

一, (每小题 7 分, 共 28 分)

1, 设函数  $z(x, y) = \frac{x^2}{2y} + f(xy)$ , 其中函数  $f$  二阶可微, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

2, 若隐函数  $y = y(x)$  由方程  $xy = e^{x+y}$  确定, 求  $y'$ 。

3, 设函数  $g(y) = \int_{\sqrt{y}}^{y^3} \frac{\cos(xy)}{x} dx$ ,  $y > 0$ , 求  $g'(y)$ 。

4, 计算积分:  $I = \int_1^2 dy \int_y^2 \frac{\sin x}{x-1} dx$ 。

二, (10 分) 求曲线积分  $I = \oint_{\ell} (1 + ye^x) dx + (x + e^x) dy$ , 其中  $\ell$  是椭圆

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  的上半周由点  $A(2, 0)$  到点  $B(-2, 0)$ 。

三, (10 分) 计算曲面积分  $I = \iint_{S^+} x dy dz + (y + y^2) dz dx + z dx dy$ , 其中  $S^+$  为曲

面  $z = x^2 + y^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , 取下侧。

四, (每小题 7 分, 共 14 分)

1, 求解微分方程初值问题:  $\begin{cases} xy' + y = e^x \\ y(1) = 1 \end{cases}$ 。

2, 求微分方程:  $y'' - 4y' + 3y = 1 + e^{2x}$  的通解。

五, 讨论如下广义积分的敛散性: (每小题 5 分, 共 10 分)

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - x + 1}}, \quad (2) \int_0^1 \frac{\sin x}{x^{4/3}} dx$$

六, (每小题 8 分, 共 16 分)

(1) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n} (x-3)^n$  的收敛半径, 收敛区间和收敛域。

(2) 求函数  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  在点  $x=1$  处的幂级数展开式。

七, (7 分) 讨论无穷积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sin x}{5+x^3} dx$  的敛散性, 若积分收敛, 研究其是绝对

收敛还是条件收敛?

八, (5分) 设序列  $\{na_n\}$  收敛, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n-1})$  也收敛, 求证: 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛。