09 级第二学期高等数学（一）期末考试 B 题答案

学院__________专业_____________学号____________姓名___________评分__________

阅卷老师签名________________

警 示 **《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"**

一。解答下列各题（共 9 小题，每小题 8 分）

1. 求 $\iint\limits_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，**D 是由** $y^2+x^2=1,\ y=x$ **及** y**轴围成的第一象限区域**

$$\iint\limits_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 e^r rdr=\frac{\pi}{4}$$

2. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}x^2dxdydz$ **其中** Ω **是由椭球面** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **所围成的空间闭区域.**

$$I=\iiint\limits_{\Omega}x^2dxdydz=\int_{-a}^{a}x^2\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\frac{4}{15}\pi a^3bc$$

3. 求$\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy,\quad \Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧

$$\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R r^4\sin\varphi dr=\frac{12}{5}\pi R^5$$

4. 求微分方程 $y''+3y'+2y=3x+2$ 的通解。

解：特征方程 $\lambda^2+3\lambda+2=0\ \therefore\ \lambda=-2,\lambda=-1$

齐次方程通解为：$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}$

设非齐次方程的特解为：$y^*=Ax+B$, 代人解得 $A=\frac{3}{2},B=-\frac{5}{4}$

非齐次方程的通解为：$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}+\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}$

5.. 判别 $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 的敛散性

$$\left|\int_1^A \sin xdx\right|=|\cos A-\cos 1|\le 2$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\frac{1}{x}$单调递减

$\therefore$由狄里克雷判别法可得收敛

6. 求 $f\left(x\right)=\arctan x$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式，并指出收敛域.

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$\therefore f(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

7. 判别 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+4n^4x^2}(-\infty<x<+\infty)$ 的一致收敛性

$$\left|\frac{x}{1+4n^4x^2}\right|\le\left|\frac{x}{2\cdot 2n^2x}\right|=\frac{1}{4n^2}$$

$$\text{而}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}\text{收敛},\therefore\text{由强级数判别法得}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+4n^4x^2}\text{一致收敛}$$

8. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ 的收敛性, 若收敛, 指出条件收敛还是绝对收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)},\text{其中}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)}\text{发散},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\text{收敛}$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\text{发散}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}=0,\text{设}f(x)=\frac{2x+1}{x(x+1)},\text{则}f'(x)=-\frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}<0$$

$$\therefore\frac{2n+1}{n(n+1)}\text{单调递减}.$$

$\therefore$根据leibiniz判别法可得原级数收敛, $\therefore$条件收敛

9. 判定积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx$ 的收敛性

$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$的收敛性

$\because 0<x<1, \frac{\ln x}{1-x} \le \ln x,$

$\int_0^1 \ln x dx = x\ln x|_0^1 - \int_0^1 \ dx = -1$

$\therefore \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$收敛

二。解答下列各题（共 4 小题，每小题 7 分）

1. 验 证 $\int_{(0,1)}^{(1,2)} \left(x^2+y^2\right)\left(xdx+ydy\right)$ 与路径无关，并求其值。

$\int_{(0,1)}^{(1,2)} \left(x^2+y^2\right)\left(xdx+ydy\right)$

$\because \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$

$\therefore$ 原式$=\int_{(0,1)}^{(0,2)} \left(x^2+y^2\right)\left(xdx+ydy\right) + \int_{(0,2)}^{(1,2)} \left(x^2+y^2\right)\left(xdx+ydy\right)$

$= \int_0^1 (x^3+4x)dx + \int_1^2 y^3 dy = 6$

2. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}(x+1)^n$的收敛域, 和函数

解$: R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n n} \Big/ \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} = 2, \therefore -2 < x+1 < 2,$ 得$-3 < x < 1$

当$x=-3$时$, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛$,$当$x=1$时$, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散$,$

$\therefore$收敛域为$: [-3,1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}(x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} dt = \int_0^t \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t) = -\ln(1-\frac{x+1}{2}) = -\ln(\frac{1-x}{2})$$

3.将 $f(x) = \begin{cases} 1, 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0, \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$ ，在$[0,\pi]$上展开成傅立叶级数，并求出它的和函数。

$b_n = 0 (n=1,2\cdots)$ ……分

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = 1$ ……分

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx dx = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}(n=1,2\cdots)\cdots\cdots\text{分}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx = \begin{cases} 1, 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0, \frac{\pi}{2} < x \le \pi \cdots\cdots\text{分} \\ \frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

4．证明：若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证：$\forall\varepsilon>0$,

$\because f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，$\therefore \exists\delta>0$,

使得只要 $|x_2-x_1|<\delta$，$x_1,x_2\in[a,+\infty)$，就有 $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$, (1)

$\because \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，对 $\varepsilon_1=\varepsilon\delta$，$\exists M>a$，当 $x>M$ 时有 $\left|\int_x^{x+\delta} f(t)dt\right|<\varepsilon\delta$，(2)

由(1)，当 $x<t<x+\delta$ 时，$f(t)-\varepsilon<f(x)<f(t)+\varepsilon$,

$\therefore \int_x^{x+\delta} f(t)dt-\varepsilon\delta<\int_x^{x+\delta} f(x)dt<\int_x^{x+\delta} f(t)dt+\varepsilon\delta$,

即 $\left|\int_x^{x+\delta} f(x)dt-\int_x^{x+\delta} f(t)dt\right|<\varepsilon\delta$,　(3)　所以当 $x>M$ 时，

$$|f(x)|=\frac{1}{\delta}\left|\int_x^{x+\delta} f(x)dt\right|\le\frac{1}{\delta}\left(\left|\int_x^{x+\delta} f(x)dt-\int_x^{x+\delta} f(t)dt\right|+\left|\int_x^{x+\delta} f(t)dt\right|\right)<2\varepsilon,$$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

注：$\sin(x^2)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续，$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$ 收敛（令 $x^2=t$），但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ne0$.