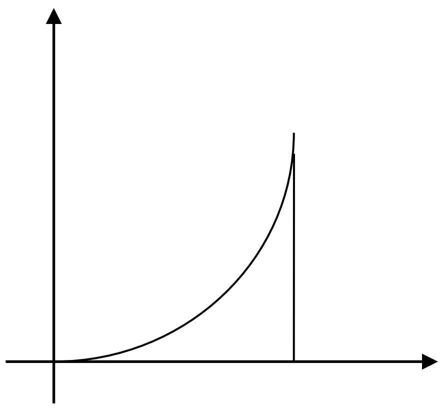
一.(每小题 7 分,共 28 分)　2.设函数 $g(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\frac{\cos(xy)}{x}dx, y>0,$ 求 $g'(y)$.

解　$g'(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\frac{-x\sin(xy)}{x}dx+3y^2\frac{\cos y^3 y}{y^3}-\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\cos\sqrt{y}\,y}{\sqrt{y}}$

$$=-\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\sin(xy)dx+3\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}=\left.\frac{\cos xy}{y}\right|_{\sqrt{y}}^{y^3}+3\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}$$

$$=\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{y}+3\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}=4\frac{\cos y^4}{y}-\frac{3\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}.$$

3.计算二重积分 $\iint_D\frac{\sin x}{x}dxdy,$ 其中 D 是由 $y=x^2, y=0, x=1$ 所围成的区域.



解　$\iint_D\frac{\sin x}{x}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\frac{\sin x}{x}dy=\int_0^1 x\sin x dx$

$$=\int_0^1 xd(-\cos x)=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x dx$$

$$=-x\cos x\Big|_0^1+\sin x\Big|_0^1=\sin 1-\cos 1.$$

4.求解一阶常微分方程　$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}.$

解　方程改写为　$\frac{dx}{dy}=\frac{2x-y^2}{y}=\frac{2}{y}x-y,$ ① 把 x 看作 y 的函数,是一阶线性方程.

先解方程 $\frac{dx}{dy}=\frac{2}{y}x,$ 分离变量,得 $\frac{dx}{x}=\frac{2}{y}dy,$　$\ln x=2\ln y+\ln C,$ 即 $x=Cy^2.$

用常数变易法,令 $x=C(y)y^2,$ 则　$\frac{dx}{dy}=C'(y)y^2+2C(y)y,$ 代入①,得

$C'(y)y^2=-y,$ 因此 $C'(y)=-y^{-1}, C(y)=-\ln Cy,$ 于是原方程的通解为　$x=-y^2\ln Cy.$

二.(10 分)设曲线积分 $I=\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关,其中函数 $\varphi(x)$ 连续可导且 $\varphi(0)=0,$ 求函数 $\varphi(x)$;又设 L 为曲线 $y=x^{2009}$ 上从点 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的弧段,求如上曲线积分 I.

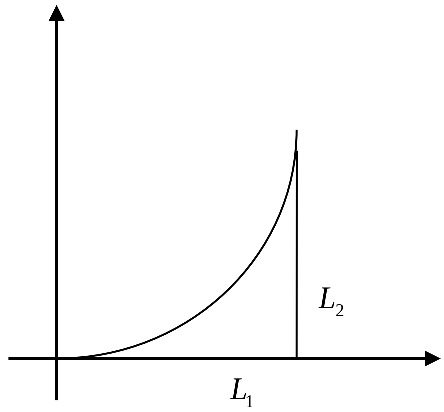
解　　$P=xy^2, Q=y\varphi(x)$, 因为积分与路径无关,故必有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xy=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=y\varphi'(x)$,

即得 $\varphi'(x)=2x$, $\varphi(x)=x^2+C$, 由于 $\varphi(0)=0$, 得 $C=0$, 故 $\varphi(x)=x^2$.

$$I=\int_L xy^2dx+x^2ydy=\int_{L_1+L_2} xy^2dx+x^2ydy$$

$$=\int_{L_1} xy^2dx+x^2ydy+\int_{L_2} xy^2dx+x^2ydy$$

$$=0+\int_0^1 ydy=\frac{1}{2}.$$



三.(10 分)级数曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+}(x^4-xz)dydz+(x^3+yz)dzdx-4y^2dxdy$, 其中 S 为上半球面

$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, 取上侧.

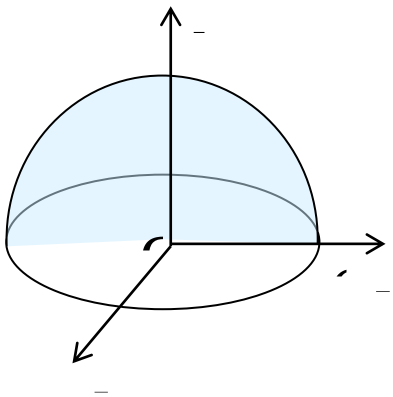
解　取 A: z=0 为辅助平面, $\dfrac{\partial P}{\partial x}=4x^3-z, \dfrac{\partial Q}{\partial y}=z, \dfrac{\partial R}{\partial z}=0.$ 由高斯公式,

$$I=\iint\limits_{S^++A}(x^4-xz)dydz+(x^3+yz)dzdx-4y^2dxdy, =\iiint\limits_{\Omega}(4x^3-z+z+0)dV\overset{\text{由对称性}}{=}0.$$

故 $I=\iint\limits_{S^+}(x^4-xz)dydz+(x^3+yz)dzdx-4y^2dxdy$

$$=\iint\limits_{A^+}(x^4-xz)dydz+(x^3+yz)dzdx-4y^2dxdy,$$

$$=-4\iint\limits_{A^+}y^2dxdy=-4\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\sin^2\theta rdrd\theta=-16\pi.$$



四.(10 分)求解初值问题: $\begin{cases} y''-2y'+y=1+e^x, \\ y(0)=2, y'(0)=2. \end{cases}$

解　　先解齐次方程　$y''-2y'+y=0.$　　特征方程为　　$\lambda^2-2\lambda+1=0.$

重根 $\lambda_1=\lambda_2=1$,　　故通解为　　$y=(C_1+C_2x)e^x$.

对非齐次方程 $y''-2y'+y=1$. ①可设特解为 $y=C$, 代入①,得 C=1.

对非齐次方程 $y''-2y'+y=e^x$. ②因 1 是二重根, 可设特解为 $y=Cx^2e^x$,

代入②, 得 $C=\frac{1}{2}$,即得特解为$y=\frac{1}{2}x^2e^x$. 于是, 原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x+\frac{x^2}{2})e^x+1.$$

由 $y(0)=2$,得$C_1=1$.

由 $y'=(C_1+C_2x+\frac{x^2}{2})e^x+(C_2+2x)e^x$ 得 $y'(0)=C_1+C_2=2$, 得 $C_2=1$.

故初值问题的解为 $y=(1+x+\frac{x^2}{2})e^x+1$.

五.(每小题 5 分,共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3-x+1}}$;　　(2) $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\frac{7}{3}}}dx$.

解　(1)因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3-x+1}}\Big/\frac{1}{x^{3/2}}=1$, 而无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx$ 收敛, 由比较判别法的极限形式得, 无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3-x+1}}$ 收敛.

(2)因 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x^{7/3}}\Big/\frac{1}{x^{4/3}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, 而瑕积分 $\int_0^1\frac{1}{x^{4/3}}dx$ 发散,故瑕积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\frac{7}{3}}}dx$ 发散

六.(10 分)求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径和收敛域,并求其和函数.

解　$l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}\Big/\frac{1}{n(n-1)}=1$, 故收敛半径 R=1. 收敛区间为(-1, 1)收敛域为[-1, 1] .

记　$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$, 则　$xf(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\triangleq F(x)$ 于是 $F'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$$F''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$,于是 $F'(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$

$F(x)=-\int_0^x\ln(1-t)dt=x+(1-x)\ln(1-x)$, 故　$f(x)=1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)$.

七.(10 分)将函数 $f(x)=\ln 3x$ 在点 $x_0=2$ 展开成幂级数,并求其收敛域.

解　　令 $t=x-2$, 则所求的展开式为

$$f(x)=\ln 3x=\ln(6+3t)=\ln 6+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)$$

$$=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n2^n}=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{n2^n}$$

收敛域为 $-1<\dfrac{x-2}{2}\le 1$, 即 $0<x\le 4$ 或 $(0,4]$.

八.(6 分)研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 的敛散性.

解　　显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}=0$, 记 $f(x)=x-\ln x$, 则 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0\quad(x>1)$,

从而 $f(n)$ 递增,即 $\dfrac{1}{n-\ln n}$ 单调递减,由莱布尼兹判别法,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 收敛.

但 $\dfrac{1}{n-\ln n}>\dfrac{1}{n}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,由比较判别法,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}$ 也发散,故级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 条件收敛.

九.(6 分)设 $a_n>0, n=1,2,\cdots,\{a_n\}$ 单调递减,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,求证:级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

证　　因 $a_n>0, n=1,2,\cdots,\{a_n\}$ 单调递减,故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\ge 0$. 而交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,

故必有 $a_n\ge a>0, n=1,2,\cdots$, 从而 $\dfrac{1}{1+a_n}\le\dfrac{1}{1+a}<1$. 于是 $\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n\le\left(\dfrac{1}{1+a}\right)^n, n=1,2,\cdots$.

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+a}\right)^n$ 收敛,由比较判别法,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.