09 级二期期末 B 卷试题参考解答.

一.求初值问题:$\begin{cases}(2xy-1)dx+x^2dy=0,\\ y(1)=2.\end{cases}$

解　方程化为 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2}{x}y=\dfrac{1}{x^2}$. 先解对应的齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2}{x}y=0.$

得解为 $y=Cx^{-2}$, 用常数变易法,令 $y=C(x)x^{-2}$, 则 $y'=C'(x)x^{-2}-2C(x)x^{-3}$,

代入原方程,得 $C'(x)=1$, 故 $C(x)=x+C$, 从而得原方程的通解为

$$y=(x+C)x^{-2}, \text{或 } x^2y=x+C.$$

由初始条件,得 $C=1$,故初值问题的解为 $x^2y-x=1$.

二.计算累次积分 $I=\int_0^1 dy\int_y^1 \sin x^2 dx.$

解 $$I=\int_0^1 dy\int_y^1 \sin x^2 dx=\int_0^1 dx\int_0^x \sin x^2 dy=\int_0^1 \sin x^2\left(\int_0^x dy\right)dx$$

$$=\int_0^1 x\sin x^2 dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \sin x^2 dx^2=\frac{1}{2}(-\cos x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-\cos 1).$$

三.验证数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ 收敛,并求其和.

解 $$S(n)=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)=\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$=\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\ln\frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2}=\ln\frac{n+1}{2n}.$$

因此 $$S=\lim_{n\to\infty}S(n)=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{2n}=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2.$$

四.若函数 $g(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\dfrac{\cos(xy)}{x}dx,\quad y>0$, 求 $g'(x)$.

解 $$g'(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\frac{-x\sin(xy)}{x}dx+\frac{\cos y^3y}{y^3}\cdot 3y^2-\frac{\cos\sqrt{y}y}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$=\frac{1}{y}\cos xy\Big|_{\sqrt{y}}^{y^3}+\frac{3\cos y^4}{y}-\frac{\cos\sqrt{y^3}}{2y}=\frac{4\cos y^4}{y}-\frac{3\cos\sqrt{y^3}}{2y}.$$

五.计算曲线积分 $I=\oint\limits_{L^+}(ye^x-\sin x^3)dx+(e^x+x^3+\sin y^3)dy,$ 其中 L 是圆周 $x^2+y^2=1$,逆时针方向.

解 $P(x)=ye^x-\sin x^3, Q(x)=e^x+x^3+\sin y^3,$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^x+3x^2-e^x=3x^2,$$

由格林公式,

$$I=\oint\limits_{L^+}Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}3x^2dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 3r^2\cos^2\theta\cdot rdr=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^1 3r^3dr=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\frac{3\pi}{4}.$$

六.求解一阶常微分方程: $\frac{dy}{dx}-\frac{6y}{x}+xy^2=0.$

解 令 $z=y^{-1}$,则 $\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}=-y^{-2}\left(\frac{6y}{x}-xy^2\right)=x-\frac{6z}{x},$

得线性方程 $\frac{dz}{dx}+\frac{6z}{x}=x \quad (*),$ 其对应的齐次方程为 $\frac{dz}{dx}+\frac{6z}{x}=0,$

$\frac{dz}{z}=-\frac{6}{x}dx,\ \ln z=-6\ln x+\ln C,\quad z=Cx^{-6}.$ 令 $z=C(x)x^{-6}$. 代入到(*)中,

得 $\frac{C'(x)}{x^6}-\frac{6C(x)}{x^7}=x-\frac{6C(x)}{x^7},$ 即 $C'(x)=x^7$, 于是 $C(x)=\frac{1}{8}x^8+C.$

于是(*)所求的解为 $z=x^{-6}\left(\frac{1}{8}x^8+C\right)=\frac{x^8+C}{8x^6}$. 原方程的解为 $y=\frac{8x^6}{x^8+C}.$

另外,显然方程还有平凡解 y=0.

七.求解二阶非齐次方程的初值问题: $\begin{cases}y''-4y'+3y=1+e^{2x},\\ y(0)=y'(0)=1.\end{cases}$

解 对应的齐次方程为 $y''-4y'+3y=0,$ 其特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+3=0.$

特征根为 1 和 3,因此齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}.$

对非齐次方程 $y''-4y'+3y=1,$ 特解为 $y=C=1/3;$

对非齐次方程 $y''-4y'+3y=e^{2x}$，特解为 $y=Ce^{2x}$, 代入后得 $C=-1$,

因此原方程的通解为 $y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}-e^{2x}+\frac{1}{3}.$

由初始条件 $y(0)=1$,得 $1=C_1+C_2-1+\frac{1}{3}$,即 $C_1+C_2=\frac{5}{3}$;

由初始条件 $y'(0)=1$, ,得 $1=C_1+3C_2-2$,即 $C_1+3C_2=3$;

由此得 $C_1=1, C_2=\frac{2}{3}$; 从而初值问题得解为 $y=e^{x}+\frac{2}{3}e^{3x}-e^{2x}+\frac{1}{3}.$

八.计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+}(x^3z+x)dydz+(\cos y-x^2yz)dzdx-x^2z^2dxdy$, 其中 S^+为曲面 $z=2-x^2-y^2, 1\le z\le 2$, 取上侧.

解 $P=x^3z+x, Q=\cos y-x^2yz, R=-x^2z^2$,

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2z+1, \frac{\partial Q}{\partial y}=-\sin y-x^2z, \frac{\partial R}{\partial z}=-2x^2z.$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1-\sin y,$$

设 $A_0=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 1, z=1\}$, 取下侧, 记 $\Sigma=A_0\cup S^+$, 则由高斯公式

$$\oiint\limits_{\Sigma}(x^3z+x)dydz+(\cos y-x^2yz)dzdx-x^2z^2dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(1-\sin y)dv.$$

$$\overset{\text{由对称性}}{=}\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_1^{2-r^2}rdzdrd\theta=2\pi\int_0^1 r(1-r^2)dr=\frac{\pi}{2}.$$

$$I_0=-\iint\limits_{A_0}(x^3z+x)dydz+(\cos y-x^2yz)dzdx-x^2z^2dxdy$$

$$=-\iint\limits_{A_0}(-x^2)dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta drd\theta=\frac{\pi}{4}.$$

显然 $\oiint\limits_{\Sigma}=I+I_0$, 即 $I+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, 故得 $I=\frac{\pi}{4}.$

九.若函数 $\frac{1}{x}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n-1}\right)$, 的和函数,并证明其在区间(0,+∞)上一致收敛.

解 $S_n=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x+k}-\frac{1}{x+k-1}\right)=\frac{1}{x+n}$ ，故和函数 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$， $x>0$

又 $\left|S_n(x)-S(x)\right|=\frac{1}{x+n}\leq\frac{1}{n}$，$\forall\, x>0$，故该函数项级数在区间 $(0,+\infty)$ 上一致收敛。

十.求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$ 的收敛半径,收敛域及和函数.

解 $a_n=\frac{1}{n\cdot 3^n}$，$\lim_{n\to 0}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to 0}\frac{n}{3(n+1)}=\frac{1}{3}$,故幂级数的收敛半径 $R=3$.

当 $x=3$,时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,而当 $x=-3$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛,于是幂级数的收敛域为 $[-3,3)$. 记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$, 则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x/3}=\frac{1}{3-x}.$$

$$S(x)=\int_0^x\frac{1}{3-x}dx=-\ln(3-x)\Big|_0^x=\ln 3-\ln(3-x)=\ln\frac{3}{3-x},\quad -3\leq x<3.$$

十一. 求函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x_0=2$ 处的泰勒展开式,并求其收敛域.

解 $f(x)=\ln x=\ln[2+(x-2)]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(x-2)^n.$$

收敛域为 $-1<\frac{x-2}{2}\leq 1$, 即 $0<x\leq 4$.

十二. 判别数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 是绝对收敛还是条件收敛,

解 因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$ 的前 n 项的部分和 $s_n=\ln(n+1)\to+\infty$, 故级数并非绝对收敛. 令 $f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$，$(x>0)$, 则

$$f'(x)=[\ln(x+1)-\ln x]'=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}<0,\quad \forall x>0,$$

所以 $\ln\frac{n+1}{n}$ 单调下降且 $\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{n}=0$,

由莱布尼兹判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 收敛，故此级数条件收敛。

十三. 设 $a_n>0,n=1,2,\cdots,\{a_n\}$ 单调递减,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,求证:级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n \text{收敛.}$$

证 因 $a_n>0,n=1,2,\cdots,\{a_n\}$ 单调递减,故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\geq 0$. 而交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,故必有 $a_n\geq a>0,n=1,2,\cdots$, 从而 $\frac{1}{1+a_n}\leq\frac{1}{1+a}<1$. 于是 $\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n\leq\left(\frac{1}{1+a}\right)^n,n=1,2,\cdots$.

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$ 收敛,由比较判别法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.