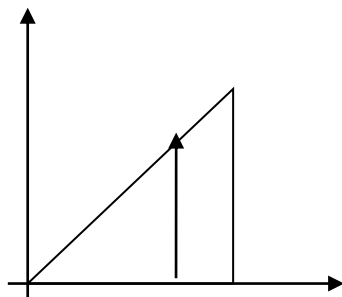
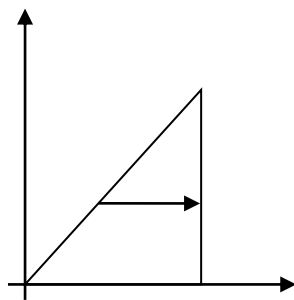


一,完成以下各题

3. 计算累次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 y^2 e^{-x^4} dx$.

解
$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_y^1 y^2 e^{-x^4} dx &= \int_0^1 dx \int_0^x y^2 e^{-x^4} dy \\ &= \int_0^1 \frac{y^3}{3} \Big|_0^x e^{-x^4} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 e^{-x^4} dx \\ &= \frac{1}{12} \int_0^1 e^{-x^4} dx^4 = \frac{1}{12} \left(-e^{-x^4} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{12} (1 - e^{-1}). \end{aligned}$$



4. 求解一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx} + y \cos x = e^{-\sin x}$.

解 先解 $\frac{dy}{dx} + y \cos x = 0$. 分离变量, 得 $\frac{dy}{y} = -\cos x dx$

$$\ln y = -\sin x + \ln C, \quad y = Ce^{-\sin x}.$$

令 $y = C(x)e^{-\sin x}$. 则 $y' = C'(x)e^{-\sin x} - \cos x \cdot C(x)e^{-\sin x}$.

代入原方程, 得 $C'(x)e^{-\sin x} - \cos x \cdot C(x)e^{-\sin x} + C(x)e^{-\sin x} \cos x = e^{-\sin x}$.

即 $C'(x) = 1, \quad C(x) = x + C$. 从而方程通解为

$$y = (x + C)e^{-\sin x}.$$

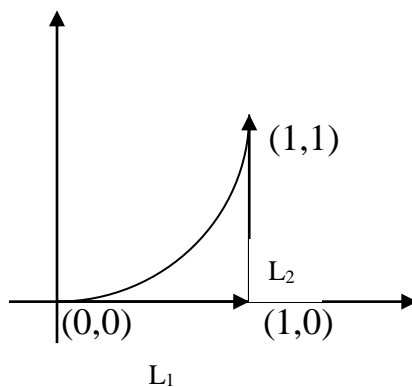
二.(10 分) 求曲线积分 $I = \int_L (e^y + x) dx + (xe^y - 2y) dy$,

其中 L 为曲线 $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ 上由点 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的弧段.

解 $P = e^y + x, Q = xe^y - 2y, \frac{\partial P}{\partial y} = e^y = \frac{\partial Q}{\partial x},$

故积分值和路径无关, 从而

$$I = \int_{L_1+L_2} (e^y + x) dx + (xe^y - 2y) dy$$



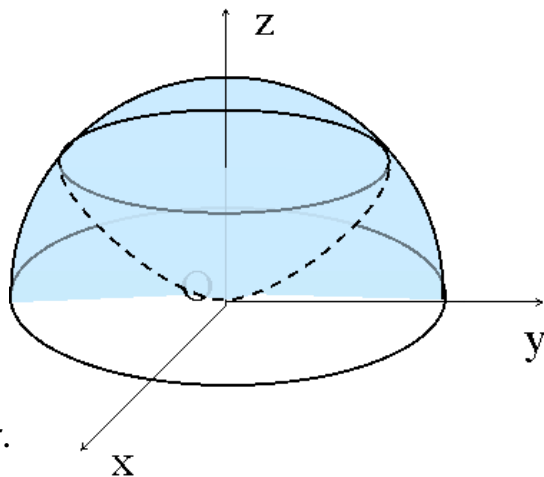
$$= \int_0^1 (e^0 + x)dx + \int_0^1 (e^y - 2y)dy = e - \frac{1}{2}.$$

三.(10 分)计算曲面积分 $I = \iint_{S^+} (y^2 + z^2)dydz + yzdzdx + z(x^3 + y^2)dxdy$, 其中 S 为

上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围区域的表面,取外侧.

解 记 $\Omega = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 2\}$, 则有高斯公式及对称性,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} (z + x^3 + y^3)dV = \iiint_{\Omega} zdV \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_r^{\sqrt{4-r^2}} z dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r(4 - 2r^2)dr \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \cdot (2 - r^2)dr^2 = \pi \left(2r^2 - \frac{1}{2}r^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi. \end{aligned}$$



四.(10 分)求解初值问题: $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 3x + 1, \\ y(0) = \frac{1}{3}, y'(0) = 3. \end{cases}$

解 齐次方程对应的特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. 特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$.

因此齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$.

由于 0 不是特征方程的根,故设非齐次方程的特解为 $y = ax + b$, 代入原方程,比较系数,得 $a = -1, b = \frac{1}{3}$. 即原方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - x + \frac{1}{3}$.

$$\text{由定解条件,得 } \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -C_1 + 3C_2 - 1 = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

$$\text{初值问题的解为 } y = -e^{-x} + e^{3x} - x + \frac{1}{3}.$$

五.(每小题 5 分,共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x|\sin x|};$$

$$(2) \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \alpha > 0.$$

解 (1) 因为 $\frac{1}{1+x|\sin x|} \geq \frac{1}{1+x}, (x>0)$ 而无穷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ 发散,

由比较判别法, 无穷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x|\sin x|}$ 发散.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x^\alpha} / \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 故 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ 和 $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx, \alpha > 0$ 同敛散.

而当 $\alpha - 1 < 1$ 即 $\alpha < 2$ 时, $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx$ 收敛; 当 $\alpha - 1 \geq 1$ 即 $\alpha \geq 2$ 时, $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx$ 发散. 故

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \begin{cases} \text{收敛, 当 } 0 < \alpha < 2, \\ \text{发散, 当 } \alpha \geq 2. \end{cases}$$

六. (10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{n2^n}$ 的收敛半径, 收敛区间和收敛域, 并求其和函数.

$$\text{解 } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{n2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{x-1}{2} \right)^{n-1} \stackrel{t=\frac{x-1}{2}}{=} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot t^{n-1}$$

$$(x-1)f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = g(t), \quad g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = \frac{1}{1-t},$$

$$\text{因此 } g(t) = \int_0^t \frac{1}{1-t} dt = -\ln|1-t|,$$

$$(x-1)f(x) = -\ln \left| 1 - \frac{x-1}{2} \right| = \ln 2 - \ln|3-x|,$$

$$\text{从而 } f(x) = \frac{\ln 2 - \ln|3-x|}{x-1}.$$

由于 $a_n = \frac{1}{2^n}, l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$, 收敛半径为 $R=2$,

收敛区间为 $-1 < t < 1, -1 < \frac{x-1}{2} < 1$, 即 $-1 < x < 3$. 即 $(-1, 3)$.

又由于级数当 $x=-1$ 收敛, 当 $x=3$ 时发散, 故收敛区域为 $[-1, 3)$.

七. (10 分)把函数 $f(x) = \ln(5+x)$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数,并求其收敛域.

解 令 $t = \frac{x}{5}$, 则

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(7+x-2) = \ln 7 + \ln\left(1 + \frac{x-2}{7}\right) = \ln 7 + \ln(1+t) \\ &= \ln 7 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} = \ln 7 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{(x-2)^n}{7^n} \end{aligned}$$

其收敛域为 $-1 < \frac{x-2}{7} \leq 1$, 即 $-5 < x \leq 9$.

八. (6 分)研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 的敛散性.

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2} \bigg/ \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{5}{n^2}} = 1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 也发散, 即

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 不绝对收敛.

但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sqrt{1 + \frac{5}{n^2}} = 0$, 又函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}$ 单调下降, 即

$f(n) = \frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 关于 n 单调下降, 于是由莱布尼兹判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 收敛. 因

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 条件收敛.

九. (6 分)设 n 是自然数, 求证: 方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 存在唯一正实根 x_n ; 且当 $\alpha > 1$

时, 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$ 收敛.

证 记 $f(x) = x^n + nx - 1$, 则 $f(1) = n > 0$, $f(0) = -1 < 0$. 故由 $f(x)$ 的连续性, 必有 $x_n \in (0, 1)$, 使 $f(x_n) = 0$. 又 $f'(x) = n(x^{n-1} + 1) > 0$, 即 $f(x)$ 严格单调, 故根唯一.

又, 由 $f(x_n) = x_n^n + nx_n - 1 = 0$, 得 $nx_n = 1 - x_n^n < 1$, $x_n < \frac{1}{n}$, $x_n^\alpha < \frac{1}{n^\alpha}$.

当 $\alpha > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 收敛, 故由比较判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$ 收敛. 证毕.