东 校 区 08 学 年 第 二 学 期 08 级 B 卷 答 案

一.（每 小 题 8 分， 共 64 分）

1. 已知 $u=\sin x^2 y$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy\cos x^2 y$$

2.. 若 $z=z\left(x,y\right)$ 是由方程 $x^2+y^3-xyz^2=0$ 确定的隐函数，求 dz .

$$\because x^2+y^3-xyz^2=0$$
$$\therefore 2xdx+3y^2dy-yz^2dx-xz^2dy-2xyzdz=0$$
$$\therefore dz=\frac{2x-yz^2}{2xyz}dx+\frac{3y^2-xz^2}{2xyz}dy$$

3. 求 $I=\iint\limits_D xe^{xy}dxdy$， $D:0\le x\le 1,\ \ -1\le y\le 0$.

$$I=\iint\limits_D xe^{xy}dxdy=\int_0^1 dx\int_{-1}^0 xe^{xy}dy=\int_0^1(1-e^{-x})dx=e^{-1}$$

4. 求 $I=\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz$ **其中** Ω **是由椭球面** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ **所围成的空间闭区域.**

$$I=\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz=\int_{-c}^{c}z^2\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

5. 求微分方程 $y'=y\cos x$ 的通解.

$$\because y'=y\cos x\quad \therefore \frac{dy}{y}=\cos xdx$$
$$\therefore \ln|y|=\sin x+C_1$$
$$\therefore y=Ce^{\sin x}$$

6. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域.

$$\because\quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 收敛。当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散。

$\therefore$ 收敛域为：$(-1,\ 1]$

7. 判断 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$ 的敛散性，若收敛，指明是绝对收敛还是条件收敛?

$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$,而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散

$\because \frac{1}{\ln n}>\frac{1}{\ln(n+1)},\lim_{n\to 0}\frac{1}{\ln n}=0$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$条件收敛

8. 求 $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_\varepsilon^1=\frac{3}{2}.$$

二.（每小题 6 分，共 24 分）

1．验证 $\int_{(0,1)}^{(1,2)}\left(x^2+y^2\right)\left(xdx+ydy\right)$ 与路径无关，并求其值。

$\int_{(0,1)}^{(1,2)}\left(x^2+y^2\right)\left(xdx+ydy\right)$

$\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy$

$\therefore$ 原式$=\int_{(0,1)}^{(0,2)}\left(x^2+y^2\right)\left(xdx+ydy\right)+\int_{(0,2)}^{(1,2)}\left(x^2+y^2\right)\left(xdx+ydy\right)$

$=\int_0^1(x^3+4x)dx+\int_1^2 y^3dy=6$

2．求 $I=\oiint\limits_S xz\,dydz+yx^3dzdx+zy^5dxdy$， 其中 S 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧

$$I=\oiint\limits_S xz\,dydz+yx^3dzdx+zy^5dxdy=\iiint\limits_\Omega(z+x^3+y^5)dxdydz=0$$

3. 求方程 $\left(1+x^2\right)y''=2xy'$ 的通解.

令$y'=p(x)\quad\therefore y''=p'$

$\therefore\left(1+x^2\right)p'=2xp$

$\therefore p=C_1\left(1+x^2\right)$

$\therefore y'=C_1\left(1+x^2\right)$

$\therefore y=C_1x+\frac{1}{3}C_1x^3+C_2$

4．求 $f\left(x\right)=\arctan x$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式，并指出收敛域.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$\therefore\ f(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

三.（每小题 4 分，共 12 分）

1. 求方程 $y''-y=x^2$ 的通解

对于$y''-y=0$，特征根为：$\lambda=\pm1$

$\therefore$非齐次通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+y^*$

$y^*=Ax^2+Bx+C$代入方程得

$A=-1,B=0,C=-2$

$\therefore y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x^2-2$

2. 讨论$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$的敛散性.

瑕点：x=1

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}\Big/\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

$,\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}dx=\frac{3}{2}$收敛。

$\therefore\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}dx$收敛

3. 证明：若 $f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续，且$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证：$\forall\varepsilon>0$,

$\because f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续，$\therefore\exists\delta>0$,

使得只要$|x_2-x_1|<\delta$，$x_1,x_2\in[a,+\infty)$，就有$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$， (1)

$\because\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，对$\varepsilon_1=\varepsilon\delta$，$\exists M>a$，当$x>M$时有$\left|\int_x^{x+\delta}f(t)dt\right|<\varepsilon\delta$，(2)

由(1)，当$x<t<x+\delta$时，$f(t)-\varepsilon<f(x)<f(t)+\varepsilon$，

$$\therefore\int_x^{x+\delta}f(t)dt-\varepsilon\delta<\int_x^{x+\delta}f(x)dt<\int_x^{x+\delta}f(t)dt+\varepsilon\delta,$$

即$\left|\int_x^{x+\delta}f(x)dt-\int_x^{x+\delta}f(t)dt\right|<\varepsilon\delta$， (3) 所以当$x>M$时，

$$|f(x)|=\frac{1}{\delta}\left|\int_x^{x+\delta}f(x)dt\right|\le\frac{1}{\delta}\left(\left|\int_x^{x+\delta}f(x)dt-\int_x^{x+\delta}f(t)dt\right|+\left|\int_x^{x+\delta}f(t)dt\right|\right)<2\varepsilon,$$

$\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0.$

注：$\sin\left(x^2\right)$在$\left[0,+\infty\right)$上不一致连续，$\int_0^{+\infty}\sin\left(x^2\right)dx$收敛（令$x^2=t$），但$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)\neq 0$.