**Министерство образования Российской Федерации**

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Н.Э. БАУМАНА

Факультет: Информатика и системы управления Кафедра: Информационная безопасность (ИУ8)

# ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

**Лабораторная работа №2 на тему:**

«Аналитический и численный методы решения антагонистической выпукло- вогнутой игры»

Вариант 9

|  |  |
| --- | --- |
| Преподаватель: | Коннова Н.С. |
| Студент: | Киселев В.А. |
| Группа: | ИУ8-104 |

Москва, 2025

# Цель работы

Найти оптимальные стратегии непрерывной выпукло-вогнутой антагонистической игры аналитическим и численным методами.

# Задание

1. Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры аналитическим и численными методами. Сравнить полученные результаты.

Функция ядра имеет следующий вид:

𝐻(𝑥, 𝑦) = −6𝑥2 + 6.4 y2 + 16𝑥𝑦 – 3.2𝑥 – 12.8𝑦.

# Ход работы

Для аналитического решения вычислим вторые производные, с их помощью определим, является ли игра выпукло-вогнутой:

𝜕2

𝜕𝑥2 𝐻(𝑥, 𝑦) = −6 ∙ 2 = −12 < 0,

𝜕2

𝜕𝑦2 𝐻(𝑥, 𝑦) = 6.4 ∙ 2 = 12.8 > 0.

Игра является выпукло-вогнутой.

Для нахождения оптимальных стратегий вычислим первые производные и приравняем их к нулю:

*Hx*​=−12*x*+16*y*−3.2=0

Hy=12.8y+16x−12.8=0

**Решаем систему уравнений:**

1. Из первого уравнения: x=−
2. Подставляем во второе уравнение:

12.8y+16 - 12.8=0

12.8y+−12.8=0

Умножаем на 12:

153.6y+256y−51.2−153.6=0

409.6y=204.8

*y*=0.5

1. Подставляем y=0.5 в выражение для *x*:

x== = =0.4

Цена игры:

H(0.4,0.5)=−6(0.4)2+6.4(0.5)2+16⋅0.4⋅0.5−3.2⋅0.4−12.8⋅0.5=−3.84

**Аналитическое решение:** =0.4, =0.5, =−3.84

Численный метод решения задачи итеративный. Описание шага 𝑁 > 1:

1. Построить матрицу 𝐶𝑁 размера ((𝑁 + 1) × (𝑁 + 1)) такую,

𝑖 𝑗

что 𝑐 = 𝐻 ( , ).

𝑖𝑗

𝑁 𝑁

1. Принять 𝐶𝑁 за матрицу антагонистической игры ΓN.
2. Решить игру ΓN.

Критерий остановки: алгоритм продолжается, пока значения цены игр

ΓN, … , ΓN−4 не перестанут различаться более чем на 0,001.

Операция 3 будет выполняться с помощью алгоритма Брауна-Робинсон с

𝜖 = 0,001.

N = 2

Матрица выигрышей:

[[ 0. -4.8 -6.4]

[-3.1 -3.9 -1.5]

[-9.2 -6. 0.4]]

Седловая точка: x=0.500, y=0.500, H=-3.900000

N = 3

Матрица выигрышей:

[[ 0. -3.5556 -5.6889 -6.4 ]

[-1.7333 -3.5111 -3.8667 -2.8 ]

[-4.8 -4.8 -3.3778 -0.5333]

[-9.2 -7.4222 -4.2222 0.4 ]]

Метод Брауна-Робинсона: x=0.392, y=0.572, H=-3.771822

N = 4

Матрица выигрышей:

[[ 0. -2.8 -4.8 -6. -6.4 ]

[-1.175 -2.975 -3.975 -4.175 -3.575]

[-3.1 -3.9 -3.9 -3.1 -1.5 ]

[-5.775 -5.575 -4.575 -2.775 -0.175]

[-9.2 -8. -6. -3.2 0.4 ]]

Седловая точка: x=0.500, y=0.500, H=-3.900000

N = 5

Матрица выигрышей:

[[ 0. -2.304 -4.096 -5.376 -6.144 -6.4 ]

[-0.88 -2.544 -3.696 -4.336 -4.464 -4.08 ]

[-2.24 -3.264 -3.776 -3.776 -3.264 -2.24 ]

[-4.08 -4.464 -4.336 -3.696 -2.544 -0.88 ]

[-6.4 -6.144 -5.376 -4.096 -2.304 -0. ]

[-9.2 -8.304 -6.896 -4.976 -2.544 0.4 ]]

Метод Брауна-Робинсона: x=0.400, y=0.507, H=-3.776840

N = 6

Матрица выигрышей:

[[ 0. -1.9556 -3.5556 -4.8 -5.6889 -6.2222 -6.4 ]

[-0.7 -2.2111 -3.3667 -4.1667 -4.6111 -4.7 -4.4333]

[-1.7333 -2.8 -3.5111 -3.8667 -3.8667 -3.5111 -2.8 ]

[-3.1 -3.7222 -3.9889 -3.9 -3.4556 -2.6556 -1.5 ]

[-4.8 -4.9778 -4.8 -4.2667 -3.3778 -2.1333 -0.5333]

[-6.8333 -6.5667 -5.9444 -4.9667 -3.6333 -1.9444 0.1 ]

[-9.2 -8.4889 -7.4222 -6. -4.2222 -2.0889 0.4 ]]

Седловая точка: x=0.333, y=0.500, H=-3.866667

N = 7

Матрица выигрышей:

[[ 0. -1.698 -3.1347 -4.3102 -5.2245 -5.8776 -6.2694 -6.4 ]

[-0.5796 -1.951 -3.0612 -3.9102 -4.498 -4.8245 -4.8898 -4.6939]

[-1.4041 -2.449 -3.2327 -3.7551 -4.0163 -4.0163 -3.7551 -3.2327]

[-2.4735 -3.1918 -3.649 -3.8449 -3.7796 -3.4531 -2.8653 -2.0163]

[-3.7878 -4.1796 -4.3102 -4.1796 -3.7878 -3.1347 -2.2204 -1.0449]

[-5.3469 -5.4122 -5.2163 -4.7592 -4.0408 -3.0612 -1.8204 -0.3184]

[-7.151 -6.8898 -6.3673 -5.5837 -4.5388 -3.2327 -1.6653 0.1633]

[-9.2 -8.6122 -7.7633 -6.6531 -5.2816 -3.649 -1.7551 0.4 ]]

Метод Брауна-Робинсона: x=0.402, y=0.472, H=-3.826151

N = 8

Матрица выигрышей:

[[ 0. -1.5 -2.8 -3.9 -4.8 -5.5 -6. -6.3 -6.4 ]

[-0.4938 -1.7438 -2.7938 -3.6438 -4.2938 -4.7438 -4.9938 -5.0438 -4.8938]

[-1.175 -2.175 -2.975 -3.575 -3.975 -4.175 -4.175 -3.975 -3.575 ]

[-2.0438 -2.7938 -3.3438 -3.6938 -3.8438 -3.7938 -3.5438 -3.0938 -2.4438]

[-3.1 -3.6 -3.9 -4. -3.9 -3.6 -3.1 -2.4 -1.5 ]

[-4.3438 -4.5938 -4.6438 -4.4938 -4.1438 -3.5938 -2.8438 -1.8938 -0.7438]

[-5.775 -5.775 -5.575 -5.175 -4.575 -3.775 -2.775 -1.575 -0.175 ]

[-7.3938 -7.1438 -6.6938 -6.0438 -5.1938 -4.1438 -2.8938 -1.4438 0.2062]

[-9.2 -8.7 -8. -7.1 -6. -4.7 -3.2 -1.5 0.4 ]]

Седловая точка: x=0.375, y=0.500, H=-3.843750

N = 9

Матрица выигрышей:

[[ 0. -1.3432 -2.5284 -3.5556 -4.4247 -5.1358 -5.6889 -6.084 -6.321

-6.4 ]

[-0.4296 -1.5753 -2.563 -3.3926 -4.0642 -4.5778 -4.9333 -5.1309 -5.1704

-5.0519]

[-1.0074 -1.9556 -2.7457 -3.3778 -3.8519 -4.1679 -4.3259 -4.3259 -4.1679

-3.8519]

[-1.7333 -2.484 -3.0765 -3.5111 -3.7877 -3.9062 -3.8667 -3.6691 -3.3136

-2.8 ]

[-2.6074 -3.1605 -3.5556 -3.7926 -3.8716 -3.7926 -3.5556 -3.1605 -2.6074

-1.8963]

[-3.6296 -3.9852 -4.1827 -4.2222 -4.1037 -3.8272 -3.3926 -2.8 -2.0494

-1.1407]

[-4.8 -4.958 -4.958 -4.8 -4.484 -4.0099 -3.3778 -2.5877 -1.6395

-0.5333]

[-6.1185 -6.079 -5.8815 -5.5259 -5.0123 -4.3407 -3.5111 -2.5235 -1.3778

-0.0741]

[-7.5852 -7.3481 -6.9531 -6.4 -5.6889 -4.8198 -3.7926 -2.6074 -1.2642

0.237 ]

[-9.2 -8.7654 -8.1728 -7.4222 -6.5136 -5.4469 -4.2222 -2.8395 -1.2988

0.4 ]]

Метод Брауна-Робинсона: x=0.402, y=0.491, H=-3.837896

N = 10

Матрица выигрышей:

[[ 0. -1.216 -2.304 -3.264 -4.096 -4.8 -5.376 -5.824 -6.144 -6.336

-6.4 ]

[-0.38 -1.436 -2.364 -3.164 -3.836 -4.38 -4.796 -5.084 -5.244 -5.276

-5.18 ]

[-0.88 -1.776 -2.544 -3.184 -3.696 -4.08 -4.336 -4.464 -4.464 -4.336

-4.08 ]

[-1.5 -2.236 -2.844 -3.324 -3.676 -3.9 -3.996 -3.964 -3.804 -3.516

-3.1 ]

[-2.24 -2.816 -3.264 -3.584 -3.776 -3.84 -3.776 -3.584 -3.264 -2.816

-2.24 ]

[-3.1 -3.516 -3.804 -3.964 -3.996 -3.9 -3.676 -3.324 -2.844 -2.236

-1.5 ]

[-4.08 -4.336 -4.464 -4.464 -4.336 -4.08 -3.696 -3.184 -2.544 -1.776

-0.88 ]

[-5.18 -5.276 -5.244 -5.084 -4.796 -4.38 -3.836 -3.164 -2.364 -1.436

-0.38 ]

[-6.4 -6.336 -6.144 -5.824 -5.376 -4.8 -4.096 -3.264 -2.304 -1.216

-0. ]

[-7.74 -7.516 -7.164 -6.684 -6.076 -5.34 -4.476 -3.484 -2.364 -1.116

0.26 ]

[-9.2 -8.816 -8.304 -7.664 -6.896 -6. -4.976 -3.824 -2.544 -1.136

0.4 ]]

Седловая точка: x=0.400, y=0.500, H=-3.840000

N = 11

Матрица выигрышей:

[[ 0. -1.1107 -2.1157 -3.0149 -3.8083 -4.4959 -5.0777 -5.5537 -5.924

-6.1884 -6.3471 -6.4 ]

[-0.3405 -1.319 -2.1917 -2.9587 -3.6198 -4.1752 -4.6248 -4.9686 -5.2066

-5.3388 -5.3653 -5.286 ]

[-0.7802 -1.6264 -2.3669 -3.0017 -3.5306 -3.9537 -4.2711 -4.4826 -4.5884

-4.5884 -4.4826 -4.2711]

[-1.319 -2.0331 -2.6413 -3.1438 -3.5405 -3.8314 -4.0165 -4.0959 -4.0694

-3.9372 -3.6992 -3.3554]

[-1.957 -2.5388 -3.0149 -3.3851 -3.6496 -3.8083 -3.8612 -3.8083 -3.6496

-3.3851 -3.0149 -2.5388]

[-2.6942 -3.1438 -3.4876 -3.7256 -3.8579 -3.8843 -3.805 -3.6198 -3.3289

-2.9322 -2.4298 -1.8215]

[-3.5306 -3.8479 -4.0595 -4.1653 -4.1653 -4.0595 -3.8479 -3.5306 -3.1074

-2.5785 -1.9438 -1.2033]

[-4.4661 -4.6512 -4.7306 -4.7041 -4.5719 -4.3339 -3.9901 -3.5405 -2.9851

-2.324 -1.557 -0.6843]

[-5.5008 -5.5537 -5.5008 -5.3421 -5.0777 -4.7074 -4.2314 -3.6496 -2.962

-2.1686 -1.2694 -0.2645]

[-6.6347 -6.5554 -6.3702 -6.0793 -5.6826 -5.1802 -4.5719 -3.8579 -3.038

-2.1124 -1.081 0.0562]

[-7.8678 -7.6562 -7.3388 -6.9157 -6.3868 -5.7521 -5.0116 -4.1653 -3.2132

-2.1554 -0.9917 0.2777]

[-9.2 -8.8562 -8.4066 -7.8512 -7.1901 -6.4231 -5.5504 -4.5719 -3.4876

-2.2975 -1.0017 0.4 ]]

Метод Брауна-Робинсона: x=0.402, y=0.508, H=-3.837655

Итоговые результаты для N=2 до 11:

N=2: Saddle, x=0.500, y=0.500, H=-3.900000

N=3: Brown-Robinson, x=0.392, y=0.572, H=-3.771822

N=4: Saddle, x=0.500, y=0.500, H=-3.900000

N=5: Brown-Robinson, x=0.400, y=0.507, H=-3.776840

N=6: Saddle, x=0.333, y=0.500, H=-3.866667

N=7: Brown-Robinson, x=0.402, y=0.472, H=-3.826151

N=8: Saddle, x=0.375, y=0.500, H=-3.843750

N=9: Brown-Robinson, x=0.402, y=0.491, H=-3.837896

N=10: Saddle, x=0.400, y=0.500, H=-3.840000

N=11: Brown-Robinson, x=0.402, y=0.508, H=-3.837655

Аналитическое значение: -3.84

Численное значение для N=11: -3.8376545454545736

Погрешность: 0.0023454545

Результат выполнения алгоритма: x = 0,4; y = 0,5; H = -3,84

# Выводы

В ходе лабораторной работы была решена непрерывная выпукло- вогнутая антагонистическая игра аналитическим и численным методами. Результаты решения: 𝑥а = 0,40, 𝑦а = 0,50 и 𝐻а = −3,84; 𝑥ч = 0,4, 𝑦ч = 0,5 и

𝐻ч = −3,84 соответственно.

Аналитический метод позволил точно определить седловую точку.

В качестве численного метода использовался метод аппроксимации функции выигрыша на сетке с последующей проверкой наличия седловой точки. В случае её отсутствия применялся метод Брауна-Робинсон, дающий приближенное решение матричной игры.

import numpy as np

def H(x, y, a, b, c, d, e):

    """Функция выигрыша (ядро игры)"""

    return a\*x\*\*2 + b\*y\*\*2 + c\*x\*y + d\*x + e\*y

def check\_saddle\_point(A):

    """Проверка наличия седловой точки в матрице"""

    row\_min = np.min(A, axis=1)

    col\_max = np.max(A, axis=0)

    saddle\_value = np.max(row\_min)

    if saddle\_value == np.min(col\_max):

        saddle\_point = (np.argmax(row\_min), np.argmin(col\_max))

        return True, saddle\_point, saddle\_value

    return False, None, None

def brown\_robinson(A, K=1000):

    """Метод Брауна-Робинсона для поиска смешанных стратегий"""

    m, n = A.shape

    accum\_row = np.zeros(m)

    accum\_col = np.zeros(n)

    p = np.zeros(m)

    q = np.zeros(n)

    for k in range(K):

        i\_k = np.argmax(accum\_row)

        j\_k = np.argmin(accum\_col)

        p[i\_k] += 1

        q[j\_k] += 1

        accum\_row += A[:, j\_k]

        accum\_col += A[i\_k, :]

    v\_upper = np.max(accum\_row) / K

    v\_lower = np.min(accum\_col) / K

    price = (v\_upper + v\_lower) / 2

    x\_strategy = p / K

    y\_strategy = q / K

    return x\_strategy, y\_strategy, price

def main():

    # Параметры для варианта 9

    a, b, c, d, e = -6, 32/5, 16, -16/5, -64/5

    results = {}

    for N in range(2, 12):  # N от 2 до 11

        # Создаем сетку

        x\_vals = np.linspace(0, 1, N+1)

        y\_vals = np.linspace(0, 1, N+1)

        # Создаем матрицу выигрышей

        A = np.zeros((N+1, N+1))

        for i, x in enumerate(x\_vals):

            for j, y in enumerate(y\_vals):

                A[i, j] = H(x, y, a, b, c, d, e)

        print(f"\nN = {N}")

        print("Матрица выигрышей:")

        print(np.round(A, 4))

        # Проверяем наличие седловой точки

        has\_saddle, saddle\_point, saddle\_value = check\_saddle\_point(A)

        if has\_saddle:

            x\_index, y\_index = saddle\_point

            x\_opt = x\_vals[x\_index]

            y\_opt = y\_vals[y\_index]

            results[N] = ('Saddle', x\_opt, y\_opt, saddle\_value)

            print(f"Седловая точка: x={x\_opt:.3f}, y={y\_opt:.3f}, H={saddle\_value:.6f}")

        else:

            # Используем метод Брауна-Робинсона

            x\_strategy, y\_strategy, price = brown\_robinson(A)

            x\_opt = np.dot(x\_vals, x\_strategy)

            y\_opt = np.dot(y\_vals, y\_strategy)

            results[N] = ('Brown-Robinson', x\_opt, y\_opt, price)

            print(f"Метод Брауна-Робинсона: x={x\_opt:.3f}, y={y\_opt:.3f}, H={price:.6f}")

    print("\nИтоговые результаты для N=2 до 11:")

    for N, (method, x, y, value) in results.items():

        print(f"N={N}: {method}, x={x:.3f}, y={y:.3f}, H={value:.6f}")

    # Сравнение с аналитическим решением

    analytical\_value = -3.84

    numerical\_value = results[11][3]  # Результат для N=11

    error = abs(analytical\_value - numerical\_value)

    print(f"\nАналитическое значение: {analytical\_value}")

    print(f"Численное значение для N=11: {numerical\_value}")

    print(f"Погрешность: {error:.10f}")

if \_\_name\_\_ == "\_\_main\_\_":

    main()