中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学一（II）》(A 卷)

学年学期:	2021–2022 学年第 2 学期	姓　　名:	
学　院/系:	数学学院	学　　号:	
考试方式:	闭卷	年级专业:	
考试时长:	120 分钟	班　　别:	

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者, 不授予学士学位.”

以下为试题区域, 共 11 道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答

一、求多元函数 $f(x,y)=x\times e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值。

解:

解 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, 先求函数的驻点: 令

$$\begin{cases} f_x'(x,y)=\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0 \\ f_y'(x,y)=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0 \end{cases}$$

解得驻点为 $(1,0),(-1,0)$. 又

$$f''_{xx}=x\left(x^2-3\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f''_{xy}=-y\left(1-x^2\right)e^{-\frac{x^2+v^2}{2}}$$

$$f''_{yy}=-x\left(1-y^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

对点 $(1,0)$, 有 $A_1=f''_{xx}(1,0)=-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, B_1=f''_{xy}(1,0)=0, C_1=f''_{yy}(1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

所以, $A_1C_1-B_1^2>0, A_1<0$,

故 $f(x,y)$ 在点 $(1,0)$ 处取得极大值 $f(1,0)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

对点 $(-1,0)$, 有 $A_2=f''_{xx}(-1,0)=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, B_2=f''_{xy}(-1,0)=0, C_2=f''_{yy}(-1,0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

所以, $A_2C_2-B_2^2>0, A_2>0$,

故 $f(x,y)$ 在点 $(1,0)$ 处取得极小值 $f(-1,0)=-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

二、求 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$ 的值。

解:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r\\
=&\frac{\pi}{2}\int_0^1 r^3\mathrm{d}r\\
=&\frac{\pi}{2}\times\left.\frac{1}{4}r^4\right|_0^1\\
=&\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{4}\\
=&\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

三、求第一型曲面积分 $\iint_S (x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, 其中 S 为抛物面 $z=x^2+2y^2$在$z\le 1$ 部分的下侧。

四、求微分方程 $x\mathrm{d}y+\left(y+x^2\right)\cdot\mathrm{d}x=0$ 的通解。

五、求微分方程 $y''=y'\cdot y$ 的通解。

六、求微分方程 $y''+y=e^{3x}(x+2)$ 的通解。

七、求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+y^2}{(1+x^2)\,xy}$ 的通解。

解:

原方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(1+x^2)\,x}\cdot\frac{1+y^2}{y},$$

分离变量, 得

$$\frac{y\,\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x\,(1+x^2)}$$

两端分别积分

$$\int\frac{y\,\mathrm{d}y}{1+y^2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x\,(1+x^2)},$$

因右端的被积函数可写成

$$\frac{1}{x\,(1+x^2)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2},$$

故得

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)=\ln x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2}\ln C$$

即

$$\ln\left[\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)\right]=2\ln x+\ln C.$$

所以原方程的通解为

$$\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)=Cx^2.$$

八、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域与和函数。

解:

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{x^n}\right|=|x|$, 可得收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=1$ 时, 原级数发散; 当 $x=-1$ 时, 原级数收敛, 于是收敛域为 $[-1,1)$.

设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$, 则 $xs(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$, 两边同时求导, 有

$$[xs(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},$$

两边同时积分, 有

$$xs(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x=-\ln(1-x),x\in[-1,1).$$

故当 $x\neq 0$ 时, $s(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$; 当 $x=0$ 时, 由 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$, 得 $s(0)=1$, 于是

$$s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

九、求函数 $y=\frac{x}{4+x^2}$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，并指出收敛域。

十、判断下列数项级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\left(\frac{\pi}{4^n}\right)$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(2n)}{\ln n}$

解:

(1)$3^n\sin\left(\frac{\pi}{4^n}\right)\leq\pi\left(\frac{3}{4}\right)^n$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 收敛，由比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\left(\frac{\pi}{4^n}\right)$ 收敛。

十一、考虑函数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{x}}$

证明:

(1) 级数在 $(0,1)$ 上收敛。

(2) 级数在 $(0,1)$ 上不一致收敛。

(3) 级数的和函数 $S(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续。