中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学一(I)》(A 卷)

学年学期: 2015–2016 学年第 1 学期　　姓　　名: ____________

学　院/系: 数学学院　　学　　号: ____________

考试方式: 闭卷　　年级专业: ____________

考试时长: 120 分钟　　班　　别: ____________

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者, 不授予学士学位.”

以下为试题区域, 共 14 道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答

1. 设 $a_n = n\left(\frac{1}{n^2+\pi} + \frac{1}{n^2+2\pi} + \dots + \frac{1}{n^2+n\pi}\right)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解:

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi} < a_n < \frac{n^2}{n^2+\pi},$$

而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{\pi}{n}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}} = 1,$$

由夹逼定理,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

解:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(1+\sin x)}}$$

考察极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3(1+\sin x)}$.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(1+\sin x)}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\sin x)}\\
=&\frac{x+\frac{x^3}{3}-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+o\left(x^3\right)}{x^3}\times 1\\
=&\frac{\frac{1}{2}x^3+o\left(x^3\right)}{x^3}\\
=&\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

所以,

$$
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(1+\sin x)}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}
$$

3. 计算积分 $\int e^x\arctan\left(e^{-x}\right)\mathrm{d}x$.

解:

$$
\begin{aligned}
\int e^x\arctan\left(e^{-x}\right)\mathrm{d}x=&\int\arctan\left(-\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)\\
&=-\mathrm{e}^x\arctan e^x-\int e^x\frac{-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x,\\
&=-\mathrm{e}^x\arctan\mathrm{e}^x+\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x\\
&=-\mathrm{e}^x\arctan\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)+C
\end{aligned}
$$

4. 计算积分 $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x$.

解:

由于 $f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}|\sin x|$ 是周期为 π 的周期函数, 故

$$
\begin{aligned}
\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x=&\sqrt{2}\int_0^{100\pi}|\sin x|\mathrm{d}x\\
=&\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x+\sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x+\cdots\\
&+\sqrt{2}\int_{99\pi}^{100\pi}|\sin x|\mathrm{d}x\\
=&100\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x\\
=&100\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x\\
=&200\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

5. 求双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=2z$ 与平面 $x+y+z=6$ 的交线在 $P(4,0,2)$ 处的切线方程.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有二阶导数, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$

解:

由题设条件知, 有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2(0<\theta<1).$$

又由 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{1/x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\left(x+\frac{f(x)}{x}\right)\right]^{\frac{1}{x+f(x)/x}\frac{x+f(x)/x}{x}}=\mathrm{e}^3,$$

知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=1, \lim\limits_{x\to 0}\left[x+\dfrac{f(x)}{x}\right]\dfrac{1}{x}=3,$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0,$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(0)}{x}+f'(0)+\dfrac{f''(\theta x)}{2}x^2\right]=0.$

知 $f(0)=0, f'(0)=0, f(x)=\dfrac{f''(\theta x)}{2}x^2\quad(0<\theta<1).$

又由 $\lim\limits_{x\to 0}\left[x+\dfrac{f(x)}{x}\right]\dfrac{1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(0)}{x^2}+\frac{f'(0)}{x}+\frac{f''(\theta x)}{2}\right]=3,$$

知 $\lim\limits_{x\to 0}f''(\theta x)=4\Rightarrow f''(0)=4.$

7. 将给定的正数 12 分成三个非负数 $x, 2y, 3z$ 之和, 使得 xy^2z^3 最大。

8. 设 $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x-1}$, 求该函数 (1) 的单调区间和极值;

(2) 所确定曲线的凸凹区间;

(3) 所确定曲线的渐近线.

解:

定义域为 $x\neq 1$

$y'=\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$

$y''=\dfrac{8}{(x-1)^3}$

$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$

$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,1)$ 和 $(1,3)$

函数极大值为 $f(-1)=-8$, 极小值为 $f(3)=0$

$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 为凸函数, $(1,+\infty)$ 为凹函数, 无拐点

$x=1$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线。

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2-6x+9}{x^2-x}=1$$
$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-x=\frac{x^2-6x+9-x^2+x}{x-1}=-5$$

直线 $y=x-5$ 也是 $f(x)$ 的渐进线。

9. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $x=3$ 处的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式, 并写出 $f^{(n)}(3)$ 的值.

10. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin x\sin y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性, 偏导数的存在性及可微性.

11 . 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

解:

$$0\leqslant\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}0=0,\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}=0$

由夹逼定理

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$$

12. 若方程 $e^z=xyz$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

13. 求经过直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 且平行于直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$ 的平面方程

解:

所求平面是由直线 l_1 的一个点 $M_1(1,0,0)$ 和一个方向向量 $\vec{v}(2,1,-1)$ 以及直线 l_2 的一个方向向量 $\vec{u}(2,1,-2)$ 确定的平面,

因此平面 π 的方程是 $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2\\ y & 1 & 1\\ z & -1 & -2\end{vmatrix}=0,$

即 $\quad x-2y-1=0.$

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内有二阶导数, 且有 $f(a)=f(b)=0,f(c)>0,$ $(a<c<b)$, 证明: 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f''(\xi)<0$.

解:

证 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上连续, 在 (a,c) 内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi_1\in(a,c)$, 使得

$$f'\left(\xi_1\right)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0.$$

$f(x)$ 在 $[c,b]$ 上也满足拉格朗日中值定理的条件, 因此存在 $\xi_2\in(c,b)$, 使得

$$f'\left(\xi_2\right)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0.$$

$f'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上仍满足拉格朗日中值定理的条件, 故存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, 使得

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0.$$