中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学一（I）》(A 卷)

学年学期: **2017–2018 学年第 1 学期**　　姓　　名: ____________

学　院/系: 数学学院　　学　　号: ____________

考试方式: 闭卷　　年级专业: ____________

考试时长: **120 分钟**　　班　　别: ____________

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者, 不授予学士学位.”

以下为试题区域, 共 14 道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

解:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=0.$$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0+}x^{\sin x}$.

解:

解析: 由洛必达法则可得 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\sin x\ln x}$

$$=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}}}=\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to0^+}e^{-\tan x}=1$$

3. 计算积分 $\int_0^x \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$.

解:

$$\begin{aligned}&\int_0^x \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\ =&x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^x-\int_0^x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x\\ =&x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+1.\end{aligned}$$

4. 求函数 $y=\sin x(0\le x\le\pi)$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的侧面积。

解:

$$\int_0^{\pi} 2\pi\ \sin(x)\ \sqrt{\cos(x)^2+1}\mathrm{d}x$$
$$=2\pi\left(\log\left(\sqrt{2}+1\right)+\sqrt{2}\right)$$

5. 求过点 M(0, 1, 2) 且与直线 $\begin{cases} 2x-z+1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程。

解:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$=(1,1,2)$$

又因为平面过 M(0, 1, 2),

所以平面的方程为 $x+(y-1)+2(z-2)=0$

6. 在曲线 $C: y=1-x^2(x>0)$ 上点 P 处作 C 的切线, 该切线与两坐标轴交与 A, B 两点,

(1) 试确定点 P 的位置, 使得 A, B 两点与坐标原点 O 所围的三角形 $\triangle OAB$ 的面积最小;

(2) 求 P 点的切线方程,

(3) 求曲线 C 与 x 轴所围图形的面积。

解:

设所求点 P 的坐标为 $\left(m, 1-m^2\right)$, 于是, 曲线在该点处的切线方程为

$$y-\left(1-m^2\right)=-2m(x-m)$$

分别令 $x=0, y=0$, 得到切线与坐标轴的交点坐标为 $\left(0, 1+m^2\right)$, $\left(\frac{1+m^2}{2m}, 0\right)$,

于是所求三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+m^2}{2m}\cdot\left(1+m^2\right)=\frac{\left(1+m^2\right)^2}{4m}$$

对 m 求导, 得

$$S'=\frac{2\left(1+m^2\right)\cdot 2m\cdot m-\left(1+m^2\right)^2}{4m^2}=\frac{3m^4+2m^2-1}{4m^2}$$

令 $S'=0$, 解得唯一驻点 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

由题意, 函数 $S=\frac{\left(1+m^2\right)^2}{4m}$ 在 $(0,+\infty)$ 内最小值存在, 且驻点唯一。

因此, 当 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 所求面积最小。

于是所求点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$。

(2) 切线方程为 $2\sqrt{3}x + 3y - 4 = 0$

(3) 面积为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

7. 设 $z = y\cos(ax + by)$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

解:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(ax + by) - by\sin(ax + by)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -a\sin(ax + by) - aby\cos(ax + by)$$

8. 求曲线 $y = 3e^{-x^2}$ 的凹凸区间、拐点及渐近线。

解:

$y' = -6xe^{-x^2}$

$y'' = -6e^{-x^2} + 3 \times (-2x)(-2x)e^{-x^2} = \left(12x^2 - 6\right)e^{-x^2}$

当 $y'' = 0$ 即 $4x^2 - 2 = 0, x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$y'' > 0$ 时 $x \in \left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

$y'' < 0$ 时 $x \in \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

所以凹区间是 $x \in \left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 凸区间是 $x \in \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$y\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3e^{-\frac{1}{2}}$ 所以拐点是 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 3e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 3e^{-\frac{1}{2}}\right)$

水平渐进线为 x 轴

9. 将函数 $f(x) = x^2\ln(3 + x)$ 在 $x = 0$ 处展开为带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式。

解:

$$\begin{aligned}
&= \left[\ln 3 + \ln\left(1 + \frac{x}{3}\right)\right]x^2 \\
&= \left(\ln 3 + \frac{x}{3} - \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^n}{n}\right)x^2 \\
&= \ln 3 \times x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{18} + \frac{x^5}{81} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n+2}}{3^n \times n} + o\left(x^{n+2}\right)
\end{aligned}$$

10. 求函数 $u = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ 在条件 $x + y + z = \dfrac{\pi}{2}, (x, y, z > 0)$ 下的极值和极值点。

解:

由拉格朗日公式，令 $F(x, y, z) = \sin x\sin y\sin z + 2k(x + y + z) = 0$

则

$$F'(x)=\sin y\sin z\cos x+2k=0$$

$$F'(y)=\sin x\sin z\cos y+2k=0$$

$$F'(z)=\sin x\sin y\cos z+2k=0$$

联立 $x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ 解方程
从而可知, $x=y=z=\dfrac{\pi}{2}$,
所以极值点为 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right)$
故 $u=\sin x\sin y\sin z=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$.

11. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性、一阶偏导数和一阶微分的存在性。

解：利用连续定义与偏导数定义.
因为 $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant|x|\dfrac{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}|x|$,
所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$,
于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)=0.$$

因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.
因为关于 x 的偏导数

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0,$$

同样得关于 y 的偏导数

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}0=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在. 还有一个小问

12. 设 $z=f\left(x^2-y^2,e^{xy+x}\right)$, f 的二阶偏导数连续, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

13. 设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上连续, $g(x)$ 为偶函数, $f(x)$ 满足 $f(x)+f(-x)=A$(A 为常数), 证明:

$$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx=A\int_{0}^{a}g(x)dx$$

并利用该等式计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}}dx$ 的值.

解:

证 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x$

因

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x &\overset{x=-t}{=} \int_{a}^{0} f(-t)g(-t)\mathrm{d}(-t)\\ &= \int_{0}^{a} f(-t)g(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x &= \int_{0}^{a} f(-x)g(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]g(x)\mathrm{d}x\\ &= A\int_{0}^{a} g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, g(x) = x^2$ (偶函数). 则

$$f(x)+f(-x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = 1$$

于是,

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

14. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 在区间 $(0,1)$ 可导, 且 $f(1)=0$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)+\dfrac{1}{\xi}f(\xi)=0$.

解:

证将结论改写为 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=,)$, 则只要证明 $[xf(x)]'|_{x=\xi}=0$ 成立即可.

作辅助函数 $F(x) = xf(x)$, 显然 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 在区间 $(0,1)$ 可导, $F(0) = F(1) = 0$, 满足罗尔定理的条件,

则存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 即 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$,

所以 $f'(\xi)+\dfrac{1}{\xi}f(\xi)=0$.