中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学一（I）》(A 卷)

学年学期:	2016–2017 学年第 1 学期	姓　　名:	________
学　院/系:	数学学院	学　　号:	________
考试方式:	闭卷	年级专业:	________
考试时长:	120 分钟	班　　别:	________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者,不授予学士学位.”

以下为试题区域,共 14 道大题,总分 100 分,考生请在答题纸上作答

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos\left(e^x+e^{-x}-2\right)}{x^4}$.

解:

由泰勒公式:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{1-\cos\left(e^x+e^{-x}-2\right)}{x^4}\\
=&\lim_{x\to0}\frac{1-\left(1-\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)^2}{2!}+\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)^4}{4!}+o\left(x^5\right)\right)}{x^4}\\
=&\lim_{x\to0}\frac{\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)^2}{2}-\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)^4}{24}}{x^4}\\
=&\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}\right)^2-\frac{1}{24}\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}\right)^2\cdot\left(e^x+e^{-x}-2\right)^2.
\end{aligned}
$$

考虑极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$, 由洛必达法则:

$$
\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1.
$$

所以,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)}{x^{4}}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{x^{2}}\right)^{2}-\frac{1}{24}\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{x^{2}}\right)^{2}\cdot\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)^{2}\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\times 0\\
&=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

2. 求定积分: $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x$

解:

解 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{e}}^{1}|\ln x|\mathrm{d}x+\int_{1}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x.$

因为当 $\frac{1}{e}<x<1$ 时, $\ln x<0$,

这时 $|\ln x|=-\ln x$; 当 $x\geqslant 1$ 时, $\ln x\geqslant 0$, 这时 $|\ln x|=\ln x$.

于是

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{e}\ln x\,\mathrm{d}x,$$

分别用分部积分法求右端两个积分.

$$-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\,\mathrm{d}x=-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}+x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}=1-\frac{2}{e},$$

$$\int_{1}^{e}\ln x\,\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_{1}^{e}-x\Big|_{1}^{e}=1,$$

最后得

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x=2-\frac{2}{e}.$$

3. 求不定积分: $\int\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^{2}}\mathrm{d}x$

解:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{xe^{x}}{(1+e^{x})^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int x\mathrm{d}\frac{1}{1+e^{x}} \\
&= -\frac{x}{1+e^{x}} + \int \frac{1}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{x}{1+e^{x}} + \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{x}{1+e^{x}} - \int \frac{\mathrm{d}\left(e^{-x}\right)}{e^{-x}+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{对} \int \frac{\mathrm{d}\left(e^{-x}\right)}{e^{-x}+1} (\text{令} e^{-x}=t) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} \\
&= \ln(t+1) \\
&= \ln\left(e^{-x}+1\right) \\
&\therefore \int \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\mathrm{d}x = -\frac{x}{1+e^{x}} - \ln\left(e^{-x}+1\right)
\end{aligned}
$$

4, 求通过 y 轴且与平面 $9x-4y-2z-1=0$ 垂直的平面方程。

解：该平面经过 $(0,0,0)$, 方程为 $9x-4y-2z=0$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin\left(\ln\left(x^2-1\right)^2\right) & ,x\le 0\\ \dfrac{\sin(\pi x)}{x(x^2+2x-3)} & ,x>0\end{cases}$，分析它的所有间断点及其类型。

解:

(分析) $f(x)$ 在 $x<0$ 和 $x>0$ 为初等函数表达式, 在有定义的区间上连续, 因此, 在函数没有定义的点及分段点找间断点。

(1) 在分段点 $x=0$ 处,

$$
f\left(0^-\right)=\lim_{x\to 0^-}\sin\ln\left(x^2-1\right)^2=\sin\ln\left[\lim_{x\to 0^-}\left(x^2-1\right)^2\right]=\sin\ln 1=0
$$

$$
f\left(0^+\right)=\lim_{x\to 0^+}\pi\times\frac{\sin\pi x}{\pi x}\times\frac{1}{(x+3)(x-1)}=-\frac{\pi}{3}
$$

$f\left(0^-\right)\ne f\left(0^+\right)$, 故 $x=0$ 是第一类 (跳跃型) 间断点。

$x<0$ 时, $f(x)$ 在 $x=-1$ 处无定义.

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\sin\ln\left(x^2-1\right)^2$ 不存在 $(\ne\infty)$

故 $x=-1$ 是第二类 (振荡型) 间断点.

$x>0$ 时, $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x(x+3)(x-1)}$ 在 $x=1$ 处无定义

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x(x+3)(x-1)} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi(x-1)}{\pi x(x+3)(x-1)}\times(-\pi)
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{\pi}{4}$$

故 $x = 1$ 是第一类 (可去型) 间断点.

6 设 $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$, 讨论 $f(x)$ 的单调区间以及极值点, 凸凹区间以及拐点, 并求出 $f(x)$ 的渐近线。

解:

定义域为 $x \neq 1$

$y' = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$

$y'' = \dfrac{8}{(x-1)^3}$

$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$

$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, 1)$ 和 $(1, 3)$

函数极大值为 $f(-1) = -2$, 极小值为 $f(3) = 6$

$f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 为凸函数, $(1, +\infty)$ 为凹函数, 无拐点

$x = 1$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线。

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+3}{x^2-x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - x = \frac{x^2+3-x^2+x}{x-1} = 1$$

直线 $y = x + 1$ 也是 $f(x)$ 的渐进线。

7. 设函数 $z(x, y)$ 由方程 $x\cos y + y\cos z + z\sin x = 1$ 所决定, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

8. 设 $y = x^3 + \dfrac{1}{12x}$, 求函数从 $x = 1$ 到 $x = 2$ 上的弧长。

解:

$s = \displaystyle\int_1^2 \sqrt{\frac{1}{144\,x^4} + 9\,x^4 + \frac{1}{2}}\mathrm{d}x$

9. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y\sin\left(x^2\right)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0). \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 讨论在 (0,0) 点的连续性, 偏导性和可微性

10. 设曲线 L : $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}z^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 求 L 在点 (1,-1,-2) 处的切线以及 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$

11. 求函数 $z = \ln(x + y)$ 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上点 $(1, 2)$ 处, 沿着这抛物线在该点偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

解:

先求抛物线 $y^2 = 4x$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线方向.

设切线与 x 轴正向夹角为 α.

方程 $y^2 = 4x$ 两边对 x 求导, 得 $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4$, 故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,2)} = \left.\dfrac{2}{y}\right|_{(1,2)} = \dfrac{2}{2} = 1$.

由导数的几何意义 $\tan\alpha = 1$, 可知 $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

又

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+y},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y},\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3}$$

. 所以所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

12. 求 $x\arctan x$ 在 $x=0$ 处的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式。

解:

$$\begin{aligned}\arctan x&=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\int_0^x\left(1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+o\left(x^{2n}\right)\right]\mathrm{d}x\\&=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)\\\therefore x\arctan x&=x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{5}x^6+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}+0\left(x^{2n+2}\right)\end{aligned}$$

13. 设 $f(x,x+y,x+y+z)=0$ 且 F 一阶连续可偏导，函数 $z=z(x,y)$, 求 $z=z(x,y)$ 的全微分。

解:

$\mathrm{d}z=-\dfrac{f_1'+f_2'+f_3'}{f_3'}\mathrm{d}x-\dfrac{f_2'+f_3'}{f_3'}\mathrm{d}y.$

14. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 上二阶可导。且满足 $f(1)=f(2)=0$

证明: 在 $(0,2)$ 内存在 ξ, 使得 $2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$.

解:

设 $F(x)=xf(x)$

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$(0,1)$ 上可导，$F(0)=F(1)$。

$\therefore\exists\xi_1\in(0,1)$ 使得 $F'\left(\xi_1\right)=0$，$F(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续,$(1,2)$ 上可导，$F(1)=F(2)$

$\exists\xi_2\in(1,2)$ 使得 $F'\left(\xi_2\right)=0$

$F'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续,(ξ_1,ξ_2) 上可导, $F'\left(\xi_1\right)=F'\left(\xi_2\right)$

$\therefore\exists\xi\in\left(\xi_1,\xi_2\right)\in(0,2)$ 使得 $F''(\xi)=0$ 即 $2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$