08 级东校区第二学期高等数学(一)期末考试题 A 答案

一.（每小题 8 分，共 64 分）

1. 已知 $u = x\sin(2y+1)$，求 du

$du = \sin(2y+1)dx + 2x\cos(2y+1)dy,$

2. 若 $z = f\left(x^2-y^2, e^{xy}\right)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf_1 + ye^{xy} f_2$

3. 求 $I = \int_0^1 dy \int_{2y}^2 4\cos\left(x^2\right)dx$.

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{1}{2}x} 4\cos\left(x^2\right)dy = \int_0^2 2x\cos\left(x^2\right)dx = \sin 4$$

4. 求 $I = \oiint\limits_S xz^2\,dydz + yx^2\,dzdx + zy^2\,dxdy$，其中 S 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧

$$\boldsymbol{I = \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 r^2 \sin\varphi dr = \frac{4}{5}\pi}$$

5. 求微分方程 $xy' - y\ln y = 0$ 的通解.

$$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{x}$$

$$\therefore y = e^{CX}$$

6. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$ 的收敛域.

$R = 1$

当 $x=1$ 和 $x=-1$ 时 $\lim\limits_{n\to 0}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \neq 0, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$ 发散

$\therefore$ 收敛域为（－1，1）

7. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+10}$ 的敛散性，若收敛，指明是绝对收敛还是条件收敛?

$\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\sqrt{n}}{n+10}\Big/\dfrac{1}{n}=1, \therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+10}$发散

由$leibiniz$判别法$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n+10}$收敛

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n+10}$条件收敛。

8. 求 $I=\int_0^1\dfrac{1-3x^2}{\sqrt{x-x^3}}dx.$

$$I=\int_0^1\frac{1-3x^2}{\sqrt{x-x^3}}dx=\sqrt{x-x^3}\,\Big|_0^1=0$$

二.（每小题 6 分，共 24 分）

1．求 $I=\oint_C(x+y)dx-(x-y)dy$，其中 C 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，C 取正向.

$I=\oint_C(x+y)dx-(x-y)dy=\iint -2dxdy=-2\pi ab$

2. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}xdxdydz$，其中$\Omega$为三个坐标面及平面$x+y+z=1$所围成的闭区域.

$I=\iiint\limits_{\Omega}xdxdydz=\int_0^1\dfrac{1}{2}x(1-x)^2dx=\dfrac{1}{24}$

3. 求方程 $yy''-(y')^2=0$ 的满足条件 $y(0)=y'(0)=1$ 的特解.

令$y'=p(y), \therefore y''=p'y'$

$\therefore yp'-p=0, \therefore p=c_1y, \therefore y'=c_1y$

$\therefore y=c_2e^{c_1x}$

$\because y(0)=y'(0)=1, \therefore c_1=1, c_2=1$

$\therefore$特解为：$y=e^x$

4．求 $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式，并指出收敛域.

$f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2=2[\ln(1+x)-\ln(1-x)]$

$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}\quad x\in(-1,1]$

$\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}\quad x\in[-1,1)$

$\therefore f(x)=4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad x\in(-1,1)$

三.（每小题 4 分，共 12 分）

1. 求方程 $y''-y=4xe^x$ 的通解

解：对应齐次方程的特征根为λ=1，λ=−1，所以其通解为：

$C_1e^x+C_2e^{-x}$

设非齐次方程的特解为：$x(Ax+B)e^x$，代入得：

$A=1, B=-1$

$\therefore$非齐次方程的通解为：y=$C_1e^x+C_2e^{-x}+(x^2-x)e^x$

2. 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx$ 的收敛性，若收敛，指明是绝对收敛还是条件收敛?

解：进行换元，可得原式＝$\int_1^{+\infty}2\frac{\sin x}{x}dx$

对于$A\geq 1, |\int_1^A\sin x dx|\leq 2$有界。

函数$\frac{1}{x}$在$[1, +\infty]$上单调下降趋于0，由狄利克雷法知收敛。

取$[\frac{A}{\pi}]=n_0$,

$\int_1^A\frac{|\sin x|}{x}dx\geq\sum_{n=2}^{n_0}\int_{(n-1)\pi}^{n_0\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\geq\sum_{n=2}^{n_0}\frac{1}{n\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n_0\pi}|\sin x|dx$

$=\sum_{n=2}^{n_0}\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{n_0}\frac{1}{n}$,而$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故只要$A$充分大，

$\int_1^A\frac{|\sin x|}{x}dx$无界。

$\therefore$条件收敛。

3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明 $\lim_{x\to+0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

证明：数列$\{\frac{1}{n^x}\}$单调趋于0，且$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$一致收敛，

由阿贝尔判别法$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$一致收敛，因此满足连续性。

$\therefore\lim_{x\to+0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$