2019 学年第二学期《高等数学一（II）》期末考试试题（模拟卷 2）

一、主观题

1. （10 分）

求函数 $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ 在 $(1,1)$ 点邻域的 n 阶带 **Peano** 余项的 **Taylor** 公式.

解 $f(x,y)=x\dfrac{1}{1+(y-1)}=[(x-1)+1]\dfrac{1}{1+(y-1)}$

$$=[(x-1)+1]\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(y-1)^k+o[(y-1)^n]\}$$

$$=1+(x-1)-(y-1)-(x-1)(y-1)+(y-1)^2+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}(x-1)(y-1)^{n-1}+(-1)^n(y-1)^n+o(\rho^n),\ \rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\to 0.$$

2. （10 分）

求 $f=xyz$ 在给定条件 $x^2+y^2+z^2=1$， $x+y+z=0$ 下的最值.

解 作 Lagrange 函数 $L(x,y,z)=xyz+\lambda_1(x^2+y^2+z^2-1)+\lambda_2(x+y+z)$，由于

$$\begin{cases} L_x=yz+2\lambda_1x+\lambda_2=0, \\ L_y=xz+2\lambda_1y+\lambda_2=0, \\ L_z=xy+2\lambda_1z+\lambda_2=0, \\ x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0, \end{cases}$$

用前三式得 $x=y=z$，或 $x=y=2\lambda_1$，或 $x=z=2\lambda_1$，或 $y=z=2\lambda_1$. $x=y=z$ 不适合后两式，故有 $x=y=2\lambda_1$，或 $x=z=2\lambda_1$，或 $y=z=2\lambda_1$，这时，

$$x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\quad z=\mp\frac{2}{\sqrt{6}},$$

或

$$x=z=\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\quad y=\mp\frac{2}{\sqrt{6}},$$

或

$$y=z=\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\quad x=\mp\frac{2}{\sqrt{6}},$$

由实际意义可知，问题必有条件最大最小值. 比较上述点的函数值可知：函数 $f(x,y,z)$ 在

$(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})$，$(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$ 与 $(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$ 点取条件最小值 $-\frac{\sqrt{6}}{18}$；在

$(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$，$(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})$ 与 $(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})$ 两点取条件最极大值 $\frac{\sqrt{6}}{18}$.

3. （10 分）

求三重积分 $\iiint\limits_V x^2y^2z\,dxdydz$ **，**

V **由** $z=\frac{x^2+y^2}{a},z=\frac{x^2+y^2}{b},xy=c,xy=d,y=\alpha x,y=\beta x$ **围成的立体，其中**

$0<a<b,0<c<d,0<\alpha<\beta;$

解： 作变换 $u=\frac{x^2+y^2}{z},v=xy,w=\frac{y}{x}$，则变换把 V 变为

$$\Delta: a\le u\le b, c\le v\le d, \alpha\le w\le \beta.$$

逆变换为 $x=\sqrt{\frac{v}{w}},y=\sqrt{wv},z=\frac{v(1+w^2)}{uw}$.

$$\therefore \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{2x}{z} & \frac{2y}{z} & -\frac{x^2+y^2}{z^2}\\ y & x & 0\\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0\end{vmatrix}=-\frac{x^2+y^2}{z^2}\cdot\frac{2y}{x}=-2v(1+w^2)$$

$$\therefore J(u,v,w)=-\frac{1}{2v(1+w^2)}$$

$$\iiint\limits_V x^2y^2z\,dxdydz=\iiint\limits_\Delta \frac{v^3(1+w^2)}{uw}\cdot\frac{1}{2v(1+w^2)}dudvdw$$

$$=\iiint\limits_\Delta \frac{v^2}{2uw}dudvdw=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{du}{u}\cdot\int_c^d v^2dv\cdot\int_\alpha^\beta\frac{dw}{w}=\frac{d^3-c^3}{6}\ln\frac{b}{a}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

4. （10 分）

求 $I=\oint_l \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$，其中 l 是不经过原点的简单闭曲线，取正方向，设 l 围成的区域为 D.

（1） D 不包含原点；

（2） D 包含原点在其内部.

解：由于 $P(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$， $Q(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$， 显然 P,Q 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial p}{\partial y}$， 因此

（1） D 不包含原点时， $I=\oint_l \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=0$，

（2） D 包含原点在其内时，任取 $R>0$，作圆周 $K_R=x^2+y^2=R^2$， 正向，

则 $I=\oint_l \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\oint_{K_R} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{1}{R^2}\oint_{K_R} xdx+ydy=0$

5. （10 分）

求 $\iint_S z^2 ds$，

其中 S 是螺旋面的一部分：$x=u\cos v$， $y=u\sin v$，$z=v(0\le u\le a, 0\le v\le 2\pi)$.

解：$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{pmatrix}$

所以 $E=x_u^2+y_u^2+z_u^2=1$，$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2=u^2+1$

$F=x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v=0$

因此 $\iint_S z^2 ds=\iint_D v^2\sqrt{EG-F^2}dudv=\int_0^{2\pi} v^2 dv\int_0^a \sqrt{1+u^2}du$

$$=\frac{4\pi^3}{3}[a\sqrt{a^2+1}+\ln(a+\sqrt{a^2+1})]$$

6. （10 分）

求解方程 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\quad(y>0)$.

解 方程可以改写为

$$x\,dx+y\,dy=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

或

$$\frac{1}{2}d(x^2+y^2)=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

容易看出，此方程有积分因子 $\mu=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，以 μ 乘之，得

$$\frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}=dx$$

故通解为

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+c$$

或

$$y^2=c(c+2x)$$

7. （10 分）

写出方程 $y^{(4)}+2y''+y=5+x^2\cos x$ 的特解形式.

解：特征方程：$\lambda^4+2\lambda^2+1=0$，i 和 $-i$ 分别为二重特征根. 所以特解形式为

$$y^*=A+x^2[(Bx^2+Cx+D)\cos x+(Ex^2+Fx+G)\sin x].$$

注：方程通解为

$$y=(C_1x+C_2)\cos x+(C_3x+C_4)\sin x+5+\frac{1}{48}(-x^4\cos x+9x^2\cos x+4x^3\sin x)$$

8. （15 分）

求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$ **的和函数.**

解： 收敛半径 $R=1$，收敛域为 $[-1,1]$.

设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(2n-1)}x^{2n}$，$|x|\le 1$，则

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2(2n-1)}x^{2n-1},\quad -1<x\le 1,$$

$$s''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2}x^{2n-2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-x^2\right)^{n-1}=\frac{1}{2\left(1+x^2\right)},\quad |x|<1,$$

所以，

$$s'(x)=\int_0^x\frac{1}{2\left(1+t^2\right)}dt=\frac{1}{2}\arctan x,\quad -1<x\le 1,$$

$$s(x)=\int_0^x\frac{1}{2}\arctan t\,dt=\frac{1}{2}x\arctan x-\frac{1}{4}\ln(1+x^2),\quad |x|\le 1.$$

9.（15 分）

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+x^2}$ **关于** x **在** $(-\infty,+\infty)$ **上为一致收敛，但对任何** x **并非绝对收敛.**

证明 取 $b_n(x)=(-1)^{n-1}$，$a_n(x)=\frac{1}{n+x^2}$，则 $\forall n$，$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\right|\le 1$，而 $a_n(x)=\frac{1}{n+x^2}$ 对每个 x 单调递减，且由于 $|a_n(x)|\le\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$，故 $\{a_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致趋于 0，由 Dirichlet 判断法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+x^2}$ 关于 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛. 但 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\exists N$，当 $n\ge N$ 时，有 $n\ge x^2$，所以，当 $n\ge N$ 时，有

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n+x^2}\right|=\frac{1}{n+x^2}\ge\frac{1}{2n},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n+x^2}\right|$ 发散，即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+x^2}$ 对任何 x 并非绝对收敛.