① π ② $\frac{128}{5}\pi$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$ ⑤ $c_1 x - c_1 e^{-x} + c_2$

⑥ $\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$ $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ⑦ $\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ $(-1\le x<1)$

东校区 2011 学年度第二学期 11 级《高等数学一》期末试题 A 卷

学院＿＿＿＿＿＿＿专业＿＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿＿评分＿＿＿＿＿＿＿

⑧ 收敛 ⑨ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx = \begin{cases} x \\ 0, & x=k\pi \end{cases}$ ⑩ $\ln\frac{3}{4}$

教师签名＿＿＿＿＿＿＿

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

解答下列各题，并写出必要的过程。（1-10 题每小题 8 分，11-12 题每小题 10 分）

⑪ 条件收敛；

1. 计算$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$的值。

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

2. 求$\iint\limits_S xy^2dydz+yz^2dzdx+zx^2dxdy$，其中S为球面$x^2+y^2+z^2=4$的外侧。

$$=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 4}(y^2+z^2+x^2)dxdydz$$

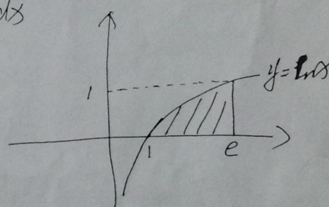
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^2 r^2\cdot r^2\sin\varphi\, dr=\frac{128}{5}\pi.$$

3. 求$\oint_{L^+}(xy^2+y^3)dy-(x^3+x^2y)dx$,其中$L^+$为圆周$x^2+y^2=1$的正向。

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(y^2+x^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot r\,dr = \frac{\pi}{2}.$$

4. 设$f(x,y)$在$[1,e]\times[0,1]$上连续，试交换如下二重积分的积分次序：$\int_1^e[\int_0^{\ln x}f(x,y)dy]dx$.

$$\int_1^e\left(\int_0^{\ln x}f(x,y)dy\right)dx = \int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$$



5. 求微分方程 $y''(e^x+1)+y'=0$ 通解。

令 $y'=z$. 则 $y''=\dfrac{dz}{dx}$.

原方程变为 $\dfrac{dz}{dx}(e^x+1)+z=0$　$\dfrac{dz}{z}=-\dfrac{dx}{e^x+1}\Rightarrow \ln|z|=-\int\dfrac{dx}{e^x+1}$

$\ln|z|=\int\dfrac{d(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}}=\ln|1+e^{-x}|+\ln C_1 \Rightarrow z=C_1(1+e^{-x})$

由 $y'=z$ 得 $y=\int C_1(1+e^{-x})dx = C_1x-C_1e^{-x}+C_2$

6. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛域及和函数。

令 $u_n=\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{2n+1}{2n-1}\cdot\frac{x^2}{2}\right|\to\frac{1}{2}x^2\ (n\to\infty)$.

当 $\frac{x^2}{2}<1$，即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时，级数收敛.

又 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(n-\frac{1}{2})$，发散，故收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$

$$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}=\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2}$$

$$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

7. 求$\arctan\frac{1+x}{1-x}$在$x=0$处的幂级数展开式（请注明收敛域）。

令 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$. 则 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$.

$$\int_0^x f'(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-x^2)^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

$$\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.\qquad -1\le x<1$$

8. 试判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 的敛散性。

令 $u_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}\to\frac{1}{4}<1$.

故级数收敛.

9. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且当 $x\in[-\pi,\pi)$ 时，$f(x)=x$，求 $f(x)$ 的傅里叶级数及其和函数.

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=0$.

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx=0$. $n=1,2,\cdots$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n}$. $n=1,2,\cdots$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx=\begin{cases}x & k\pi<x<(k+1)\pi.\\ 0 & x=k\pi\end{cases}$$

$k=\pm1,\pm2,\cdots$

10. 求$\int_0^1 \frac{x^2-x^3}{\ln x}dx$.

因 x^y 在 $(0,1]\times[2,3]$ 连续. 故

$$\int_0^1 \frac{x^2-x^3}{\ln x}dx = \int_0^1 dx\int_3^2 x^y dy = \int_3^2 dy\int_0^1 x^y dx$$

$$= \int_3^2 \frac{1}{y+1}dy = \ln\frac{3}{4}$$

11. 判断积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3+2}\cos x dx$ 是绝对收敛还是条件收敛.

$$\left(\frac{x^2+1}{x^3+2}\right)' = \frac{-x^4-3x^2+4x}{(x^3+2)^2} = \frac{-x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^3+2)^2} < 0 \ (当x>1时)$$

当 $x>1$ 时, $\frac{x^2+1}{x^3+2}$ 单减. 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^3+2}=0$

而 $\left|\int_1^A \cos x dx\right| \le 2$. 由狄利克雷判别法 积分收敛.

又 $\left|\frac{x^2+1}{x^3+2}\cos x\right| \ge \frac{x^2+1}{x^3+2}\cos^2 x = \frac{x^2+1}{x^3+2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+1}{x^3+2}dx$ 发散. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+1}{x^3+2}\cos 2x dx$ 收敛.

故 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{x^2+1}{x^3+2}\cos x\right|dx$ 发散. 积分条件收敛.

12. 试证明 $\int_0^{+\infty} te^{-tx}dx$ 在 $0<c\le t\le d$ 上一致收敛，但在 $0<t\le d$ 上不一致收敛。

$$\left|\int_0^A te^{-tx}dx-\int_0^{+\infty} te^{-tx}dx\right|=\left|\int_A^{+\infty} te^{-tx}dx\right|=e^{-At}$$

当 $0<c\le t\le d$ 时，$e^{-At}\le e^{-Ac}$

由 $e^{-Ac}<\varepsilon \Rightarrow A>\frac{1}{c}\ln\frac{1}{\varepsilon}\ (\varepsilon<1)$. 故积分在 $0<c\le t\le d$ 一致收敛.

（或 $|te^{-tx}|\le de^{-cx}$，而 $\int_0^{+\infty} de^{-cx}dx$ 收敛）

当 $0<t\le d$ 时. 若取 $t_0=\frac{1}{A}$. 则

$$\left|\int_0^A t_0e^{-t_0x}dx-\int_0^{+\infty} t_0e^{-t_0x}dx\right|=\left|\int_A^{+\infty} t_0e^{-t_0x}dx\right|=e^{-At_0}=e^{-1}>0.$$

故. 积分在 $0<t\le d$ 不一致收敛.