)\cdot(1+H)+\varepsilon_t \quad (5.1)$$

中，时间因子 T 、天气因子 W 、节假日因子 H 在不同条件下有不同的数值大小，均为分段函数，通过这些因子的综合作用对航班客流量产生了影响。

时间因子 T 受不同时间段的影响，根据市场上出租车增设服务费的时间标准【3】，将 T 分为 5:00-23:00 和 23：00-次日 5：00 两个时间段来考虑，具体如下：

$$T=\begin{cases}-85\%, & t\in[5,23] \\ -55\%, & t\in[0,5]\cup[23,24)\end{cases} \quad (5.7)$$

天气因子根据不同天气状况对航班动态的影响程度主要分为四类：

$$W=\begin{cases}0, & A\text{类天气} \\ -35\%, & B\text{类天气} \\ -35\%, & C\text{类天气} \\ -100\%, & D\text{类天气}\end{cases} \quad (5.8)$$

A 类天气为对航班几乎没有影响的天气，包括晴天、阴天等；B 类天气为对航班有微弱影响的天气，包括小雨、小到中雨、阵雨、小雪、小到中雪等；C 类天气为对航班有中度影响的天气，包括中雪、雨夹雪、中雨、中到大雨、大雨、轻雾、霾等；D 类天气为对航班有严重影响的天气，包括大雪、浮尘、大到暴雨、雷阵雨、暴雨、雾等。

节假日因子 H 主要分为两类：

$$H=\begin{cases}35\%, & \text{节假日期间} \\ 0, & \text{工作日期间}\end{cases} \quad (5.9)$$

根据市场上出租车增设服务费的时间标准，仍需将 T 分为 5:00-23:00 和 23：00-次日 5：00 两个时间段来考虑出租车等待时间单位收益 m 、空载费用 $Cost$ 和载客收益 P 。

根据广州的士费调价标准，出租车每分钟候时费为 0.67 元，夜间增设服务费 30%。【3】由此，出租车等待时间单位收益 m 可表示为：

$$m=\begin{cases}0.67, & t\in[5,23] \\ 0.67\times(1+30\%)=0.871, & t\in[0,5]\cup[23,24)\end{cases} \quad (5.10)$$

从机场返回市区花费时间计为 $30\,\mathrm{min}$，路程计为 $21\,\mathrm{km}$ ，空载时行驶一公里燃油成本按 0.3 元计算，得空载费用为

$$Cost=\begin{cases}0.67\times30+0.3\times21=26.4, & t\in[5,23] \\ 0.67\times(1+30\%)\times30+0.3\times21=32.43, & t\in[0,5]\cup[23,24)\end{cases} \quad (5.11)$$

起步价为 10 元/2.5 公里，续租价为 2.6 元/公里【3】，载客时行驶一公里燃油成本按 0.6 元计算，得载客收益为

$$P=\begin{cases}10+2.6\times(21-2.5)-0.6\times21=25.4, & t\in[5,23] \\ 10+2.6\times(1+30\%)\times(21-2.5)-0.6\times21=39.83, & t\in[0,5]\cup[23,24)\end{cases} \quad (5.12)$$

问题二要求确定出租车司机的选择方案、分析所建模型的合理性以及对相关因素的依赖性。为此，可以分为三个方面进行解决。

（1）确定出租车司机的选择方案

在给广州白云国际机场的出租车司机分析选择方案时，首先令决策判断指标 D 等于 0（研究两种决策的平衡状态），解得出租车司机的极限等待时间是 5:00-23:00 时间段为 59 $\min$，23：00-次日 5：00 时间段为 83 $\min$，并解出“蓄车池”已有车辆数 N 的表达式

$$N=((P-D-Cost)/m-\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i)/w \quad (5.13)$$

再从式 (5.4) 中解得 n（排队期间抵达航班数）关于 N（“蓄车池”已有车辆数）的表达式，代入式 (5.13) 中，得到“蓄车池”已有车辆数 N 随决策影响因素变化的规律，也就是将出租车司机的所有考虑因素转化为肉眼可观测到的确定信息：“蓄车池”里已有的车辆数，以此作为依据判断该作出何种决策。最后结合广州白云国际机场 2018 年 4 月 16 日的乘客乘坐航班情况数据，用 MATLAB 数学软件求解，画出“蓄车池”极限车辆数 N -时间 t 图如下：

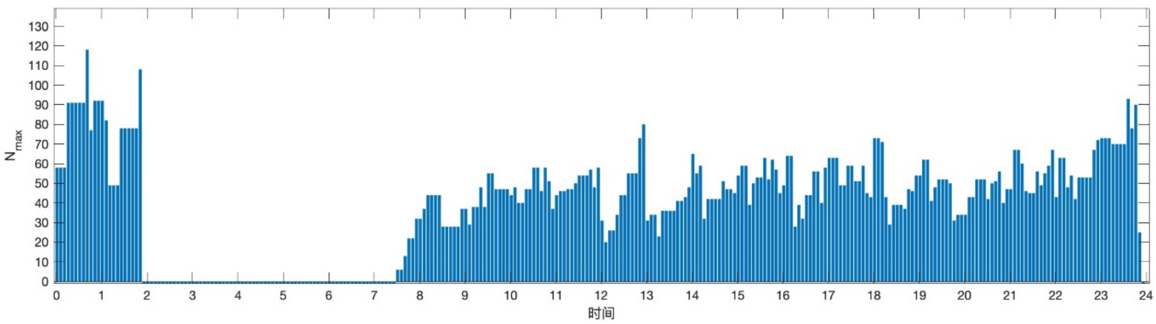


图 5-1 一天内“蓄车池”极限车辆数变化规律图

假设单位车辆排队时间 $w=1\min$，结合已解出的出租车司机的极限等待时间，可知出租车司机的极限等待车辆数是 5:00-23:00 时间段为 59 辆，23:00-次日 5:00 时间段为 83 辆。出租车送客到机场后，根据当前时间和“蓄车池”极限车辆数变化规律判断是否该留下排队载客。具体来说，即出租车司机 5:00-23:00 到达机场时若“蓄车池”里排队车辆数大于 59 辆，则选择直接放空返回市区拉客，否则前往到达区排队等待载客返回市区 ;23:00-次日 5:00 到达机场时若“蓄车池”里排队车辆数大于 83 辆，则选择直接放空返回市区拉客，否则前往到达区排队等待载客返回市区。

（2）分析所建模型的合理性

问题二是在问题一的基础上，利用客流需求模型构建选择决策模型，将广州白云国际机场的真实数据代入求解。问题的本质还是归根于客流需求模型中体现出的机场客流量的变化规律。因此，若要检验所建模型的合理性，只需对客流需求模型进行灵敏度分析，添加随机噪声项 ε，再观察模型的稳健性。

取随机噪声项 $\varepsilon=5\%$（范围控制在 -5%~5%），得到干扰情况下需求与实际需求对比图如下：

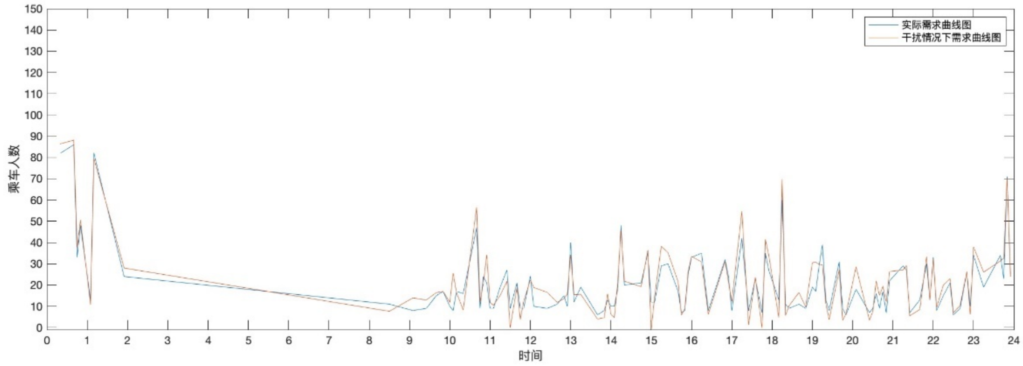


图 5-2 干扰情况下需求与实际需求对比图

计算得累计误差需求车辆为 86.3774，误差需求百分比为 3.7637％（小于 5％），这说明在一定的干扰下模型偏差在允许范围内，模型相对稳定，即使客流需求模型不完全精确，由其导出的结果也是正确的【4】。因此，构建的选择决策模型是合理的。

（3）分析模型对相关因素的依赖性

客流需求模型中，时间段影响 $y(t)$、天气影响 $z(t)$、节假日影响 $g(t)$ 是最主要的三个影响因素。利用控制单一变量的方法，通过调整不同影响因素的影响权重（在原来基础上增加 -5%~5%，本次分析具体取值为 5%），得到不同的需求对比图，再根据各个误差需求百分比的大小，判断客流需求模型对不同相关因素的依赖性大小。时间段扰动、天气扰动、节假日扰动下需求与实际需求对比图分别如下：

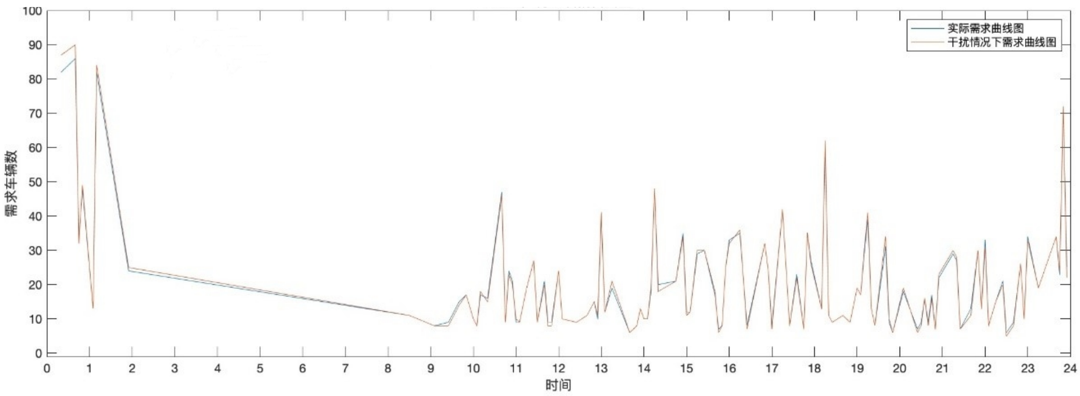


图 5-3 时间段扰动下需求与实际需求对比图

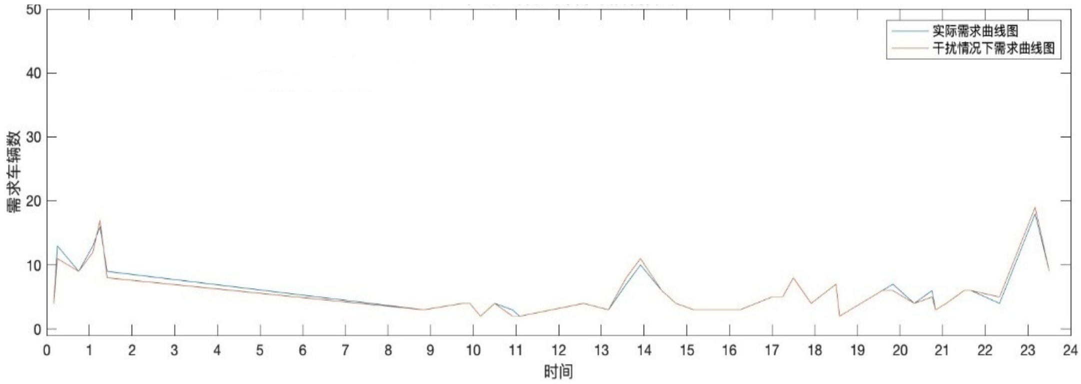


图 5-4 天气扰动下需求与实际需求对比图

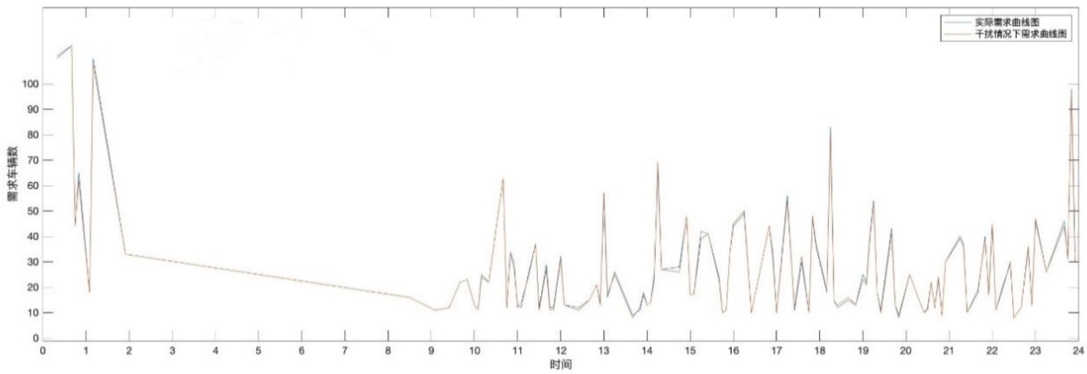


图 5-5 节假日扰动下需求与实际需求对比图

计算得到时间段扰动、天气扰动、节假日扰动下累计误差需求车辆数分别为 73、12、90；误差需求百分比分别为3.1808%、5.1502%、2.8846%。因此，相对来说客流需求模型对相关因素的依赖性由大到小依次为天气影响$z(t)$、时间段影响$y(t)$和节假日影响$g(t)$。

5.4 问题三的模型建立与求解

5.4.1 问题三的模型建立

(1)出租车到机场是因为乘客需要去机场而进行打车。每当有一架飞机要在 CAN 机场起飞时，其会在飞机起飞前 4h 到 前 2h 时间段内产生一个总数为m_i的出租车流，该出租车流视为排队论中的顾客源，服从一个独立的泊松分布$P(N_i)$。在研究的时间段内，将每一架飞机(合计 x 架)起飞前那段时间的泊松流状态进行叠加，得到一个在时间线上呈复合泊松分布$P(\bar{N})$的顾客源。

$$P(N_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

为第 i 架飞机起飞时产生的一段泊松流

$$P(\bar{N}) = \underbrace{P(N_1) + P(N_2) + \cdots + P(N_i) + \cdots + P(N_x)}_{CAN\text{机场当天起飞航班数}}$$

由于每个泊松流相互独立，在时间线上将时间段重合的泊松流进行线性累加，得到复合泊松分布

$$P(\bar{N} = k) = E\left(\frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\right) = \int_0^\infty \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \mu(d\lambda), \quad k = 0,1,2,\cdots$$

其中，$\mu(\bullet)$表示泊松分布的线性组合。

由于负指数分布无记忆性，可以把真实的顾客流视为随机变量$Z \sim P(\bar{N})$

$$P\{\bar{N}=z\}=P\{N_1+N_2+\ldots+N_x+=z\}$$

$$=\sum_{x=0}^{z} P\{N_{i-1}=x\} \cdot P\{N_i=z-x\}$$

$$=\sum_{x=0}^{z} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!} e^{-\mu}=e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{x=0}^{z} \frac{\lambda^x}{x!} \frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}$$

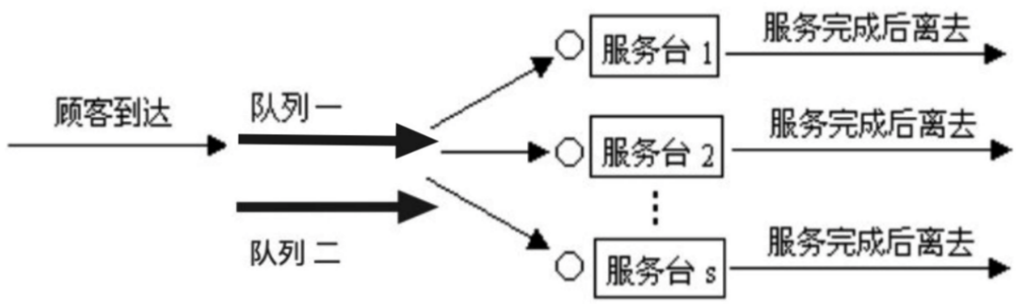
$$=e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{x=0}^{z} \frac{C_z^x \lambda^x \mu^{z-x}}{z!}=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!} \sum_{x=0}^{z} C_z^x \lambda^x \mu^{z-x}=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!}(\lambda+\mu)^z$$

$$Z \sim P(\bar{\lambda}) \qquad \bar{\lambda}=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_x$$

（2）第二个 D 表示的是每一个顾客的服务时间都是常数β，此时服务时间 t 的分布函数为:

$$B(x)=P(t<x)=\begin{cases}1 & x \geq \beta \\ 0 & x<\beta\end{cases}$$

（3）k 表示排队论模型一共设置了两条平行车道，k 个上车点，通过模拟排队的过程，求解最合适的 k 值，使得顾客的平均排队时间和平均服务效率最优化。



（4）N 表示模型中顾客数是有限的，考虑到机场位置的特殊性，一天内去机场的出租车数是确定的，由该机场起飞航班中的乘客数按一定比例决定的。

（5）顾客排队的队长有限，第五个 m 表示的是一个向量，其中第 i 元素m_i表示的是在时间点T_i的时候，根据第二问决策模型计算所得到的司机所能等待的极限排队长度。当前顾客排队长度超过 m 的时候，“蓄车池”为保证司机的收益将暂时关闭入口，等待极限排队长度超过当前排队长度时，蓄车场将再度开放。

（6）服务规则为先到先服务，即 FCFS。

5.4.2 问题三的模型求解

在T_i时刻，在基础的 M/D/1 模型一共可能存在 4 中情况：

情况	在时刻t 顾客数	在区间 $[t, t+\Delta t)$ 到达	在区间 $[t, t+\Delta t)$ 离去	在时刻 $t+\Delta t$ 顾客数
(*A*)	***n***	×	×	***n***
(*B*)	***n*+1**	×	○	***n***
(*C*)	***n*-1**	○	×	***n***
(*D*)	***n***	○	○	***n***

它们的概率分别是：

$$\begin{aligned}&P_n(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)\\&P_{n+1}(t)(1-\lambda\Delta t)\cdot\mu\Delta t\\&P_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t(1-\mu\Delta t)\\&P_n(t)\cdot\lambda\Delta t\cdot\mu\Delta t\end{aligned}\qquad(1)$$

当 n=0 时，

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)(1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t\qquad(2)$$

同理可得

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t)\qquad(3)$$

当模型处于平衡状态时满足条件：

$$\begin{cases}-\lambda P_0+\mu P_1=0\\\lambda P_{n-1}+\mu P_{n+1}-(\lambda+\mu)P_n=0\quad n\geq 1\end{cases}\qquad(4)$$

令 n=1， 得到

$$\mu P_2=(\lambda+\mu)(\lambda/\mu)P_0-\lambda P_0$$

$$\text{s.t: } P_2=(\lambda/\mu)^2P_0$$

$$P_n=(\lambda/\mu)^nP_0$$

系统中的平均排队队长：

$$\begin{aligned} L_s &= \sum_{n=0}^{N} n\,P_n = \sum_{n=1}^{N} n\,(1-\rho)\rho^n \\ &= (\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \cdots) - (\rho^2 + 2\rho^3 + 3\rho^4 + \cdots) \\ &= \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad 0 < \rho < 1 \end{aligned} \tag{6}$$

系统中等待的平均顾客数：

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=1}^{N} (n-1)P_n = \sum_{n=1}^{N} n\,P_n - \sum_{n=1}^{N} P_n \\ &= L_s - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda} \end{aligned} \tag{7}$$

最终得到系统服务中顾客等待时间的期望值：

$$W_s = E[W] = \frac{1}{\mu-\lambda} \tag{8}$$

顾客排队等待时间成本的期望值：

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu-\lambda} \tag{9}$$

现在扩展服务台的数量为 k，各服务台工作是相互独立的(不搞协作)，且平均服务率相同

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_c = \mu \tag{10}$$

整个服务机构的平均服务率为$min(k\mu, n\mu)$,n 为人为设定的服务台上限，令 n=6。

令$\rho = \frac{\lambda}{k\mu}$ ，计算 M/D/k/N/m/FCFS 模型中式中的P_0：

$$P_0=\left[\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i+\frac{1}{k!}\frac{1}{1-\rho}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1} \qquad (11)$$

生灭过程记为：

$$\begin{cases}\mu P_1=\lambda P_0\\ (n+1)\mu P_{n+1}+\lambda P_{n-1}=(\lambda+n\mu)P_n \quad (1\le n\le k)\\ k\mu P_{n+1}+\lambda P_{n-1}=(\lambda+k\mu)P_n \quad (n>k)\end{cases} \qquad (12)$$

得到差分方程：

$$\begin{cases}P_0=\left[\sum_{k=0}^{k-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+\frac{1}{k!}\frac{1}{1-\rho}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}\\ P_n=\begin{cases}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad (n\le k)\\ \frac{1}{k!\,k^{n-k}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0(n>k)\end{cases}\end{cases} \qquad (13)$$

平均排队队长记做：

$$\begin{cases}\mathrm{L_s}=\mathrm{L_q}+\frac{\lambda}{\mu}\\ \mathrm{L_q}=\sum_{\mathrm{n=k+1}}^{\infty}(\mathrm{n-k})\mathrm{P_n}=\frac{(\mathrm{k}\rho)^{\mathrm{c}}\rho}{\mathrm{k}!\,(1-\rho)^2}\mathrm{P_0}\end{cases} \qquad (14)$$

系统运行指标平均等待时间记做W_q^M：

$$W_{\mathrm{q}}^{\mathrm{M}}=\frac{(k\rho)^k\rho}{k!\,(1-\rho)^2\lambda}P_0 \qquad (15)$$

系统运行指标平均服务时间记做W_S^M

$$W_{\mathrm{s}}^{\mathrm{M}}=\frac{(k\rho)^k\rho}{k!\,(1-\rho)^2\lambda}P_0+\frac{1}{\mu} \qquad (16)$$

具体求解算法如下：

输入：F=CAN 机场一天内起飞建立航班的具体信息
X=CAN 机场的影响因子信息
输出：k=最优化服务台数

1. Need=XQ(F)
//根据 F 求出当天 CAN 机场的出租车需求预测模型
2. N=JC(Need)
//根据需求模型求出决策模型，通过决策模型求出机场"蓄车池"每一时刻的队长上限作为排队论模型的约束
3. 通过 F 计算 m，表示当天会有多少量出租车来到机场
4. Model=M/D/k/N/m/FCFS
//初始化排队论模型
5. for k in range(1,6):

$$[L_p, L_s, W_p, W_s] = Model(k)$$

end
6. $sort(Ws)$
7. 输出使得平均服务时间 Ws 最小的最优化服务台数 k

5.4 问题四的模型建立与求解

5.4.1 问题四的模型建立

问题四可将出租车视作顾客、将乘客视作服务台，建立出租车与乘客之间的服务优先模型。对"顾客"进行优先级别划分，将短途载客再次返回的出租车视为 A 类优先级顾客，其余视为 B 类优先级顾客，A 类优先级顾客较 B 类优先级顾客先接受服务。然后建立带有优先级的 M/M/1 的排队模型。模型建立具体如下：

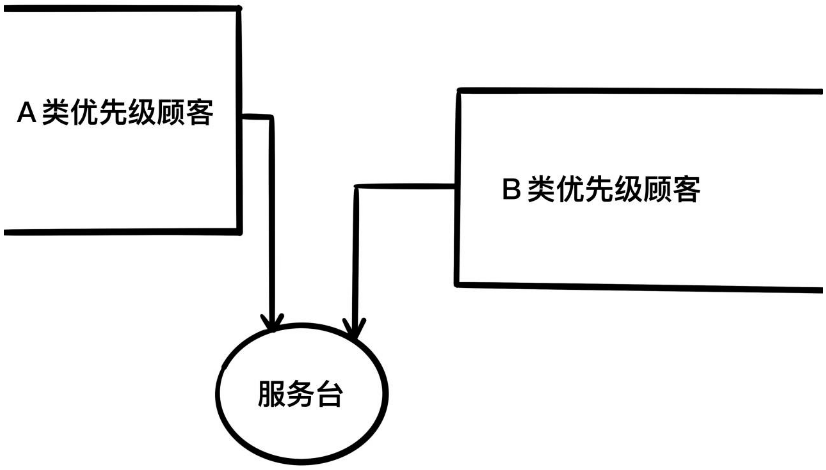
（1）A 类优先级顾客和 B 类优先级顾客的输入流是参数分别为 λ_1 和 λ_2 的 Poisson 流，并且将 B 类优先级顾客的流量控制为 K。（M/M/1 中的第一个 M）

（2）A 类优先级顾客和 B 类优先级顾客的服务时间是相互独立的，并且分别服从参数为 μ_1 和 μ_2 的负指数分布。（M/M/1 中的第二个 M）

（3）单个服务台且系统的容量无限。（M/M/1 中的 1）

（4）A 类优先级顾客具有强占优先级，即在这个带有优先级的服务系统中，A 类优先级顾客到达系统时，如果服务台空闲，那么 A 类优先级顾客可以直接接受服务（直接载客）；如果服务台正忙（正在服务 B 类优先级顾客），那么 B 类优先级顾客需要退回并继续排队等待接收服务，把服务台让给刚到系统的 A 类优先级顾客；如果服务器正在为的 A 类优先级顾客服务，那么刚回来的的 A 类优先级顾客只能继续排队等待。在整个模型中，对于优先级级别相同的顾客，必须遵循先到先服务（FCFS）的排队准则。

（5）此服务优先模型的流程图如下图所示：



令 $N_1(t)$ 表示 A 类优先级顾客，$N_2(t)$ 表示 B 类优先级顾客，那么 $N(t)=\{N_1(t),N_2(t)\}$ 就为一个二维的马尔科夫过程。该服务系统运行过程可能出现的状态有 $\Pi=\{(o,p)\,|\,0\le o,0\le p\le K\}$。假设该过程是正常返的，则当系统趋于稳定状态时，令 $P_{OP}=\lim\limits_{t\to\infty}P\{N_1(t)=o,N_2(t)=p\}$，$P_o=(P_{o0},P_{o1},P_{o2},\cdots,P_{oK}),0\le o$，从而得到系统状态平衡过后的状态转移图：

$$\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[r, shift left, "\lambda_2"] \arrow[d, shift right, "\lambda_1"'] & (0,1) \arrow[l, shift left, "\mu_2"] \arrow[r, shift left, "\lambda_2"] \arrow[d, shift right, "\lambda_1"'] & (0,K) \arrow[l, shift left, "\mu_2"] \arrow[d, shift right, "\lambda_1"'] \\
(1,0) \arrow[u, shift right, "\mu_1"'] \arrow[r, shift left, "\lambda_2"] & (1,1) \arrow[u, shift right, "\mu_1"'] \arrow[l, shift left, "\mu_2"] \arrow[r, shift left, "\lambda_2"] & (1,K) \arrow[u, shift right, "\mu_1"'] \arrow[l, shift left, "\mu_2"]
\end{tikzcd}$$

1 个服务台的排队系统达到稳态的充分必要条件是

$$\rho=(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_2})<1$$

【5】，由此得到各状态下的平稳方程。并且设 A^* 为无穷小生成矩阵，则有 $A^*=\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3$，这里，

$$\Pi_1=\begin{bmatrix}0 & E^*\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \Pi_2=\begin{bmatrix}S_0^* & 0\\ 0 & S_1^*\end{bmatrix},\quad \Pi_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ F_1^* & 0\end{bmatrix}$$

5.4.2 问题四的模型求解

通过将实际数据带入模型计算，可以得到系统达到平衡时单位时间内系统中的顾客人数（即机场管理人员安排进入乘车区的出租车数量）、单位时间内系统中正在等待的顾客人数、

单位时间内系统中正在接受服务的顾客人数。由于 A 类优先级顾客接受服务的过程不受 B 类优先级顾客的影响，所以可以直接把它看作标准的生灭过程，那么 A 类优先级顾客接受服务的排队系统就是一个典型的、不带有优先级影响的 M/M/1 排队过程，因此可以求出系统达到平衡时，单位时间内系统中的 A 类优先级顾客人数、单位时间内系统中正在等待的 A 类优先级顾客人数以及单位时间内系统中正在接受服务的 A 类优先级顾客人数，从而对短途载客再次返回的出租车的数量进行把控，使得系统中的所有出租车的收益尽量均衡，此即为所求的可行的“优先”方案。

具体求解算法如下：

```
输入: R= real-world-data in Model
输出：A=系统平衡状态下单位时间内系统中的顾客人数
      W=系统平衡状态下单位时间内系统中正在等待的顾客人数
      D=系统平衡状态下单位时间内系统中正在接受服务的顾客人数
```

```
function [A,W,D]=f(R)
f=输入实际数据后根据稳态模型进行计算，返回三个状态量
  对于每个进入系统的顾客 i
        if    i 为 B 类优先级顾客
              进行标准生灭过程
        else if    i 为 A 类优先级顾客
                 进行优先级插队过程
        end
   退出循环
end
```

6 模型检验

ARIMA 模型检验

6.1 平稳性检验

ARIMA 模型要求时间序列为平稳的。但在实际场景中收集到的客流数据是不平稳的。所以需先对不平稳的时间序列做差分，直到得到一个平稳的时间序列，将 ARIMA 模型转化为 ARMA 模型来模拟随机过程。

首先对机场乘出租车的客流数据进行 ADF 检验，原假设是存在单位根，即客流运输数据是非平稳的。利用 AIC 和 BIC 准则进行定阶得到阶数 d。当进行 d 次差分之后，支持原假设的检验值约等于 0，说明此时可以得到一个平稳的时间序列，再来选择合适的 ARMA 模型。

AIC 法则（即赤池信息准则）的定义是：

$$AIC = 2k - 2\ln(L)$$

BIC 法则（即贝叶斯信息准则）的定义是：

$$BIC = \ln(n)\cdot k - 2\ln(L)$$

在上述公式中，k 是模型参数个数，L 是似然函数，n 为样本数量。

6.2 Durbin-Watson 检验

ARIMA 是一种线性相关模型，该模型的模型残差被假定为高斯白噪声序列，在拟合残差项存在自相关性的情况下，系数估计量将会有很大的方差，模型的预测功能就被认为是失效的，所以接下来利用 Durbin-Watson 检验（德宾-沃森检验），简称 D-W 检验，对回归分析中的拟合残差项是否存在自相关性进行检验。

D-W 检验方法为：

假设模型为平稳的时间序列且随机误差项不存在一阶序列相关

假设残差项U_t可以表示为：$U_t=\rho U_{t-1}+\varepsilon$

其中，ρ是自相关系数，且$\rho\in[-1,1]$。当ρ=0，表明没有自相关性。

D-W 统计量的计算公式如下：

$$DW=\frac{\sum(U_t-U_{t-1})^2}{\sum U_t^2}\approx 2(1-\rho)$$

所以$DW\in[0,4]$

DW =0 即ρ=1，存在正自相关性

DW =4 即ρ=-1，存在负自相关性

DW =2 即ρ=0，不存在一阶自相关性

通过蒙特卡罗模拟得到 D-W 统计量的概率分布，当 DW 值在给定的显著水平下接近 0 或 4 时，则认为存在自相关性，而在给定的显著水平下接近 2 时，则认为不存在一阶自相关性，即可以根据临界值的位置对时间序列是否平稳进行检验。

通过计算，得到检验结果是 1.96，说明不存在自相关性。

7 模型评价与推广

7.1 灵敏性分析

考虑到在实际情况中，由于一些突发状况可能对模型产生影响，也很难保证建模中涉及的影响因素和一开始做出的假设都是完全正确的，因此有必要分析一下所建立的模型对影响因素和假设的敏感性。以客流需求模型为例，分别分析该模型对随机噪声项、天气影响、时间段影响和节假日影响的敏感性，详见 5.2.2 问题二的模型求解。

7.2 模型推广与分析

（1）针对问题一

建立的需求预测模型综合考虑了各项确定与不确定因素，结合了等待时间成本、出租车单位时间收益、空车回市区成本建立选择决策模型。该模型考虑实际问题较为全面，但仍忽略了突发事件对模型产生的影响，考虑时间影响时也忽略了乘客取托运行李所用的时间。

（2）针对问题二

将模型结合国内广州白云国际机场以及该城市出租车的相关实际数据，得到的测定结果拟合较好，可推广运用到国内任意机场；

（3）针对问题三

该排队模型在考虑“顾客”到达时间间隔分布满足何种规律时，不是简单地将其视作泊

松分布，而是在双行道的基础上，得出其为混合泊松分布的结论，所以求解的结果会更加精确，并且此排队模型可以通过改变“顾客”输入流的变化规律推广运用到任意交通运输点（比如火车站，高铁站）的排队乘车问题中。

（4）针对问题四

问题四在问题三的基础上由多队多服务台情况变为带有优先级的单队单服务台的情况，这不仅适用于本题中的短途载客再次返回的情况，还适用于任意带有不同优先级的排队模型。若要进一步深化模型，可以考虑研究长短途载客成本与收益对系统平衡的影响。

参考文献

[1] 时间序列分析. https://baike.so.com/doc/5195734-5427331.html，2019.09.13.

[2] 陈洁,曹克章,刘哲．南京工程学院学报(社会科学版). 15(04)：74-78,2015.

[3] 广州的士费调价方案. https://news.sina.cn/2018-01-16/detail-ifyqtycw8442961.d.html?oid=sina&vt=4&pos=3，2019.09.14.

[4] 米尔斯切特.数学建模方法与分析.北京：机械工业出版社，2014.

[5] 赵国喜，朱翼隽，庄斌.不耐烦等待信元的优先权排队.江苏大学学报，24(06)：5-8，2003.

附录：
数据清洗代码：

```python
import gzip
import io

def gzip_str(string_):
    out = io.BytesIO()

    with gzip.GzipFile(fileobj=out, mode='w') as fo:
        fo.write(string_.encode())

    bytes_obj = out.getvalue()
    return bytes_obj

def gunzip_bytes_obj(bytes_obj):
    in_ = io.BytesIO()
    in_.write(bytes_obj)
    in_.seek(0)
    with gzip.GzipFile(fileobj=in_, mode='rb') as fo:
        gunzipped_bytes_obj = fo.read()

    return gunzipped_bytes_obj.decode()


string_ = 'String encoding = System.getProperty("file.encoding", "UTF-8");'

gzipped_bytes = gzip_str(string_)

original_string = gunzip_bytes_obj(gzipped_bytes)
print(gzipped_bytes,original_string)
```

需求模型的建立