09 级二期期末 A 卷试题参考解答

完成以下共 14 题,除最后两题各 8 分外其余各题各 7 分.

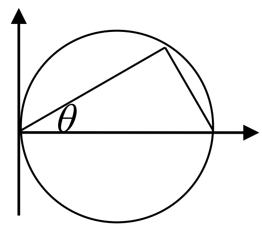
一.求一阶常微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=e^{x+y}$ 满足初始条件 $y(0)=0$ 的解.

解 $\dfrac{dy}{e^y}=e^x dx \quad \displaystyle\int\frac{dy}{e^y}=\int e^x dx \quad -e^{-y}=e^x+C$,代入初始条件 $y(0)=0$

C=－2, 于是,所求方程满足初始条件的解为 $e^x+e^{-y}=2$.

二.计算二重积分 $I=\displaystyle\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$,其中为圆域 $x^2+y^2\le x$.

解 $I=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-r^2}\,rdrd\theta=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-r^2}\,dr^2d\theta$



$$=-\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-r^2}\,d(1-r^2)d\theta$$

$$=-\int_0^{\pi/2}\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2}\Big|_0^{\cos\theta}d\theta=\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}.$$

三.验证数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$ 收敛,并求其和.

解 $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$

$$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{2}\,)-(\sqrt{n+1}-\sqrt{1}\,)=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}+1-\sqrt{2},$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}[\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}]+1-\sqrt{2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}+1-\sqrt{2}=1-\sqrt{2}.$$

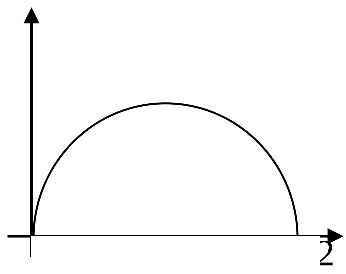
四.若函数 $F(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\sin(xt^2)}{t}dt,\quad x\ne 0$, 求 $F'(x)$.

解 $F'(x)=\dfrac{\sin(x\cdot x^2)}{x}+\displaystyle\int_1^x\frac{t^2\cos(xt^2)}{t}dt=\frac{\sin x^3}{x}+\int_1^x t\cos(xt^2)dt$

$$=\frac{\sin x^3}{x}+\frac{1}{2x}\int_1^x\cos(xt^2)d(xt^2)=\frac{\sin x^3}{x}+\frac{1}{2x}\sin(xt^2)\Big|_1^x=\frac{3}{2x}\sin x^3-\frac{1}{2x}\sin x.$$

五.计算曲线积分 $I=\int_C (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$, 其中 C 是圆周 $x^2+y^2=2x$ 的上半部分,方向从点 $O(0,0)$ 到点 $A(2,0)$.

解 $P=x^2-y, Q=-(x+\sin^2 y)$, 于是 $\dfrac{\partial Q}{\partial y}=-1, \dfrac{\partial P}{\partial x}=-1$,



由于 $\dfrac{\partial Q}{\partial y}=\dfrac{\partial P}{\partial x}$, 故积分和路径无关,于是

$$I=\int_C (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy,$$

$$=\int_0^2 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{8}{3}.$$

六.求解一阶常微分方程: $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x}+xy^2=0$.

解 令 $z=y^{-1}=\dfrac{1}{y}$, 则 $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dy}{dx}$, 原方程化为 $\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{1}{y}=-x$,

即 $\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{2}{x}z=x$.(*) 这是一个一阶线性方程.对应的齐次线性方程为

$\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{2}{x}z=0$. 分离变量,得 $\dfrac{dz}{z}=-\dfrac{2dx}{x}$, $\int\dfrac{dz}{z}=-\int\dfrac{2dx}{x}$,

$\ln z=-2\ln x+\ln C=\ln Cx^{-2}$, 即 $z=Cx^{-2}$. 下面用常数变易法,令 $z=C(x)x^{-2}$.

则 $\dfrac{dz}{dx}=-2\dfrac{C(x)}{x^3}+\dfrac{C'(x)}{x^2}$, 代入原方程,得

$$-2\frac{C(x)}{x^3}+\frac{C'(x)}{x^2}+\frac{2}{x}\cdot\frac{C(x)}{x^2}=x,$$

即 $\dfrac{C'(x)}{x^2}=x$, $C'(x)=x^3$, $C(x)=\dfrac{x^4}{4}+C$. 于是得方程(*)的解为

$$z=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{4}+C\right)=\frac{x^4+C}{4x^2},$$

故原方程的解为 $y=\dfrac{1}{z}=\dfrac{4x^2}{x^4+C}$, 其中$C$为任意常数.

七.求解二阶非齐次方程的初值问题:$\begin{cases} y'' + y = 1 + e^x, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$

解　原方程可化为两个二阶非齐次方程 $y'' + y = 1 \cdots$① 和 $y'' + y = e^x \cdots$②

它们对应的齐次方程都是 $y'' + y = 0$, 特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$, 通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

对方程①，设特解为 $y = C$, 代入后的 $C = 1$；

对方程②，因 1 不是特征根，故设特解为 $y = Ae^x$, 代入方程得

$$Ae^x + Ae^x = e^x, \text{由此得 } A = 1/2.$$

于是得原方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{1}{2} e^x + 1.$

由定解条件: $1 = y(0) = C_1 + \dfrac{1}{2} + 1 \Rightarrow C_1 = -\dfrac{1}{2},$

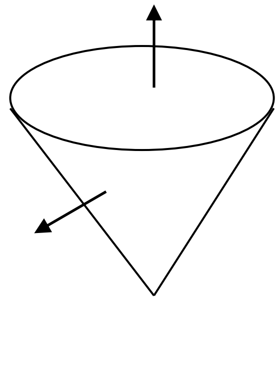
$$1 = y'(0) = \left(-C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2} e^x \right)\Big|_0 = C_2 + \frac{1}{2}, \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2};$$

故本初值问题的解为 $y = \dfrac{1}{2}(-\cos x + \sin x + e^x) + 1.$

八.计算曲面积分 $I = \iint\limits_{S^+} xdydz + ydzdx + zdxdy$, 其中 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \le z \le 4$, 取外侧.

解　如图, 记 $A^+ = \{(x, y, z) \big| x^2 + y^2 \le 4, z = 4\}$, 并设曲面 $A^+ \cup S^+$ 所围区域为 Ω,

由高斯定理



$$\iint\limits_{A^+ \cup S^+} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = 3V$$

$$r = 4, h = 4. \qquad V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 4 = \frac{64\pi}{3}$$

因此 $\displaystyle\iint\limits_{A^+ \cup S^+} xdydz + ydzdx + zdxdy = 64\pi.$

又 $\iint_{A^+} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{A^+} zdxdy=4\iint_{A^+} dxdy=4\cdot 4^2\pi=64\pi.$ 故

$$I=\iint_{S^+} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{A^+\cup S^+}-\iint_{A^+} xdydz+ydzdx+zdxdy=64\pi-64\pi=0.$$

九.若函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$,求证:⑴函数 $f(x)$ 在区间[0,+∞)上有连续的导数;⑵广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

解 (1) $u_n(x)=\dfrac{1}{2^n+x}\le\dfrac{1}{2^n},\quad x\in[0,+\infty),$

$u_n'(x)=-\dfrac{1}{(2^n+x)^2},\left|u_n'(x)\right|\le\dfrac{1}{2^{2n}},\quad x\in[0,+\infty),$

而级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}$ 均收敛，由 M 判别法，函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n'(x)$ 在区间[0,+∞) 上一致收敛，于是 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$ 在区间[0,+∞)上有连续的导数.且

$$f'(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2^n+x)^2}.$$

(2) $$\int_0^{+A} f(x)dx=\int_0^{+A}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+A}\frac{1}{2^n+x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\ln(2^n+x)\Big|_0^{+A}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(\frac{2^n+A}{2^n}\right)\ge\ln\left(\frac{2+A}{2}\right)\to+\infty,(A\to+\infty).$$

即广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 发散.证毕

十.求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛半径,收敛域及和函数.

解　令 $u=x^2$，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}u^n$．记 $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，则

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=1,\quad \text{故级数收敛半径为} R=\frac{1}{l}=1.$$

由于当 $|x|=1$ 时，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 满足莱布尼兹判别法条件，从而收敛，故原幂级数的收敛区域为[－1,1]．下面来求和函数．记 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$，则

$$\frac{1}{x}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=g(x),$$

于是　$$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{1}{1+x^2},$$ 即

$$\frac{1}{x}f(x)=g(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x,$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xg(x)=x\arctan x.$$

十一.把函数 $f(x)=\frac{x-2}{4-x}$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数，并求其收敛域.

解　令 $t=x-2$，则

$$f(x)=\frac{t}{2-t}=\frac{1}{1-t/2}-1=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n-1=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n-1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}-1.$$

收敛域为 $\left\{x\left|\left|\frac{x-2}{2}\right|<1\right.\right\}=\{x\,\|x-2|<2\}=\{x|-2<x-2<2\}=\{x|0<x<4\}.$

十二.验证瑕积分 $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$ 收敛，并求其值.

解　x=1 为瑕点，而

$$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}+\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \overset{y=1-x}{=} -\int_1^0 y^{-\frac{1}{2}} dy = \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}} dy = 2y^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = 2;.$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} \overset{y=x-1}{=} \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}} dy = 2y^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = 2\,;$$

故瑕积分 $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$ 收敛,且其值为

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = 4.$$

十三.若 $0 < \alpha \le 2$, 讨论瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \sin\frac{1}{x} dx$ 的敛散性.

解　令 $y = \frac{1}{x}$,则 $x = \frac{1}{y}$, $dx = -\frac{1}{y^2} dy$, 于是

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \sin\frac{1}{x} dx = -\int_{+\infty}^1 y^\alpha \sin y \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy = \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{2-\alpha}} dy.$$

当 $\alpha = 2, I(\alpha) = I(2) = \int_1^{+\infty} \sin y dy$ 都能够发散.

当 $0 < \alpha < 2$,由于 $\frac{1}{y^{2-\alpha}}$ 关于变量y单调下降且趋于0,而对任意正常数A,

积分一致有界: $\left|\int_1^A \sin y dy\right| \le 2.$

由 Drichlet 判别法,积分 $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{2-\alpha}} dy$ 收敛.下面讨论绝对收敛性:

当 $2-\alpha > 1$,即 $0 < \alpha < 1$ 时,$\left|\frac{\sin y}{y^{2-\alpha}}\right| \le \frac{1}{y^{2-\alpha}}$, 当而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^{2-\alpha}} dy$ 收敛,由比较

判别法,广义积分 $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{2-\alpha}} dy$ 绝对收敛;

当$2-\alpha\le 1$,即$1\le\alpha<2$时,$\left|\dfrac{\sin y}{y^{2-\alpha}}\right|\ge\dfrac{\sin^2 y}{y^{2-\alpha}}=\dfrac{1-\cos 2y}{y^{2-\alpha}}$,

但由于此时广义积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos 2y}{y^{2-\alpha}}dy$收敛,而广义积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{y^{2-\alpha}}dy$发散,于是

广义积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{1-\cos 2y}{y^{2-\alpha}}dy$发散,即广义积分$I(\alpha)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin y}{y^{2-\alpha}}dy$条件收敛.

十四.设$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增且$f(0)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$;

(1)求证:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$收敛并求其和;

(2)若函数$f''(x)<0,\ x\in[0,+\infty)$,求证:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f'(n)$也收敛.

证 (1) 因$a_n=f(n)-f(n-1)\ge 0$,且$\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$,故

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}[f(k)-f(k-1)]=\lim_{n\to+\infty}[f(n)-f(0)]=\lim_{n\to+\infty}f(n)=2.$$

因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$收敛,其和为$S=2$.

(2) 由于$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f'(n)$为正项级数.

因 $f''(x)<0,\ x\in[0,+\infty)$,故$f'(x)$ 在此区间单调递减,而由拉格朗日中值定理,在区间$(n-1,n)$ 内,必有ξ_n,使得$f(n)-f(n-1)=f'(\xi_n)\ge f'(n)$,

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$收敛,由正项级数的比较判别法,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f'(n)$收敛.