中山大学 2005 级东校区第二学期高等数学一

一.（每小题 7 分，共 28 分）

1. 设函数 $z(x,y)=\dfrac{y^2}{2x}+f(xy)$ ，其中 f 二阶可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 。

2. 设函数 $\vec{F}=xyz\vec{i}+3x^2y\vec{j}+(y^2-xz^2)\vec{k}$ ，求 $div\vec{F}$ ，$grad(div\vec{F})$ 。

3. 设函数 $g(y)=\int_y^{y^2}\dfrac{\sin(xy)}{x}dx$ ，$(y>0)$ ，求 $g'(y)$ 。

4. 在直角坐标系下，用两种不同的次序将二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ 化为累次积分，其中 D 是由直线 $x=1$, $x=2$, $y=x$, $y=2x$ 所围成区域。

二.（10 分）计算曲线积分 $I=\int_L(e^x\cos y-my)dx-(e^x\sin y-m)dy$ （$m>0$ 为常数），其中有向曲线 L 是圆周 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ 从点 $A(2a,0)$ 经 $M(a,a)$ 至 $O(0,0)$ 的部分。

三.（10 分）利用高斯公式计算曲面积分 $I=\oiint\limits_S(xy^2+x^2)dydz+yz^2dzdx+zx^2dxdy$，其中 S 是由球面 $y=\sqrt{2z-z^2-x^2}$，平面 $y=0$ 所围区域表面的外侧。

四.（每小题 7 分，共 14 分）

1. 求微分方程：$x\dfrac{dy}{dx}+y=xy\dfrac{dy}{dx}$ 的通积分。

2. 求微分方程：$y''-5y'+6y=4-3e^{2x}$ 的通解。

五. 讨论下列广义积分的敛散性：（每小题 5 分，共 10 分）

1. $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x^5}}dx$ ，　　2. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{1+x^2}}$ 。

六.（9 分） 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(n-1)}x^{2n}$ 的收敛半径、收敛域以及和函数。

七．（7 分）求函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x=2$ 处的泰勒展开式，并求出收敛域。

八．（7 分）证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^{p}}$, $(0<p\le 1)$ 在闭区间 $[\delta,\pi-\delta]$ 上一致收敛，但对任意固定的 $x\in[\delta,\pi-\delta]$，该级数并不绝对收敛，其中 $0<\delta<\frac{\pi}{2}$ 。

九．（5 分）设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 S ，且 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$ ，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 也收敛于 S 。