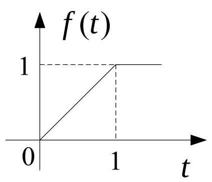
《信号与系统》第一次测试题(B 卷)

一、多项选择题（每小题 3 分，共 18 分，多选少选都算错）

1. $x(k+3)*\delta(k-2)$ 的正确结果为______。

(A) $x(5)\delta(k-2)$　　(B) $x(1)\delta(k-2)$　　(C) $x(k+1)$　　(D) $x(k+5)$

2.如下图所示，信号 $f(t)$ 的数学表达式为（　　　　）。



(A) $f(t)=tu(t)-tu(t-1)$　　(B) $f(t)=tu(t)-(t-1)u(t-1)$

(C) $f(t)=(1-t)u(t)-(t-1)u(t-1)$　　(D) $f(t)=(1+t)u(t)-(t+1)u(t+1)$

3、下列四个等式成立的是（　　）。

A、$\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\delta(t+b)$　　B、$\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{b}{a})$

C、$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$　　D、$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)$

4、下列表达式能正确反映 $\delta(n)$ 与 $u(n)$ 关系的是（　　）。

A、$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$　　B、$u(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\delta(n-k)$

C、$u(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\delta(k)$　　D、$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(k)$

5、下列系统中，不是线性系统的是（　　）。

A、$y(t)=y(t_0)+x(t)\cos t$　　B、$y(n)=x(n+2)$

C、$y(n)=ny^2(n_0)+\sum_{k=n_0}^{n}x(k)$　　D、$y(t)=\frac{d}{dt}\left[x(t)\right]$

6、下列信号中，属于功率信号的是（　　）。

A、$x(t)=\begin{cases}5\cos 10\pi t & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$　　B、$x(t)=\begin{cases}5\cos(10\pi t) & 0\le t\le 100\\ 0 & 其它\end{cases}$

C、 $x(t)=5\cos(10\pi t)$　　　　　　D、 $x(t)=5e^{-2t}\cos(10\pi t)u(t)$

二、填空题（每小题 4 分，共 28 分）

第 1 题：序列和 $\sum_{k=-\infty}^{n}3^{k}\delta(k-2)=$ (　　　　　　　)

第 2 题：$\int_{-4}^{4}t^{2}\delta'(t+2)dt=$(　　　　)

第 3 题：积分 $\int_{-\infty}^{\infty}(\sin\pi t)\delta(1-2t)dt$ 等于(　　　　　)。

第 4 题：已知一周期信号为 $x(n)=\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)-\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$，其周期为(　　　　　)

第 5 题：$\int_{-2\pi}^{0}t\sin\left(\frac{t}{2}\right)\delta(-\pi-t)dt=$(　　　　)

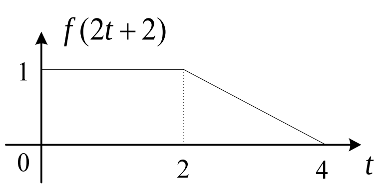
第 6 题：$\left[e^{-2t}u(t)\right]*4$ 等于(　　　　)

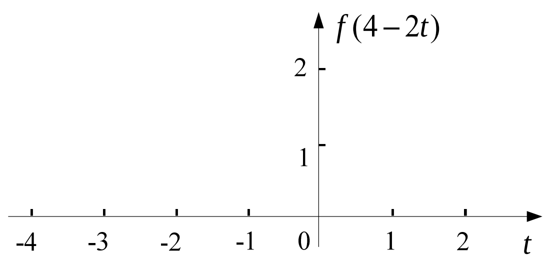
第 7 题：已知 $x(t)=(3t^{2}+2)u(t)$，则 $x''(t)=$__________。

三、简答题（共 18 分）

第 1 题：（4 分）判断系统 $y(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$ 是否为①线性系统；②时不变系统；③因果系统；④稳定系统，并给出原因。

第 2 题：（6 分）已知信号 $f(2t+2)$ 的波形如下图所示，试画出信号 $f(4-2t)$ 的波形。





第 3 题：（8 分）系统的输入分别为 $f(t)$ 或 $x(n)$，输出为 $y(t)$ 或 $y(n)$， M 为常数，判断下列两系统的线性、时不变和因果属性，并给出原因。

A） $y(t)=\sin t\cdot f(t)$

B） $y(n)=\sum_{k=-M}^{M}x(n-2k)$

四、计算题（共 36 分）

第 1 题：（8 分）一线性连续时间系统在相同的初始条件下，当输入为 $f(t)$ 时，全响应为 $y(t)=5e^{-t}+\cos 2t$，当输入为 $2f(t)$ 时，全响应 $y(t)=e^{-t}+2\cos 2t$ 。求在 3 倍初始条件下，输入为 $5f(t)$ 时的全响应。

第2题：(8分)系统的微分方程为 $\boldsymbol{y''(t)}-2\boldsymbol{y'(t)}-3\boldsymbol{y(t)}=\boldsymbol{f'(t)}+2\boldsymbol{f(t)}$，已知 $\boldsymbol{f(t)=u(t)}$，初始状态为 $\boldsymbol{y(0^-)}=1$， $\boldsymbol{y'(0^-)}=2$，求系统的零输入响应。

第 3 题：（10 分）计算卷积积分 $f_1(t)*f_2(t)$，其中 $f_1(t)=e^{-2at}u(t)$， $f_2(t)=\cos tu(t-3\pi)$ 。

第 4 题：（10 分）请画出 $x(t)=(t+1)[u(t+2)-u(t-1)]$ 的波形图，并画出其一阶导数 $x'(t)$ 和 $x^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$ 的波形图。

中山大學 本科生考试草稿纸

第一次测试题(B)

一、选择题：

1~6: C, B, C, A, C, AC

二、填空题：

1. $\sum_{k=-\infty}^{n} 3^k \delta(k-2) = 9u(n-2)$

解析：当 $n<2$ 时 $\delta(k-3)$ 恒为零

当 $n\geq 2$ 时 当且仅当 $k=2$ 时，$\delta(k-2)=1$，

此时 $3^k=9$，故有上述等式

2. $\cancel{\int_{-4}^{4} t^2\delta'(t+2)}$ $\int_{-4}^{4} t^2\delta'(t+2)\,dt = t^2\delta(t+2)\Big|_{-4}^{4} - \int_{-4}^{4} 2t\,\delta(t+2)\,dt$

$$= 0 - 0 - 2\times(-2) = 4$$

3. $\int_{-\infty}^{\infty}\sin\pi t\,\delta(1-2t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\sin\pi t\,\delta(2t-1)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\sin\pi t\,\delta(t-\frac{1}{2})\,dt$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}$$

4. $x(n)=\cos\frac{n\pi}{6}+\sin\frac{n\pi}{12}-\cos\frac{n\pi}{3}$，其周期为 24。

解析
$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12 \\ T_2 &= \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/12} = 24 \\ T_3 &= \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6 \end{aligned}\right\}$$ 最小公倍数为 24

5. $\int_{-2\pi}^{0} t\sin\frac{t}{2}\,\delta(-\pi-t)\,dt=\int_{-2\pi}^{0} t\sin\frac{t}{2}\,\delta(t+\pi)\,dt$

$$=-\pi\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\pi$$

6. $e^{-2t}u(t)*4=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\tau}u(\tau)\times 4\,d\tau=-2\int_{0}^{\infty}e^{-2\tau}d(-2\tau)=-2\,e^{-2\tau}\Big|_{0}^{\infty}=2$

7. 已知 $x(t)=(3t^2+2)u(t)$，则 $x''(t)=\underline{6u(t)+2\delta'(t)}$

解析：$x'(t)=(3\times 2t)u(t)+(3t^2+2)\delta(t)$

$=6t\,u(t)+2\delta(t)$

$x''(t)=6u(t)+\underbrace{6t\delta(t)}_{0}+2\delta'(t)=6u(t)+2\delta'(t)$

三、简答题：

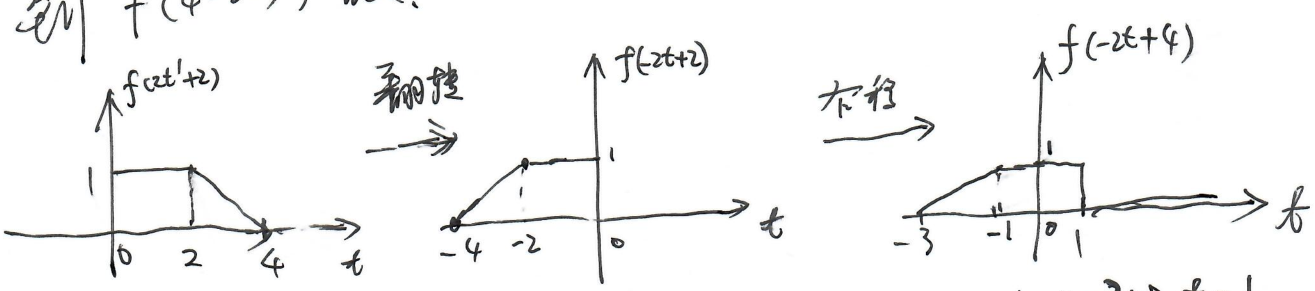
1. $y(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$ 为：①线性、②时不变、③因果 ④不稳定系统。

解析：关于④，设 $f(t)=1$，则 $|f(t)|<2$，此时 $|y(t)|$ 不收敛。

2. 已知 $f(2t+2)$，求 $f(4-2t)$。

令：$4-2t=2t'+2$

则：$t=1-t'$，意味着 $f(2t'+2)$ ①翻转再②右移即可得到 $f(4-2t)$，故：



亦可用特置点法：

~~f(·)=f~~

$\begin{cases} f(2\times 0+2)=f(2)=1\\ f(2\times 2+2)=f(6)=1\\ f(2\times 4+2)=f(10)=0\end{cases}$

$\begin{cases} -2t+4=2\text{时 } t=1\\ -2t+4=6\text{时 } t=-1\\ -2t+4=10\text{时 } t=-3.\end{cases}$

把 $t=1,-1,-3$ 对应的函数值点到图上即得解.

3. (A): $y(t)=\sin t f(t)$ 为 ①线性、②时变 ③因果系统

(B) $y(n)=\sum\limits_{k=-M}^{M}x(n-2k)$ ①线性 ②时不变 ③非因果

若分析了$M=0$的情况，则$M=0$时为因果(不做要求)

四: 1.
解:

$$\left.\begin{matrix} f(t) \\ y_0(t) \end{matrix}\right\} \rightarrow y_1(t)=5e^{-t}+\cos 2t \quad ①$$

$$\left.\begin{matrix} 2f(t) \\ y_0(t) \end{matrix}\right\} \rightarrow y_2(t)=e^{-t}+2\cos 2t \quad ②$$

由①和②可得

$$\left.\begin{matrix} f(t) \\ 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow y_3(t)=-4e^{-t}+\cos 2t \quad ③$$

由①和③可得

$$\left.\begin{matrix} f(t)=0 \\ y_0(t) \end{matrix}\right\} \rightarrow y_4(t)=y_1(t)-y_3(t)=9e^{-t} \quad ④$$

由④和③可得

$$\left.\begin{matrix} 5f(t) \\ 3y_0(t) \end{matrix}\right\} \rightarrow y_5(t)=5y_3(t)+3y_0(t)=7e^{-t}+5\cos 2t.$$

四：2、$y''(t)-2y'(t)-3y(t)=f'(t)+2f(t)$，已知 $y(t)=u(t)$，$y(0^-)=1$，$y'(0^-)=2$，求 $y_0(t)$

解：① 列特征方程．

$$\lambda^2-2\lambda-3=0$$

② 求特征根

$$\lambda_1=3,\ \lambda_2=-1$$

③ 列齐次解

$$y_0(t)=A_1e^{3t}+A_2e^{-t}$$

④ 代入初始条件

$$\begin{cases}A_1+A_2=1\\3A_1-A_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=\frac{3}{4}\\A_2=\frac{1}{4}\end{cases}$$

$\therefore\ y_0(t)=\frac{3}{4}e^{3t}+\frac{1}{4}e^{-t}$

④

⑤

四：3、已知 $f_1(t)=e^{-2at}u(t)$，$f_2(t)=\cos t\, u(t-3\pi)$，求 $f_1(t)*f_2(t)$

解：$y(t)=f_1(t)*f_2(t)=\left[e^{-2at}u(t)\right]*\left[\cos t\, u(t-3\pi)\right]$

$$=\left[e^{-2at}u(t)\right]*\left[-\cos(t-3\pi)\, u(t-3\pi)\right]$$

$$=-\left[e^{-2at}u(t)\right]*\left[\cos t\, u(t)\right]*\delta(t-3\pi)$$

令 $A(t)=\left[e^{-2at}u(t)\right]*\left[\cos t\, u(t)\right]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2a\tau}u(\tau)\cdot\cos(t-\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\left[\int_0^t e^{-2a\tau}\cos(t-\tau)\,d\tau\right]u(t)$$

$$=\left[\int_0^t e^{-2a\tau}\cos(\tau-t)\,d\tau\right]u(t)\triangleq B(t)\,u(t)$$

其中 $B(t)=\int_0^t e^{-2a\tau}\cos(\tau-t)\,d\tau=\int_0^t e^{-2a\tau}\,d\sin(\tau-t)$

$$=e^{-2a\tau}\sin(\tau-t)\Big|_0^t-\int_0^t(-2a)\,e^{-2a\tau}\sin(\tau-t)\,d\tau$$

$$=\sin t+2a\int_0^t e^{-2a\tau}(-1)\,d\left[\cos(\tau-t)\right]$$

$$=\sin t-2a\left[e^{-2a\tau}\cos(\tau-t)\Big|_0^t-\int_0^t(-2a)\,e^{-2a\tau}\cos(\tau-t)\,d\tau\right]$$

$$=\sin t-2a\Big[e^{-2at}-e^0\cos(t)+2a\underbrace{\int_0^t e^{-a\tau}\cos(\tau-\tau)\,d\tau}_{B(t)}\Big]$$

故：$B(t)=\sin t-2ae^{-2at}+2a\cos t-4a^2B(t)$

$$\Rightarrow B(t)=\frac{1}{4a^2+1}\left[\sin t-2ae^{-2at}+2a\cos t\right]$$

故 $A(t)=B(t)\,u(t)=\frac{1}{4a^2+1}\left[-2ae^{-2at}+2a\cos t+\sin t\right]u(t)$

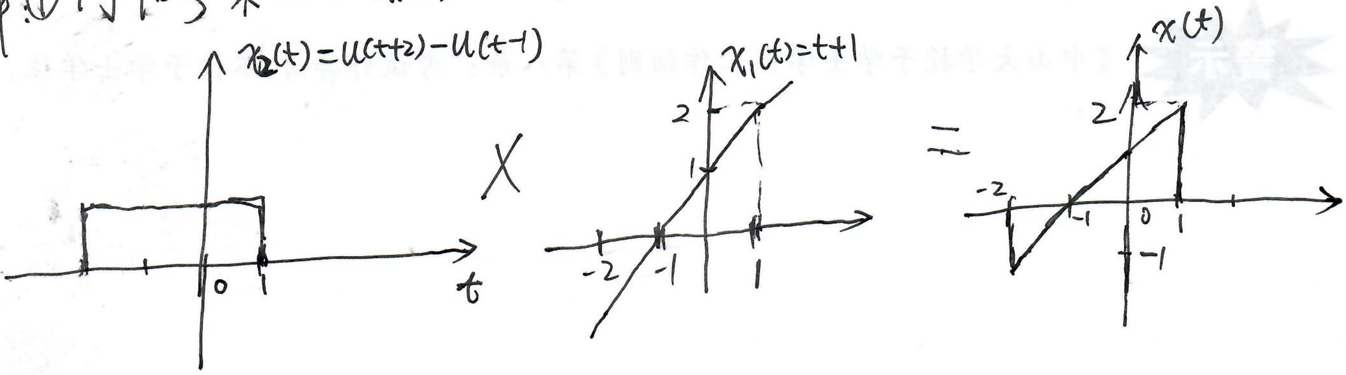
$y(t)=f_1(t)*f_2(t)=-A(t)*\delta(t-3\pi)=\frac{1}{4a^2+1}\left[2ae^{-2a(t-3\pi)}+2a\cos t+\sin t\right]u(t-3\pi)$

四4.

画出 $x(t)=(t+1)[u(t+2)-u(t-1)]$，并绘出 $x'(t)$，$x^{(-1)}(t)$

中山大学本科生考试草稿纸

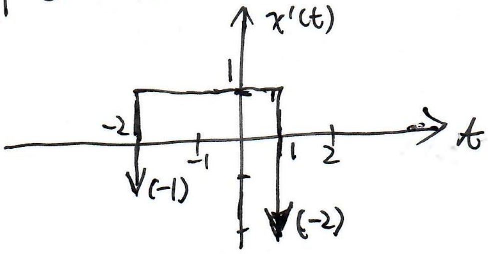
解 ① 门信号 乘 $x_1(t)=t+1$，



② 两种方法

$$x'(t)=(t+1)[\delta(t+2)-\delta(t-1)]+[u(t+2)-u(t-1)]$$

$$=-1\times\delta(t+2)-2\delta(t-1)+[u(t+2)-u(t-1)]$$



③ $$x^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}(\tau+1)[u(\tau+2)-u(\tau-1)]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t}(\tau+1)u(\tau+2)d\tau-\int_{-\infty}^{t}(\tau+1)u(\tau-1)d\tau$$

$$=\left[\int_{-2}^{t}(\tau+1)d\tau\right]u(t+2)-\left[\int_{1}^{t}(\tau+1)d\tau\right]u(t-1)$$

$$=\left[\frac{t^2}{2}+t-\left(\frac{(-2)^2}{2}-2\right)\right]u(t+2)-\left[\frac{t^2}{2}+t-\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]u(t-1)$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}+t\right)u(t+2)-\left(\frac{t^2}{2}+t\right)u(t-1)+\frac{3}{2}u(t-1)$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}+t\right)[u(t+2)-u(t-1)]+\frac{3}{2}u(t-1)$$