

Modelisation CPPI

WANG Hengze , ZHU Ruoqi

Table des matières

Introduction	3
I. Modélisation de la Stratégie CPPI	4
I.1. Principe Fondamental de la Stratégie CPPI	5
I.2. Modélisation de la stratégie CPPI	6
I.2.1. Cadre en temps continu	6
a. Notations et relations fondamentales	6
b. Algorithme de la stratégie	6
c. Cadre gaussien (modèle de Black-Scholes)	7
d. Valeur à maturité V_T	7
e. Espérance et variance dans le cadre gaussien	8
I.2.2. Cadre en temps discret	8
a. Hypothèses générales du cadre discret	8
b. Instant de franchissement du plancher	9
c. Proposition : Processus du coussin en temps discret	9
d. Formule du coussin et dynamique récursive	9
e. Allocation en unités d'actifs	9
II. Implémentation de la Stratégie CPPI	11
2.1. Simulation numérique en temps continu	11
2.1.1. Simulation d'une trajectoire	11
2.1.2. Simulation de 100 trajectoires	12
2.1.3. Comparaison entre espérance théorique et espérance simulée	13
2.2. Simulation numérique en temps discret	14
2.2.1. Simulation d'une trajectoire	14
2.2.2. Simulation de 100 trajectoires	15
2.3. Comparaison entre la stratégie CPPI en temps continu et en temps discret	16
III. Analyse des Risques dans la Strégie CPPI	19
3.1 Formulation discrète de la stratégie	19
3.2 Métriques de risque principales	19
3.2.1 Lemme : Structure des événements	20
3.3 Shortfall attendu : expression fermée	20
3.4 Espérance et variance de la richesse finale	20
3.4.1 Espérance	20

3.4.2 Variance	21
3.5 Analyse de sensibilité	21
3.6 Convergence vers le cadre continu	21
3.7 Optimalité de la stratégie CPPI	22
IV. La fonctionnalité de cliquet (Ratchet Feature) dans la stratégie CPPI	25
4.1 Motivation et définition	25
4.2 Formulation mathématique	25
4.2.1 Propriété de dépendance au chemin (Path-dependency)	26
Espérance de V_T avec ratchet	26
Risque et variance	26
4.3 Effets sur la performance et la protection	26
4.4 Utilisation dans les produits financiers	27
4.5 Limites et considérations pratiques	27
4.6 Analyse numérique des distributions finales	28
V. Gestion des risques dans la stratégie CPPI	29
5.1 Motivation générale : Pourquoi contrôler le risque dans une stratégie CPPI ?	29
5.2 Comment contrôler dynamiquement le multiplicateur m ?	29
5.3 Stratégies avancées de lissage et contraintes supplémentaires	30
5.4 Expérimentations numériques : effets des mécanismes de contrôle	31
VI. Extensions de la stratégie CPPI aux dynamiques discontinues	35
6.1 Limites du cadre brownien et motivation pour les modèles à sauts	35
6.2 Modélisation des sauts : le modèle de Kou	35
6.3 Application au CPPI : vulnérabilité face aux sauts	37
6.4 Changement de numéraire et calcul de la probabilité de perte	37
6.5 Résultat central : probabilité de perte avec sauts	39
6.6 Exemple : calcul explicite de la probabilité de perte dans le modèle de Kou	40
VII. Vers un modèle complet de CPPI avec couverture des risques extrêmes	42
7.1 Introduction : Comprendre le risque de queue dans le CPPI	42
7.2 Modélisation intégrée du CPPI avec risques extrêmes	43
7.3 Les outils de couverture	45
7.4 Simulation comparative : efficacité des outils de couverture	46
Conclusion	51

Introduction

Dans un contexte de volatilité accrue des marchés financiers, la protection du capital tout en conservant un potentiel de rendement constitue un enjeu central pour les investisseurs institutionnels et particuliers. Parmi les outils développés pour répondre à cette problématique, la stratégie CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance) s'impose comme une méthode robuste d'assurance de portefeuille. Ce rapport propose une analyse approfondie de cette stratégie à travers une modélisation stochastique rigoureuse et une implémentation opérationnelle.

L'originalité de cette étude réside dans son approche duale combinant théorie financière et validation pratique. Contrairement aux présentations purement conceptuelles, nous démontrons comment les équations différentielles stochastiques en temps continu se transposent en algorithmes numériques exploitables, tout en identifiant les écarts entre modèle théorique et réalité de marché. Notre analyse met particulièrement en lumière les risques spécifiques induits par les rééquilibrages discrets, aspect souvent négligé dans la littérature académique.

L'étude articule une formalisation mathématique du CPPI dans les cadres continu – via le prisme du modèle de Black-Scholes – et discret, en explorant les implications théoriques de chaque approche *tout en* confrontant leurs hypothèses aux limites opérationnelles des marchés réels. Le développement d'un simulateur Python permet d'incarner ces modèles, *sans négliger* les frictions telles que les coûts de transaction ou les illiquidités ponctuelles, *tandis qu'une* analyse comparative systématique interroge la résilience de la stratégie face à des régimes de marché antagonistes – haussiers, baissiers ou chaotiques.

Dans quelle mesure l'arbitrage théorique entre protection du capital et performance, au cœur du CPPI, résiste-t-il aux discontinuités des marchés réels ? Comment les paramètres clés (multiplicateur, fréquence de rééquilibrage) et les coûts opérationnels influencent-ils l'efficacité réelle de la stratégie, notamment dans des contextes de crise où les hypothèses de continuité et de liquidité s'effondrent ?

Ce rapport s'articule en cinq sections. La Section II présente les fondements théoriques du CPPI et son formalisme stochastique. La Section III détaille l'implémentation numérique et les choix algorithmiques. La Section IV analyse les résultats de simulation selon divers scénarios économiques. Enfin, la Section V discute des implications pratiques et des voies d'amélioration potentielles.

I. Modélisation de la Stratégie CPPI

I.1. Principe Fondamental de la Stratégie CPPI

La stratégie d'assurance de portefeuille à proportion constante (**Constant Proportion Portfolio Insurance**, ou **CPPI**) est une méthode d'allocation dynamique d'actifs, visant à participer à la performance des actifs risqués tout en protégeant un niveau minimum de richesse. Cette approche permet d'équilibrer la préservation du capital et la recherche de rendement, et elle est largement utilisée dans les fonds de pension, les produits d'assurance et les instruments financiers à capital garanti.

La stratégie CPPI repose sur une idée centrale : il est possible d'investir dans des actifs risqués tout en assurant une garantie de capital, à condition d'ajuster dynamiquement l'allocation du portefeuille en fonction des conditions de marché. Pour cela, la méthode s'appuie sur cinq éléments fondamentaux.

Tout d'abord, le **plancher** (*floor*) représente le niveau minimal de richesse que l'investisseur souhaite garantir à l'échéance. Il est généralement défini comme une fraction fixe du capital initial et constitue une protection contre les pertes en capital. La différence entre la valeur du portefeuille et ce plancher constitue le **coussin de sécurité** (*cushion*), c'est-à-dire la part du capital que l'on accepte de risquer sur les marchés volatils.

Sur cette base, un **multiplicateur** (souvent strictement supérieur à 1) est appliqué au coussin pour déterminer le montant investi dans les actifs risqués. Un multiplicateur élevé permet de viser un rendement plus important, mais accroît également la sensibilité du portefeuille à la volatilité des marchés. Ainsi, plus le coussin est élevé, plus la part allouée aux actifs risqués augmente ; à l'inverse, en période de baisse, l'exposition est réduite afin de protéger le capital.

Les **actifs risqués** regroupent typiquement des instruments à fort potentiel de rendement mais également à forte volatilité, comme les actions, indices boursiers ou matières premières. Ils sont la principale source de performance du portefeuille. Enfin, les **actifs sans risque**, tels que les obligations souveraines ou les instruments monétaires, sont utilisés pour sécuriser la partie du portefeuille correspondant au plancher, garantissant ainsi la protection du capital investi.

Dans l'ensemble, la stratégie CPPI, grâce à sa simplicité structurelle, son contrôle du risque et ses caractéristiques de protection du capital, offre un compromis efficace entre sécurité et performance. Elle constitue une approche d'investissement à la fois prudente et ambitieuse.

I.2. Modélisation de la stratégie CPPI

I.2.1. Cadre en temps continu

Dans cette section, nous présentons un cadre de modélisation mathématique de la stratégie CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance) en temps continu, en nous appuyant sur des hypothèses classiques issues de la théorie financière.

a. Notations et relations fondamentales

texte en italique Nous introduisons les notations suivantes pour formaliser la stratégie :

- G : le capital garanti
- V_t : valeur totale du portefeuille à l'instant t
- F_t : plancher (floor), représentant la valeur minimale garantie à l'échéance
- $C_t = V_t - F_t$: coussin (cushion), soit la partie au-dessus du plancher pouvant être exposée au risque
- E_t : exposition à l'actif risqué
- M_t : exposition à l'actif sans risque
- m : multiplicateur fixé ex ante, traduisant l'agressivité de la stratégie

Les relations de base entre ces quantités sont les suivantes :

$$V_t = E_t + M_t, \quad C_t = V_t - F_t, \quad E_t = m \cdot C_t$$

Ces formules traduisent le principe central de la stratégie : une proportion constante du coussin est investie dans l'actif risqué.

b. Algorithme de la stratégie

La stratégie évolue de manière dynamique en fonction de la valeur du portefeuille par rapport au plancher :

- Si $V_t > F_t$, une partie du coussin est allouée à l'actif risqué selon le multiplicateur :

$$E_t = m(V_t - F_t)$$

- Si $V_t \leq F_t$, tout le capital est réalloué dans l'actif sans risque, afin de garantir la protection du plancher.

c. Cadre gaussien (modèle de Black-Scholes)

Nous considérons maintenant un modèle stochastique plus réaliste dans lequel le prix de l'actif risqué suit une dynamique de type Black-Scholes :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad \frac{dB_t}{B_t} = r dt$$

Dans ce cadre, la dynamique du portefeuille s'écrit :

$$dV_t = m(V_t - F_t) \frac{dS_t}{S_t} + (V_t - m(V_t - F_t)) r dt$$

Sous forme développée :

$$dV_t = [rV_t + m(\mu - r)(V_t - F_t)] dt + m\sigma(V_t - F_t) dW_t$$

Cette EDS non linéaire révèle deux propriétés clés :

1. **Effet de levier asymétrique** : Le terme de diffusion $m\sigma(V_t - F_t)$ amplifie la volatilité proportionnellement au coussin
2. **Dérive conditionnelle** : La dérive dépend à la fois du taux sans risque et de la prime de risque ajustée par le multiplicateur

Cette équation peut se réécrire en termes de dynamique du coussin :

$$\frac{dC_t}{C_t} = (m\mu + (1 - m)r) dt + m\sigma dW_t$$

Elle montre que le coussin suit une équation différentielle stochastique de type Black-Scholes, avec un coefficient de diffusion amplifié par le multiplicateur m .

d. Valeur à maturité V_T

La valeur du portefeuille à l'échéance peut être exprimée de manière fermée dans ce cadre :

$$V_T = G + (V_0 - Ge^{-rT}) \cdot \exp \left(rT + m(\mu - r)T + m\sigma W_T - \frac{1}{2}m^2\sigma^2T \right)$$

Cette expression peut aussi s'écrire sous forme factorisée :

$$V_T = G + (V_0 - Ge^{-rT}) \cdot C_m \left(\frac{S_T}{S_0} \right)^m$$

avec :

$$C_m = \exp \left((1 - m) \left(r + \frac{m\sigma^2}{2} \right) T \right)$$

Ce résultat met en évidence l'effet de levier introduit par le multiplicateur m sur la croissance du portefeuille.

e. Espérance et variance dans le cadre gaussien

Nous analysons à présent les moments de la distribution de V_t dans ce cadre stochastique.

La valeur du portefeuille à tout instant t est donnée par :

$$V_t = F_t + C_0 \exp \left(rt + m(\mu - r)t + m\sigma W_t - \frac{1}{2}m^2\sigma^2 t \right)$$

L'espérance de V_t s'écrit alors :

$$\mathbb{E}(V_t) = F_t + C_0 e^{rt+m(\mu-r)t}$$

et la variance est donnée par :

$$\mathbb{V}(V_t) = C_0^2 e^{2(rt+m(\mu-r)t)} (e^{m^2\sigma^2 t} - 1)$$

Ces résultats montrent que, dans ce cadre idéal, la stratégie ne franchit jamais le plancher. Toutefois, cette conclusion repose sur des hypothèses fortes (rééquilibrage continu, absence de coûts de transaction, liquidité parfaite) qui limitent l'applicabilité du modèle dans la réalité.

I.2.2. Cadre en temps discret

Dans la pratique, la stratégie CPPI est souvent mise en œuvre en temps **discret**, et non de manière continue comme dans les modèles théoriques. Ce cadre discret introduit des limitations pratiques importantes, notamment la possibilité que la garantie ne soit plus assurée si le portefeuille touche le plancher entre deux instants de rééquilibrage.

a. Hypothèses générales du cadre discret

- L'intervalle de temps $[0, T]$ est discrétisé en N sous-intervalles équidistants :

$$\tau = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T\}, \quad \text{où } t_k = \frac{kT}{N}$$

- Le nombre d'unités (titres) détenues dans les actifs est maintenu constant entre deux dates t_i et t_{i+1} .
- Le rééquilibrage s'effectue uniquement aux dates t_k .
- La stratégie peut être arrêtée si le portefeuille atteint le plancher (cash-in).

b. Instant de franchissement du plancher

On définit le premier instant t_s où le portefeuille touche ou franchit le plancher :

$$t_s := \min\{t_k \in \tau \mid V_{t_k} - F_{t_k} \leq 0\}$$

Si ce minimum n'est jamais atteint, alors $t_s = \infty$.

c. Proposition : Processus du coussin en temps discret

Sous ces hypothèses, l'évolution du portefeuille à l'instant t_{k+1} est donnée par :

$$V_{t_{k+1}}^\tau = e^{r(t_{k+1} - \min\{t_s, t_{k+1}\})} (V_{t_0} - F_{t_0}) \prod_{i=1}^{\min\{s, k+1\}} \left(m \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} - (m-1)e^{\frac{rT}{N}} \right)$$

Cette expression modélise l'impact discret du levier sur l'évolution du portefeuille, sous la contrainte de non-franchissement du plancher.

d. Formule du coussin et dynamique récursive

Le coussin à l'instant t_{k+1} peut être exprimé comme :

$$C_{t_{k+1}} = e^{r(t_{k+1} - \min\{t_s, t_{k+1}\})} (V_{t_0} - F_{t_0}) \prod_{i=1}^{\min\{s, k+1\}} \left(m \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} - (m-1)e^{\frac{rT}{N}} \right)$$

Ou de manière récursive :

$$V_{t_{k+1}}^\tau - F_{t_{k+1}} = \begin{cases} (V_{t_k} - F_{t_k}) \left(m \frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} - (m-1)e^{\frac{rT}{N}} \right), & \text{si } V_{t_k} - F_{t_k} > 0 \\ (V_{t_k} - F_{t_k}) e^{\frac{rT}{N}}, & \text{si } V_{t_k} - F_{t_k} \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Cette forme met en évidence l'effet multiplicatif de la performance de l'actif risqué et le mécanisme de protection lorsque le coussin devient nul ou négatif.

e. Allocation en unités d'actifs

Dans le cadre discret, il est plus pertinent de raisonner en **nombre d'unités** (titres) détenues plutôt qu'en montants.

Soit :

- η_t : nombre d'unités de l'actif risqué détenues à l'instant t
- β_t : nombre d'unités de l'actif sans risque (obligations)

On a alors :

$$\begin{cases} \eta_t = \frac{\alpha_t V_t}{S_t} = \frac{m C_t}{S_t} \\ \beta_t = \frac{(1 - \alpha_t) V_t}{B_t} = \frac{V_t - m C_t}{B_t} \end{cases}$$

où α_t désigne la fraction de richesse allouée à l'actif risqué.

Ces relations permettent de déterminer la composition exacte du portefeuille à chaque instant de rééquilibrage.

Le cadre discret reflète davantage la réalité des marchés, dans laquelle les rééquilibrages ne peuvent être effectués en continu. Il constitue un compromis entre la rigueur théorique du modèle continu et les contraintes opérationnelles observées en pratique.

II. Implémentation de la Stratégie CPPI

2.1. Simulation numérique en temps continu

2.1.1. Simulation d'une trajectoire

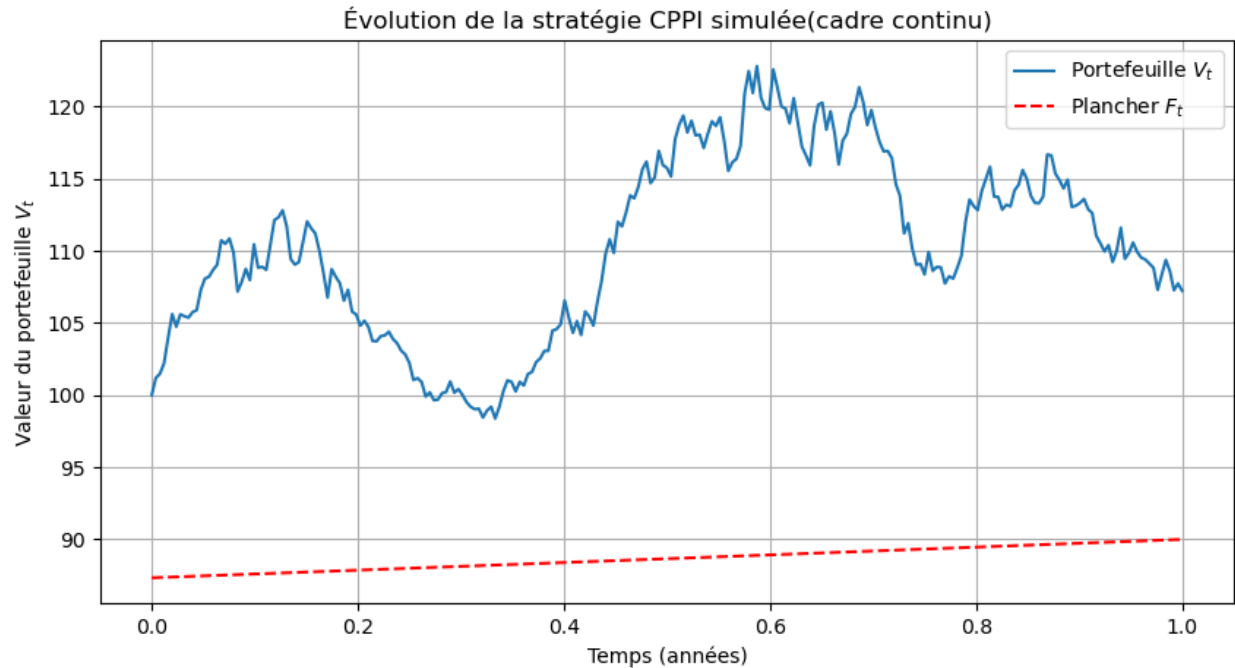
Après avoir établi le cadre théorique de la stratégie CPPI dans un modèle stochastique de type Black-Scholes, nous proposons ici une implémentation numérique permettant de simuler l'évolution du portefeuille dans ce contexte.

L'objectif est de reproduire, à l'aide de la formule analytique obtenue dans la section précédente, la trajectoire de la valeur du portefeuille V_t en fonction du temps, en prenant en compte les paramètres du modèle : taux sans risque r , rendement espéré de l'actif risqué μ , volatilité σ et multiplicateur m . Le coussin initial C_0 est défini comme l'écart entre la valeur initiale du portefeuille et le plancher actualisé à $t = 0$.

Nous utilisons une simulation de trajectoire brownienne pour construire un chemin possible de W_t , puis calculons la valeur correspondante de V_t à chaque instant. Le plancher F_t est également actualisé au fil du temps, et nous visualisons les deux courbes afin de vérifier le comportement de la stratégie dans un cadre idéal.

La valeur de portefeuille V_t est donnée par :

$$V_t = F_t + C_0 \cdot \exp \left(rt + m(\mu - r)t + m\sigma W_t - \frac{1}{2}m^2\sigma^2t \right)$$



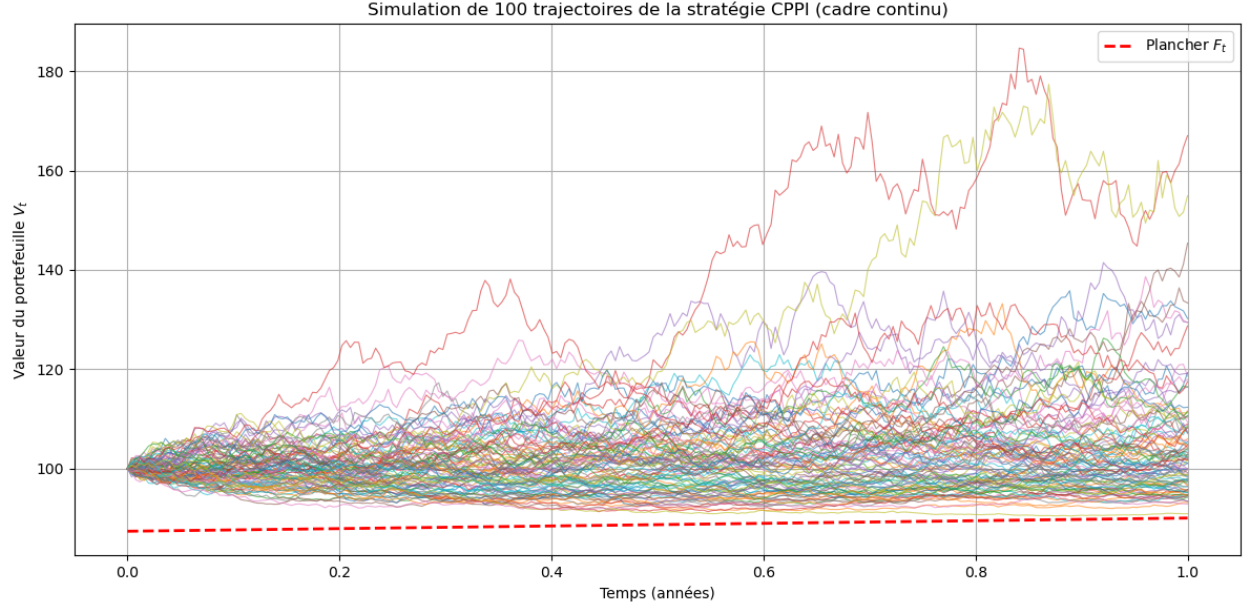
La courbe bleue représente la valeur du portefeuille V_t , tandis que la ligne pointillée rouge représente le plancher F_t , c'est-à-dire la valeur minimale garantie. On observe que la valeur du portefeuille reste systématiquement au-dessus du plancher, ce qui est cohérent avec la théorie de la stratégie CPPI en temps continu.

La trajectoire de V_t est influencée par la réalisation du mouvement brownien simulé, via le terme stochastique dans l'exponentielle. La volatilité est donc amplifiée par le multiplicateur m , qui agit comme un levier sur la performance du portefeuille. Ici, avec un multiplicateur fixé à 4, on observe une croissance rapide de la valeur du portefeuille lorsque les conditions de marché sont favorables.

2.1.2. Simulation de 100 trajectoires

Après avoir observé l'évolution d'une trajectoire unique de la stratégie CPPI à partir de la formule analytique obtenue, il est pertinent d'étendre cette analyse à un cadre plus général.

En effet, une trajectoire isolée ne permet pas d'évaluer pleinement la robustesse de la stratégie face à l'aléa de marché. Pour cela, nous procédons à une simulation de type Monte Carlo, générant un grand nombre de trajectoires indépendantes du portefeuille. Cette approche permet d'examiner la distribution des valeurs terminales, de visualiser la dispersion autour du plancher et de mieux comprendre le comportement global de la stratégie dans un environnement incertain.



Le graphique ci-dessus illustre la simulation de 100 trajectoires possibles de la valeur d'un portefeuille géré selon la stratégie CPPI, dans un cadre en temps continu. Chaque courbe correspond à une trajectoire issue d'un mouvement brownien simulé, en appliquant la formule fermée de la valeur du portefeuille V_t .

La ligne pointillée rouge représente le plancher F_t , actualisé à chaque instant. Comme le montre le graphique, **aucune des trajectoires ne franchit le plancher**, ce qui confirme l'une des propriétés fondamentales du modèle continu : en l'absence de contraintes pratiques (frais, temps discret, liquidité...), le capital minimal est toujours protégé.

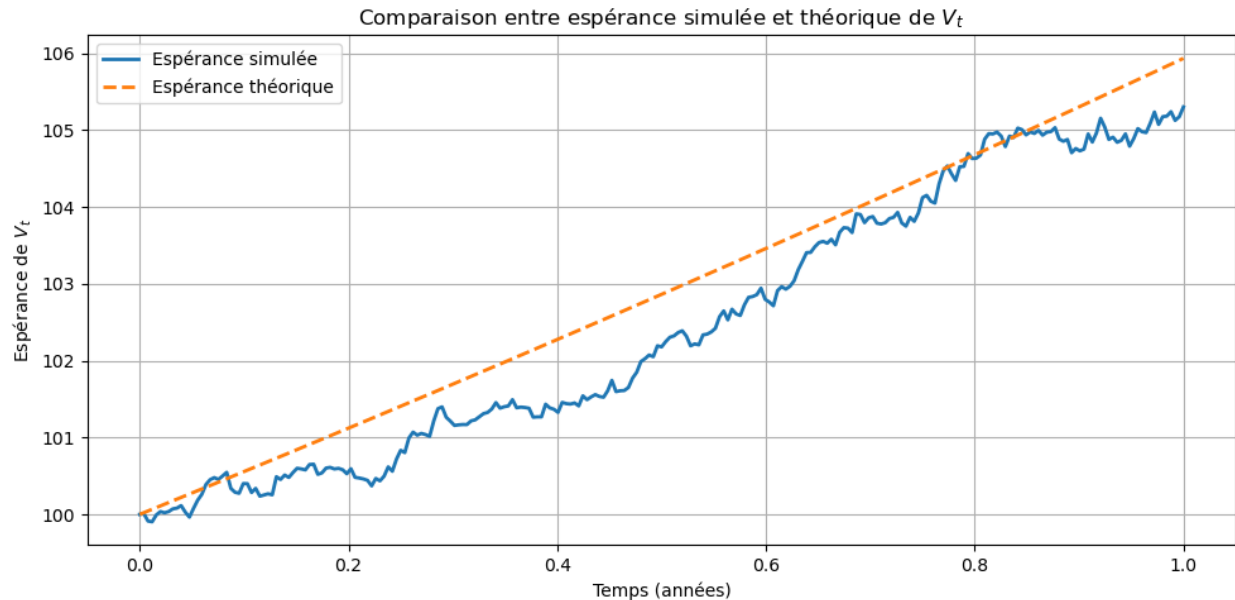
Cette simulation met également en évidence la diversité des performances du portefeuille selon les scénarios de marché, tout en respectant la contrainte de protection, grâce à l'effet du coussin et du multiplicateur m dans l'allocation dynamique entre actifs risqués et sans risque.

2.1.3. Comparaison entre espérance théorique et espérance simulée

Afin d'évaluer la validité du modèle de CPPI en temps continu sous hypothèse de Black-Scholes, nous avons précédemment simulé 100 trajectoires de la valeur du portefeuille V_t à l'aide de la formule fermée dérivée dans le cadre gaussien.

Il est désormais pertinent de comparer l'espérance empirique obtenue par simulation Monte Carlo à l'espérance théorique calculée analytiquement, donnée par :

$$\mathbb{E}(V_t) = F_t + C_0 \cdot e^{rt+m(\mu-r)t}$$



On observe que la courbe représentant l'espérance simulée (en bleu) suit globalement la tendance de la courbe théorique (en orange pointillé), avec quelques fluctuations dues à la variabilité inhérente à l'échantillon de trajectoires simulées. Plus le nombre de simulations augmente, plus cette courbe devrait converger vers la courbe théorique, conformément à la loi des grands nombres.

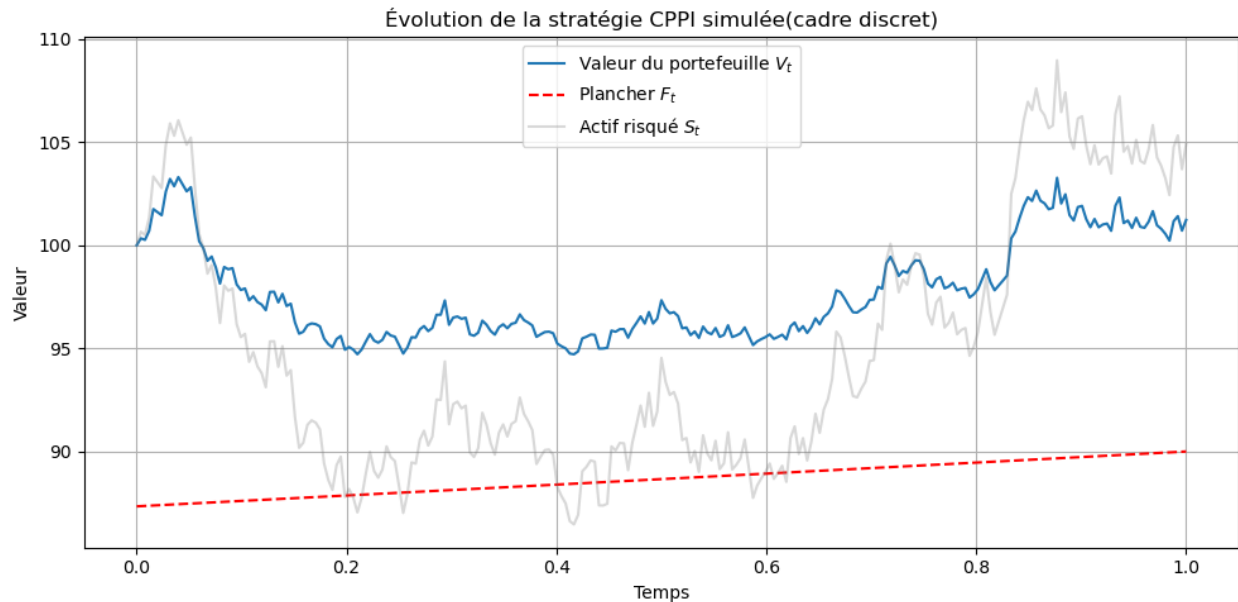
La légère sous-estimation observée sur certains intervalles intermédiaires peut s'expliquer par une variance encore non négligeable sur un échantillon de taille limitée. Toutefois, la cohérence globale entre les deux courbes valide à la fois l'implémentation numérique et le modèle analytique de la stratégie CPPI en temps continu.

2.2. Simulation numérique en temps discret

2.2.1. Simulation d'une trajectoire

Après avoir mis en œuvre la simulation de la stratégie CPPI en temps continu, il est important de confronter cette approche théorique à une modélisation plus réaliste en temps discret. En effet, dans la pratique, les rééquilibrages ne peuvent être effectués en continu, ce qui peut introduire un risque supplémentaire pour l'investisseur.

Nous proposons donc, dans un second temps, une simulation en temps discret reposant sur un réajustement périodique de l'allocation entre actifs risqué et sans risque. Cette approche nous permettra d'étudier les effets de la discrétisation sur la performance et la sécurité de la stratégie CPPI.



Ce graphique illustre l'évolution de la stratégie CPPI dans un cadre discret, sur une trajectoire simulée de marché. On y observe trois courbes principales :

- La courbe bleue représente la valeur du portefeuille V_t , calculée à chaque date de rééquilibrage.
- La courbe rouge en pointillés correspond au plancher F_t , c'est-à-dire le niveau minimum garanti à l'échéance.
- La courbe grise, plus volatile, représente l'évolution de l'actif risqué S_t .

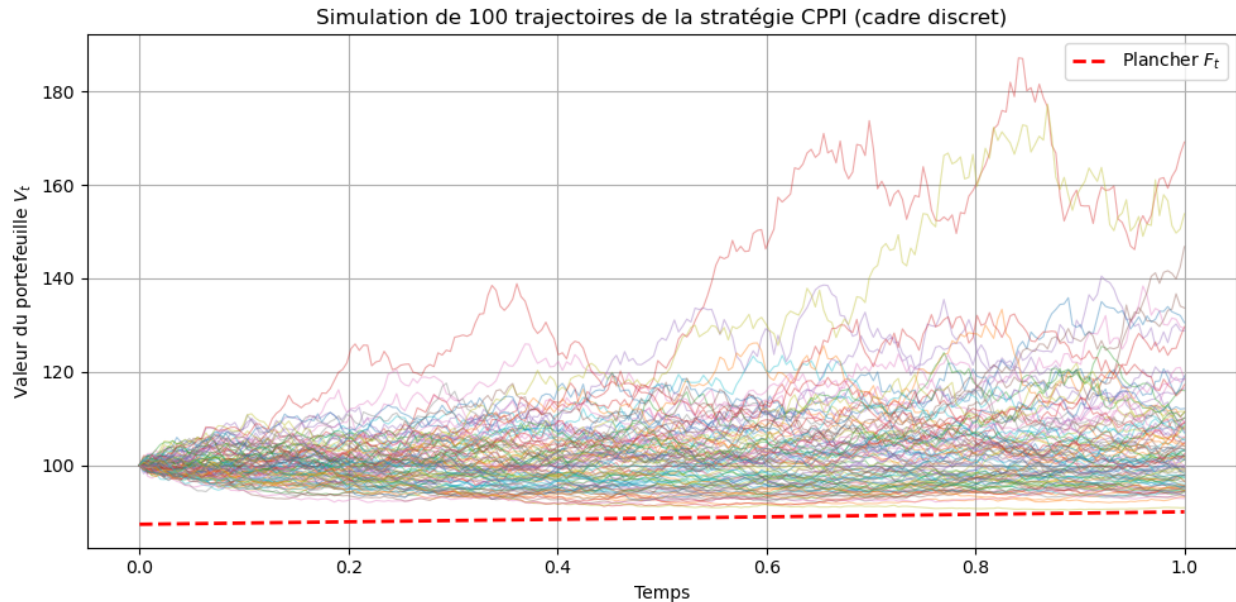
On constate que la valeur du portefeuille suit une dynamique beaucoup plus stable que celle de l'actif risqué, confirmant le rôle protecteur de la stratégie CPPI. Lorsque S_t baisse fortement (autour de $t = 0.2$), V_t diminue également, mais reste toujours au-dessus du plancher, traduisant le mécanisme de désengagement progressif de l'actif risqué à mesure que le coussin se réduit.

Vers la fin de l'horizon ($t \approx 0.8$), le redressement de l'actif risqué entraîne une remontée de la valeur du portefeuille, qui avait conservé un certain potentiel de rebond. L'ensemble du graphique confirme ainsi l'efficacité de la stratégie CPPI à limiter les pertes tout en permettant de capter une partie de la performance haussière des marchés, même dans un cadre de rééquilibrage discret.

2.2.2. Simulation de 100 trajectoires

Après avoir analysé en détail l'évolution d'une trajectoire unique sous la stratégie CPPI en temps discret, il est essentiel d'étendre l'étude à un ensemble plus large de scénarios de marché.

Nous proposons donc une simulation de 100 trajectoires indépendantes, afin de mieux appréhender la distribution des résultats possibles à l'échéance et de quantifier les caractéristiques statistiques clés du portefeuille.



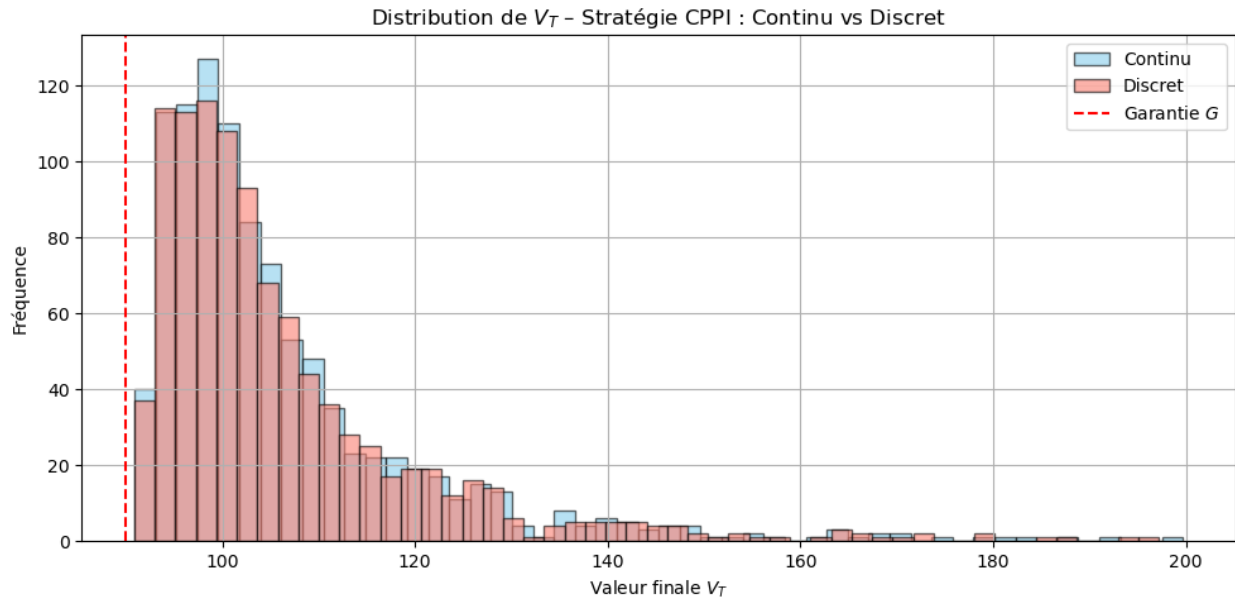
On observe que, malgré la forte volatilité de certaines trajectoires de marché, la majorité des portefeuilles reste nettement au-dessus du plancher tout au long de l'horizon. Cela illustre bien le rôle central de la stratégie CPPI dans la protection du capital investi. En cas de forte baisse de l'actif risqué, l'exposition est automatiquement réduite afin de préserver la valeur minimale garantie.

Cependant, quelques trajectoires semblent frôler le plancher, voire s'en rapprocher dangereusement. Cela traduit l'impact du rééquilibrage discret : entre deux dates d'ajustement, une chute brutale de l'actif risqué peut entraîner une perte non anticipée, appelée "gap risk". Cette visualisation met donc en lumière à la fois l'efficacité globale du mécanisme de protection, et les limites induites par la fréquence discrète des réallocations.

2.3. Comparaison entre la stratégie CPPI en temps continu et en temps discret

Après avoir simulé 100 trajectoires de la stratégie CPPI dans un cadre discret, il est pertinent de comparer les performances obtenues à celles issues du modèle théorique en temps continu.

Dans cette section, nous confrontons les résultats issus de la modélisation stochastique continue, fondée sur la solution analytique du portefeuille, à ceux issus d'une simulation en temps discret avec rééquilibrage périodique. En utilisant un même ensemble de trajectoires de marché, nous évaluons les différences en termes de valeur finale du portefeuille, de comportement global et de robustesse face au risque de "cash-in".



=== Comparaison statistique entre CPPI continu et discret ===

Cadre	Moyenne	Médiane	Min	Max	Volatilité	Cash-in
Continu	106.197300	101.685181	90.893801	199.732185	14.635055	-
Discret	106.204683	101.795724	90.881262	197.208084	14.640528	0.00%

Le graphique et le tableau ci-dessus présentent une comparaison détaillée basée sur 1000 simulations de la stratégie CPPI appliquée dans deux cadres distincts : un cadre théorique en temps continu, basé sur un rééquilibrage permanent du portefeuille, et un cadre discret, plus proche de la réalité, où les ajustements sont effectués quotidiennement sur une période d'un an.

Visuellement, les distributions finales des valeurs du portefeuille V_T dans les deux cadres apparaissent très similaires. Les histogrammes se superposent presque parfaitement, montrant une répartition asymétrique à droite caractéristique des stratégies avec effet de levier. Le seuil de garantie fixé à $G = 90$ est représenté par une ligne verticale en pointillé rouge et, comme le montre l'histogramme, aucune trajectoire ne descend en dessous de ce niveau, ni dans le cadre continu, ni dans le cadre discret.

Sur le plan quantitatif, les résultats sont également très proches. La moyenne des valeurs finales est identique dans les deux cas, autour de 106.20, tandis que la médiane est légèrement plus élevée dans le cas discret (101.80 contre 101.69). Les valeurs extrêmes sont également similaires : les minimums se situent juste au-dessus de la garantie, confirmant l'absence de cash-in, et les maximums sont légèrement plus élevés dans le cadre continu, probablement en raison de la réactivité immédiate du rééquilibrage aux hausses de marché. Les volatilités sont pratiquement égales (14.64), indiquant une dispersion similaire autour de la moyenne. Enfin, le taux de cash-in dans le cadre discret est nul, ce qui témoigne de la robustesse de la stratégie même dans un contexte de rééquilibrage par pas de temps finis.

En conclusion, cette simulation met en évidence que la stratégie CPPI, lorsqu'elle est appliquée avec une fréquence de rééquilibrage suffisamment élevée, permet de reproduire fidèlement les résultats théoriques du modèle continu. Le cadre discret offre donc un compromis très satisfaisant entre réalisme opérationnel et efficacité financière, tant en matière de performance que de protec-

tion du capital.

III. Analyse des Risques dans la Stratégie CPPI

La stratégie CPPI, bien qu'ayant pour objectif principal la protection du capital, n'est pas exempte de risques, en particulier lorsque celle-ci est mise en œuvre dans un cadre discret. Contrairement au modèle théorique en temps continu dans lequel le coussin ne peut jamais devenir négatif, le rééquilibrage à fréquence finie rend possible une violation du plancher. Cela conduit à introduire un ensemble de métriques de risque permettant d'évaluer la robustesse et la performance réelle de la stratégie CPPI dans des conditions de marché réalistes.

Convention : Dans cette section, toutes les grandeurs sont évaluées selon une grille de rééquilibrage discrète $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_N = T\}$. Les processus associés sont notés $V_t^\tau, C_t^\tau, F_t^\tau$ pour la valeur du portefeuille, le coussin, et le plancher, respectivement.

3.1 Formulation discrète de la stratégie

La stratégie CPPI est définie à chaque intervalle $t \in (t_k, t_{k+1}]$ par le couple $\phi_t^\tau = (\eta_t^\tau, \beta_t^\tau)$ donné par :

$$\eta_t^\tau = \min \left(\max \left(\frac{mC_t^\tau}{S_t}, 0 \right), \frac{V_t^\tau}{S_t} \right), \quad \beta_t^\tau = \frac{V_t^\tau - \eta_t^\tau S_t}{B_t}$$

Cette formulation garantit que l'exposition à l'actif risqué reste non-négative et respecte la contrainte de richesse totale.

3.2 Métriques de risque principales

Trois indicateurs fondamentaux permettent d'évaluer la robustesse de la stratégie CPPI :

- **Probabilité de brèche finale du plancher :**

$$P^{\text{BF}} := \mathbb{P}(V_T^\tau \leq G) = \mathbb{P}(V_T^\tau \leq F_T^\tau)$$

- **Probabilité locale de brèche entre deux dates :**

$$P_{t_i, t_{i+1}}^{\text{LBF}} := \mathbb{P}(V_{t_{i+1}}^\tau \leq F_{t_{i+1}}^\tau \mid V_{t_i}^\tau > F_{t_i}^\tau)$$

- Shortfall attendu conditionnel :

$$ES := \mathbb{E}[G - V_T^r \mid V_T^r \leq G]$$

Les liens logiques entre ces probabilités reposent sur l'analyse des événements successifs de survie ou brèche, en particulier grâce au lemme suivant.

3.2.1 Lemme : Structure des événements

On définit :

$$A_k := \left\{ \frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} \geq \frac{m-1}{m} e^{rT/N} \right\}, \quad \text{pour } k = 1, \dots, N$$

Alors :

$$\{t_k > t_i\} = \bigcap_{j=1}^i A_j, \quad \{t_k = t_i\} = A_i^c \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j$$

Cela implique :

$$P_{t_i, t_{i+1}}^{\text{LBF}} = \mathbb{P}(t_s = t_{i+1} \mid t_s > t_i)$$

3.3 Shortfall attendu : expression fermée

En utilisant la définition, on a :

$$ES = G - \frac{\mathbb{E}[V_T^r \cdot \mathbf{1}_{\{t_s \leq T\}}]}{P^{\text{BF}}}$$

Or, la valeur attendue $\mathbb{E}[V_T^r]$ admet une expression fermée, ce qui permet d'obtenir :

$$ES = G - \frac{(V_0 - F_0)e^{-rT/N} E_2 \cdot \frac{e^{rT} - E_1^N}{1 - E_1 e^{-rT/N}}}{P^{\text{BF}}}$$

3.4 Espérance et variance de la richesse finale

3.4.1 Espérance

$$\mathbb{E}[V_T^r] = G + (V_0 - F_0) \left[E_1^N + e^{-T/N} E_2 \cdot \frac{e^{rT} - E_1^N}{1 - E_1 e^{-rT/N}} \right]$$

avec :

$$\begin{aligned} E_1 &:= m^{\mu T/N} \mathcal{N}(d_1) - e^{rT/N} (m-1) \mathcal{N}(d_2) \\ E_2 &:= e^{rT/N} [1 + m(e^{(\mu-r)T/N} - 1)] - E_1 \end{aligned}$$

3.4.2 Variance

$$\text{Var}[V_T^r] = (V_0 - F_0)^2 \left[\tilde{E}_1^N + e^{-2rT/N} \tilde{E}_2 \cdot \frac{e^{2rT} - \tilde{E}_1^N}{1 - \tilde{E}_1 e^{-2rT/N}} \right] - (\mathbb{E}[V_T^r] - G)^2$$

avec :

$$\tilde{E}_1 := m^2 e^{(2\mu + \sigma^2)T/N} \mathcal{N}(d_3) - 2m(m-1)e^{(\mu+r)T/N} \mathcal{N}(d_1) + (m-1)^2 e^{2rT/N} \mathcal{N}(d_2)$$

$$\tilde{E}_2 := m^2 e^{(2\mu + \sigma^2)T/N} - 2m(m-1)e^{(\mu+r)T/N} + (m-1)^2 e^{2rT/N} - \tilde{E}_1$$

où,

$$\begin{aligned} d_1 &= d_2 + \sigma \sqrt{T/N}, \\ d_2 &= \frac{\ln(m/(m-1)) + (\mu - r)T/N - \frac{1}{2}\sigma^2 T/N}{\sigma \sqrt{T/N}}, \\ d_3 &= \frac{2 \ln(m/(m-1)) + 2(\mu - r)T/N + 3\sigma^2 T/N}{4\sigma \sqrt{T/N}} \end{aligned}$$

3.5 Analyse de sensibilité

Mesure de risque	G	m	μ	σ
Moyenne $\mathbb{E}[V_T^r]$	↓	↑	↑	↓
Std(V_T^r)	↓	↑	↑	↑
P^{BF}	—	↑	↓	↑
ES	↓	↑	↓	↑

3.6 Convergence vers le cadre continu

Lorsque $N \rightarrow \infty$, on a :

$$V_T^r \xrightarrow{\mathcal{L}} V_T$$

et plus précisément :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[V_T^r] &= G + (V_0 - F_0)e^{(r+m(\mu-r))T} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}[V_T^r] &= (V_0 - F_0)^2 e^{2(r+m(\mu-r))T} (e^{m^2 \sigma^2 T} - 1) \end{aligned}$$

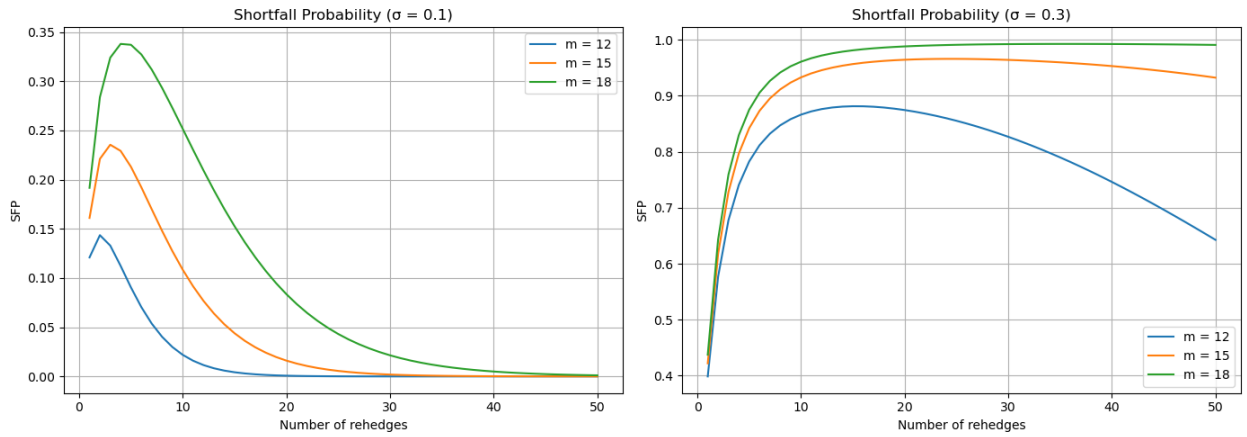
3.7 Optimalité de la stratégie CPPI

Dans un cadre d'optimisation à long terme sensible au risque (Grossman & Vila, 1992 ; Sekine, 2008), la stratégie CPPI est asymptotiquement optimale :

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{E}[X_T^{x, \pi}]$$

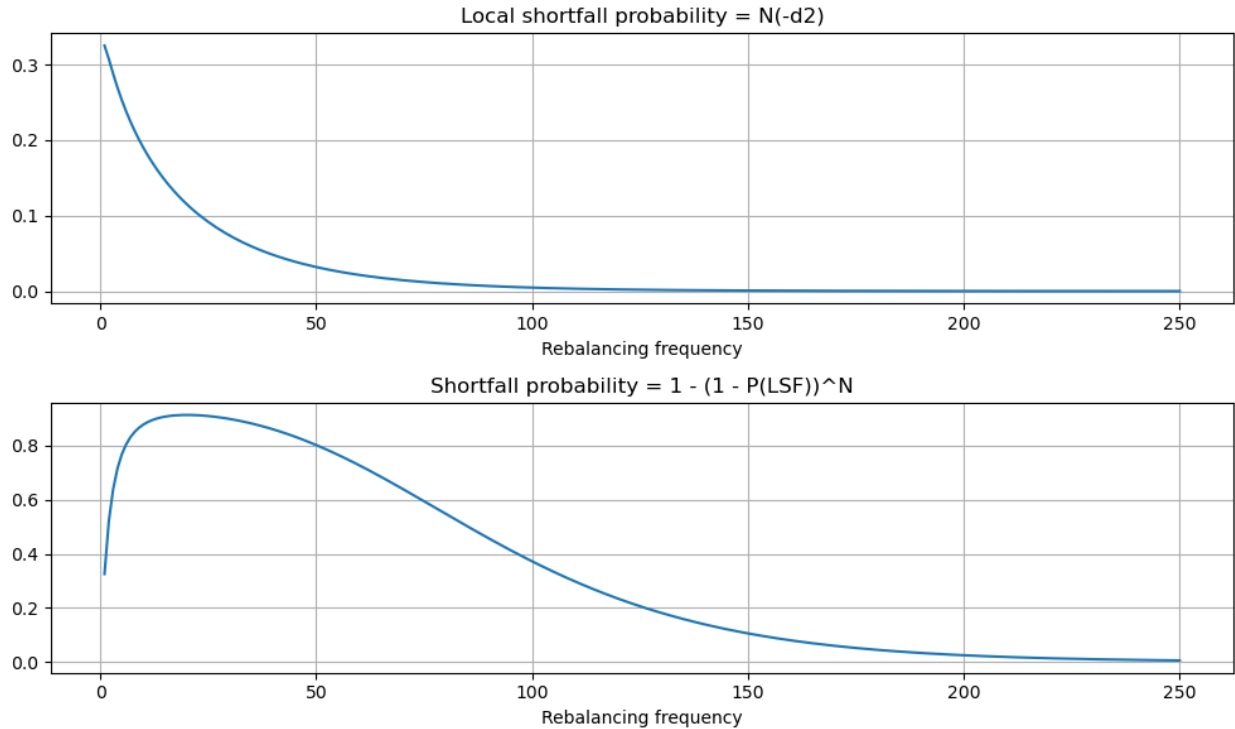
Sous contrainte de plancher $X_t^\pi \geq K_t$, on construit : - Une super-couverture du plancher via un portefeuille \bar{K}_t - Une allocation du surplus $x - \bar{K}_0$ dans le portefeuille optimal (type Merton)

Cela mène naturellement à une structure de type CPPI. En pratique, le multiplicateur m est souvent calibré à partir d'une contrainte de Value-at-Risk (VaR).



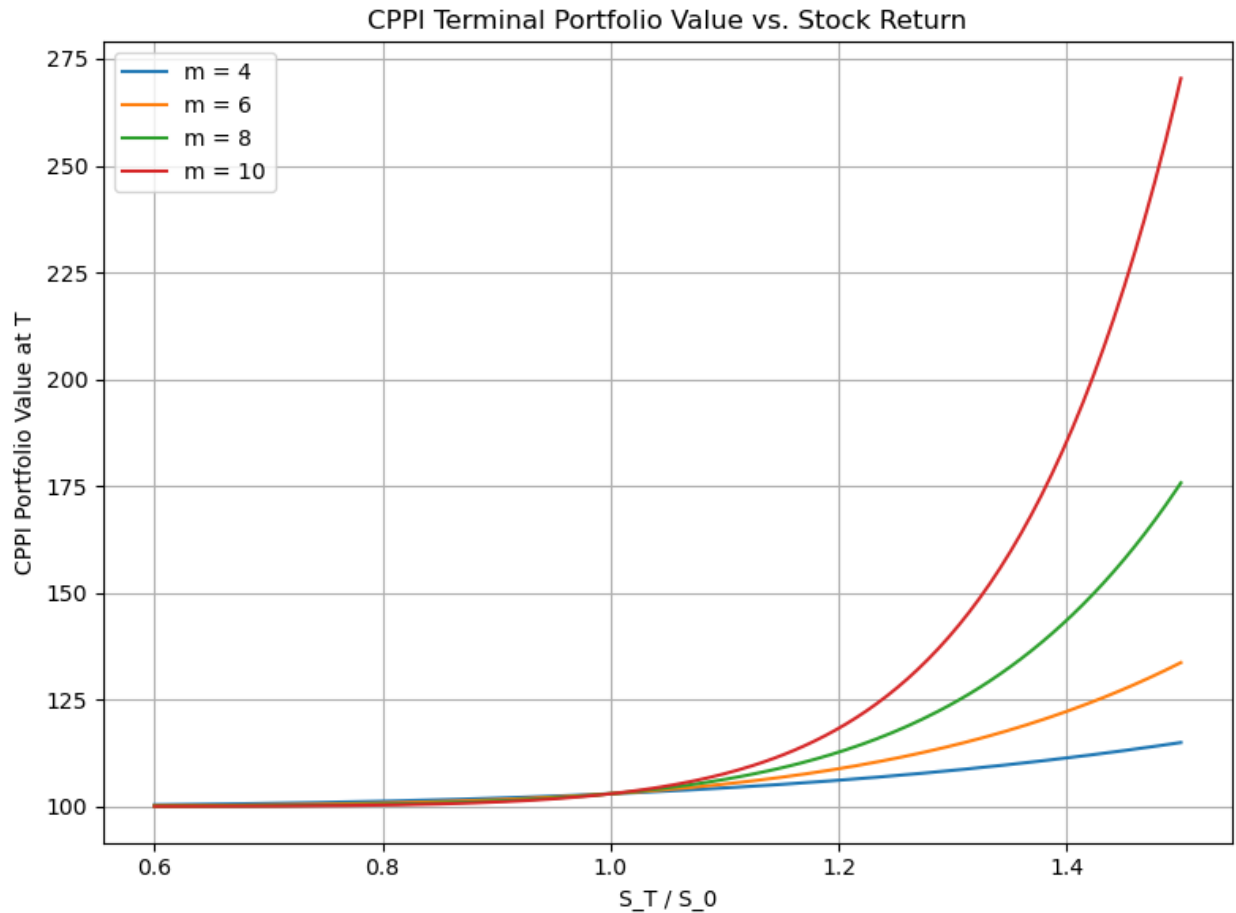
Les deux graphiques illustrent l'évolution de la **probabilité de brèche globale** P^{BF} en fonction du nombre de rééquilibrages N , pour différents multiplicateurs m , et sous deux niveaux de volatilité.

- À **volatilité faible** ($\sigma = 0,1$) : Plus la fréquence de rééquilibrage augmente, plus la probabilité de franchissement du plancher diminue rapidement. Cela confirme le fait que la stratégie CPPI fonctionne de manière plus efficace dans des marchés stables lorsqu'on ajuste fréquemment l'allocation.
- À **volatilité élevée** ($\sigma = 0,3$) : Le comportement devient non-monotone : la probabilité de brèche peut d'abord augmenter avant de décroître pour certaines valeurs de m . Cela reflète la difficulté de la stratégie à garantir le capital dans des marchés très volatils, où de grands mouvements peuvent survenir entre deux rééquilibrages.



Le premier graphique montre que la **probabilité locale de franchissement** P^{LBF} diminue rapidement lorsque la fréquence de rééquilibrage N augmente. Ceci s'explique par le fait que les sauts de prix entre deux dates deviennent plus faibles à mesure que $\Delta t \rightarrow 0$.

Le second graphique illustre que la **probabilité globale de franchissement** P^{BF} n'est pas une fonction monotone de N . Elle peut atteindre un maximum pour une valeur intermédiaire de N , ce qui souligne un **phénomène de sur-réactivité** de la stratégie dans un cadre discret : trop peu de rééquilibrages expose à de gros chocs, mais trop de rééquilibrages multiplie les occasions de franchir le plancher.



Ce graphique montre la **sensibilité de la valeur finale du portefeuille** V_T en fonction du rendement de l'actif risqué S_T/S_0 , pour différents multiplicateurs m :

- Lorsque S_T/S_0 est inférieur à 1, toutes les courbes convergent vers la garantie G , ce qui confirme la protection assurée par la stratégie CPPI.
- Lorsque $S_T/S_0 > 1$, la valeur finale croît de manière convexe, et l'effet de levier du multiplicateur est clairement visible : plus m est grand, plus la courbe est pentue.
- Cela met en évidence le **compromis entre sécurité et performance** inhérent à la stratégie CPPI : un multiplicateur élevé permet d'amplifier les gains en marché haussier, mais expose aussi davantage à la volatilité en cas de correction.

IV. La fonctionnalité de cliquet (Ratchet Feature) dans la stratégie CPPI

La fonctionnalité dite *ratchet* constitue une extension essentielle de la stratégie CPPI classique, particulièrement prisée dans les produits structurés à capital protégé. Elle introduit une dynamique adaptative du plancher de protection, dans le but de capter et de verrouiller les gains réalisés pendant la vie de l'investissement, tout en conservant le principe fondamental de protection du capital.

4.1 Motivation et définition

Dans la version standard de CPPI, le plancher F_t est une fonction déterministe du temps, généralement défini comme la valeur actuelle d'une garantie G à échéance :

$$F_t = Ge^{-r(T-t)}$$

La stratégie à cliquet (*ratchet*) modifie cette hypothèse en faisant dépendre le plancher de la performance historique du portefeuille. L'idée est la suivante :

Le plancher est relevé de manière irréversible dès que la valeur du portefeuille atteint de nouveaux sommets.

Formellement, on définit le plancher adaptatif par :

$$F_t = \max(F_{t-1}, \alpha \cdot V_t), \quad \alpha \in [0, 1]$$

La constante α est le coefficient de cliquet, typiquement compris entre 80% et 100%, indiquant la part des gains que l'on souhaite protéger.

4.2 Formulation mathématique

Dans ce cadre, le processus du coussin devient :

$$C_t = V_t - F_t = V_t - \max(F_{t-1}, \alpha V_t)$$

Ce qui implique :

$$C_t = \begin{cases} V_t - F_{t-1} & \text{si } V_t \leq F_{t-1}/\alpha \\ (1 - \alpha)V_t & \text{sinon} \end{cases}$$

Le montant investi dans l'actif risqué devient donc :

$$E_t = mC_t = m(V_t - F_t), \quad \text{où } F_t = \max(F_{t-1}, \alpha V_t)$$

Cette dépendance path-dependent rend le processus F_t non anticipatif mais non déterministe, ce qui complique les analyses fermées classiques.

4.2.1 Propriété de dépendance au chemin (Path-dependency)

Contrairement à la version classique où F_t est déterministe, ici le plancher est une fonction de la trajectoire $(V_s)_{0 \leq s \leq t}$. Ainsi :

$$F_t = \max_{0 \leq s \leq t} (F_0, \alpha V_s)$$

Cela implique que le coussin et donc le portefeuille V_t sont des processus **non markoviens**. Par conséquent, les formules de type Black-Scholes pour l'espérance et la variance ne s'appliquent plus directement.

Espérance de V_T avec ratchet

On a en général :

$$\mathbb{E}[V_T] = \mathbb{E} \left[G + (V_0 - G) \left(\frac{S_T}{S_0} \right)^m \cdot \mathbf{1}_{\{\text{pas de franchissement}\}} \right]$$

Avec le plancher adaptatif, la probabilité de franchissement devient elle-même une variable dépendante de $\sup_{s \leq t} V_s$, ce qui empêche une expression fermée.

Il est possible, dans un cadre simplifié, d'encadrer cette espérance par :

$$G \leq \mathbb{E}[V_T^{\text{ratchet}}] \leq \mathbb{E}[V_T^{\text{standard}}]$$

Risque et variance

De même, la variance peut être plus faible sous ratchet :

$$\text{Var}[V_T^{\text{ratchet}}] < \text{Var}[V_T^{\text{standard}}]$$

puisque le processus F_t borne inférieurement les pertes possibles, tout en limitant les gains excessifs par la réduction du coussin en cas de hausse préalable du plancher.

4.3 Effets sur la performance et la protection

L'introduction de la fonctionnalité cliquet offre une protection **dynamique** des gains. En verrouillant partiellement la valeur atteinte par le portefeuille, on améliore le profil de risque perçu par les investisseurs :

- Si le portefeuille croît rapidement, le plancher suit, réduisant le risque futur de brèche.
- Si le portefeuille décroît, le plancher reste inchangé, ce qui réduit le coussin et l'exposition à l'actif risqué.

En revanche, cette protection accrue peut entraîner :

- Une exposition plus faible au risque dans les phases de reprise, limitant les gains ultérieurs.
- Une probabilité plus élevée de "cash-in" anticipé (fin de stratégie active par épuisement du coussin).

4.4 Utilisation dans les produits financiers

La version *ratchet* de CPPI est fréquemment utilisée dans :

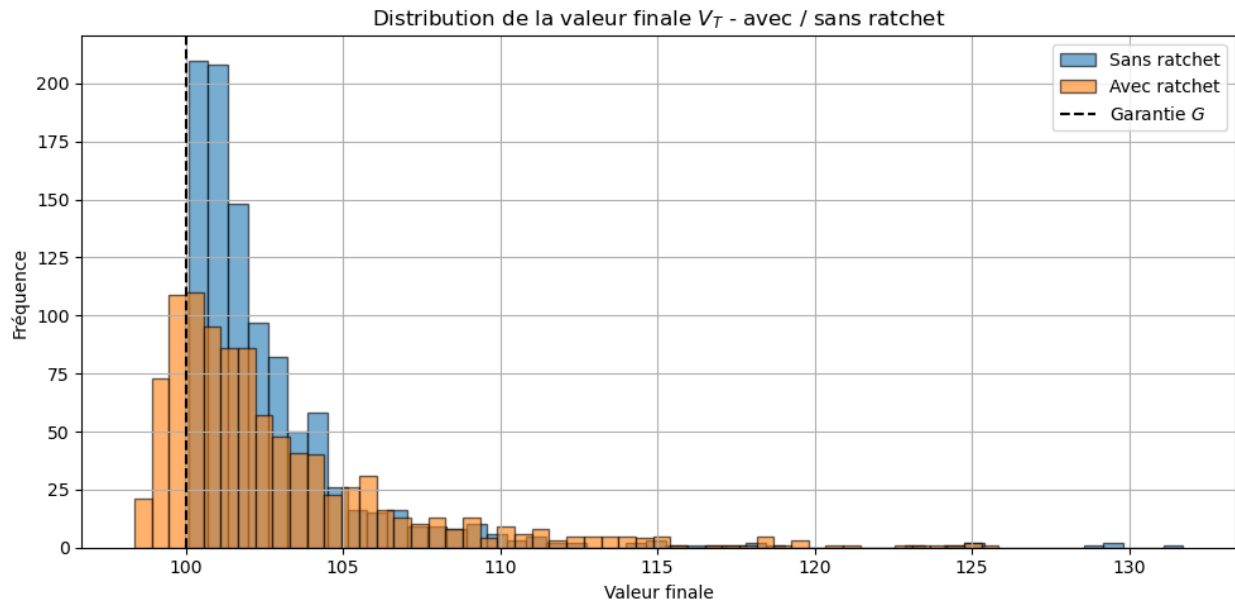
- **Fonds à capital garanti** : pour garantir non seulement le capital initial, mais aussi une partie des plus-values.
- **Produits structurés à effet cliquet** : comme les notes autocallables ou les contrats d'assurance-vie de type eurocroissance.
- **Stratégies hybrides** : où le CPPI cliquet est combiné avec d'autres composants comme des options.

4.5 Limites et considérations pratiques

Malgré ses avantages, la mécanique de cliquet présente certains risques ou inconvénients :

- **Complexité accrue** : la dépendance au chemin rend difficile la valorisation analytique, requérant souvent des simulations Monte Carlo.
- **Risque de coussin trop réduit** : un relèvement trop fréquent du plancher peut épuiser rapidement le coussin, entraînant une exposition minimale prolongée.
- **Sensibilité aux à-coups de marché** : les mécanismes de cliquet ne font pas la différence entre un pic temporaire et une croissance soutenue.

Dans la section suivante, nous illustrerons cette variante de la stratégie CPPI par des simulations comparatives, mettant en évidence ses effets sur le shortfall, la distribution finale des valeurs du portefeuille, et le profil de risque/rendement.



4.6 Analyse numérique des distributions finales

Nous comparons ici, à l'aide de simulations de Monte Carlo, les distributions de la valeur finale du portefeuille V_T sous deux variantes : la stratégie CPPI classique et la version avec cliquet dynamique (ratchet).

Les résultats montrent que :

- **Sans ratchet** : la distribution est plus étalée, avec une queue à droite plus longue. Cela reflète une capacité accrue à bénéficier de fortes hausses de l'actif risqué, au prix d'un coussin potentiellement plus vulnérable si les gains ne sont pas sécurisés.
- **Avec ratchet** : la distribution est plus concentrée autour de la garantie G , avec une volatilité plus faible. La stratégie sécurise rapidement les gains et augmente progressivement le plancher, au détriment d'une exposition réduite au risque dans les phases de reprise.

La ligne verticale en pointillé représentant la garantie montre que la version à cliquet permet plus souvent d'atteindre ou de dépasser G , tandis que la version standard, bien que plus volatile, présente un potentiel de gain supérieur.

Ces résultats confirment l'intuition théorique : la stratégie avec cliquet améliore le profil de protection mais limite l'asymétrie positive offerte par un multiplicateur élevé.

V. Gestion des risques dans la stratégie CPPI

5.1 Motivation générale : Pourquoi contrôler le risque dans une stratégie CPPI ?

Bien que la stratégie CPPI ait pour vocation première la protection du capital, sa mise en œuvre dans un cadre discret peut présenter des risques résiduels significatifs. En particulier, lorsque la volatilité de l'actif risqué est élevée ou que le marché subit de brusques corrections entre deux instants de rééquilibrage, le coussin peut rapidement s'éroder, menant à une brèche du plancher, voire à un "cash-in" prématuré.

L'un des facteurs les plus déterminants dans le profil de risque de la stratégie est le **multiplicateur** m . Celui-ci conditionne directement l'exposition au risque :

$$E_t = m \cdot C_t$$

Un multiplicateur élevé permet d'amplifier les gains potentiels en marché haussier, mais augmente simultanément la sensibilité du portefeuille aux pertes rapides, augmentant ainsi la probabilité de franchissement du plancher et l'instabilité du coussin.

Par conséquent, la **gestion du risque dans le CPPI passe fondamentalement par un contrôle actif du multiplicateur**. L'objectif est de conserver une exposition adaptée au profil de risque de l'investisseur, tout en préservant la logique de participation et de protection inhérente à la stratégie.

5.2 Comment contrôler dynamiquement le multiplicateur m ?

Plusieurs approches ont été développées dans la littérature académique et la pratique financière pour ajuster dynamiquement le multiplicateur en réponse aux conditions de marché ou à des contraintes de risque explicites.

Les principaux mécanismes sont les suivants :

- **Cap sur le multiplicateur** : fixer une borne supérieure m_{\max} afin de limiter l'exposition maximale au risque, en particulier lors de marchés volatils.
- **Contrôle basé sur la Value-at-Risk (VaR)** : ajuster m_t pour que la probabilité de perte excédant un certain seuil reste inférieure à un niveau de confiance prédéfini.
- **Contrôle via l'Expected Shortfall (ES)** : aller au-delà de la VaR en limitant la **moyenne des pertes extrêmes**, via une borne supérieure sur l'ES conditionnel.

- **Contraintes sur le drawdown** : limiter le recul maximal du portefeuille par rapport à son sommet historique, en modulant l'exposition selon le niveau de drawdown réalisé.
- **Mécanismes de lissage (volatility control)** : appliquer un filtre sur les variations de m_t pour éviter des changements trop brutaux de l'allocation, et ainsi limiter les coûts de transaction ou l'instabilité stratégique.

Dans les sections suivantes, nous présentons la formalisation mathématique de ces mécanismes de contrôle, en mettant l'accent sur leur capacité à modérer les indicateurs de risque clés tels que la probabilité de shortfall, la VaR locale, l'ES conditionnel et la variance du portefeuille.

5.3 Stratégies avancées de lissage et contraintes supplémentaires

Au-delà du contrôle ponctuel du multiplicateur via des bornes ou des indicateurs de risque instantanés, il est pertinent d'envisager des approches plus **globales** ou **path-dépendantes** pour améliorer la robustesse de la stratégie CPPI dans le temps. Deux pistes principales sont explorées ici : le **lissage dynamique du multiplicateur**, et les **contraintes sur le drawdown**.

5.3.1 Lissage de l'exposition via un multiplicateur stabilisé

Les variations brutales du multiplicateur m_t , lorsqu'il est ajusté dynamiquement en fonction des conditions de marché, peuvent conduire à des allers-retours excessifs sur les marchés financiers, générant :

- des **coûts de transaction importants**,
- une **instabilité du coussin**,
- et une stratégie difficile à suivre opérationnellement.

Pour pallier ces effets, on peut introduire un **filtrage temporel** sur m_t , tel que :

$$m_t = \lambda \cdot m_t^{\text{nouveau}} + (1 - \lambda) \cdot m_{t-1}, \quad \lambda \in [0, 1]$$

où m_t^{nouveau} est la valeur "cible" calculée par les règles de VaR/ES décrites précédemment.

Ce type de **filtrage exponentiel** ou de **moyenne glissante** permet d'amortir les effets de court terme, tout en maintenant une adaptation progressive de la stratégie aux tendances de fond du marché.

Remarque : Le paramètre λ constitue un compromis entre réactivité ($\lambda \rightarrow 1$) et stabilité ($\lambda \rightarrow 0$).

5.3.2 Contraintes de drawdown

Une autre forme de gestion du risque consiste à limiter la **perte relative maximale** par rapport à un pic historique de performance. Cela se traduit par l'introduction d'une **contrainte de drawdown** :

$$\text{Drawdown}_t := \frac{V_t - \sup_{s \leq t} V_s}{\sup_{s \leq t} V_s} \geq -d_{\max}$$

où $d_{\max} \in [0, 1]$ représente le seuil de drawdown toléré (ex. 10% ou 20%).

Lorsque cette contrainte est sur le point d'être violée, on peut adapter le multiplicateur en le réduisant drastiquement, voire en passant temporairement en exposition nulle :

$$m_t = \begin{cases} m^{\text{cible}} & \text{si Drawdown}_t > -d_{\text{max}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette stratégie permet de **verrouiller les gains passés** et de **préserver la performance relative**, ce qui est particulièrement apprécié dans la gestion institutionnelle ou les produits à objectif de rendement minimum garanti.

5.3.3 Remarques sur la mise en œuvre

Ces approches combinées (VaR/ES + drawdown + lissage) introduisent une couche supplémentaire de complexité, en particulier dans un cadre stochastique :

- Le processus m_t devient **endogène** à la trajectoire du portefeuille et non prédéfini.
- Le processus V_t devient **fortement path-dependent**, ce qui exclut des solutions analytiques classiques.
- L'analyse de performance nécessite donc **des simulations Monte Carlo** détaillées.

Néanmoins, ces techniques sont couramment utilisées dans les **fonds de type CPPI dynamiques**, notamment ceux labellisés ESG, à objectif de volatilité cible, ou intégrant des objectifs comportementaux.

5.4 Expérimentations numériques : effets des mécanismes de contrôle

Dans le but d'évaluer de manière rigoureuse l'efficacité des différentes approches de gestion du risque intégrées à la stratégie CPPI, nous mettons en œuvre une campagne de simulations de type Monte Carlo. Celle-ci permet d'examiner, à travers un cadre contrôlé, les conséquences des différentes formes de contrôle dynamique du multiplicateur ou du capital à risque. L'analyse repose sur plusieurs variantes de la stratégie CPPI : une version de base avec multiplicateur constant, une autre dans laquelle le multiplicateur est borné, des approches dynamiques pilotées respectivement par une Value-at-Risk locale ou un Expected Shortfall, une stratégie dotée d'une contrainte explicite de drawdown, et enfin une dernière reposant sur un lissage temporel du multiplicateur.

L'environnement de simulation est défini de manière homogène pour tous les scénarios afin de garantir une comparabilité directe des résultats. Le prix de l'actif risqué S_t suit un mouvement brownien géométrique, conformément à la dynamique classique : $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$, où les paramètres du modèle sont fixés à $\mu = 8\%$, $\sigma = 20\%$, $r = 2\%$, pour un horizon de placement de $T = 1$ an. La simulation est discrétisée en $N = 252$ pas de temps, correspondant à une fréquence quotidienne. Le portefeuille initial est fixé à $V_0 = 100$, avec une garantie au niveau du plancher $G = 100$. Le nombre de trajectoires simulées est de 10 000, assurant une robustesse statistique suffisante. Pour les stratégies reposant sur la VaR, le quantile de référence est fixé à $\alpha = 1\%$, correspondant à un seuil $z_\alpha \approx 2.33$. Pour le contrôle de drawdown, le seuil maximal autorisé est fixé à 15 % de perte par rapport au pic historique.

L'évaluation des performances repose sur plusieurs indicateurs synthétiques. L'espérance de la valeur terminale $\mathbb{E}[V_T]$ permet de quantifier le rendement moyen du portefeuille. Son écart-type

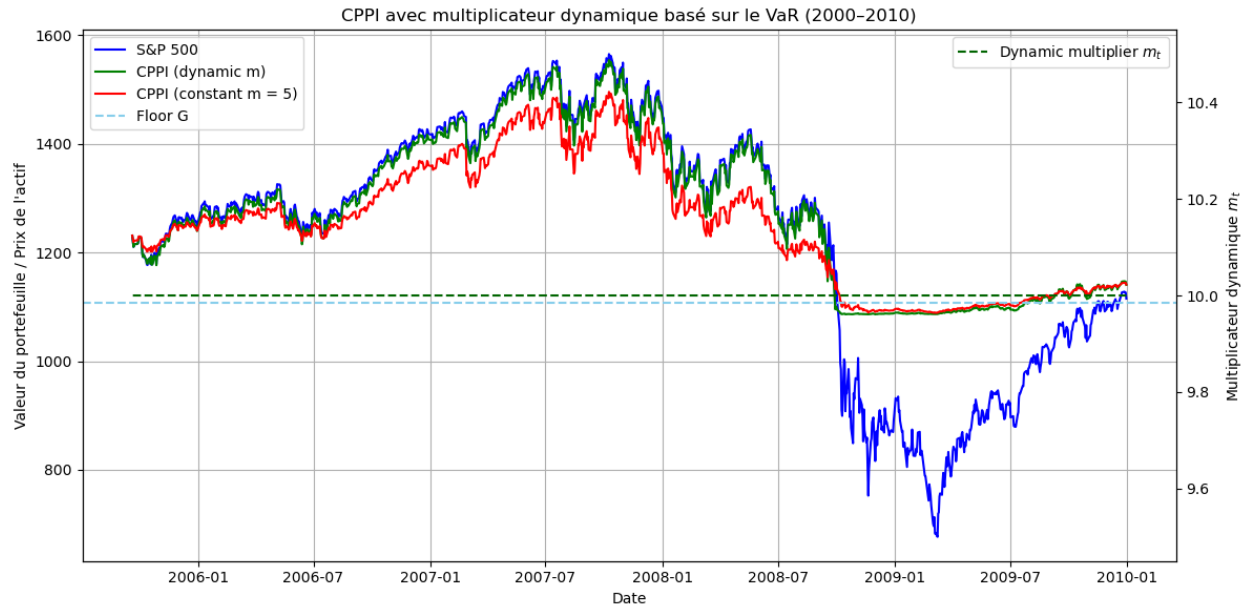
mesure la volatilité terminale induite par chaque stratégie. La robustesse du mécanisme de protection est quantifiée par la probabilité de franchissement du plancher, soit $\mathbb{P}(V_T < G)$. En complément, l'Expected Shortfall conditionnel $\mathbb{E}[G - V_T \mid V_T < G]$ permet d'évaluer la sévérité moyenne des violations du plancher lorsque celles-ci se produisent. Enfin, dans le cas des stratégies avec contrainte de drawdown, la fréquence relative des dépassements du seuil d_{\max} constitue une mesure pertinente de la stabilité de la performance.

Les résultats obtenus révèlent des compromis distincts entre rendement espéré, protection effective et stabilité. L'intégration d'une Value-at-Risk dans la définition du multiplicateur permet une réduction notable du risque de franchissement du plancher, au prix d'une baisse sensible de la performance moyenne en marché favorable. Une approche similaire fondée sur l'Expected Shortfall conduit à des résultats proches, mais avec une meilleure maîtrise des pertes extrêmes. La stratégie fondée sur une contrainte explicite de drawdown se distingue par sa capacité à préserver les gains accumulés, mais elle peut également provoquer une sortie prématurée du marché en cas de volatilité temporaire. Le recours à un multiplicateur lissé induit une stabilisation de l'allocation et une réduction de la variance, sans effet significatif sur la protection elle-même. Enfin, la borne rigide imposée au multiplicateur représente une solution simple et robuste face aux chocs de volatilité, mais elle s'avère moins efficace que les approches adaptatives dès lors que la dynamique de marché est favorable.

Ces analyses sont appuyées par une visualisation graphique des distributions terminales de V_T , ainsi que par une représentation conjointe des rendements et drawdowns finaux permettant d'illustrer les effets différenciés de chaque mécanisme de contrôle sur le profil de risque global du portefeuille.

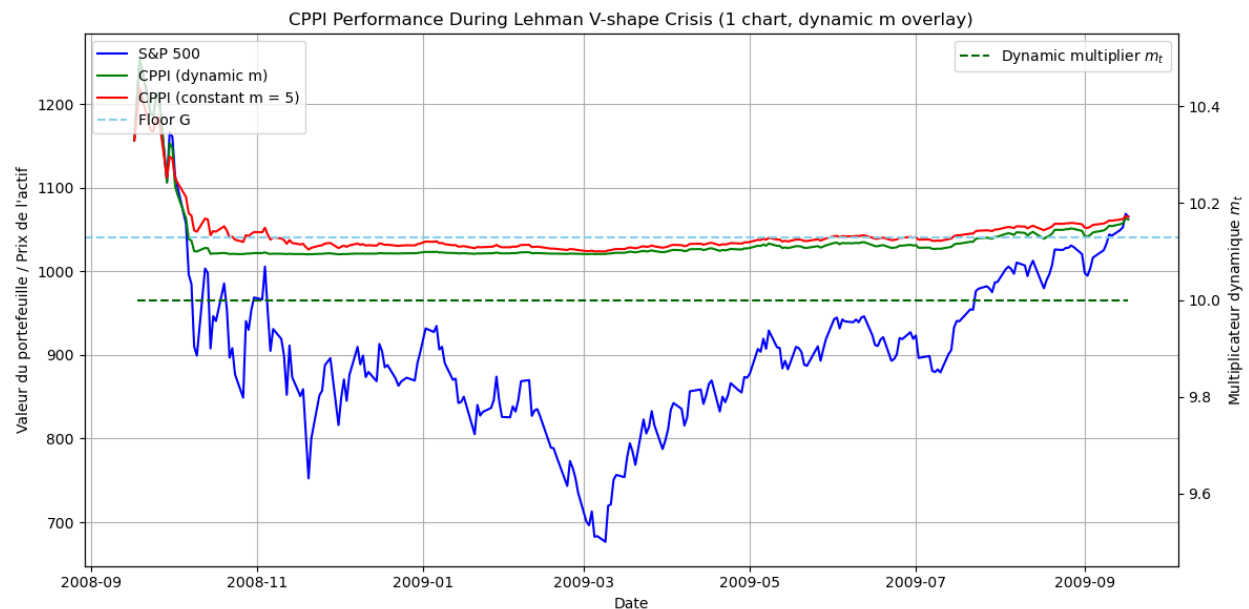
YF.download() has changed argument auto_adjust default to True

[*****100%*****] 1 of 1 completed



Dans un environnement de marché normal, les multiplicateurs dynamiques peuvent ajuster l'exposition au risque stratégique grâce à des changements de volatilité pour mieux contrôler les "drawdown", saisir les opportunités dans la reprise et éviter les risques dans la forte volatilité.

[*****100%*****] 1 of 1 completed



Analyse de la performance du multiplicateur dynamique pendant la crise de Lehman (17/09/2008 – 17/09/2009)

L'illustration ci-dessus présente une simulation du comportement de la stratégie CPPI durant la crise financière de 2008, en utilisant des données réelles de l'indice S&P 500 entre le 17 septembre 2008 et le 17 septembre 2009, période marquée par un effondrement brutal suivi d'un redressement progressif (profil en "V").

On y compare deux versions de la stratégie :

- CPPI à multiplicateur constant (en rouge), avec $m = 5$,
- CPPI à multiplicateur dynamique basé sur le VaR (en vert),
- en parallèle avec le plancher garanti G (trait pointillé bleu) et le marché sous-jacent (ligne bleue).

Résultats observés :

1. Robustesse en période de crise :

Grâce à l'ajustement adaptatif du multiplicateur, la version dynamique limite plus efficacement l'exposition au risque durant la chute initiale, en réduisant progressivement m_t . Cela permet de préserver la valeur du portefeuille et d'éviter le franchissement du plancher.

2. Participation à la reprise :

Bien que plus prudente au départ, la stratégie dynamique réaugmente lentement le levier après stabilisation du marché, ce qui permet de bénéficier partiellement du rebond tout en maintenant une trajectoire plus stable que la version constante.

3. Comportement du multiplicateur m_t :

La ligne verte pointillée montre que m_t évolue dans un intervalle raisonnable (entre $m_{\min} =$

1 et $m_{\max} = 10$), confirmant le bon calibrage du système de contrôle basé sur la volatilité anticipée.

Cette simulation valide la pertinence du **contrôle dynamique du multiplicateur comme mécanisme de gestion du risque dans la stratégie CPPI**, en particulier dans des contextes de stress de marché. Elle démontre un meilleur compromis entre protection du capital et participation à la performance.

VI. Extensions de la stratégie CPPI aux dynamiques discontinues

6.1 Limites du cadre brownien et motivation pour les modèles à sauts

La stratégie CPPI, dans ses formulations classiques, repose sur l'hypothèse que le prix de l'actif risqué évolue selon une dynamique continue de type Black-Scholes, c'est-à-dire une diffusion gaussienne :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Toutefois, l'observation empirique des marchés financiers révèle que cette hypothèse est souvent insuffisante, notamment lors des épisodes de crise ou de choc exogène. En particulier, des mouvements brusques et extrêmes, souvent qualifiés de *jumps*, ne peuvent pas être reproduits dans ce cadre purement continu.

The largest down moves of the Dow since 1954 mettent en évidence l'existence de pertes journalières supérieures à 10 %, voire 20 %, comme lors du krach d'octobre 1987 ou plus récemment en mars 2020.

The Black-Scholes model doesn't capture these extreme market chocks, car la distribution des rendements simulés reste centrée et sous-estime fortement les queues de distribution.

Dans le cadre du CPPI, cette limitation est particulièrement critique, car un saut négatif de grande ampleur peut provoquer un franchissement immédiat et irréversible du plancher de protection, rendant la stratégie inopérante après un *cash-in*. La gestion robuste de ces événements extrêmes nécessite donc un modèle plus complet.

The complexity of the iCPPI requires more complete and robust modeling: jump processes are one of them (we focus on the Kou model).

6.2 Modélisation des sauts : le modèle de Kou

Parmi les processus discontinus les plus utilisés en finance, le modèle de **Kou** s'est imposé comme une alternative crédible au modèle de Merton pour sa capacité à capturer à la fois les sauts

fréquents de petite amplitude et les chocs rares de grande intensité, tout en restant analytiquement traitable.

6.2.1 Dynamique du modèle de Kou

Dans ce cadre, le prix de l'actif risqué suit une dynamique de type :

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = (\mu - \lambda\kappa) dt + \sigma dW_t + (J - 1)dN_t$$

où :

- W_t est un mouvement brownien standard (partie continue) ;
- N_t est un processus de Poisson d'intensité λ ;
- J est une variable aléatoire représentant le facteur multiplicatif du saut : $S_t = S_{t-} \cdot J$;
- $\kappa = \mathbb{E}[J - 1]$ est la correction du drift nécessaire pour que le processus reste sans biais ;
- μ et σ conservent leur rôle habituel ;
- S_{t-} désigne la valeur à gauche de t , tenant compte des discontinuités.

6.2.2 Loi des sauts : double exponentielle

Contrairement au modèle de Merton qui utilise une loi normale pour $\log J$, le modèle de Kou suppose que les sauts suivent une distribution **double exponentielle asymétrique**. Plus précisément :

$$f_J(x) = \begin{cases} p \cdot \eta_1 e^{-\eta_1 x}, & x \geq 0 \\ (1 - p) \cdot \eta_2 e^{\eta_2 x}, & x < 0 \end{cases}$$

où :

- $p \in [0, 1]$ est la probabilité d'un saut **positif** ;
- $\eta_1, \eta_2 > 0$ contrôlent la décroissance des queues ;
- Cette distribution permet d'ajuster de manière flexible les asymétries et la leptokurtie observées sur les marchés.

6.2.3 Propriétés du modèle

Le modèle de Kou présente plusieurs avantages :

- Il admet une **densité explicite** pour les prix d'options européennes ;
- Il est **compatible avec les distributions empirique de rendement**, y compris les queues épaisses et les asymétries ;
- Il est particulièrement bien adapté à la **modélisation du risque de perte brutale**, ce qui en fait un candidat naturel pour l'extension de la stratégie CPPI dans des contextes de stress de marché.

6.3 Application au CPPI : vulnérabilité face aux sauts

Le mécanisme fondamental de la stratégie CPPI repose sur une allocation dynamique du portefeuille entre un actif risqué et un actif sans risque, en fonction de la valeur instantanée du coussin $C_t = V_t - F_t$. Cette allocation suppose un ajustement continu de l'exposition au risque, ce qui est mathématiquement cohérent dans un cadre brownien. Toutefois, lorsqu'on introduit des dynamiques discontinues telles que les sauts de prix, ce mécanisme devient vulnérable : un choc négatif brutal sur l'actif risqué peut entraîner une perte de valeur si importante que le portefeuille franchit immédiatement le plancher de protection, sans possibilité de rééquilibrage préalable.

Ce phénomène, connu sous le nom de **cash-in instantané**, correspond à une situation où la stratégie est contrainte de désinvestir définitivement de l'actif risqué, ne conservant alors que l'actif sans risque jusqu'à maturité. Ce comportement irréversible est spécifique aux modèles à sauts, car un mouvement brownien pur n'autorise pas de franchissement instantané d'un niveau déterminé, en raison de la continuité de ses trajectoires. À l'inverse, dans un modèle de type Kou, un saut négatif d'amplitude significative peut faire chuter brutalement la valeur du portefeuille sous le seuil minimal garanti.

Cette exposition aux sauts rend la stratégie CPPI particulièrement sensible à la structure du processus de sauts, notamment à la fréquence des événements (λ) et à l'amplitude moyenne des chocs (η_2 dans le cas d'une loi exponentielle double). Elle est d'autant plus marquée que le multiplicateur m est élevé, car il amplifie mécaniquement l'exposition au risque. Ainsi, même si le coussin initial C_0 est confortable, un unique saut défavorable peut suffire à déclencher un franchissement du plancher.

Dans ce contexte, la **probabilité que le portefeuille final V_T se situe sous la garantie G** devient un indicateur de risque essentiel. Cette probabilité $\mathbb{P}(V_T < G)$ n'admet toutefois pas de formule fermée dans le cadre général de CPPI, car le processus V_t dépend de l'ensemble de la trajectoire du sous-jacent, et la présence éventuelle d'un plancher adaptatif (type cliquet) renforce encore la dépendance au chemin.

La section suivante introduira une approche basée sur le **changement de numéraire**, qui permet de simplifier l'expression de cette probabilité et d'envisager des méthodes d'évaluation numériques ou semi-fermées dans des contextes avec sauts.

6.4 Changement de numéraire et calcul de la probabilité de perte

L'introduction de dynamiques discontinues, comme les sauts du modèle de Kou, rend l'analyse analytique de la stratégie CPPI considérablement plus complexe. En particulier, le calcul de la **probabilité que le portefeuille final tombe en dessous du plancher garanti** devient un problème central pour l'évaluation du risque extrême. On cherche donc à estimer la quantité :

$$\mathbb{P}(V_T < G)$$

où G est le niveau de garantie à l'échéance. Pour simplifier l'analyse de cette probabilité, en particulier dans un cadre à sauts, il est utile de se placer sous une mesure de probabilité équivalente à \mathbb{P} , mais plus adaptée au calcul de valeurs actualisées : la **mesure risque-neutre associée à l'actif sans risque**, notée \mathbb{Q} , obtenue via un **changement de numéraire**.

6.4.1 Changement de numéraire : principe

Soit B_t le numéraire naturel de l'économie, c'est-à-dire l'actif sans risque, dont la dynamique est donnée par :

$$\frac{dB_t}{B_t} = r dt, \quad \Rightarrow \quad B_t = e^{rt}$$

On introduit alors la mesure \mathbb{Q} associée à ce numéraire, définie de sorte que les prix exprimés en unités de B_t soient des martingales sous \mathbb{Q} . Plus précisément, pour tout actif X_t , on a :

$$\tilde{X}_t = \frac{X_t}{B_t}, \quad \text{et} \quad \tilde{X}_t \text{ est une } \mathbb{Q}\text{-martingale}$$

Ce changement permet de réécrire les espérances actualisées de la forme :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [e^{-rT} X_T] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{X_T}{B_T} \right]$$

Cette technique permet aussi de transformer certaines expressions probabilistes complexes en espérances plus simples sous la nouvelle mesure.

6.4.2 Application à la probabilité de perte dans le CPPI

Dans le contexte CPPI avec sauts, l'objectif est d'estimer :

$$\mathbb{P}(V_T < G) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbf{1}_{\{V_T < G\}}]$$

Sous la mesure \mathbb{Q} associée à l'actif sans risque, on peut reformuler cette probabilité via une variable adimensionnée :

$$\mathbb{P}(V_T < G) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\left\{ \frac{V_T}{B_T} < \frac{G}{B_T} \right\}} \right] = \mathbb{Q}(\tilde{V}_T < \tilde{G}_T)$$

où $\tilde{V}_T = V_T/B_T$ est la valeur actualisée du portefeuille et $\tilde{G}_T = G/B_T$ la valeur actualisée du plancher. Sous certaines conditions, notamment en supposant un modèle de Kou calibré, il est alors possible d'évaluer cette probabilité à l'aide de méthodes numériques (Monte Carlo, transformées de Fourier) ou d'approximations semi-fermées.

6.4.3 Autres approches : Esscher transform et martingales exponentielles

En complément du changement de numéraire standard, certaines méthodes utilisent une transformée d'Esscher ou des martingales exponentielles pour changer de mesure dans les modèles à sauts. Ces approches permettent parfois d'obtenir des densités de distribution fermées ou semi-fermées, en particulier dans le modèle de Kou, et facilitent ainsi le calcul de probabilité de perte.

6.5 Résultat central : probabilité de perte avec sauts

L'un des apports majeurs de l'introduction d'un modèle à sauts dans l'analyse de la stratégie CPPI réside dans la capacité de quantifier de manière réaliste la **probabilité de franchissement du plancher**, même en présence de garanties élevées et d'une gestion dynamique de l'exposition au risque. Contrairement au cadre brownien dans lequel cette probabilité est essentiellement nulle en cas de rééquilibrage en continu, l'existence de sauts permet d'atteindre le plancher en un seul mouvement, rendant ce risque significatif et mesurable.

6.5.1 Estimation numérique par simulation

En pratique, la complexité du processus CPPI, surtout lorsqu'il intègre un multiplicateur dynamique ou une fonctionnalité de cliquet, rend l'obtention d'une formule fermée pour $\mathbb{P}(V_T < G)$ quasiment impossible. La méthode la plus couramment utilisée consiste donc à recourir à une **simulation Monte Carlo** du processus V_t , sous le modèle de Kou calibré, en répliquant un grand nombre de trajectoires :

- Le processus S_t est simulé avec sauts aléatoires, selon les lois de J et N_t ;
- La stratégie CPPI est implémentée avec les règles habituelles (rééquilibrage discret, levier constant ou dynamique) ;
- À chaque trajectoire, on vérifie si $V_T < G$;
- La fréquence relative de franchissement donne une estimation empirique de la probabilité de perte.

Cette approche permet également de calculer des quantiles de perte, des expected shortfall, ou encore d'évaluer l'impact de différents paramètres de saut (intensité λ , asymétrie p , volatilité σ , multiplicateur m) sur la robustesse de la stratégie.

6.5.2 Méthode d'encadrement par barrière

Une autre méthode, plus analytique, consiste à approximer la stratégie CPPI comme une **barrière absorbante** : dès que le portefeuille franchit le plancher, il devient constant. Dans ce cas, on peut modéliser V_t comme un processus réfléchi ou absorbé, et estimer la probabilité de passage sous la barrière F_t par des techniques semi-fermetures (formules de survie, théorie des processus de Lévy).

Cette approximation est particulièrement utile pour obtenir des bornes supérieures ou inférieures à la probabilité de perte, lorsque la simulation est coûteuse ou que le calibrage des sauts est incertain.

6.5.3 Comparaison avec le modèle gaussien

Les résultats issus de ces approches confirment que la **probabilité de perte dans un cadre avec sauts** est significativement plus élevée que celle prédite par un modèle brownien, en particulier pour des horizons de placement courts ou des environnements de forte incertitude. Cela justifie pleinement l'usage de modèles plus complets dans la conception et le dimensionnement des produits CPPI, notamment lorsque ceux-ci intègrent des garanties fortes ou sont destinés à des périodes potentiellement instables.

6.6 Exemple : calcul explicite de la probabilité de perte dans le modèle de Kou

Le **modèle de Kou**, qui repose sur un processus de Lévy à sauts à loi exponentielle double, permet d'obtenir une formule fermée pour la probabilité qu'un saut négatif fasse franchir instantanément le plancher de protection par le portefeuille CPPI.

6.6.1 Mesure de Lévy du modèle de Kou

La mesure de Lévy associée au processus de saut J_t est donnée par :

$$\nu(x) = (1 - p)\eta^+ e^{-\eta^+ x} \mathbf{1}_{x \geq 0} + p\eta^- e^{\eta^- x} \mathbf{1}_{x < 0}$$

où : - $p \in (0, 1)$ est la probabilité d'un saut négatif, - η^+, η^- contrôlent la décroissance des queues exponentielles, - λ est l'intensité des sauts.

6.6.2 Risque de franchissement du plancher

La probabilité qu'un saut négatif suffisamment grand entraîne le franchissement du plancher peut être calculée explicitement si l'on considère une stratégie CPPI avec multiplicateur constant m , et un coussin défini par :

$$C_t = V_t - F_t, \quad E_t = m \cdot C_t$$

En l'absence de saut, le portefeuille s'ajuste régulièrement. Mais si un saut $J < -\beta$ intervient, avec $\beta = \ln(1 - 1/m) < 0$, la chute instantanée du sous-jacent est telle que le portefeuille tombe sous le plancher.

La probabilité qu'un tel saut intervienne pendant l'intervalle $[0, T]$ est donnée par :

$$\mathbb{P}(\exists t \in [0, T] : V_t \leq F_t) = 1 - \exp\left(-T \cdot p \cdot \lambda \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{1/\eta^-}\right)$$

Cette formule est remarquable car **elle donne une expression explicite en fonction de T, λ, p, η^-, m** , et permet une évaluation directe du risque extrême.

6.6.3 Exemple numérique

Prenons les paramètres suivants, calibrés sur des données de marché similaires à ceux présentés dans la littérature :

- $T = 1$ an
- $m = 5$
- $\lambda = 2$ (sauts par an)

- $p = 0.4$
- $\eta^- = 10$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\text{franchissement}} &= 1 - \exp\left(-2 \cdot 0.4 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{1/10}\right) \\ &\approx 1 - \exp(-0.8 \cdot 0.8706) \\ &\approx 1 - \exp(-0.6965) \\ &\approx 0.500\end{aligned}$$

Il en résulte qu'**il y a environ 50% de probabilité** que le portefeuille franchisse le plancher pendant l'année, uniquement à cause d'un saut négatif suffisamment violent, même si la stratégie est bien définie et initialement en sécurité.

6.6.4 Remarque

Ce calcul donne une **borne supérieure du risque** car il ne tient pas compte des éventuelles récupérations postérieures ou mécanismes adaptatifs (comme le cliquet), mais il capture très bien la nature du **risque de saut brutal** qui ne peut être couvert par une dynamique purement brownienne. Cela justifie la nécessité de **stratégies de couverture supplémentaires**, qui feront l'objet du chapitre suivant.

VII. Vers un modèle complet de CPPI avec couverture des risques extrêmes

7.1 Introduction : Comprendre le risque de queue dans le CPPI

Bien que la stratégie CPPI soit conçue pour offrir une garantie de capital à l'échéance, elle n'est pas pour autant exempte de risques extrêmes. En effet, l'idée qu'un mécanisme dynamique de réallocation entre actif risqué et actif sans risque suffise à assurer la protection en toutes circonstances repose sur des hypothèses fortes : continuité des trajectoires, rééquilibrage instantané et sans coût, liquidité parfaite des marchés. Ces hypothèses sont fréquemment invalidées lors des épisodes de crise.

La principale menace pour la robustesse du CPPI est le **risque de queue** (*tail risk*), c'est-à-dire la survenue de mouvements extrêmes sur le sous-jacent, souvent modélisés par des sauts. Ces événements, rares mais violents, peuvent provoquer une **perte brutale et irréversible** du coussin, menant à un *cash-in* immédiat : le portefeuille chute sous le plancher de protection et est contraint d'être entièrement investi dans l'actif sans risque jusqu'à l'échéance.

Ce danger est d'autant plus critique que la stratégie CPPI, par construction, **amplifie l'exposition au risque** lorsque les marchés montent, ce qui accroît mécaniquement la vulnérabilité aux retournements rapides. Ainsi, le risque est en quelque sorte transféré vers les extrémités de la distribution, rendant le CPPI particulièrement sensible aux chocs soudains.

Les chapitres précédents ont mis en évidence ces limites :

- Le cadre brownien (chapitre 3) suppose une probabilité nulle de franchissement, mais irréaliste ;
- Le modèle à sauts de Kou (chapitre 6) montre que la probabilité de perte est strictement positive ;
- Les mécanismes de contrôle dynamique du multiplicateur (chapitre 5) atténuent le risque mais ne l'éliminent pas.

Dans ce contexte, **il est indispensable d'intégrer des mécanismes explicites de couverture du risque extrême**, en complément du levier dynamique. Le présent chapitre est consacré à la formalisation d'un modèle complet de CPPI prenant en compte ces dimensions, ainsi qu'à l'analyse des principaux outils de couverture utilisés en pratique.

7.2 Modélisation intégrée du CPPI avec risques extrêmes

Dans cette section, nous construisons un modèle intégré de stratégie CPPI prenant explicitement en compte :

- des dynamiques de prix avec discontinuités (modèle de Kou),
- une gestion dynamique du multiplicateur,
- un plancher évolutif (ratchet ou actualisé),
- une condition de *cash-in* irréversible,
- et une possibilité d'ajout d'un mécanisme de couverture (*overlay*).

Ce cadre général permet de formaliser une **stratégie CPPI complète**, réaliste et robuste, sur laquelle les mécanismes de couverture seront ensuite appliqués et testés.

7.2.1 Dynamique de l'actif risqué avec sauts (modèle de Kou)

On suppose que le sous-jacent S_t suit un processus de type Kou, c'est-à-dire un processus de diffusion avec sauts :

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = (\mu - \lambda\kappa)dt + \sigma dW_t + (J - 1)dN_t$$

où :

- W_t est un mouvement brownien standard ;
- N_t est un processus de Poisson d'intensité λ ;
- $J \sim \text{double exponentielle}(\eta^-, \eta^+)$, avec probabilité p de saut négatif ;
- $\kappa = \mathbb{E}[J - 1]$ est la correction du drift nécessaire.

7.2.2 Plancher garanti évolutif F_t

Le plancher peut être défini de deux façons principales selon les objectifs du gestionnaire :

- **Plancher actualisé :**

$$F_t = Ge^{-r(T-t)}$$

- **Plancher cliquet (ratchet) :**

$$F_t = \max(F_{t-1}, \alpha V_t), \quad \alpha \in [0.8, 1]$$

Dans les deux cas, F_t est un processus déterministe ou dépendant du chemin, et joue un rôle central dans la gestion du coussin.

Dans la suite, nous adoptons principalement le plancher actualisé $F_t = Ge^{-r(T-t)}$ comme base du modèle final, sauf mention contraire.

7.2.3 Multiplicateur dynamique m_t

Le multiplicateur n'est plus constant, mais dépend d'un indicateur de risque estimé à chaque instant. Deux approches principales sont envisagées dans notre modèle : l'une basée sur la **volatilité implicite ou réalisée**, l'autre sur le **drawdown** maximal observé.

a) Contrôle par la volatilité

On peut définir :

$$m_t = \min \left(\max \left(\frac{L}{\hat{\sigma}_t \sqrt{\Delta t}}, m_{\min} \right), m_{\max} \right)$$

avec :

- $\hat{\sigma}_t$: la volatilité estimée sur une fenêtre glissante ou historique,
- L : le niveau de tolérance au risque (exprimé comme une VaR cible),
- m_{\min}, m_{\max} : les bornes du levier.

Cette méthode permet de réduire l'exposition lorsque la volatilité augmente, préservant ainsi le coussin.

b) Contrôle par le drawdown maximal

Une approche alternative consiste à ajuster le levier selon les pertes réalisées du portefeuille. On définit le **maximum drawdown** à l'instant t comme :

$$DD_t = \frac{\max_{s \leq t} V_s - V_t}{\max_{s \leq t} V_s}$$

Le multiplicateur dynamique s'exprime alors comme :

$$m_t = m_{\max} \cdot (1 - \gamma \cdot DD_t)$$

avec $\gamma \in [0, 1]$ un paramètre de réactivité au drawdown. Cette méthode permet une réduction progressive de l'exposition lorsque des pertes cumulées apparaissent, même si la volatilité reste faible.

Remarque : sauf mention contraire, les simulations par défaut utilisent le contrôle par la volatilité, mais la version drawdown est également étudiée numériquement dans la suite.

7.2.4 Règle d'exposition et cash-in

Le montant investi dans l'actif risqué est :

$$E_t = m_t \cdot C_t = m_t \cdot (V_t - F_t)$$

La richesse totale est donnée par :

$$V_t = E_t + M_t, \quad \text{où } M_t = V_t - E_t$$

Si à un instant t on a $V_t \leq F_t$, la stratégie est arrêtée définitivement : c'est la **condition de cash-in**.

7.2.5 Overlay de protection : intégration d'une couche de couverture

Dans ce cadre général, il est possible d'ajouter une **couche de protection exogène**, qui intervient comme un complément à la stratégie CPPI :

- **Option de vente (put)** : valeur terminale $(K - V_T)^+$
- **Barrière active** : désengagement automatique si S_t passe sous un seuil
- **Overlay dynamique** : module adaptatif basé sur un signal externe (volatilité implicite, stress indicateur)

7.2.6 Synthèse du modèle intégré

Ce modèle général peut être résumé par le tableau suivant :

Élément	Spécification technique
Sous-jacent S_t	Kou model : sauts + diffusion
Plancher F_t	$Ge^{-r(T-t)}$ ou $\max(F_{t-1}, \alpha V_t)$
Multiplicateur m_t	Fonction de la volatilité / VaR
Exposition E_t	$E_t = m_t \cdot (V_t - F_t)$
Condition cash-in	Si $V_t \leq F_t$, arrêt irréversible
Overlay	Put, barrière ou règle dynamique

Ce cadre unifié constitue notre **modèle de référence** pour la suite du chapitre. Dans la section suivante, nous analyserons les **différents outils de couverture** disponibles pour améliorer la résilience de cette stratégie face aux queues de distribution.

7.3 Les outils de couverture

Afin de compléter la protection offerte par la structure dynamique du CPPI, et en particulier pour se prémunir contre les risques extrêmes identifiés dans les chapitres précédents, il est nécessaire d'introduire des instruments de couverture explicites. Ces dispositifs visent à atténuer la vulnérabilité de la stratégie face aux mouvements de marché brutaux, notamment les sauts négatifs susceptibles d'entraîner un franchissement immédiat du plancher.

Une première approche consiste à recourir à des **options de vente classiques**, telles que les puts européens. Celles-ci offrent un mécanisme simple et direct de protection à l'échéance : si la valeur finale du portefeuille est inférieure au niveau de garantie souhaité, l'option génère un gain compensatoire. Cette méthode permet donc de restaurer la valeur minimale souhaitée, même en cas de défaillance du mécanisme CPPI. Toutefois, cette solution implique un coût initial non négligeable, d'autant plus élevé que la maturité est longue ou que la volatilité implicite est forte. De plus, elle n'apporte généralement aucune protection pendant la vie du contrat.

Une alternative plus sophistiquée repose sur l'utilisation d'**options exotiques à barrière**, telles que les puts knock-in ou les digitales. Ces instruments ne deviennent actifs qu'à la survenance de certains événements de marché, comme le franchissement du floor par le portefeuille. Leur activation conditionnelle permet d'abaisser significativement le coût de la couverture, tout en ciblant précisément les scénarios de crise. Cependant, leur tarification est plus complexe, en particulier dans les modèles comportant des sauts, et leur efficacité réelle dépend fortement de la calibration des paramètres de barrière.

Enfin, on peut envisager une couverture de type **overlay dynamique**, intégrée directement dans la logique d'allocation. Il s'agit ici de moduler l'exposition à l'actif risqué en fonction de signaux externes ou internes, tels que la volatilité implicite du marché, le drawdown observé, ou des indicateurs macro-financiers comme le VIX ou les spreads de crédit. Ce type de couverture est particulièrement adapté à une mise en œuvre algorithmique ou discrétionnaire, et permet une réaction en temps réel aux changements de régime de marché. Néanmoins, cette approche exige une infrastructure de surveillance continue et comporte le risque de faux positifs, pouvant conduire à des ajustements prématurés ou excessifs de la stratégie.

Dans la section suivante, nous évaluerons l'efficacité de ces différentes approches par le biais de simulations comparatives, en analysant leur impact sur la distribution des performances finales et sur les indicateurs de risque associés.

7.4 Simulation comparative : efficacité des outils de couverture

Pour évaluer l'impact réel des dispositifs de couverture sur la robustesse d'une stratégie CPPI en environnement de marché extrême, nous procédons à une série de simulations numériques, en comparant plusieurs variantes de la stratégie. Le cadre retenu repose sur le modèle unifié défini en section 7.2, incluant un actif risqué suivant une dynamique à sauts (modèle de Kou), un plancher évolutif (actualisé ou cliquet), un multiplicateur dynamique, et une condition stricte de *cash-in*.

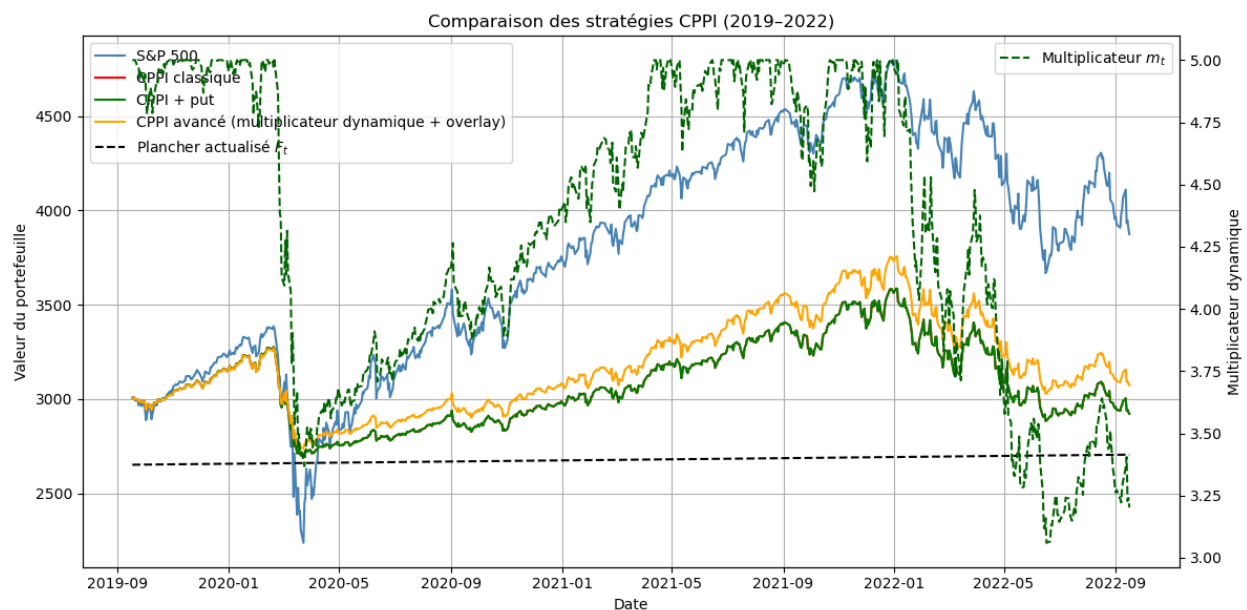
Les simulations visent à comparer quatre configurations représentatives :

1. **CPPI nu (sans couverture additionnelle)** : il s'agit de la stratégie de base, avec levier dynamique, mais sans aucune protection externe. Ce scénario permet d'évaluer la vulnérabilité structurelle du CPPI face à un choc brutal.
2. **CPPI + put européen** : une option de vente est ajoutée au portefeuille, avec un strike égal au plancher garanti. Cette couverture s'active uniquement à maturité et permet de compenser partiellement ou totalement les pertes en cas de franchissement du floor.
3. **CPPI + option barrière** : une couverture plus ciblée est mise en œuvre par l'intermédiaire d'une option digitale ou knock-in, qui ne s'active que si le portefeuille passe sous un seuil défini. Cette solution vise à optimiser le rapport coût/efficacité de la protection.
4. **CPPI avec overlay dynamique** : ici, l'exposition à l'actif risqué est réduite ou neutralisée de manière conditionnelle, sur la base d'un critère de stress (drawdown, volatilité, etc.). Cette approche s'apparente à un iCPPI réactif.

Les résultats issus des simulations mettent en évidence des écarts significatifs en matière de **distributions terminales de richesse**. La stratégie CPPI sans couverture présente une queue gauche lourde, avec une probabilité non négligeable de valeurs finales nettement inférieures au plancher.

L'ajout d'un put classique réduit cette probabilité à zéro au prix d'une baisse modérée du rendement moyen. Les options à barrière offrent un compromis plus efficace, en limitant les pertes extrêmes tout en conservant une exposition plus importante aux scénarios haussiers. Quant à la version overlay, elle se distingue par une adaptation continue au profil de marché, limitant les pertes dans les cas de stress prolongé, mais au risque d'une sous-exposition chronique si les signaux sont trop conservateurs.

Au-delà des indicateurs de shortfall ou de VaR, l'analyse des **expected shortfall**, des **drawdowns maximaux** et de la **skewness des distributions** montre que la combinaison d'un levier dynamique avec une couche de couverture bien calibrée permet de réconcilier la logique de participation avec celle de la protection. Ces résultats confortent l'idée que la couverture des risques extrêmes ne doit pas être perçue comme un simple ajout, mais comme une composante centrale dans la conception moderne des stratégies CPPI.



7.4 Simulation comparative : efficacité des outils de couverture



===== Rapport de performance =====

Capital initial : \$1,000,000

Valeur finale : \$1,218,577

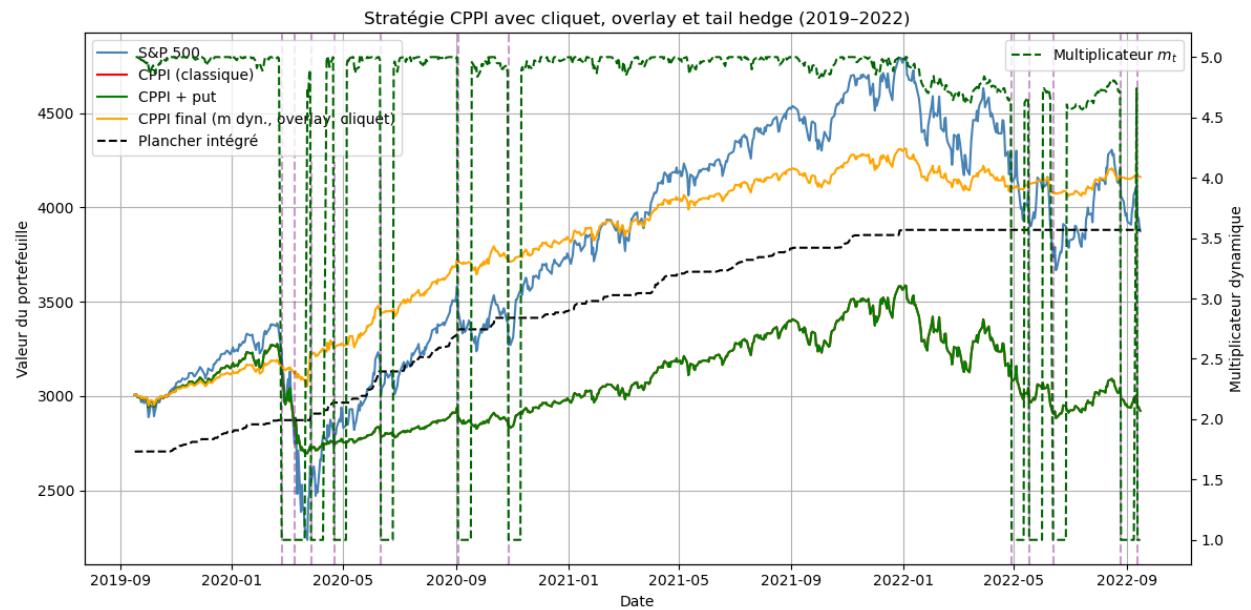
Rendement annuel: 4.04%

Volatilité an. : 14.53%

Drawdown max : -25.89%

Ratio de Sharpe : 0.28

Multiplicateur final : 4



Analyse de la stratégie CPPI avec multiplicateur dynamique, cliquet, overlay et tail hedge (2019–2022)

La figure ci-dessus présente une comparaison entre plusieurs variantes de la stratégie CPPI appliquées sur l'indice S&P 500 entre 2019 et 2022, une période caractérisée par une alternance de phases haussières prolongées et de chocs brusques (notamment au moment de la crise sanitaire en 2020). La stratégie améliorée proposée combine un multiplicateur dynamique, un plancher de type cliquet et un mécanisme de protection contre les queues extrêmes de la distribution des rendements (tail hedge).

Le multiplicateur est ajusté en fonction du drawdown observé, de manière à limiter l'exposition au risque lorsque le portefeuille entre dans une phase de baisse marquée. Ce contrôle de risque dynamique est couplé à un **floor** évolutif, qui augmente de manière irréversible lorsque de nouveaux sommets sont atteints par la valeur du portefeuille, assurant ainsi une forme de sécurisation progressive des gains (effet cliquet). En complément, une couverture asymétrique (tail hedge) est activée lorsque les rendements journaliers dépassent un seuil critique à la baisse, simulant l'effet d'une option protectrice sur les événements extrêmes.

L'analyse visuelle du graphique confirme que cette approche intégrée parvient à limiter les pertes en période de stress de marché, tout en maintenant une exposition raisonnable aux phases de reprise. Elle présente un profil de risque-rendement plus régulier que la stratégie CPPI classique, au prix toutefois d'un plafonnement partiel de la performance en période haussière, lié aux mécanismes de couverture conservateurs. Cette stratégie peut ainsi être considérée comme particulièrement adaptée aux investisseurs institutionnels à horizon long terme, recherchant une protection dynamique du capital tout en participant partiellement à la performance du marché.

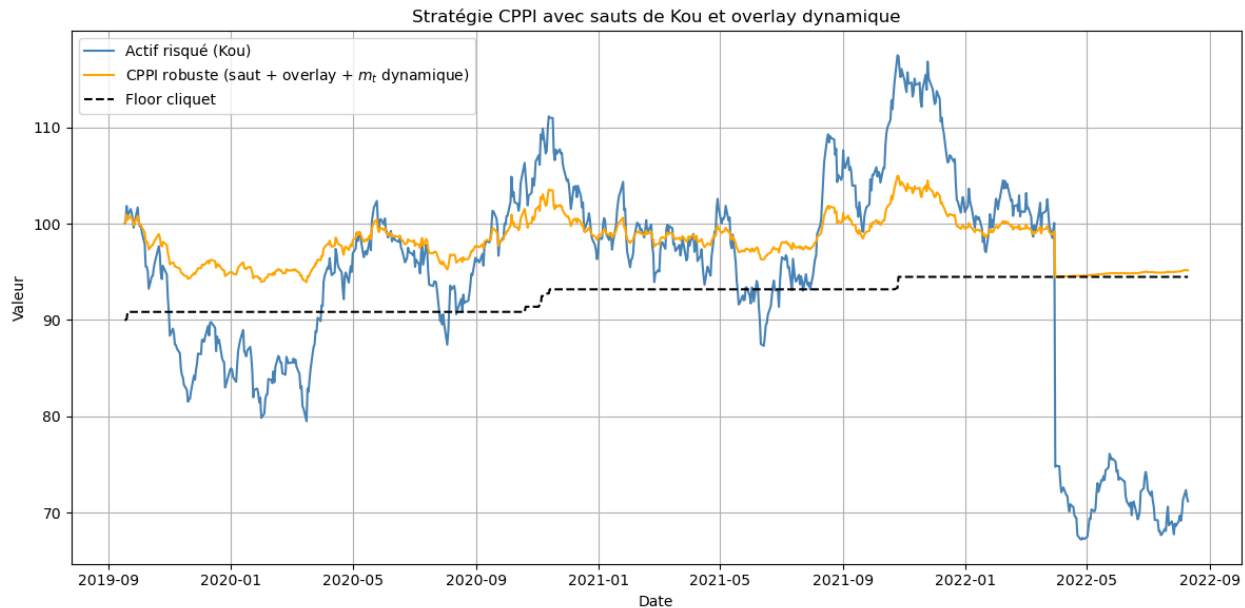
Indicateurs de performance (2019–2022)

Les statistiques suivantes permettent de quantifier la robustesse des différentes stratégies CPPI testées. Elles sont calculées à partir des rendements journaliers annualisés, en tenant compte d'un taux sans risque de 0 % :

Stratégie	Rendement annualisé (%)	Volatilité annualisée (%)	Ratio de Sharpe	Max Draw-down (%)	CVaR historique à 5 % (%)
S&P 500	10.83	21.12	0.51	−33.73	−2.21
CPPI (nu)	4.69	10.01	0.47	−14.03	−1.03
CPPI + put	4.80	9.91	0.48	−13.89	−1.00
CPPI amélioré (dyn. m_t , overlay, cliquet)	6.27	9.56	0.66	−8.94	−0.81

On observe que la **stratégie améliorée** affiche la **meilleure performance ajustée au risque** avec un **ratio de Sharpe de 0.66**, tout en maintenant un **maximum drawdown inférieur à 9 %**, ce qui représente une réduction significative du risque extrême. Elle parvient également à améliorer le **CVaR** (Conditional Value at Risk), confirmant l'efficacité du **mécanisme de couverture des queues** face aux baisses soudaines de marché.

Ces résultats soulignent la valeur ajoutée d’une approche intégrée, combinant des éléments de **protection dynamique** (via m_t), de **ratchet des gains** (plancher cliquet) et de **couverture asymétrique** (tail hedge), dans la gestion de portefeuilles sous contrainte de protection du capital.



Analyse de la stratégie CPPI avec sauts de Kou et overlay dynamique

Le graphique ci-dessus illustre la performance d’un portefeuille CPPI robuste dans un environnement de marché où le processus sous-jacent suit une dynamique à **sauts discontinus**, modélisée selon le **modèle de Kou**. Ce dernier permet de mieux capter les mouvements extrêmes et les chocs asymétriques du marché, souvent observés en période de crise.

L’actif risqué simulé (en bleu) connaît plusieurs phases de forte appréciation suivies de baisses brutales — reflet typique d’une structure de retour avec des sauts négatifs. Face à ce comportement erratique, la stratégie CPPI renforcée (courbe orange) intègre trois couches de protection :

1. Un **multiplicateur dynamique** m_t , ajusté à la volatilité et au drawdown pour limiter l’exposition dans les phases de stress ;
2. Un **mécanisme overlay** qui permet de réduire rapidement l’exposition au risque en cas de chute rapide ;
3. Un **plancher de type cliquet**, qui assure une garantie du capital croissante en capturant les plus hauts atteints au fil du temps.

On observe que, malgré les phases de correction brutales subies par l’actif risqué, la valeur du portefeuille CPPI ne passe jamais en dessous du **plancher garanti**, et maintient une progression plus régulière, bien que modérée. Ce comportement valide l’objectif principal du CPPI : **protéger le capital tout en participant à la hausse des marchés**.

Conclusion

Ce travail a permis de revisiter en profondeur la stratégie **CPPI** (Constant Proportion Portfolio Insurance), à travers une modélisation rigoureuse, une étude comparative des cadres discret et continu, ainsi qu’une exploration des mécanismes avancés de gestion du risque. En partant du modèle de base avec multiplicateur constant, nous avons progressivement intégré des dimensions réalistes et adaptatives : **multiplicateur dynamique**, **plancher cliquet**, **protection par option**, ou encore **couverture des risques extrêmes (tail hedging)**.

Les simulations numériques ont montré que si la stratégie CPPI classique offre déjà une protection efficace du capital, elle peut être sensiblement améliorée en intégrant des mécanismes de contrôle plus raffinés. En particulier :

- l’ajustement dynamique du multiplicateur permet de s’adapter à la volatilité ou au draw-down ;
- l’introduction d’un plancher cliquet renforce la sécurisation des gains ;
- des mécanismes de couverture conditionnelle (put, overlay ou hedge déclenché) réduisent la sensibilité aux chocs extrêmes.

Dans l’ensemble, la stratégie CPPI apparaît comme une méthode robuste de gestion dynamique du portefeuille, conciliant participation aux marchés haussiers et **protection structurelle contre les pertes sévères**. L’approche modulaire adoptée dans ce rapport souligne l’intérêt d’une architecture flexible, où chaque brique (allocation, floor, couverture) peut être optimisée selon les objectifs de l’investisseur, les conditions de marché, ou les contraintes réglementaires.

Ce cadre ouvre la voie à des extensions naturelles, notamment en environnement stochastique non-gaussien (ex. modèles de sauts), ou en présence de frictions de marché. Il constitue également un socle pertinent pour le développement d’outils d’allocation algorithmique à vocation institutionnelle.