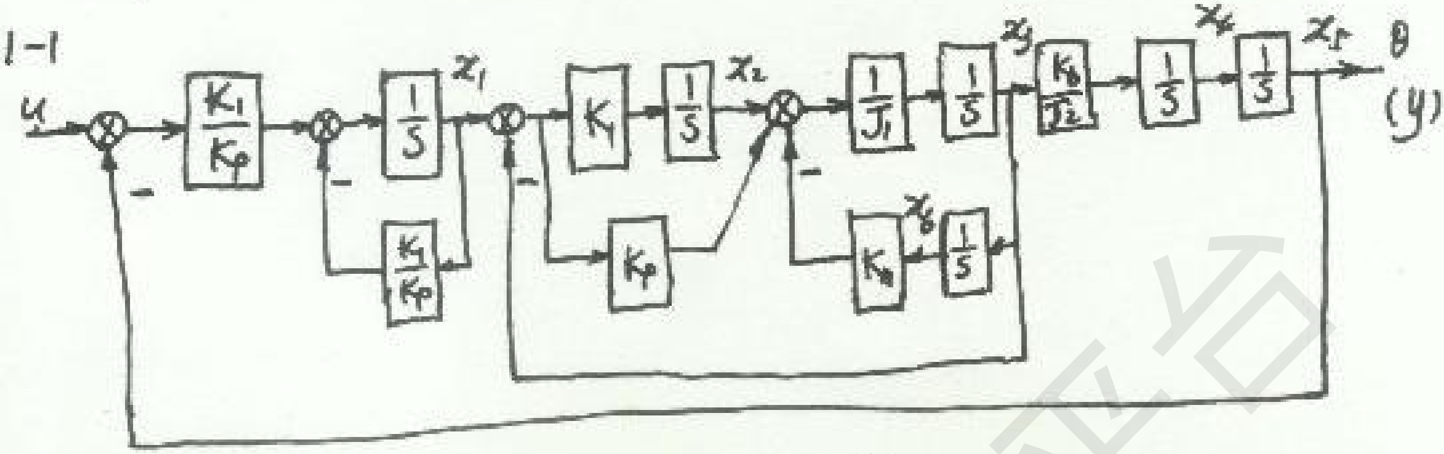
第一章习题参考答案

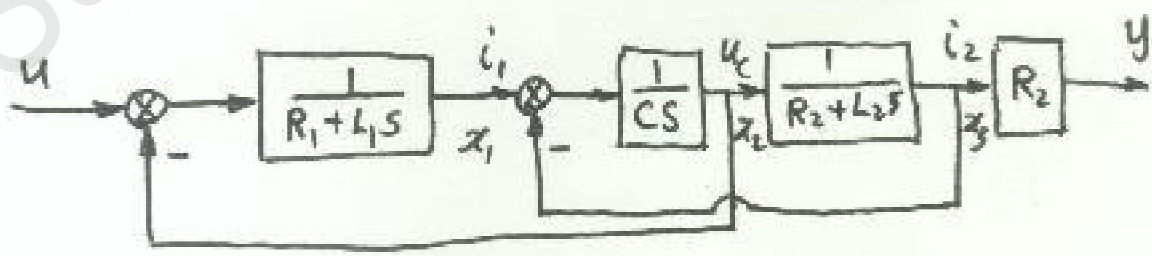
1-1



$$A=\begin{bmatrix} -\frac{K_1}{K_p} & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_1}{K_p} & 0 \\ K_1 & 0 & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_p}{J_1} & \frac{1}{J_1} & -\frac{K_p}{J_1} & 0 & 0 & -\frac{K_n}{J_1} \\ 0 & 0 & \frac{K_b}{J_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} \frac{K_1}{K_p} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D=0$$

1-2.



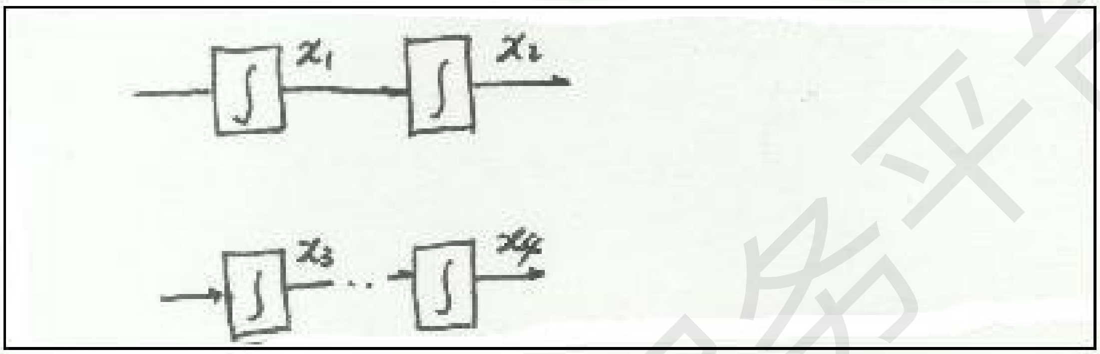
$$A=\begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & -\frac{1}{C} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 & -\frac{1}{C} \\ 0 & \frac{1}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix} \qquad D=0$$

1-3 参见例1-3（P17）

1-4

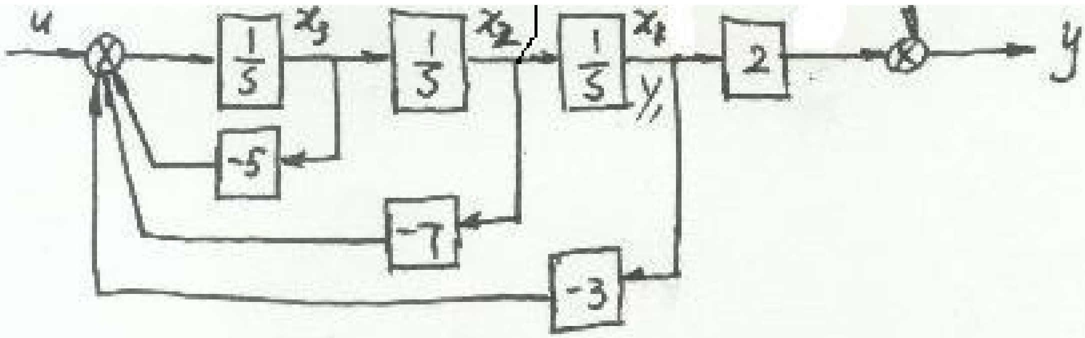


$$A=\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_5 & 0 & -a_3 & -a_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W(s)=\frac{\begin{bmatrix} (s^2+a_3s+a_4)b_1 & -a_6b_2s \\ -((a_5-1)s-a_3)b_1 & (s^2+a_1s+a_2-a_6)b_2 \end{bmatrix}}{s^4+(a_3+a_1)s^3+(a_4+a_1a_3+a_2-a_5a_6)s^2+(a_1a_4+a_2a_3)s+a_2a_4-a_6a_4}$$

1-5 (1) $\dddot{y}+5\ddot{y}+7\dot{y}+3y=\dot{u}+2u$



$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

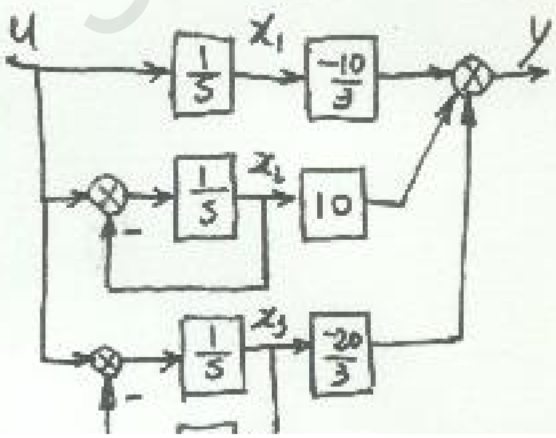
$$C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D=0$$

1-5 (2) $\dddot{y}+5\ddot{y}+7\dot{y}+3y=\ddot{u}+3\dot{u}+2u$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

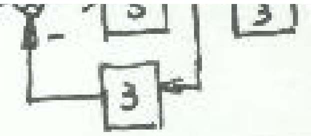
$$C=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad D=0$$

1-6 (1). $W(s)=\dfrac{10(s-1)}{s(s+1)(s+3)}=\dfrac{-10/3}{s}+\dfrac{10}{s+1}+\dfrac{-20/3}{s+3}$

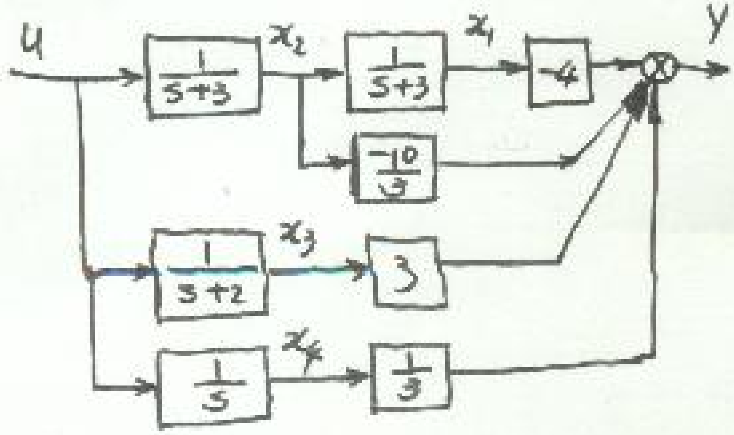


$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} \frac{-10}{3} & 10 & \frac{-20}{3} \end{bmatrix} \qquad D=0$$



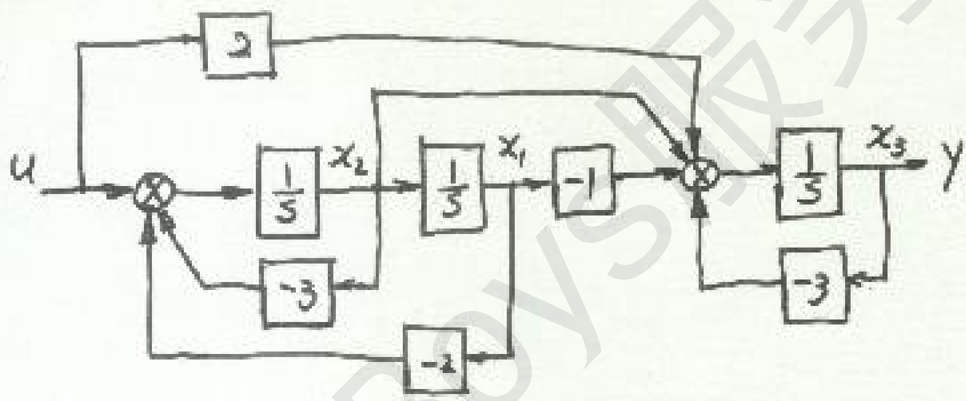
1-6 (2) $W(s)=\dfrac{6(s+1)}{s(s+2)(s+3)^2}=\dfrac{-4}{(s+3)^2}+\dfrac{-10/3}{s+3}+\dfrac{3}{s+2}+\dfrac{1/3}{s}$



$$A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-4 & \frac{-10}{3} & 3 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\quad D=0$$

1-7.



$$W(s)=\frac{2s^2+7s+3}{s^3+6s^2+11s+6}$$

1-8 (1) $A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ $V=\begin{bmatrix}1 & 1\\ j & -j\end{bmatrix}$ $J=\begin{bmatrix}-2+j & 0\\ 0 & -2-j\end{bmatrix}$

1-8 (2) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}$ $V=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -6 & 6\end{bmatrix}$ $J=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$

1-8 (3) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 2\\ -12 & -7 & -6\end{bmatrix}$ $V=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 4 & -3\\ -1 & -1 & 3\end{bmatrix}$ $J=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -12 & 7 & -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

1-8(4)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad V=\begin{bmatrix} -3 & \frac{3-\sqrt{15}j}{2} & \frac{3+\sqrt{15}j}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$J=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{15}j}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5-\sqrt{15}j}{2} \end{bmatrix}$$

1-9(1)

$$V=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad J=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad V^{-1}B=\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad CV=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1-9(2)

$$V=\begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad J=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad V^{-1}B=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1.375 & 0 \\ 1.25 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$CV=\begin{bmatrix} -4 & -12 & 2 \\ -3 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

-=END=-

习题二解答

2-1、证明：由

$$e^{(A+B)t}=I+(A+B)t+\frac{1}{2!}(A+B)^2t^2+\frac{1}{3!}(A+B)^3t^3+\cdots\cdots$$

$$=I+(A+B)t+\frac{1}{2!}(A^2+AB+BA+B^2)t^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{3!}(A^3+A^2B+ABA+AB^2+BA^2+BAB+B^2A+B^3)t^3+\cdots$$

$$e^{At}\cdot e^{Bt}=(I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\cdots)\ (I+Bt+\frac{1}{2!}B^2t^2+\frac{1}{3!}B^3t^3+\cdots)$$

$$=I+(A+B)t+\frac{1}{2!}(A^2+2AB+B^2)t^2+\cdots$$

$$+(\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{2!}A^2B+\frac{1}{2!}AB^2+\frac{1}{3!}B^3)t^3+\cdots$$

将以上二式相减，得

$$e^{(A+B)t}-e^{At}\cdot e^{Bt}=\frac{1}{2!}(BA-AB)t^2+\frac{1}{3!}(BA^2+ABA+B^2A+BAB-2A^2B-2AB^2)t^3+\cdots$$

显然，只有 $AB=BA$，才有

$e^{(A+B)t}-e^{At}\cdot e^{Bt}=0$;

即 $e^{(A+B)t}=e^{At}\cdot e^{Bt}$ #

2-2、证明：（2-17）

$$\text{由 } e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 t & & & \\ & \lambda_2 t & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2!}\lambda_1 t^2 & & & \\ & \frac{1}{2!}\lambda_2 t^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2!}\lambda_n t^2 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_1^k t^k & & & \\ & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_2^k t^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_n^k t^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \#$$

证明：(2-18)

由 $e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\cdots$；

知∃可逆阵 p， $s.t\quad p^{-1}Ap=\Lambda$，则 $A=p\Lambda p^{-1}$，且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$是特征根，

可知

$$e^{At}=p\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_1^kt^k & & & \\ & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_2^kt^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_n^kt^k\end{bmatrix}p^{-1}$$

$$=p\begin{bmatrix}e^{\lambda_1t} & & & \\ & e^{\lambda_2t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_nt}\end{bmatrix}p^{-1}\quad \#$$

另证：由 $\dot{x} = Ax$

若 A 可对角化，则∃一变换阵 p，定义

$x = p\hat{x}$，则

$\dot{\hat{x}} = p^{-1}Ap\hat{x} = \Lambda\hat{x}$

其中 $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$；

其解为：

$\hat{x}(t) = e^{\Lambda t}\hat{x}(0);$

$x(t) = p\hat{x}(t) = pe^{\Lambda t}p^{-1}x(0);$

又由 $x(t) = e^{At}x(0)$；

故 $e^{At} = pe^{\Lambda t}p^{-1}$ #

证明：（2-19）约当标准型：

由 $$\dot{X} = AX$$

矩阵 A 有重根，则知存在一可使 A 化为约当标准型的变换阵 $S, s.t$

$$S^{-1}AS = J$$

式中 J 是约当标准型矩阵，现定义

$$X = S\hat{X}$$

则

$$\dot{\hat{X}} = S^{-1}AS\hat{X} = J\hat{X}$$

其解为

$$\hat{X}(t) = e^{Jt}\hat{X}(0)$$

故

$$X(t) = S\hat{X}(t) = Se^{Jt}s^{-1}x(0)$$

在联系到

$$X(t) = e^{At}X(0)$$

可得

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$$

注意到

$$e^{A_i t}=I+A_i t+\frac{1}{2!}A_i^{\,2}t^2+\frac{1}{3!}A_i^{\,3}t^3+\cdots \qquad (1)$$ 将

由

$$A_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i\end{bmatrix},$$

于是有

$$A_i^{\,2}=\begin{bmatrix}\lambda_i^{\,2} & 2\lambda_i & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i^{\,2} & 2\lambda_i & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_i^{\,2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2\lambda_i\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^{\,2}\end{bmatrix};$$

$$A_i^{\,3}=\begin{bmatrix}\lambda_1^{\,3} & 3\lambda_1^{\,2} & 3\lambda_1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1^{\,3} & 3\lambda_1^{\,2} & 3\lambda_1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1^{\,3} & 3\lambda_1^{\,2} & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1^{\,3} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1^{\,3}\end{bmatrix}$$

……

将以上求得的A_i及其A_i诸次方的表达式带入（1）式，令$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_i^k t^k=\Psi$有

$$e^{At}=\begin{bmatrix}\Psi & \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i} & \frac{\partial^2\Psi}{2!\partial\lambda_i^2} & \cdots & \frac{\partial^{m-1}\Psi}{(m-1)!\partial\lambda_i^{m-1}}\\ 0 & \Psi & \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i} & \cdots & \frac{\partial^{m-2}\Psi}{(m-2)!\partial\lambda_i^{m-2}}\\ 0 & 0 & \Psi & \cdots & \frac{\partial^{m-3}\Psi}{(m-3)!\partial\lambda_i^{m-3}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Psi\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda t}\\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!}e^{\lambda t}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t}\end{bmatrix}=e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

这是第i个小块的情况，其余小块类似，得证。#

证明：（2-20）

采用拉氏变换法：

$$e^{At} = L^{-1}((sI-A)^{-1})$$

而

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-\sigma & \omega \\ -\omega & s-\sigma \end{bmatrix} / ((s-\sigma)^2+\omega^2)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\frac{1}{s-\sigma+j\omega}+\frac{1}{s-\sigma-j\omega}) & \frac{1}{2j}(\frac{1}{s-\sigma-j\omega}-\frac{1}{s-\sigma+j\omega}) \\ -\frac{1}{2j}(\frac{1}{s-\sigma-j\omega}-\frac{1}{s-\sigma+j\omega}) & \frac{1}{2}(\frac{1}{s-\sigma+j\omega}+\frac{1}{s-\sigma-j\omega}) \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = L^{-1}((sI-A)^{-1})$$

$$= e^{\sigma t}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}) & \frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}) \\ -\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}) & \frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}) \end{bmatrix}$$

由 Eular 公式，有

$$e^{At} = e^{\sigma t}\begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \#$$

2-3 解：首先

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s-1)^2(s-2)}\begin{bmatrix} s^2-4s+5 & s-4 & 1 \\ 2 & s(s-4) & s \\ 2s & -5s+2 & s^2 \end{bmatrix}$$

化成部分分式：

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{-2}{(s-1)^2}+\frac{1}{s-2} & \frac{3}{(s-1)^2}+\frac{2}{s-1}+\frac{-2}{s-2} & \frac{-1}{(s-1)^2}+\frac{-1}{s-1}+\frac{1}{s-2} \\ \frac{-2}{(s-1)^2}+\frac{-2}{s-1}+\frac{2}{s-2} & \frac{3}{(s-1)^2}+\frac{5}{s-1}+\frac{-4}{s-2} & \frac{-1}{(s-1)^2}+\frac{-2}{s-1}+\frac{2}{s-2} \\ \frac{-2}{(s-1)^2}+\frac{-4}{s-1}+\frac{4}{s-2} & \frac{3}{(s-1)^2}+\frac{8}{s-1}+\frac{-8}{s-2} & \frac{-1}{(s-1)^2}+\frac{-3}{s-1}+\frac{4}{s-2} \end{bmatrix}$$

$$L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=\begin{bmatrix} -2te^t+e^{2t} & 3te^t+2e^t-2e^{2t} & -te^t-e^t+e^{2t} \\ -2te^t-2e^t+2e^{2t} & 3te^t+5e^t-4e^{2t} & -te^t-2e^t+2e^{2t} \\ -2te^t-4e^t+4e^{2t} & 3te^t+8e^t-8e^{2t} & -te^t-3e^t+4e^{2t} \end{bmatrix}$$

2-4 本题只给一个参考答案

（1） $e^{At}=\begin{bmatrix} \cos 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t \\ 2\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}$；（2） $e^{At}=\begin{bmatrix} 1/2(e^{3t}+e^{-t}) & \frac{1}{4}(e^{3t}-e^{-t}) \\ e^{3t}-e^{-t} & \frac{1}{2}(e^{3t}+e^{-t}) \end{bmatrix}$；

2-5 本题只给参考答案

（1） $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$；　　（2） $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$；

（3） $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$；　　（4） $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$；

2-6 解：由 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$;

将 A 带入 $e^{At}=I+A_it+\frac{1}{2!}A_i^2t^2+\frac{1}{3!}A_i^3t^3+\cdots$

得 $\Phi(t)=\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}$;

带入

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}1 & t-\tau\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}1d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}1+t+\frac{1}{2}t^2\\ 1+t\end{bmatrix}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x=1+t+\frac{1}{2}t^2。$$

2-7 考虑如下式给出的系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

证明：（1）脉冲相应：$u(t) = K\delta(t)$，$x(0_) = x_0$时，

由状态方程解为：

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

把$t_0 = 0_$带入，有

$$x(t) = e^{At}x(0\_) + \int_{0\_}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

带入$u(t) = K\delta(t)$，有

$$x(t) = e^{At}x(0\_) + \int_{0\_}^{t} e^{A(t-\tau)}BK\delta(\tau)d\tau \quad \text{(考虑到}\ \delta\ \text{函数的特点)}$$

$$= e^{At}x_0 + e^{At}BK$$

(2)阶跃响应：

由状态方程解为：

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

把$t_0 = 0_$带入，有

$$x(t) = e^{At}x(0\_) + \int_{0\_}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$= e^{At}x_0 + e^{At}\int_{0\_}^{t}(I - A\tau + \frac{A^2\tau^2}{2!} - \cdots)d\tau BK$$，积分，有

上式得 $=e^{At}x_0+e^{At}(It-\frac{At^2}{2!}+\frac{A^2t^3}{3!}-\cdots)BK$

$=e^{At}x_0+e^{At}[-(A^{-1})(e^{-At}-I)]BK$

$=e^{At}x_0+A^{-1}(e^{At}-I)BK$

（3）斜坡响应：

由状态方程解为：

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

把 $t_0=0_-$， $u(t)=kt\times 1(t)$ 带入，有

$$x(t)=e^{At}x(0_-)+\int_{0_-}^{t}e^{A(t-\tau)}\tau d\tau BK$$

$$=e^{At}x_0+e^{At}\int_{0_-}^{t}(I-A\tau+\frac{A^2\tau^2}{2!}-\cdots)\tau d\tau BK$$

$$=e^{At}x_0+e^{At}(\frac{I}{2}t^2-\frac{2A}{3!}t^3+\frac{3A^2t^4}{4!}-\cdots)BK$$

$$=e^{At}x_0+A^{-2}(e^{At}-I-At)BK$$

$$=e^{At}x_0+[A^{-2}(e^{At}-I)-A^{-1}t]BK$$

2-8（略）

2-9 与方块图相对应的系统状态空间表达式为:

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}K & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}U$$

$$Y=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}X$$

用离散相似法进行离散化，有

$$\tilde{X}(k+1)=G\tilde{X}(k)+H\tilde{U}(k)$$

其中

$$G=e^{AT}=\Phi(T)=L^{-1}((sI-A)^{-1})$$

$$=\begin{bmatrix}e^{-T} & 0\\ 1-e^{-T} & 1\end{bmatrix};$$

$$H=\int_0^T e^{At}Bdt$$

$$=\int_0^T\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 1-e^{-t} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}dt$$

$$=\int_0^T\begin{bmatrix}Ke^{-t} & 0\\ K(1-e^{-t}) & 1\end{bmatrix}dt$$

$$=\begin{bmatrix}K(1-e^{-T}) & 0\\ K(T-1)+Ke^{-T} & T\end{bmatrix}$$

T=0.1;T=1;具体带入过程（略）

2-10 解：G 的特征根为 3/8，5/8；对应的 P 为

$$p=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix};\quad p^{-1}=\begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix};$$

$$\Phi(k)=G^k=p\Lambda^k p^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\frac{3}{8})^k & 0\\ 0 & (\frac{5}{8})^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^k+\frac{1}{2}(\frac{5}{8})^k & -\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^k+\frac{1}{2}(\frac{5}{8})^k\\ -\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^k+\frac{1}{2}(\frac{5}{8})^k & \frac{1}{2}(\frac{3}{8})^k+\frac{1}{2}(\frac{5}{8})^k\end{bmatrix}$$

由 $x(k)=\Phi(k)x(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\Phi(j)Hu(k-j-1)$

由初值和输入可递推计算，得结果如下： $x(1)=\Phi(1)x(0)+\Phi(0)Hu(0)$

$$=\begin{bmatrix}1/2 & 1/8\\ 1/8 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/8\\ 19/8\end{bmatrix}$$

$x(2)=\Phi(2)x(0)+\Phi(0)Hu(1)+\Phi(1)Hu(0)$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^2+\frac{1}{2}(\frac{5}{8})^2 & -\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^2+\frac{1}{2}(\frac{5}{8})^2\\ -\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^2+\frac{1}{2}(\frac{5}{8})^2 & \frac{1}{2}(\frac{3}{8})^2+\frac{1}{2}(\frac{5}{8})^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}T\\ e^{-T}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T+0.2344\\ e^{-T}+1.1719\end{bmatrix}$$

……

2-11.

首先写出 $G_0(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ 的状态空间表达式

$$G_0(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$$s+1 \qquad s+2$$

$$A_0=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix} \qquad B_0=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$C_0=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$$

求其状态转移矩阵 $e^{A_0 t}=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$

对 (A_0, B_0, C_0) 进行离散化，包括零阶保持器。

$$G_0=e^{A_0 T}=\begin{bmatrix}e^{-T} & 0\\ 0 & e^{-2T}\end{bmatrix}$$

$$H_0=\int_0^T e^{A_0 t}B_0\,dt=\int_0^T\begin{bmatrix}e^{-t}\\ e^{-2t}\end{bmatrix}dt=\begin{bmatrix}1-e^{-T}\\ \frac{1}{2}(1-e^{-2T})\end{bmatrix}$$

<1>. 系统的状态空间表达式

$$x_1(k+1)=e^{-T}x_1(k)+(1-e^{-T})u(k)$$

$$x_2(k+1)=e^{-2T}x_2(k)+\frac{1}{2}(1-e^{-2T})u(k)$$

$$u(k)=r(k)-y(k)=r(k)-(x_1(k)-x_2(k))$$

代入得：

$$x_1(k+1)=(2e^{-T}-1)x_1(k)+(1-e^{-T})x_2(k)+(1-e^{-T})r(k)$$

$$x_2(k+1)=\frac{-1}{2}(1-e^{-2T})x_1(k)+\frac{1}{2}(1+e^{-2T})x_2(k)+\frac{1}{2}(1-e^{-2T})r(k)$$

$$G(T)=\begin{bmatrix}2e^{-T}-1 & 1-e^{-T}\end{bmatrix}$$

$$G(T)=\begin{bmatrix} 2e^{-T}-1 & 1-e^{-T} \\ -\frac{1}{2}(1-e^{-2T}) & \frac{1}{2}(1+e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

$$H(T)=\begin{bmatrix} 1-e^{-T} \\ \frac{1}{2}(1-e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

<2>. 当 $T=0.1s$ 时

$$G=\begin{bmatrix} 0.8097 & 0.0952 \\ -0.0906 & 0.9094 \end{bmatrix} \quad H=\begin{bmatrix} 0.0952 \\ 0.0906 \end{bmatrix}$$

<3>

$k=0 \quad x_1=0 \quad x_2=0 \quad y(0)=0$

$k=1 \quad x_1=0.0952 \quad x_2=0.0906 \quad y(1)=0.0045$

$k=2 \quad x_1=0.1808 \quad x_2=0.1644 \quad y(2)=0.0164$

$k=3 \quad x_1=0.2572 \quad x_2=0.2238 \quad y(3)=0.0335$

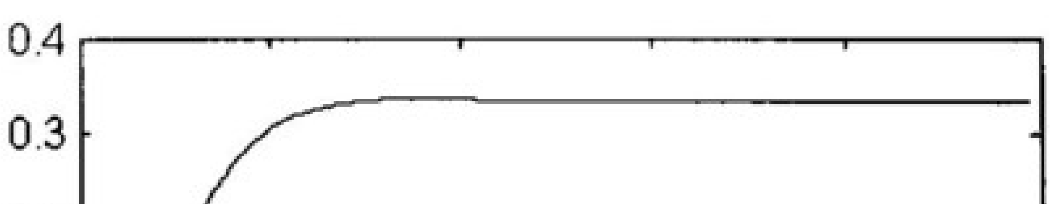
$k=4 \quad x_1=0.3247 \quad x_2=0.2708 \quad y(4)=0.0539$

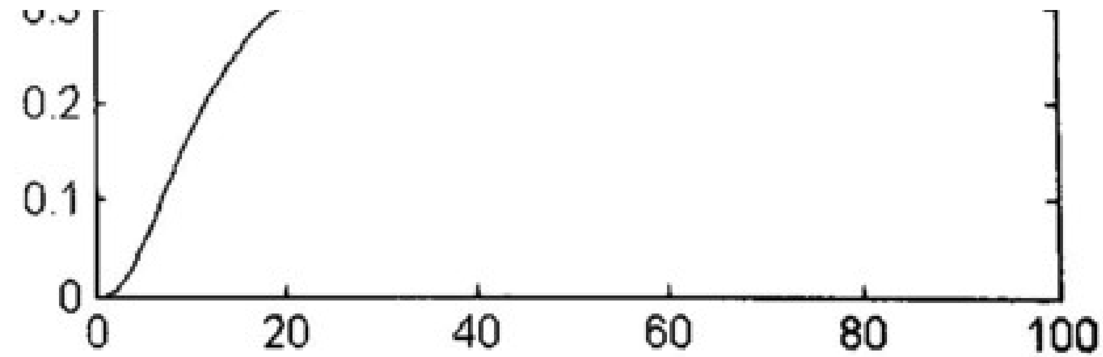
$k=5 \quad x_1=0.3839 \quad x_2=0.3075 \quad y(5)=0.0764$

$\cdots\cdots$

$k=100 \quad x_1=0.6667 \quad x_2=0.3333 \quad y(100)=0.3333$

$\cdots\cdots$





(4). 在采样间隔内, $G_0(s)$的输入u不变.

所以在$[0.2 \quad 0.3]$时间区间内(A_0, B_0, C_0)

的初始状态为 $x(2T)=\begin{bmatrix} 0.1808 \\ 0.1644 \end{bmatrix}=x_0$

输入信号为 $u_0 = r - y(2T) = 0.9836$

以 $t_0=0.2s$ 为初始时刻, 在 $t=0.25s$ 时

$$x(t)=e^{A_0(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{A_0(t-\tau)}B_0u_0d\tau$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix}x_0$$

$$+\begin{bmatrix} 1-e^{-(t-t_0)} \\ \frac{1}{2}(1-e^{-2(t-t_0)}) \end{bmatrix}u_0$$

[0.2200]

$$x(0.25)=\begin{bmatrix}0.2200\\0.1956\end{bmatrix}$$

$$y(0.25)=C_0\,x(0.25)=0.0244$$

-=END=-

第三章 习题参考答案

3-1 <1>. x_2 为不能控，x_4 为不能观

x_1 与 x_3 为能控且能观的.

<2>. 系统能控的条件是 $-d-c \neq b-a$

系统能观的条件是 $b \neq 0$

<3> 系统完全能控的条件是 $a\neq 0,\ b\neq 0$

系统完全能观的条件是 $c\neq 0,\ d\neq 0$

3-2. <1> $M=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & -2\\ 1 & 1 & -2 & -2\end{bmatrix}$ $\mathrm{rank}M=1$ 系统不能控

$N=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ -2 & -2\\ -4 & 4\end{bmatrix}$ $\mathrm{rank}N=2$ 系统能观

<2>. 化成约当标准型判别:

$\bar{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$ $\bar{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 不能控

$\bar{C}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ 完全能观

3-3 <1>. $M=\begin{bmatrix}1 & a_1+1\\ 1 & a_2\end{bmatrix}$ $a_2-a_1-1\neq 0$ 时 $\mathrm{rank}M=2$ 能控

$N=\begin{bmatrix}1 & -1\\ a_1 & 1-a_2\end{bmatrix}$ $1-a_2+a_1\neq 0$ 时 $\mathrm{rank}N=2$ 能观

<2>. $M=\begin{bmatrix}1 & a_1+a_2\end{bmatrix}$ $a_3+a_4\neq a_1+a_2$ 时 $\mathrm{rank}M=2$ 能控

<2>. $M=\begin{bmatrix}1 & a_1+a_2\\ 1 & a_3+a_4\end{bmatrix}$ $a_3+a_4\neq a_1+a_2$ 时 $\operatorname{rank}M=2$ 能控

$N=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a_1 & a_2\end{bmatrix}$ $a_2\neq 0$ 时 $\operatorname{rank}N=2$ 能观

②

3-3 (3). 系统为能观标准型，故是能观的.

其传递函数为 $W(s)=\dfrac{\beta_3 s^2+\beta_2 s+1}{s^3+4s^2+3s-2}$

系统的特征值 $s_1=-2$, $s_{2,3}=-1\pm\sqrt{2}$

选取 β_2, β_3 使方程 $\beta_3 s^2+\beta_2 s+1=0$ 的根不与系统的特征值重合，则系统是完全能控的. 否则不能控。

3-4 <1>. 系统的特征值 $s_1=-1$, $s_2=-3$, $s_3=-6$

只要 $a=1$ 或 $a=3$ 或 $a=6$，系统就不能控或不能观。

<2>. 系统的能控性实现 $A_c=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -18 & -27 & -10\end{bmatrix}$ $B_c=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$C_c=\begin{bmatrix}a & 1 & 0\end{bmatrix}$

<3>. 系统的能观性实现 $A_o=\begin{bmatrix}0 & 0 & -18\\ 1 & 0 & -27\\ 0 & 1 & -10\end{bmatrix}$ $B_o=\begin{bmatrix}a\\1\\0\end{bmatrix}$

$C_o=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

3-5 证:

因为 (G,h) 可控，则 $\begin{bmatrix}G^{n-1}h & G^{n-2}h & \cdots & Gh & h\end{bmatrix}_{n\times n}$ 为非奇异

令 $$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{bmatrix} = -\left[G^{n-1}h \; G^{n-2}h \; \cdots \; Gh \; h\right]^{-1} G^n x_0$$

$u(n+k)=0$，当 $k \geq 0$

③

则 $$x(n) = G^n x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} G^{n-j-1} h u(j)$$
$$= G^n x_0 + \left[G^{n-1}h \cdots Gh \; h\right] \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{bmatrix}$$

将 $[u(0), u(1), \cdots, u(n-1)]^T$ 代入，得

$x(n) = 0$

而 $x(n+1) = Gx(n) + hu(n) = 0$

$x(n+2) = Gx(n+1) + hu(n+1) = 0$

$\vdots$

$\therefore x(n+k) = Gx(n+k-1) + hu(n+k-1) = 0$

对于当 $k \geq 0$

∴只要 (G,h) 能控，对于任意 $x_0 \neq 0$，都可在不超过 n 个采样周期的时间内，转移到状态空间原点。#

3-6 系统的能控性实现为

3-6 系统的能控性实现为

$$A_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}\quad B_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$C_1=\begin{bmatrix}6&0&0\end{bmatrix}$$

传递函数

$$W_1(s)=\frac{6}{s^3+6s^2+11s+6}$$

其对偶系统

$$A_2=A_1^T=\begin{bmatrix}0&0&-6\\1&0&-11\\0&1&-6\end{bmatrix}\quad B_2=C_1^T=\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$C_2=B_1^T=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$$

传递函数

$$W_2(s)=\frac{6}{s^3+6s^2+11s+6}$$

④

3-7. 能控标准型为:

$$A_c=\begin{bmatrix}0&1\\-10&5\end{bmatrix};\quad b_c=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

3-8. 能观标准型为:

$$A_o=\begin{bmatrix}0&-2\\1&2\end{bmatrix};\quad b_o=\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix};$$

$$C_o=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix};$$

3-9. 能控标准型:

$$A_c=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix};\quad b_c=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix};\quad C_c=\begin{bmatrix}5 & 2\end{bmatrix};$$

$$d_c=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

能观标准型：

$$A_o=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & -4\end{bmatrix};\quad b_o=\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix};\quad C_o=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix};\quad d_o=1$$

3-10. $\operatorname{rank} M=2<3$，系统不能控；

$\operatorname{rank} N=3$，系统能观。

⑤

3-11 <1> $\operatorname{rank} M=2$

取 $T_c=\left[\begin{array}{cc:c}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{array}\right]$；

进行能控性分解；得

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{cc:c}0 & -3 & 2\\ 1 & 4 & -2\\ \hdashline 0 & 0 & 1\end{array}\right];\quad \bar{b}=\left[\begin{array}{c}1\\ 0\\ \hdashline 0\end{array}\right];$$

$$\bar{C}=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 2 & -1\end{array}\right]$$

$$C=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 2 & -1\end{array}\right]$$

<2> $\operatorname{rank} M = 2$

取 $T_c=\left[\begin{array}{cc:c}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{array}\right]$；

进行能控性分解，得

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{cc:c}0 & -1 & -4\\ 1 & -2 & -2\\ \hdashline 0 & 0 & -2\end{array}\right];\quad \bar{b}=\left[\begin{array}{c}1\\ 0\\ \hdashline 0\end{array}\right]$$

$$\bar{C}=\left[\begin{array}{cc:c}1 & -1 & 1\end{array}\right]$$

3-12

<1> $\operatorname{rank} N = 2$

取 $T_0=\left[\begin{array}{ccc}1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ \hdashline 0 & 0 & 1\end{array}\right]$

进行能观性分解，得

$$A_0=\left[\begin{array}{cc:c}0 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ \hdashline \end{array}\right];\quad b_0=\left[\begin{array}{c}1\\ 2\\ \hdashline \end{array}\right];$$

$$\left[\begin{array}{cc:c} -2 & 3 & 0 \\ \hdashline -5 & 3 & 2 \end{array}\right], \quad b_0 = \left[\begin{array}{c} 2 \\ \hdashline 1 \end{array}\right],$$

$$C_0 = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

<2> $\operatorname{rank} N = 2$

取 $T_0 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

进行能观性分解，得

$$A_0 = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ \hdashline 4 & 3 & -1 \end{array}\right]; \quad b_0 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ \hdashline 1 \end{array}\right];$$

$$C_0 = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

⑦

3-13 <1> $\operatorname{rank} M = \operatorname{rank} N = 3$

系统是完全能控，完全能观的。

给出其能控标准型实现：

$$T_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 12 & 26 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_c=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix};\quad B_c=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$C_c=\begin{bmatrix} 7 & 13 & 23 \end{bmatrix}$$

<2> $\mathrm{rank}M=2$；$\mathrm{rank}N=2$

先对系统进行能控性分解：

$$T_c=\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -10 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

得 $$\bar{A}=\left[\begin{array}{c:c} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ \hdashline 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & -8 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & -6 & -1/3 & 1/6 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right];$$

$$\bar{b}=\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{array}\right];\quad \bar{C}=\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right];$$

⑧

$$y_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_{co}\\ \bar{x}_{c\bar{o}}\end{bmatrix};$$

$$y_2=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_{\bar{c}o}\\ \bar{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix};$$

$$y=y_1+y_2;$$

最后的分解情况：

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_{co}\\ \dot{\bar{x}}_{c\bar{o}}\\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}o}\\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4.667 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_{co}\\ \bar{x}_{c\bar{o}}\\ \bar{x}_{\bar{c}o}\\ \bar{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_{co}\\ \bar{x}_{c\bar{o}}\\ \bar{x}_{\bar{c}o}\\ \bar{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}$$

⑨

对能控子块和不能控子块,进行能观性分解.

能控块：

$$\bar{A}_c=\begin{bmatrix}0&-8\\1&-6\end{bmatrix};\quad \bar{b}_c=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix};\quad \bar{c}_c=\begin{bmatrix}1&-2\end{bmatrix};$$

$$T_{01}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix};\quad \bar{A}_{12}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

得：

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_{co}\\\dot{\bar{x}}_{c\bar{o}}\end{bmatrix}=T_{01}^{-1}\bar{A}_cT_{01}\begin{bmatrix}x_{co}\\x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}+T_{01}^{-1}\bar{A}_{12}\bar{x}_{\bar{c}}+T_{01}^{-1}\bar{b}_cu$$

$$=\begin{bmatrix}-2&0\\1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co}\\x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\bar{x}_{\bar{c}}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$$

不能控块：

$$\bar{A}_{\bar{c}}=\begin{bmatrix}1&0\\2&-3\end{bmatrix};\quad \bar{b}_{\bar{c}}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix};\quad \bar{c}_{\bar{c}}=\begin{bmatrix}3&0\end{bmatrix}$$

$$T_{02}^{-1}=\begin{bmatrix}3&0\\3&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_{\bar{c}o}\\\dot{\bar{x}}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}=T_{02}^{-1}\bar{A}_{\bar{c}}T_{02}\begin{bmatrix}\bar{x}_{\bar{c}o}\\\bar{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}+T_{02}^{-1}\bar{b}_{\bar{c}}u$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\4.667&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_{\bar{c}o}\\\bar{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}u$$

3-14 (1) 先写出系统的能控标准型实现

$$W(s) = \frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

系统是完全能控的

$$C_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

系统不完全能观

$\mathrm{Rank}\, N = 1 < 2$

进行能观性分解. 取 $R_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $R_o = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\hat{A} = R_o^{-1} A_c R_o = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = R_o^{-1} B_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = C_c R_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

系统的最小实现为

$$\tilde{A}_m = -1 \qquad \tilde{B}_m = [1 \quad 1]$$

$$\tilde{C}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

验算

$$\tilde{C}_m (Is - A_m)^{-1} B_m + D = \frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = W(s)$$

注意此题中 $(A_c\ C_c)$ 的可观性判断中可应用约当标准型的判别方法. 由于 -1 这个特征值对应两个约当

标准型的判别方法，由于 -1 这个特征值对应两个约当块，而它们对应 C 的列线性相关，尽管都不是零，但是不能观的。

11

3-14 (2) 先写出系统的能控标准型实现.

$$W(s)=\frac{1}{s^3}\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}s^2+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

$$A_c=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\qquad B_c=\left[\begin{array}{cc}0&0\\0&0\\\hline 0&0\\0&0\\\hline 1&0\\0&1\end{array}\right]$$

系统完全能控

系统不完全能观

rank N = 3

$$C_c=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}0&0&0&1&1&0\\0&1&1&0&0&0\end{array}\right]\qquad D=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$R_0^{-1}=\left[\begin{array}{cccccc}0&0&0&1&1&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right]$$

能观性分解

$$\hat{A}=R_0^{-1}AR_0=\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&-1&0\\0&-1&0&0&1&1\\1&1&1&0&-1&-1\end{array}\right]\qquad \hat{B}=R_0^{-1}B=\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&0\\0&1\\\hline 0&0\\0&0\\0&0\end{array}\right]$$

$$\hat{C}=CR_0=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{array}\right]\qquad D=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

系统的最小实现

$$\tilde{A}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以验算，$\tilde{C}_m(Is-\tilde{A}_m)^{-1}\tilde{B}_m + D = W(s)$

13

3-15. 可判定 Σ_1 与 Σ_2 都是能控且能观的系统

$$W_1(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} \qquad W_2(s) = \frac{1}{s+2}$$

<1> 串联系统，

$$W(s) = W_1(s)\cdot W_2(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}\cdot\frac{1}{s+2}$$ 系统有零极点相消，故系统不可控或不可观，或既不可控也不可观。

① 串联方式为 $u_1 \longrightarrow \boxed{\Sigma_1} \xrightarrow{y_1 = u_2} \boxed{\Sigma_2} \xrightarrow{y_2}$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}\,M = 2$，不可控，$\text{rank}\,N = 3$ 可观

② 串联方式 $u_2 \longrightarrow \boxed{\Sigma_2} \xrightarrow{y_2 = u_1} \boxed{\Sigma_1} \xrightarrow{y_1}$

以上系统是完全可控但不能观的系统。

则此系统是完全可控但不能观的系统.

<2>. 并联系统.

$$W(s)=W_1+W_2=\frac{s+2}{s^2+4s+3}+\frac{1}{s+2}=\frac{2(s+2+\frac{\sqrt{2}}{2})(s+2-\frac{\sqrt{2}}{2})}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

无零极相消，系统完全能控且能观.

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C=[\,C_1 \quad C_2\,]=[\,2 \quad 1 \quad 1\,]$$

rank $M=3$, rank $N=3$.

⑬

3-16. 设 $W_0(s)=\dfrac{K_0\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$ $(m\le n)$

若系统不能控或(和)不能观，则 $W_0(s)$ 有零极点相消，

即 $\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)$ 与 $\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)$ 有公因子。

若系统能控且能观，则无零极点相消。

闭环系统的传递函数为

$$W_f(s)=\frac{K_0\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)-K_0\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}$$

显然 $W_f(s)$ 与 $W_0(s)$ 能相消的零极点是相同的。所以

图中开环系统与闭环系统的能控、能观性一致。

-=END=-

第四章参考答案

4-1. (1)

$Q(x)=x^T\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -3 & -0.5\\ -1 & -0.5 & -11\end{bmatrix}x=x^TPx$，由于 P 的 2 阶主子行列式都大于零，而 1、3 阶主子行列式小于零，故为负定函数。

4-1. (2)

$Q(x)=x^T\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 4 & -3\\ -1 & -3 & 1\end{bmatrix}x=x^TPx$，由于 P 的 1、2 阶主子行列式都大于零，而 3 阶主子行列式小于零，故为非定号性函数。

4-2. 系统的特征多项式为

$$f(s)=(s-a11)(s-a22)-a12*a21=s^2-(a11+a22)s+(a11*a22-a12*a21)$$

系统在平衡状态大范围渐进稳定的充要条件是系统矩阵的特征值都有负实部，即

$a11<0 \quad a22<0 \quad a11*a22>a12*a21$

4-3. (1) 平衡状态为 $x_e=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$，构造李雅普诺夫函数 $V(x)=x_1^2+x_2^2$

$\dot{V}(x)=-(2x_1^2+6x_2^2)<0$ 系统在平衡状态渐进稳定，并且 $\|x\|\to\infty$, $V(x)\to\infty$，是大范围渐进稳定。

4-3. (2) 平衡状态为 $x_e=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$，构造李雅普诺夫函数 $V(x)=x_1^2+x_2^2$

$\dot{V}(x)=-(2x_1^2+2x_2^2)<0$ 系统在平衡状态渐进稳定，并且 $\|x\|\to\infty$, $V(x)\to\infty$，是大范围渐进稳定。

4-6. 系统平衡状态为 $x_e=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$， 构造李雅普诺夫函数 $V(x)=x_1^2+x_2^2$

$\dot{V}(x)=-2a(1+x_2)^2x_2^2\le 0$ 系统在平衡状态稳定。因为对于 $x\ne 0$，$\dot{V}(x)$ 不恒为零，并且 $\|x\|\to\infty$, $V(x)\to\infty$，是大范围渐进稳定。

4-7.

$$G=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ -3 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$，系统平衡状态为 $x_e=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$

由方程 $G^TPG-P=-I$ 解出 $P=\begin{bmatrix}-19/78 & -10/39 & -1/2\\ -10/39 & -49/78 & -19/13\\ -1/2 & -19/13 & -121/26\end{bmatrix}$，不定号，因此系统不渐进稳定。

实际上，该系统的特征值为 0.1173 + 2.6974i ，0.1173 - 2.6974i ，-1.2346 都在单位圆外，系统是不稳定的。

4-9. 对于此问题及 4-10 题，由于 f_1 中不包含 x_1 ，不能用克拉索夫斯基法确定在坐标原点的稳定性！

对于坐标原点这个平衡状态，可取如下李雅普诺夫函数：

$$V(x)=x_1^4+\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=x_1^4+x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2>0$$

$$\dot V(x)=4x_1^3\dot x_1+2x_1\dot x_1+4x_2\dot x_2+2\dot x_1x_2+2x_1\dot x_2=-2(x_1^4+x_2^2)<0$$

因此系统在坐标原点是渐近稳定的，并且 $\|x\|\to\infty$， $V(x)\to\infty$，是大范围渐进稳定。

4-10. 系统的平衡状态在坐标原点。由于 $a_1>0$，可取李雅普诺夫函数为 $V(x)=a_1x_1^2+x_2^2>0$

$$\dot V(x)=2a_1x_1\dot x_1+2x_2\dot x_2=2a_1x_1x_2-2x_2(a_1x_1+a_2x_1^2x_2)=-2a_2x_1^2x_2^2\le 0$$，（由于 $a_2>0$），非正定。

并且 $x_1=0$ 时， $x_2\to 0$； $x_2=0$ 时， $x_1\to 0$。即对于 $x=\begin{bmatrix}0 & x_2\end{bmatrix}^T\neq 0$ 或 $x=\begin{bmatrix}x_1 & 0\end{bmatrix}^T\neq 0$

$\dot V(x)$ 不恒为零，所以坐标原点是渐进稳定的；由于 $\|x\|\to\infty$， $V(x)\to\infty$，是大范围渐进稳定。

4-11. 用克拉索夫斯基法，取 $P=I$.

$$J(x)=\begin{bmatrix}a & 1\\ 1 & -1+5bx_2^4\end{bmatrix},\quad J^T(x)=J(x),\quad Q=-J^T(x)-J(x)=\begin{bmatrix}-2a & -2\\ -2 & 2-10bx_2^4\end{bmatrix}$$

$$V(x)=\dot x^T\dot x=(ax_1+x_2)^2+(x_1-x_2+bx_2^5)^2>0$$

$\|x\|\to\infty$， $V(x)\to\infty$，因此只要系统在坐标原点渐近稳定即是大范围渐进稳定的，只要 $Q(x)>0$ 即满足渐近稳定的条件。满足要求的 a 和 b 的取值范围： $a<-1, b<0$ 。

-=END=-

5-1. 首先判断系统的能控性.

可以判定. 此系统完全能控.

状态反馈控制律为: $u = Kx + v$

$K = [k_0 \quad k_1 \quad k_2]$

$-k_1$

$$f_K(s) = \det\left(sI - (A+BK)\right) = s^3 - (3+k_2)s^2 + (2+2k_2-k_0)s + 1 - k_2 + k_1 + 2k_0$$

由给定的闭环极点 $-1, -2, -3$ 得

$$f_K^* = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

比较系数得 $k_0 = 23$, $k_1 = -50$ $k_2 = -9$

$K = [23 \quad -50 \quad -9]$

5-2. 判断系统的能控性, 系统完全能控。

状态反馈控制律为 $u = Kx + v$. $K = [k_0 \ k_1 \ k_2]$

$$f_K(s) = \det[sI - (A+BK)] = s^3 + (11-10k_2)s^2 + (11-10k_2-10k_1)s - 10k_0$$

由给定的闭环极点 $-10, -1 \pm j\sqrt{3}$ 得

$$f_K^*(s) = (s+10)(s+1+j\sqrt{3})(s+1-j\sqrt{3}) = s^3 + 12s^2 + 24s + 40$$

比较系数可得 $k_0 = -4$, $k_1 = -1.2$, $k_2 = -0.1$

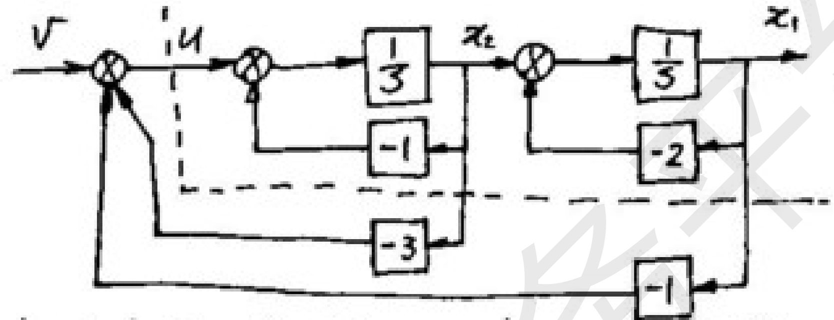
$K = [-4 \quad -1.2 \quad -0.1]$

$$K = [-4,\ -1.2,\ -0.1]$$

注. 以上二题也可化为能控标准型求反馈系数矩阵。

②

5-3. <1>



<2>. 系统完全能控, 故可任意配置极点.

<3>. 取状态反馈控制 $u = Kx + v = [k_0\ \ k_1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v$

$$f_K(s) = |sI - (A+BK)| = s^2 + (3-k_1)s + 2 - k_0 - 2k_1$$

$$f_K^*(s) = (s+3)^2 = s^2 + 6s + 9$$

比较系数得 $k_0 = -1$, $k_1 = -3$; $K = [-1,\ -3]$

5-4. 传递函数(开环)

$$W_0(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)} = \frac{s^2+s-2}{s^3+2s^2-5s-6}$$

可利用状态反馈配置一个极点在 $s=-2$ 处与零点相消.

另外两个闭环极点为 -2, -3 则此要求的传递函数(闭环).

$W_0(s)$的能控性实现为:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&5&-2\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}-2&1&1\end{bmatrix}$$

取状态反馈阵 $K=[k_0\ \ k_1\ \ k_2]$ 的闭环系统特征多项式

$$f_K(s)=s^3+(2-k_2)s^2+(-5-k_1)s+(-6-k_0)$$

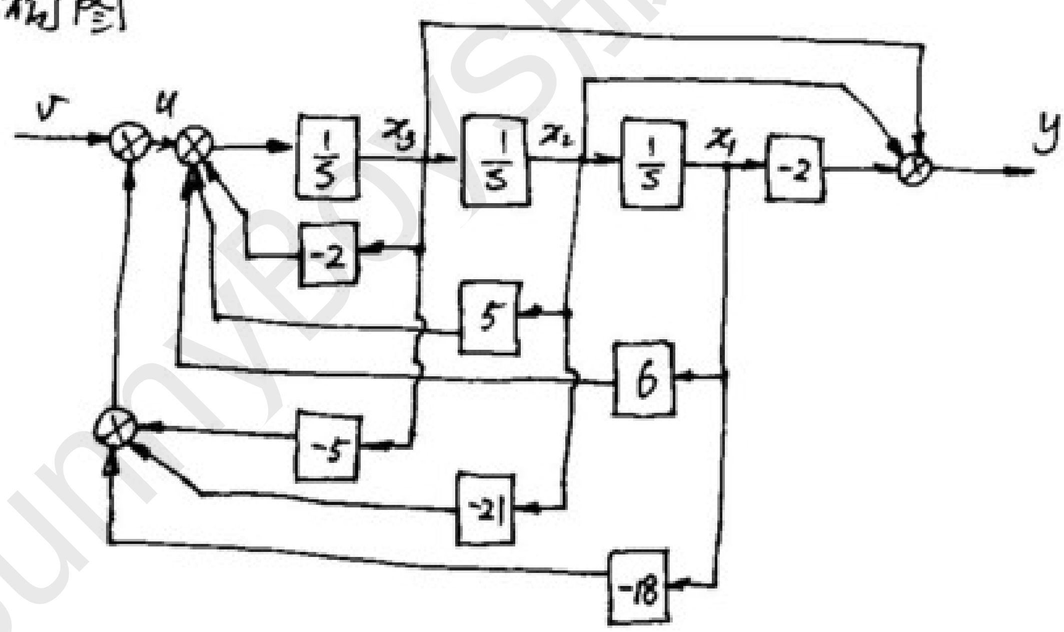
$$f_K^*(s)=(s+3)(s+2)^2=s^3+7s^2+16s+12$$

得的状态反馈阵为 $K=[-18,\ -21,\ -5]$

问题：如果要求的闭环传递函数为 $\dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)}$ 会怎样？

③

系统的结构图



5-5. <1>. 系统完全能控，是状态反馈可镇定的.

<2>. 不能控子空间的特征值为 $-2, -5$ 在左半s平面. 故为状态反馈可镇定的.

5-6 <1>

5-6 <1>. 系统的特征多项式为 $f_0(s)=s^2(s^2-11)$

为不稳定系统

<2>. 系统是完全能控的 故是状态反馈可镇定的。

状态反馈阵设计略.

5-8 1). $C_1B=[1\quad 0]$ $\quad d_1=0$

$C_2B=[0\quad 0]$

$C_2AB=[1\quad 0]$ $\quad d_2=1$

$E=\begin{bmatrix} C_1B \\ C_2AB \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 不可逆，不能状态反馈解耦.

④

5-10. 系统是完全能观的. 故观测器存在.

设计全维观测器. 观测器的特征多项式为

$$f_G(s)=\det(sI-(A-GC))=\begin{vmatrix} s+g_0 & -1 \\ g_1 & s \end{vmatrix}=s^2+g_0s+g_1$$

期望的观测器特征多项式为

$$f_G^*(s)=(s+r)(s+2r)=s^2+3rs+2r^2$$

比较系数得 $g_0=3r$, $g_1=2r^2$ $\quad G=\begin{bmatrix} 3r \\ 2r^2 \end{bmatrix}$

(观测器的结构图见书 P192 图5-16)

(观测器的结构图见书 P192 图5-16)

5-11. 系统完全能观,可设计观测器.

<1>. 全维观测器.

$$f_G(s)=\det\left(sI-(A-GC)\right)=\begin{vmatrix} s+2+g_0 & -1 \\ g_1 & s+1 \end{vmatrix}=s^2+(3+g_0)s+2+g_0+g_1$$

$$f_G^*(s)=(s+3)^2=s^2+6s+9$$

比较系数得 $g_0=3,\ g_1=4$ $\quad G=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

观测器方程为: $\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ -4 & -1\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}y.$

<2>. 降维观测器.

作线性变换 $x=T\bar{x}$,

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}C_0\\C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix};\quad T=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

⑤

$$\bar{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}\qquad \bar{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\bar{C}=CT=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}_1=-\bar{x}_1+u \\ \dot{\bar{x}}_2=\bar{x}_1-2\bar{x}_2\end{cases}\qquad z=\bar{x}_1=\dot{\bar{x}}_2+2\bar{x}_2=\dot{y}+2y \qquad y=\bar{x}_2$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 \qquad y = \bar{x}_2$$

对变换后的子系统1设计观测器. 反馈阵为 $\bar{G} = \bar{g}$

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_1 = (-1-\bar{g})\hat{\bar{x}}_1 + u + \bar{g}(\dot{y} + 2y)$$

为使观测器的极点为 -3 则 $\bar{g} = 2$.

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_1 = -3\hat{\bar{x}}_1 + u + 2\dot{y} + 4y$$

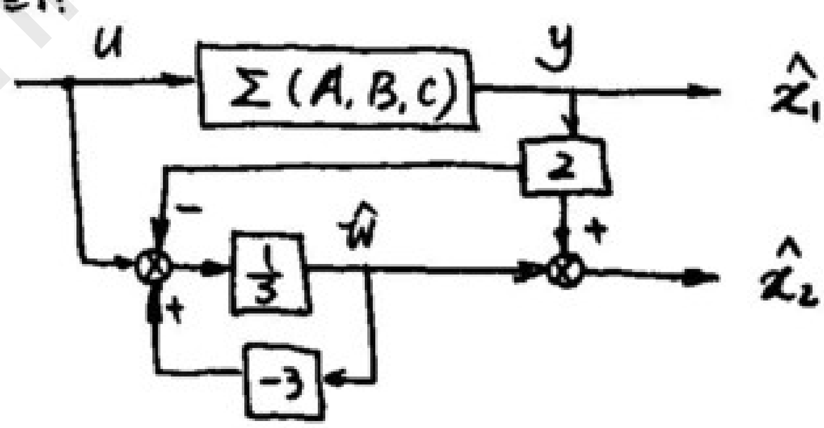
令 $\hat{w} = \hat{\bar{x}}_1 - 2y \qquad \hat{\bar{x}}_1 = \hat{w} + 2y$

$\dot{\hat{w}} = -3\hat{w} + u - 2y$ …… 观测器方程.

$$\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{w} + 2y \\ y \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = T\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_2 \\ \hat{\bar{x}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{w} + 2y \end{bmatrix}$$

系统结构图:



⑥

5-12. 系统完全可观. 可设计观测器(任意配极点)

作线性变换 $x = T\bar{x}$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\bar{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\bar{x}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \quad z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\bar{x}_1 = \dot{y}$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\bar{x}_1 \quad y = \bar{x}_2$$

对子系统1设计全维观测器. $\bar{G} = \begin{bmatrix} \bar{g}_0 \\ \bar{g}_1 \end{bmatrix}$

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{g}_0 \\ 1 & -\bar{g}_1 \end{bmatrix}\hat{\bar{x}}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} \bar{g}_0 \\ \bar{g}_1 \end{bmatrix}\dot{y}$$

$$f_G(s) = s(s+\bar{g}_1) + \bar{g}_0 = s^2 + \bar{g}_1 s + \bar{g}_0$$

$$f_G^*(s) = (s+4)(s+5) = s^2 + 9s + 20$$

$$\Rightarrow \bar{g}_0 = 20, \quad \bar{g}_1 = 9 \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} 20 \\ 9 \end{bmatrix}$$

令 $\hat{w} = \hat{\bar{x}}_1 - \begin{bmatrix} 20 \\ 9 \end{bmatrix}y \quad \hat{\bar{x}}_1 = \hat{w} + \begin{bmatrix} 20 \\ 9 \end{bmatrix}y$

$$\dot{\hat{w}} = \begin{bmatrix} 0 & -20 \\ \ldots \end{bmatrix} \ldots$$

$$\dot{\hat{w}} = \begin{bmatrix} 0 & -20 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}\hat{w} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} -180 \\ -61 \end{bmatrix}y$$

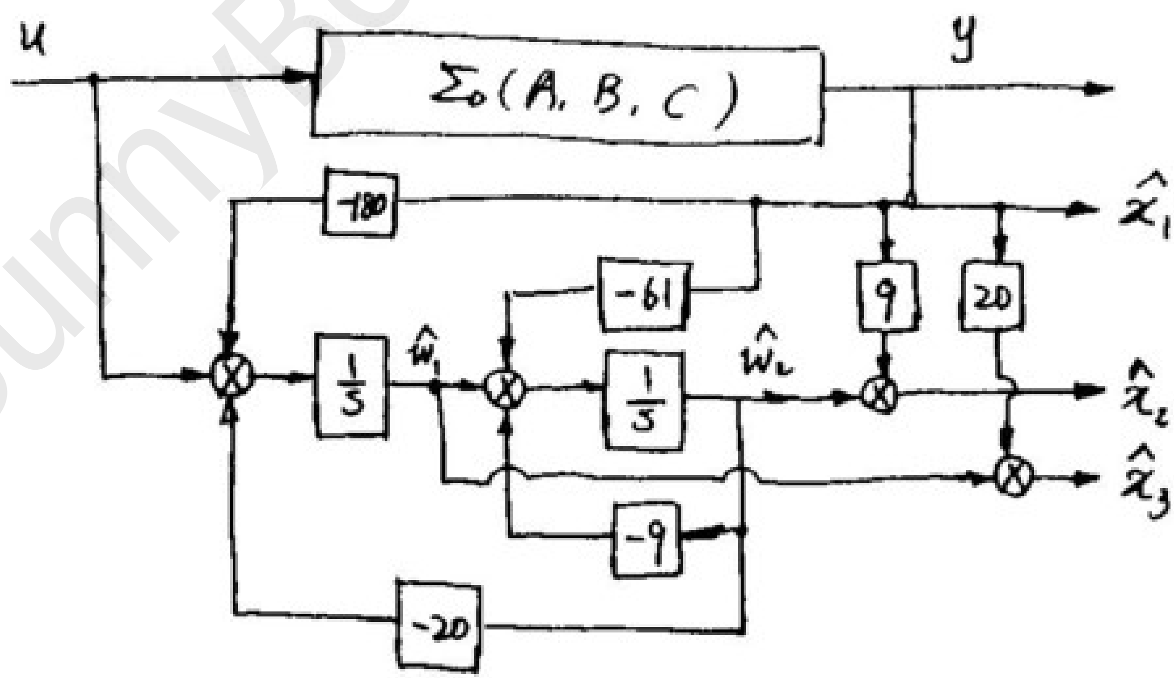
——观测器方程.

$$\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{w} + \bar{G}y \\ y \end{bmatrix}$$

⑦

$$\hat{x} = T\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{w}_2 + 9y \\ \hat{w}_1 + 20y \end{bmatrix}$$

模拟结构图



5-13. 状态反馈阵设计略

5-13. 状态反馈阵设计略.

观测器设计类似于5-12.

-=END=-

A卷

2003～2004 学年第二学期

现 代 控 制 理 论

试 题

（自动化专业 01 级）

班　　级 ____________________

姓　　名 ____________________

学　　号 ____________________

命题单位 信控学院自动化系

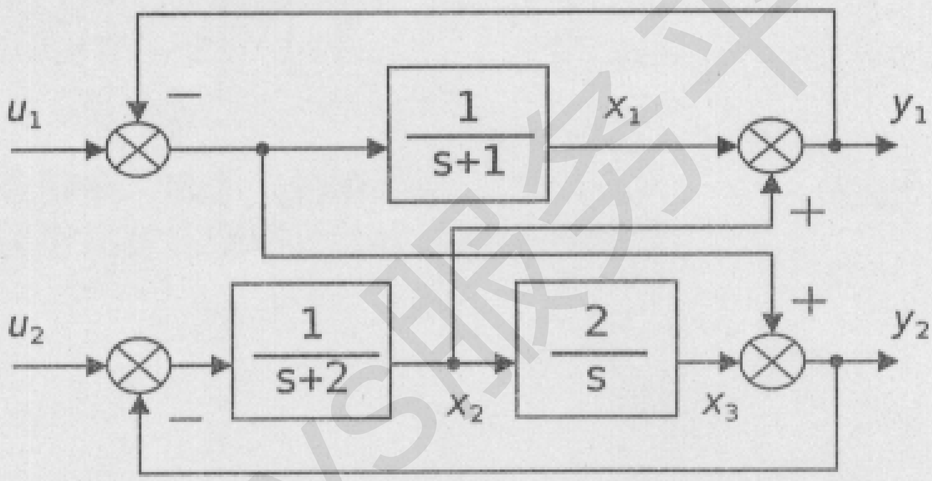
考试日期 2004 年 4 月 27 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得分									

一．给出如下系统的状态空间表达式。

1．系统的结构图如题图 1 所示



题图 1　系统的动态结构图

2．动态系统的传递函数如下：$W(s)=\dfrac{2s+2}{s^3+6s^2+11s+6}$

二．连续时间系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u \qquad x(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x$$

1．输入信号为单位阶跃，求系统的响应；

2．求出该系统的离散化状态空间表达式（采样周期 T）。

三．叙述系统能控性、能观性的定义，判断如下系统的能控性和能观性。

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

四．求下列传递矩阵的实现，判断是否最小实现，若不是，求最小实现。

$$W(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s^2+3s+2}\end{bmatrix}$$

五．分别用李雅普诺夫第一方法和第二方法，判断如下系统在坐标原点的稳定性，给出李雅普诺夫函数。

1. 非线性系统为 $\begin{cases}\dot{x}_1=-2x_1+2x_2^4\\ \dot{x}_2=-x_2\end{cases}$

2. 线性系统为 $\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}x$

六．判断如下系统是否状态反馈可镇定的，是否可通过状态反馈将系统的极点配置在-2、-3、-4 ？请说明理由。

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad c=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

七．系统的状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

1. 能否用状态反馈 $u=Kx+v$ 把系统极点配置在 -4、-4 ？若能请给出状态反馈阵，若不能请说明理由。

2. 如果系统的状态变量不能直接测量得到，能否用观测器观测系统状态实现上述状态反馈控制？若能请设计状态观测器（极点-3，-3）。

3. 画出使用状态观测器的状态反馈控制系统的详细模拟流程图。

4. 求传递函数 $Y(s)/V(s)$。

5. 设计降维观测器（极点 -3），画出使用此状态观测器的状态反馈控制系统的详细模拟流程图。

八. 证明：对于单输入单输出系统（A，B，C，D），如果

$$CA^iB=0 \qquad (i=0,1,2,\cdots,n-1)$$

则系统的传递函数是与 s 无关的常数。

-=END=-