09 级第二学期高等数学(一)期末考试 A 题答案

学院＿＿＿＿＿＿＿专业＿＿＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿＿评分＿＿＿＿＿＿

阅卷老师签名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一。解答下列各题（共 10 小题, 每小题 7 分）

1. $\iint\limits_{D} \dfrac{\sin x}{x}dxdy$，其中 D 是由 $y = x$ 和 $y = x^2$ 所围成。

$$\iint\limits_{D} \frac{\sin x}{x}dxdy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}dy = \int_0^1 (\sin x - x\sin x)dx = -\cos x + x\cos x - \sin x \Big|_0^1 = 1 - \sin 1$$

2. 求曲面 $x^2 + y^2 = z$，$x^2 + y^2 = 4$ 及 xoy 平面所围成的立体体积。

$$V = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 4}(x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3 dr = 8\pi$$

3. 计算 $\oint_L \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$，其中 L 是沿曲线 $x^2 + y^2 = 1$ 正向一周。

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}d\theta = 2\pi$$

4. 求 $I = \int_L yds$, 其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = 1$.

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx + \int_{-1}^1 -\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx = 0$$

5. 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 2$ 的通解。

解：特征方程 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \therefore \lambda = -2, \lambda = -1$

齐次方程通解为： $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$

设非齐次方程的特解为： $y^* = A$, 代人解得 $A = 1,$

非齐次方程的通解为： $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + 1$

6. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n-1}{n^2}$ 的敛散性，若收敛，指出是绝对收敛还是条件收敛。

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n^2}=0$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n-1}{n^2}$ 是交错级数，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n^2}=0$，设 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2}$，则 $f'(x)=-\dfrac{2(x-1)}{x^3}$，当 $x>1$ 时，

$f'(x)<0,\therefore\dfrac{2n-1}{n^2}$ 递减，由 leibiniz 判别法，可得收敛，

因此，级数条件收敛。

7. 求无界函数的广义积分 $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

$\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx=\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}d\ln x=\arcsin\ln x\,|_1^e=\dfrac{\pi}{2}$

8. 判定积分 $\displaystyle\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2+x}}$ 的敛散性.

$x=0$ 是瑕点，

$\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+x}}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}=1$，而 $\displaystyle\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\dfrac{3}{2}$ 收敛

所以，积分收敛

9. 判别 $\displaystyle\int_1^{\infty}\dfrac{x\cos x}{1+x^2}dx$ 的敛散性

$|\displaystyle\int_1^A\cos dx|=|\sin A-\sin 1|\le 2$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0,(\dfrac{x}{1+x^2})'=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}<0,(x>1),\therefore\dfrac{x}{1+x^2}$ 单调递减

$\therefore$ 由狄里克雷判别法可得收敛

10. 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内把函数 $f(x)=x$ 展开为付立叶级数.

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx=0$

$b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=(-1)^{n+1}\dfrac{2}{n}$

$\therefore x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2}{n}\sin nx\qquad x\in(-\pi,\pi)$

二。解答下列各题（共 5 小题，每小题 6 分）

1. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ 的和函数和收敛域

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} = 1$$

$x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ 发散，$x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1}$，发散

$\therefore$ 收敛域为：$(-1,1)$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n+1})x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \frac{x}{1-x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{x}{1-x}dx = -\frac{1}{x}\ln(1-x) - 1$$

$$S(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{1}{x}\ln(1-x) + 1$$

2. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x+2}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数。

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+3-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^n}$$

$-1 < \frac{x-1}{3} < 1$, 解得 $x \in (-2,4)$

3. 判别 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^4+n^2x^2}$ $\quad -\infty < x < +\infty$ 的一致收敛性.

$$\left| \frac{x}{n^4+n^2x^2} \right| \leq \left| \frac{x}{2n^3x} \right| = \frac{1}{2n^3}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3}$ 收敛，由强级数判别法，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^4+n^2x^2}$ 在 R 上一致收敛。

4 求积分 $g(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + \cos^2 x)dx, \quad a \neq 0$

$$f(x,a) = \ln(a^2\sin^2 x + \cos^2 x), \quad f_a'(x,a) = \frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + \cos^2 x}$$

当 $x \neq a$, $f(x,a), f_a'(x,a)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]X(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 连续，$\therefore g(a)$ 可导，

$$g'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\tan^2 x}{a^2\tan^2 x + 1}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{2at^2}{a^2t^2+1}\frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{2a}{a^2-1}[\arctan t - \frac{1}{a}\arctan(at)]_0^{+\infty}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi}{a+1} & a > 0 \\[2mm] \dfrac{\pi}{a-1} & a < 0 \end{cases}$$

$g(a) = \int g'(a)da = \pi\ln(|a|+1) + c$

$\because g(1) = 0$ 得 $c = -\pi\ln 2$

$\therefore g(a) = \pi\ln\dfrac{1+|a|}{2}$

5. 设函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上具有连续偏导数，且对于任意光滑曲面 Σ，有 $\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = 0$。证明：在 $\mathbf{R}^3$ 上，$\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} \equiv 0$。

证：反证法。若存在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，使得 $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} \neq 0$，不妨设 $\left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_0} > 0$，

由于函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上具有连续偏导数，即 $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ 连续，所以存在 $r, c > 0$，使得当

$(x,y,z) \in \Omega = \{(x,y,z)\,|\,(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leq r^2\}$ 时成立 $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} > c > 0$

但，由于高斯公式可得：

$$\iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz \geq \iiint\limits_{\Omega} cdxdydz > 0$$

与题设矛盾，故假设错误。