练习题

1. 计算排列 **217986534** 的逆序数，并判断排列的奇偶性.

← 从后往前看前大

$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$

0 1 0 0 1 3 4 5 5

$1+1+3+4+5+5=19$ 奇排列

2. 若 $a_{1i}a_{32}a_{54}a_{2j}a_{45}$ 是5阶行列式中带负号的一项，求 i, j.

固定行标，求列标排列的逆序数

$a_{1i}a_{2j}a_{32}a_{45}a_{54}$

ij 2 5 4

13 $t(13254)=2$ $(-1)^2$ +

31 $t(31254)=3$ $(-1)^3$ − ✓ $i=3$ $j=1$

3. 若 A 为正交矩阵，则 $|A|=$ __± 1__.

$AA^T=E$

$|AA^T|=|A||A^T|=|A|^2=|E| \Rightarrow |A|^2=1 \Rightarrow |A|=\pm 1$

4. 设矩阵 A 与 B 等价，则有 $R(A)$ __$=$__ $R(B)$.

定理

5. 计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

$\xlongequal[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

$=abcd$

(2) $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$ 行和

$\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_i-r_1} (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$

$=(a+3b)(a-b)^3$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2-3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -5 \\ 0 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 4 & 11 & -13 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-r_1]{\text{按第1列展开}} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -5 \\ -5 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & -13 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第2行展开}} (-5)\times(-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 11 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= -50$$

(4) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\substack{r_2-5r_1 \\ r_3-4r_1 \\ r_4-r_1}]{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & 5 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-r_1]{\text{按第1列展开}} -\begin{vmatrix} 5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第2行展开}} -(-1)\times(-1)^{2+3}\cdot \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -7$$

(5) $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第1列展开}} \lambda\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 4\times(-1)^{4+1}\cdot(-1)^3$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 4$$

$$\xlongequal{\text{按第1列展开}} \lambda\cdot\left[\lambda\cdot[\lambda(\lambda+1)+2]+3\times 1\right]+4$$

$$= \lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$$

(6) $\begin{vmatrix} a_1-x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$ 行和

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} \left(\sum_{i=1}^{n}a_i-x\right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_i-r_1} \left(\sum_{i=1}^{n}a_i-x\right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -x \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}a_i-x\right)\cdot(-x)^{n-1}$$

6. 解矩阵方程：

①$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$，求 X.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3+r_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_2+3r_3 \\ r_1+r_3}]{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3 \times (-1)]{r_2 \times (-1)} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\quad \overset{\shortparallel}{E} \qquad\qquad \overset{\shortparallel}{X}$$

②$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求 X.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\cancel{r_3 \div 3} \\ r_2-2r_3 \\ r_1+r_3}]{r_3+r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \underset{1}{\cancel{\tfrac{3}{3}}} & \frac{2}{3} & \underset{1}{\cancel{\tfrac{3}{3}}} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2]{r_2 \div 2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{6} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} \frac{11}{6} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

③已知 $AX + E = A^2 + X$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$，求 X.

$$(A-E)X = A^2 - E = A^2 - E^2 = (A-E)(A+E)$$

$$A-E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-E)^{-1}(A-E)X = (A-E)^{-1}(A-E)(A+E)$$

$$X = A+E$$

$|A-E| = 1 \neq 0$ 可逆

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

④ $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{bmatrix}$，求 X.

$$\left[\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\0&-2&-5&-1&-9\\0&-2&-6&-2&-12\end{array}\right]\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_3-r_2}\left[\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\0&-2&-5&-1&-9\\0&0&+1&+1&+3\end{array}\right]\text{行阶梯}$$

$$\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2+5r_3}\left[\begin{array}{ccccc}1&2&0&-1&-4\\0&-2&0&4&6\\0&0&1&1&3\end{array}\right]\xrightarrow[r_2\div(-2)]{r_1+r_2}\left[\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{array}\right]\text{行最简}\qquad X=\begin{bmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{bmatrix}$$

E　　X

7．A、B 均为 n 阶方阵，且 $|A|=2$，$|B|=-3$，计算 $|3A^*B^{-1}|$.

$|3A^*B^{-1}|=3^n|A^*||B^{-1}|=3^n\cdot 2^{n-1}\cdot(-3)^{-1}=-6^{n-1}$

A-$n\times n$

$|\lambda A|=\lambda^n|A|$

$|A^{-1}|=|A|^{-1}$

$|A^*|=|A|^{n-1}$

8．A 为三阶方阵，且 $|A|=-\dfrac{1}{2}$，计算 $|(3A)^{-1}-2A^*|$.

$|(3A)^{-1}-2A^*|=|\frac{1}{3}A^{-1}-2\cdot(-\frac{1}{2})\cdot A^{-1}|=|\frac{4}{3}A^{-1}|=(\frac{4}{3})^{3}\cdot(-\frac{1}{2})^{-1}$

$=-\dfrac{128}{27}$

$AA^*=|A|E$

$A^*=|A|A^{-1}$

9．设 A 是 5 阶方阵，且 $|A^{-1}|=-3$，则 $|2A|=$ $\underline{-\frac{32}{3}}$.

$\Rightarrow |A|^{-1}=-3\Rightarrow|A|=-\frac{1}{3}$

$|2A|=2^5|A|=-\dfrac{32}{3}$

10．设 3 阶矩阵的三个特征值是 1，2，3，则 $|A^2-2E|=$ $\underline{-14}$.

A^2: 1　4　9

$-2E$: -2　-2　-2

A^2-2E: -1　2　7

$|A^2-2E|=-14$

11. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\3&5&6\end{pmatrix}$,求$(A^*)^{-1}$,其中$A^*$为$A$的伴随矩阵.

$AA^*=|A|E \qquad |A|=18$

$\frac{A}{|A|}\cdot A^*=E \Rightarrow (A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&0\\3&5&6\end{bmatrix}$

12. 设 $\vec{\alpha}=(2\ \ 1\ \ -1)^{\mathrm{T}}$, $\vec{\beta}=(-1\,3\,2)^{\mathrm{T}}$, 计算(1)$\vec{\alpha}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}$, $\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}$; (2)求$(\vec{\alpha}\vec{\beta}^{\mathrm{T}})^n$.

(1) $\vec{\alpha}\vec{\beta}^T=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&6&4\\-1&3&2\\1&-3&-2\end{bmatrix}$

$\vec{\beta}^T\vec{\alpha}=\begin{bmatrix}-1&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}=-2+3-2=-1$

(2) $(\vec{\alpha}\vec{\beta}^T)^n=\vec{\alpha}\vec{\beta}^T\vec{\alpha}\vec{\beta}^T\cdots\vec{\alpha}\vec{\beta}^T=(-1)^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}-2&6&4\\-1&3&2\\1&-3&-2\end{bmatrix}$

13. 设$A=(1\ \ 2\ \ 3)$, $B=(3\ \ 2\ \ 1)$, 计算(1)A^TB、BA^T; (2)$(A^TB)^k$.

(1) $A^TB=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{bmatrix}$

$BA^T=\begin{bmatrix}3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=3+4+3=10$

(2) $(A^TB)^k=A^TBA^TB\cdots A^TB=A^T(BA^T)^{k-1}B=10^{k-1}\cdot\begin{bmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{bmatrix}$

14. 设$A=\begin{pmatrix}1&1&-6&10\\2&5&k&-1\\1&2&-1&k\end{pmatrix}$的秩为2,求$k$.

$\begin{bmatrix}1&1&-6&10\\2&5&k&-1\\1&2&-1&k\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&1&-6&10\\0&3&k+12&-21\\0&1&5&k-10\end{bmatrix}$

$\frac{3}{1}=\frac{k+12}{5}=\frac{-21}{k-10}\Rightarrow k=3$

15. λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=0 \\ \lambda x_1-x_2+x_3=0 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=0 \end{cases}$ 有非零解？

$$\begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} \overset{C_3+C_2}{=\!=} \begin{vmatrix} 2 & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\cdot(5\lambda+4)=0$$ 时有非零解，

故 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-\frac{4}{5}$

16. 求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ 2x_1+x_2+3x_3-3x_4=1 \end{cases}$ 的通解.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-4r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_2\div(-1) \\ r_1-r_2}]{r_3-r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

通解为 $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $k_1, k_2 \in R$

17. a 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+ax_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases}$ 有非零解？若有非零解，求通解.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

$R(A)<3$ 时，有非零解，即 $a=1$ 时有非零解

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，通解为 $k_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$k_1, k_2 \in R$

18．已知$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1-x_2+x_3=4 \\ 3x_1-4x_2+3x_3=7 \end{cases}$ ①求其导出组的基础解系及通解；②求非齐次线性方程组的一个特解及通解。

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & -10 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_2\div(-5) \\ r_1-2r_2}]{r_3-2r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

① 基础解系 $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$，通解 $k\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, k\in R$ ② 特解 $\begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$，通解 $\begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, k\in R$

19．非齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda \end{cases}$当$\lambda$取何值时，方程组有解？有解时，求出它的通解。

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}]{r_1\leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & \lambda-2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3+r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \end{array}\right]$$

当$\lambda-5=0$即$\lambda=5$时，方程组有解.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1-2r_2]{r_2\div(-5)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

通解为 $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -6 \\ -7 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ $(k_1,k_2\in R)$

20．确定k的值，使方程组$\begin{cases} x+2y+kz=1 \\ 2x+ky-z=-2 \\ x-3z=-3 \end{cases}$①有唯一解；②无解；③有无穷多解，并求其通解。

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & k & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-r_1]{\substack{r_3\leftrightarrow r_1 \\ r_2-2r_1}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & k & 5 & 4 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-\frac{k}{2}r_2]{r_2\leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(k+5)(k-2) & 4-2k \end{array}\right]$$

①当$k\neq-5$且$k\neq2$时，$R(A)=R(B)=3$，有唯一解

②$k=-5$时，$R(A)=2$，$R(B)=3$，无解

③$k=2$时，$R(A)=R(B)=2$，$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ 通解为 $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ $(k\in R)$

21．求下列向量组的秩和一个最大线性无关组，并把其余向量用该最大无关组表示。已知：

①$\bar{a}_1=(1\ 3\ 4\ -2)^T$、$\bar{a}_2=(2\ 1\ 3\ -1)^T$、$\bar{a}_3=(3\ -1\ 2\ 0)^T$、 $\bar{a}_4=(4\ -3\ 1\ 1)^T$

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&1&-1&-3\\4&3&2&1\\-2&-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-4r_1\\r_4+2r_1}]{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-5&-10&-15\\0&-5&-10&-15\\0&3&6&9\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+5r_2\\r_4-3r_2}]{r_2\div(-5)}\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}}_{行阶梯}\xrightarrow{r_1-2r_2}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}}_{行最简}$$

$R(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4)=2$

一个最大线性无关组为$\vec{a}_1,\vec{a}_2$，且$\vec{a}_3=-\vec{a}_1+2\vec{a}_2$，$\vec{a}_4=-2\vec{a}_1+3\vec{a}_2$

②$\vec{\alpha}_1=(1\ -1\ 2\ 4)^T$，$\vec{\alpha}_2=(0\ 3\ 1\ 2)^T$，$\vec{\alpha}_3=(3\ 0\ 7\ 14)^T$，$\vec{\alpha}_4=(1\ -2\ 2\ 0)^T$

$$\begin{bmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-2\\2&1&7&2\\4&2&14&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-4r_1}]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&3&3&-1\\0&1&1&0\\0&2&2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2\\r_4-2r_2}]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1+r_3\\r_3\times(-1)}]{r_4-4r_3}\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$R(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)=3$

一个最大线性无关组为$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_4$，且$\vec{\alpha}_3=3\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$

③$\vec{a}_1=(1\ \ -2\ \ 0\ \ 3)^T,\vec{a}_2=(2\ \ -5\ \ -3\ \ 6)^T,\vec{a}_3=(2\ \ -1\ \ 4\ \ -7)^T,\vec{a}_4=(5\ \ -8\ \ 1\ \ 2)^T$

$$\begin{bmatrix}1&2&2&5\\-2&-5&-1&-8\\0&-3&4&1\\3&6&-7&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_2+2r_1}\begin{bmatrix}1&2&2&5\\0&-1&3&2\\0&-3&4&1\\0&0&-13&-13\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2\\r_2\div(-1)}]{r_4\div(-13)}\begin{bmatrix}1&2&2&5\\0&1&-3&-2\\0&0&-5&-5\\0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4-r_3\\r_2+3r_3\\r_1-2r_3}]{r_3\div(-5)}\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$R(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)=3$

一个最大线性无关组为$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$，且$\vec{\alpha}_4=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3$

22．设$\alpha_1=(1,1,2,1)^T,\alpha_2=(1,0,0,2)^T,\alpha_3=(-1,-4,-8,k)^T$线性相关，则$k=$(2)

$$\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&0&-4\\2&0&-8\\1&2&k\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&-1&-3\\0&-2&-6\\0&1&k+1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&-1&-3\\0&0&k-2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$R(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)<3$

$k-2=0\Rightarrow k=2$

1° 秩法　　2°行列式法

23．设向量组 $\bar{a}_1=(\lambda-5\ 1\ -3)^T$，$\bar{a}_2=(1\ \lambda-5\ 3)^T$，$\bar{a}_3=(-3\ 3\ \lambda-3)^T$，问

①λ为何值时，$\bar{a}_1$，$\bar{a}_2$，$\bar{a}_3$线性相关. ②λ为何值时，$\bar{a}_1$，$\bar{a}_2$，$\bar{a}_3$线性无关.

① $$\begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda-5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} \lambda-4 & \lambda-4 & 0 \\ 1 & \lambda-5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_2} \begin{vmatrix} 0 & \lambda-4 & 0 \\ 6-\lambda & \lambda-5 & 3 \\ -6 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix} = +(\lambda-4)\lambda(\lambda-9)$$

当$\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)=0$时，即$\lambda=0$或$\lambda=4$或$\lambda=9$时线性相关

② 当$\lambda\neq0$且$\lambda\neq4$且$\lambda\neq9$时线性无关.

24．已知向量组$\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\bar{\alpha}_3$线性无关，

证明：向量组$\bar{\alpha}_1+2\bar{\alpha}_2$，$\bar{\alpha}_2+2\bar{\alpha}_3$，$\bar{\alpha}_3+2\bar{\alpha}_1$也线性无关.

证明：令 $k_1(\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2)+k_2(\vec{\alpha}_2+2\vec{\alpha}_3)+k_3(\vec{\alpha}_3+2\vec{\alpha}_1)=\vec{0}$

$(k_1+2k_3)\vec{\alpha}_1+(2k_1+k_2)\vec{\alpha}_2+(2k_2+k_3)\vec{\alpha}_3=\vec{0}$

因$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性无关，$\begin{cases} k_1+2k_3=0 \\ 2k_1+k_2=0 \\ 2k_2+k_3=0 \end{cases}$，$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=9\neq0$

故$k_1=k_2=k_3=0$，故$\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_2+2\vec{\alpha}_3$，$\vec{\alpha}_3+2\vec{\alpha}_1$也线性无关.

25．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，又$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，

$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，试证明：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

证明：令 $k_1\underbrace{(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2-2\vec{\alpha}_3)}_{=\vec{\beta}_1}+k_2\underbrace{(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_3)}_{=\vec{\beta}_2}+k_3\underbrace{(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)}_{=\vec{\beta}_3}=\vec{0}$

$(k_1+k_2+k_3)\vec{\alpha}_1+(k_1-k_2+k_3)\vec{\alpha}_2+(-2k_1-k_2)\vec{\alpha}_3=\vec{0}$

因$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性无关，$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ k_1-k_2+k_3=0 \\ -2k_1-k_2=0 \end{cases}$，$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-4\neq0$

$k_1=k_2=k_3=0$，故$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3$线性无关.

26. 设向量组$\bar{\alpha}_1$，$\bar{\alpha}_2$，$\bar{\alpha}_3$线性无关，已知 $\bar{\beta}_1=\bar{\alpha}_1-\bar{\alpha}_2+2\bar{\alpha}_3$，

$\bar{\beta}_2=\bar{\alpha}_2-\bar{\alpha}_3$，$\bar{\beta}_3=2\bar{\alpha}_1-\bar{\alpha}_2+3\bar{\alpha}_3$，试确定向量组$\bar{\beta}_1$、$\bar{\beta}_2$、$\bar{\beta}_3$线性相关性.

令$k_1\vec{\beta}_1+k_2\vec{\beta}_2+k_3\vec{\beta}_3=\vec{0}$,

$k_1(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2+2\vec{\alpha}_3)+k_2(\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_3)+k_3(2\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2+3\vec{\alpha}_3)=\vec{0}$

$(k_1+2k_3)\vec{\alpha}_1+(-k_1+k_2-k_3)\vec{\alpha}_2+(2k_1-k_2+3k_3)\vec{\alpha}_3=\vec{0}$

因$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性无关，$\begin{cases}k_1+2k_3=0\\-k_1+k_2-k_3=0\\2k_1-k_2+3k_3=0\end{cases}$，$D=\begin{vmatrix}1&0&2\\-1&1&-1\\2&-1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&1&1\\2&-1&-1\end{vmatrix}=0$

方程组有非零解，故$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3$线性相关.

27. 设λ是n阶方阵A的一个特征值，

①求矩阵A^2，$A^2+5A-3E$的一个特征值.

②若A可逆，求$2E-A^{-1}$，$(A^*)^2+E$的一个特征值.

① A^2: λ^2

$A^2+5A-3E$: $\lambda^2+5\lambda-3$

② $2E-A^{-1}$: $2-\frac{1}{\lambda}$

$(A^*)^2+E$: $\frac{|A|^2}{\lambda^2}+1$

$AA^*=|A|E$

$A^*=|A|A^{-1}$

28. 已知3阶方阵A的特征值为$1,-1,2$，设$B=A^3-5A^2$，求$|B|$，$|A-5E|$.

A: 1 -1 2

A^3: 1 -1 8

$-5A^2$: -5 -5 -20

$B=A^3-5A^2$: -4 -6 -12 $\Rightarrow |B|=(-4)\times(-6)\times(-12)=-288$

$-5E$: -5 -5 -5

$A-5E$: -4 -6 -3 $\Rightarrow |A-5E|=(-4)\times(-6)\times(-3)=-72$

① $tr(A)=tr(B) \Rightarrow -1+x=y+1 \Rightarrow x=y+2$

② $|A|=|B| \Rightarrow -2(x-2)=-2y \Rightarrow x=y+2$

条件不够还需 ③

29. 矩阵 A 与矩阵 B 相似，其中 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$，求 x, y.

③ $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

$$\begin{vmatrix}\lambda+2&0&0\\-2&\lambda-x&-2\\-3&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)\left[(\lambda-x)(\lambda-1)-2\right]=0\ (*) \Rightarrow$$

$(-1+2)\left[(-1-x)(-2)-2\right]=0 \Rightarrow x=0$

将 $x=0$ 代入 ①，得 $y=-2$

$$\begin{vmatrix}\lambda+1&0&0\\0&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-y\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y)=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=y$$ 也是 $|\lambda E-A|=0$ 的解，代入 $(*)$

30. 设 $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\3&1&x\\4&0&5\end{bmatrix}$ 可相似对角化，则 $x=3$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-1\\-3&\lambda-1&-x\\-4&0&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)\cdot\left[(\lambda-2)(\lambda-5)-4\right]=(\lambda-1)^2(\lambda-6)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=6$$

二重根需有两个线性无关的特征向量.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，$\begin{bmatrix}-1&0&-1\\-3&0&-x\\-4&0&-4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&3-x\\0&0&0\end{bmatrix}$　故 $3-x=0 \Rightarrow x=3$

31. 设 $A=\begin{bmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{bmatrix}$，(1)求 A 的特征值和特征向量；(2)A 能否对角化，为什么？

(1) $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-6&0\\3&\lambda+5&0\\3&6&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\left[(\lambda-4)(\lambda+5)+18\right]=0=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$$

$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=-2$

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，$\lambda E-A=\begin{bmatrix}-3&-6&0\\3&6&0\\3&6&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，全部特征向量为 $k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，$k_1, k_2$ 不全为0

当 $\lambda_3=-2$ 时，$\lambda E-A=\begin{bmatrix}-6&-6&0\\3&3&0\\3&6&-3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$，全部特征向量为 $k_3\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$，$k_3\neq0$

(2) 能对角化，有三个线性无关的特征向量.

32．设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$，求 A 的特征值，特征向量.

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_3} \begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_2} \begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -4\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -2 & -4 & \lambda+6\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)\cdot[(\lambda-1)(\lambda+6)-8]=(\lambda+7)(\lambda-2)^2=0$　则 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-7$

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda E-A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$　全部特征向量 $k_1\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$，$k_1,k_2$ 不全为0

当 $\lambda_3=-7$，$\lambda E-A=\begin{bmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$　全部特征向量 $k_3\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 2\end{bmatrix}$，$k_3\neq 0$

33．设 0 是方阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & a\end{bmatrix}$ 的一个特征值，求 a.

$\lambda=0$ 是 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -3 & -2 & \lambda-a\end{vmatrix}=0$ 的一个解，$|\lambda E-A|=(\lambda-1)[(\lambda-1)(\lambda-a)-6]=0$ (*)

将 $\lambda=0$ 代入 (*) 式，得 $(-1)[(-1)(-a)-6]=0$，故 $a=6$

二、判断题：

1. 排列 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数为 n。　$\frac{n(n-1)}{2}$　（×）

2. 设 D 为6阶行列式，则 $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$ 是 D 中带负号的项。（√）

$a_{16}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}$

654321　$5+4+3+2+1=15$

3. 四阶行列式中含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项为 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$。（×）

符号