二、计算题

51. 质点沿 x 轴运动，已知加速度 $a=12t^2\ \mathrm{m/s^2}$，$t=0$ 时，$\upsilon_0=-4\ \mathrm{m/s}$，$x_0=10\ \mathrm{m}$，求质点的：(1)速度 $\upsilon(t)$；(2)运动方程 $x(t)$；(3) 前 3 秒内的位移和路程。

解 (1) 由 $a=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=12t^2$ 得 $\qquad \mathrm{d}\upsilon=12t^2\mathrm{d}t$

考虑初始条件，积分 $\int_{-4}^{\upsilon}\mathrm{d}\upsilon=\int_0^t 12t^2\mathrm{d}t$

得 $\upsilon=(-4+4t^3)\mathrm{m/s}$ **(2 分)**

(2) 由 $\upsilon=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，得 $\qquad \mathrm{d}x=\left(-4+4t^3\right)\mathrm{d}t$

考虑初始条件，积分 $\int_{10}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t\left(-4+4t^3\right)\mathrm{d}t$

得运动方程 $\qquad x=(t^4-4t+10)\mathrm{m}$ **(2 分)**

(3) $x\left(0\right)=10\mathrm{m}$，$x\left(3\right)=79\mathrm{m}$，前 2 秒内质点的位移

$\Delta x=x\left(3\right)-x\left(0\right)=69\mathrm{m}$ 。 **(2 分)**

令 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4t^3-4=0$，即当 $t=1\mathrm{s}$，质点速度改变符号，由负变为正，质点到达左边最远处，

此时 $x\left(1\right)=7\mathrm{m}$，得前 3 秒内质点的路程

$\Delta s=\left|x\left(1\right)-x\left(0\right)\right|+\left|x\left(3\right)-x\left(1\right)\right|=3+72=75\left(\mathrm{m}\right)$ **(4 分)**

52. 有一质点沿 x 轴作直线运动，运动方程为 $x(t)=(4.5t^2-2t^3)\mathrm{m}$ 。求质点(1)在第 2 s 内的平均速度 $\bar{\upsilon}$；(2)在第 2 s 末的速度 υ；(3) 在第 2 s 末的加速度 a；(4)在第 2 s 内的路程 s 。

解 (1) $x(1)=2.5\ \mathrm{m}$ $x(2)=2\ \mathrm{m}$ $\Delta x=x(2)-x(1)=-0.5\ \mathrm{m}$，$\bar{\upsilon}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=-0.5\ \mathrm{m/s}$ **(2 分)**

(2) $\upsilon=(9t-6t^2)\mathrm{m/s}$，$\upsilon(2)=-6\mathrm{m/s}$ **(2 分)**

(3) $a=(9-12t)\mathrm{m/s^2}$，$a(2)=-15\mathrm{m/s^2}$ **(2 分)**

(4) 令 $\upsilon=9t-6t^2=0$，得 $t=1.5\mathrm{s}$，$\upsilon=0$，此时质点速度改变方向，由正变为负，质点到达距原点最远处，$x(1.5)=3.375\mathrm{m}$，第 **2** s 内质点的路程为

$s=\left|x(1.5)-x(1)\right|+\left|x(1.5)-x(2)\right|=0.875+1.375=2.25(\mathrm{m})$ **(4 分)**

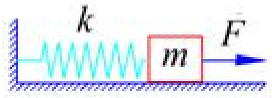
53. 质量 $m=4\text{kg}$ 的物体在力 $F=(4+6t^2)\text{N}$ 的作用下运动沿 x 轴运动，$t=0$ 时，速度 $\upsilon_0=-2\ \text{m/s}$。求物体(1) 2s 末的速度；(2) 2s 末的加速度；(3)前 2s 内，力 F 对物体所做的功。

解 (1) 2 s 内作用力的冲量 $I=\int_0^2 F\text{d}t=\int_0^2(4+6t^2)\text{d}t=24\ \text{N}\cdot\text{s}$，根据动量定理 $I=m\upsilon-m\upsilon_0$，得 2s 末 $\upsilon(2)=\upsilon_0+\dfrac{I}{m}=-2+\dfrac{24}{4}=4(\text{m/s})$ **(4 分)**

(2) $a(2)=\dfrac{F(2)}{m}=\dfrac{4+6\times2^2}{4}=7\ (\text{m/s}^2)$ **(2 分)**

(3) 由动能定理 $W=\dfrac{1}{2}m\upsilon^2(2)-\dfrac{1}{2}m\upsilon^2(0)=\dfrac{1}{2}\times4\times4^2-\dfrac{1}{2}\times4\times(-2)^2=24(\text{J})$ **(4 分)**

54. 如题 **54** 图所示，劲度系数为 k 的轻弹簧水平放置，左端固定，右端系一质量为 m 的物体，物体与水平面间的滑动摩擦系数为 μ。开始时，弹簧为原长，现以大于物体与水平面间的最大静摩擦力的水平恒力 $\vec{F}$ 将物体自平衡位置开始向右拉动，求系统的最大弹性势能。



题 54 图

解 取物体和弹簧组成的系统为研究对象。

起初系统的机械能为零，即 $E_0=0$； **(2 分)**

当物体速度为零时，弹簧伸长最大，设为 x，弹性势能最大，$E=\dfrac{1}{2}kx^2$。 **(2 分)**

运动过程中 F 的功为 Fx、摩擦力的功 $-fx$。

由功能原理得 $Fx+(-fx)=\dfrac{1}{2}kx^2$，解得 $x=\dfrac{2(F-\mu mg)}{k}$， **(3 分)**

弹簧的弹性势能 $E_\text{p}=\dfrac{1}{2}kx^2=\dfrac{2(F-\mu mg)^2}{k}$ **(3 分)**

55. 质量为 m 的人（视为质点）站在半径为 R、质量 $M=2m$ 的匀质水平圆台的中心，人和水平圆台组成的系统以角速度 ω_0 绕通过圆盘中心的竖直固定光滑轴 OO' 转动。如果人从圆台的中心走到转台边缘并随转台一起转动，(1)分别写出人在圆台中心时与在边缘时，系统的转动惯量 J_0 与 J；(2)人在圆台中心时,系统角动量 L_0 的大小；(3)人在圆台边缘时，系统转动的角速度 ω。

解 取人和转台为系统，在人走动的过程中，系统受的外力有重力与轴处约束力，均不

产生力矩，系统角动量守恒。 **(2 分)**

(1) 人在圆台中心时，$J_0=\frac{1}{2}MR^2$，在边缘时，$J=\frac{1}{2}MR^2+mR^2$， **(2 分)**

(2) 人在圆台中心时，$L_0=\frac{1}{2}MR^2\omega_0$； **(2 分)**

(3) 在边缘时 $L=\left(mR^2+\frac{1}{2}MR^2\right)\omega$， **(2 分)**

由 $L=L_0$，得 $\omega=\dfrac{\frac{1}{2}MR^2}{mR^2+\frac{1}{2}MR^2}\omega_0$， **(1 分)**

代入 $M=2m$，得 $\omega=\frac{1}{2}\omega_0$ **(1 分)**

56.1mol 水蒸气在 $100^{\circ}\mathrm{C}$ 下分解成氢气和氧气，如将三种气体均视为刚性分子理想气体，则内能增加了多少?

解 1mol 水蒸气能分解成 1mol 氢气和 0.5mol 氧气。 （2 分）

水蒸气分子的自由度 $i=6$，氢气和氧气两者分子的自由度均为 $i=5$。 （2 分）

1mol 水蒸气的内能为 $1\times\frac{6}{2}RT=3RT$， （2 分）

1mol 氢气和 0.5mol 氧气的内能为 $1\times\frac{5}{2}RT+0.5\times\frac{5}{2}RT=\frac{7.5}{2}RT$， （2 分）

内能增加了 $\frac{7.5}{2}RT-3RT=1.5RT=1.5\times8.31\times(273+100)=4649\,(\mathrm{J})$ （2 分）

57. 当温度为 $0^{\circ}\mathrm{C}$ 时，求：（1）N_2 分子的平均平动动能和平均转动动能；（2）$7\mathrm{g}N_2$ 气体的内能。[$R=8.31\mathrm{J/(mol\ K)}$，$k=1.38\times10^{-23}\mathrm{J/K}$]

解 （1）平均平动动能为

$$\overline{\varepsilon_{\mathrm{kt}}}=\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}\times273=5.65\times10^{-21}\,(\mathrm{J})$$ **(3 分)**

平均转动动能为

$$\overline{\varepsilon_{\mathrm{kr}}}=\frac{2}{2}kT=1.38\times10^{-23}\times273=3.76\times10^{-21}\,(\mathrm{J})$$ **(3 分)**

（2） $7\mathrm{g}N_2$ 气体的内能为

$$E=\frac{M}{M_{\mathrm{mol}}}\frac{5}{2}RT=\frac{7\times10^{-3}}{28\times10^{-3}}\times\frac{5}{2}\times8.31\times273=1.42\times10^{3}\left(\mathrm{J}\right)$$ **(4 分)**

58. 1mol 理想气体在 400K 和 300K 两热源之间进行卡诺热机循环。设气体在一次循环过程中从高温热源吸收的热量为 $6.0\times10^{3}\mathrm{J}$ 。求在一次循环过程中（1）所做的功；（2）向低温热源放出的热量。

解 （1）$\eta_{\mathrm{C}}=1-\frac{T_2}{T_1}=1-\frac{300}{400}=25\%$， **(2 分)**

由 $\eta_{\mathrm{C}}=\frac{W}{Q_1}$， $W=\eta_{\mathrm{C}}Q_1=0.25\times6.0\times10^{3}=1.5\times10^{3}(\mathrm{J})$ **(4 分)**

（2） $Q_2=Q_1-W=6.0\times10^{3}-1.5\times10^{3}=4.5\times10^{3}(\mathrm{J})$ **(4 分)**

59. 一个卡诺热机，当高温热源的温度为 $227^{0}\mathrm{C}$ 、低温热源的温度为 $27^{0}\mathrm{C}$ 时，一次循环的净功是 $16000\mathrm{J}$ ，今维持低温热源的温度和两绝热线均不变，提高高温热源的温度，使其一次循环的净功增为 $20000\mathrm{J}$ 。求：(1)高温热源温度提高前，热机效率、一次循环吸收的热量、放出的热量；(2) 高温热源温度提高后，一次循环吸收的热量、放出的热量；热机效率。(吸收的热量、放出的热量按循环过程中的定义计算)。

解（1） $\eta_{\mathrm{C1}}=1-\frac{T_2}{T_1}=1-\frac{300}{500}=40\%$ **(1 分)**

由 $\eta_{\mathrm{C1}}=\frac{W}{Q_1}$，吸热为 $Q_1=\frac{W}{\eta_{\mathrm{C1}}}=\frac{16000}{0.40}=4.0\times10^{4}(\mathrm{J})$ **(2 分)**

放热为 $Q_2=Q_1-W=40000-16000=24000(\mathrm{J})$ **(2 分)**

(2)依题意，高温热源源提高后,仍保持低温热源温度（即等温压缩线）与两条绝热线均不变，可知此时一次循环放热为

$Q_2'=Q_2=24000\mathbf{J}$ **(2 分)**

吸热为 $Q_1'=Q_2'+W'=24000+20000=44000(\mathrm{J})$ **(2 分)**

$$\eta_C' = \frac{W'}{Q_1'} = \frac{20000}{44000} = 45.4\% \qquad \textbf{(1 分)}$$

60. 一列平面余弦波表达式为 $y = 2\cos(3t - 4x)\,\text{m}$ 。求：(1)波的波速 u 、角频率 ω 和波长 λ；(2) $x = 1\text{m}$ 点的振动表达式；(3) $t = 1\text{s}$ 时的波形表达式；(4)任一 x 处质点的振动速度表达式。

解 (1)将表达式化为 $y = 2\cos 3\left(t - \dfrac{x}{3/4}\right)$， (1 分)

与标准形式 $y = A\cos\omega(t - x/u)$ 比较得， $u = \dfrac{3}{4}\text{m/s}$ ， $\omega = 3$ ，

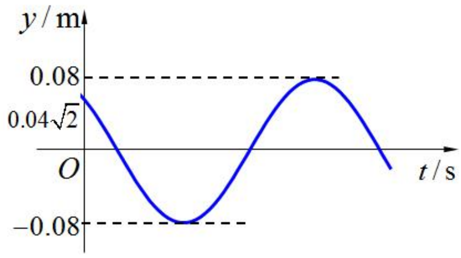
$u = \lambda\nu, \lambda = u/\nu = u/(\omega/2\pi) = \dfrac{3/4}{(3/2\pi)} = \dfrac{\pi}{2}(\text{m})$ 。 (5 分)

(2) $y|_{x=1} = 2\cos(3t - 4)\,\text{m}$ (1 分)

(3) $y|_{t=1} = 2\cos(3 - 4x)\,\text{m} = 2\cos(4x - 3)\,\text{m}$ (1 分)

(4) $\upsilon = \dfrac{\partial y}{\partial t} = -6\sin(3t - 4x)\,\text{m/s}$ (2 分)

61. 沿 x 轴负方向传播的平面余弦横波的波长 $\lambda = 1\text{m}$，周期 $T = 0.5\text{s}$，已知原点处质点振动图像 $y - t$ 曲线如题 61 图所示。求（1）原点处质点的振动初相；(2) 原点处质点的振动表达式；（3）波动表达式。



题 61 图

解 设波动表式为 $y = A\cos[\omega(t + x/u) + \phi_0]$ 。

由题意与题图可知，$A = 0.08\text{m}$, $\omega = 2\pi/T = 4\pi$， $u = \lambda/T = 2\text{m/s}$ 。 (2 分)

(1) $t = 0$ 时，原点处质点位于 $y = 0.04\sqrt{2}\text{m}$ 且向 y 轴负方向运动，得初相为 $\phi_0 = \pi/4$ (4 分)

(2)原点处质点的振动表达式 $y_O = 0.08\cos(4\pi t + \pi/4)\text{m}$ (2 分)

(3)波动表达式 $y = 0.08\cos[4\pi(t + x/2) + \pi/4]\text{m}$ (2 分)

62. 一油轮漏出折射率为n_2的油污染了某海域，在折射率为n_3的海水表面形成一层厚度为e的薄薄的油污。设空气的折射率$n_1=1$，且$n_3>n_2$，当太阳光垂直入射于油膜上时，（1）求油膜上、下两界面的两束反射光之间的光程差；（2）如$e=4400\mathring{A}$，$n_2=1.20$，$n_3=1.33$，太阳光中可见光的波长范围为$4000\mathring{A}-7600\mathring{A}$，如果潜水员潜入该区域水下向上观察，将看到油层呈什么颜色?（各色光波长范围：红$6220\mathring{A}-7600\mathring{A}$，橙$5970\mathring{A}-6220\mathring{A}$，黄$5770\mathring{A}-5970\mathring{A}$，绿$4920\mathring{A}-5770\mathring{A}$、蓝、靛$4920\mathring{A}-4550\mathring{A}$，紫$3500\mathring{A}-4550\mathring{A}$）

解 这是一个薄膜干涉的问题

（1） $n_1<n_2<n_3$，在油层上、下两界面，光都是从光疏到光密界面反射，都有半波损失，两反射光束之间合计存在偶数次（ 2 次）半波损失，所以之间没有附加光程差, 光程差为

$$\Delta=2n_2e \qquad （2 分）$$

（2）油层呈现的颜色应该是两反射光能够实现干涉相消的单色光的颜色。

$$2n_2e=(2k+1)\frac{\lambda}{2},k=0,1,2,\cdots,\ \lambda=\frac{4n_2e}{2k+1}, \qquad （2 分）$$

由此得

$$k=0,\lambda=\frac{4n_2e}{2\times0+1}=21120\mathring{A}; \qquad k=1,\lambda=\frac{4n_2e}{2\times1+1}=7040\mathring{A};$$

$$k=2,\lambda=\frac{4n_2e}{2\times2+1}=4224\mathring{A}; \qquad k=3,\lambda=\frac{4n_2e}{2\times3+1}=3017\mathring{A} \qquad （3 分）$$

潜水员看到的油膜呈紫红色。该问也可通过透射光的干涉相长条件求解。 （3 分）

63. 两块长度10cm的平玻璃片，一端互相接触成棱边，另一端用厚度为0.004mm的

纸片隔开，形成空气劈形膜。以波长为500nm的平行光垂直照射，观察反射光的等厚干涉条纹。求：(1)相邻两明(暗)纹的厚度差与距离；(2)在厚度为e处空气膜上、下两界面的两束反射光的光程差；(3)全部10cm的长度内呈现的明纹数。

解(1)相邻两明(暗)纹的厚度差 $\Delta e=\lambda/2=2.5\times10^{-7}\text{m}$，相邻明纹之间的距离

$$l=\frac{\Delta e}{\sin\theta}\approx\frac{2.5\times10^{-7}}{\dfrac{0.004\times10^{-3}}{10\times10^{-2}}}\text{m}=6.25\times10^{-3}\text{m} \qquad (3\text{分})$$

(2) **光在空气劈形膜上界面反射，是从光密到光疏界面反射，无半波损失，在下界面反射，是从光疏到光密界面反射，存在半波损失，两束反射光合计存在奇数次（1次），所以之间有附加光程差** $\lambda/2$，取空气的折射率为1，光程差为 $\Delta=2e+\lambda/2$ (2分)

(3) 明纹条件为 $\Delta=2e+\lambda/2=k\lambda$， $k=1,2,3,\cdots$ (2分)

$$k_{\max}=\frac{2e_{\max}}{\lambda}+\frac{1}{2}=\frac{2\times0.004\times10^{-3}}{500\times10^{-9}}+\frac{1}{2}=16.5$$

k只能取整数，所以全部10cm的长度内呈现的明纹数为16条。 (3分)

64. 一束波长为λ=5000Å的平行光垂直照射在一个单缝上。如果所用的单缝的宽度$a=0.5\text{mm}$，缝后紧挨着的薄透镜焦距$f=1\text{m}$，求：(1)中央明条纹的角宽度；(2)中央亮纹的线宽度；(3)第一级暗纹与第二级暗纹的距离。

解 (1)中央明纹半角宽度 $\theta_1=\arcsin\dfrac{\lambda}{a}$，角宽度 $2\theta_1=2\arcsin\dfrac{\lambda}{a}$，

由于 $\dfrac{\lambda}{a}=\dfrac{5000\times10^{-10}}{0.5\times10^{-3}}=0.001<<1$，故 $\theta_1\approx\dfrac{\lambda}{a}=0.001\text{rad}$， $2\theta_1\approx0.002\text{rad}$ (3分)

(2) $l_0=2f\tan\theta_1\approx2f\sin\theta_1\approx2f\dfrac{\lambda}{a}=2\times1\times\dfrac{5\times10^{-7}}{5\times10^{-4}}\text{m}=2\text{mm}$ (3分)

(3)暗纹的位置 $x_k=f\tan\theta_k\approx f\sin\theta_k=f\,k\dfrac{\lambda}{a}$， $\Delta x=x_2-x_1=\dfrac{f\lambda}{a}=1\text{mm}$ (4分)

65. 单缝的宽度$a=0.4\text{mm}$，缝后紧挨着的薄透镜焦距为$f=0.8\text{m}$。一束波长为λ=5000Å的平行光垂直照射在该单缝上。求：(1)中央明条纹的角宽度；(2)如两相邻暗纹

中心的距离为1.0mm，求波长λ。

解　(1)中央明纹半角宽度 $\theta_1=\arcsin\frac{\lambda}{a}$，角宽度$2\theta_1=2\arcsin\frac{\lambda}{a}$,

由于$\frac{\lambda}{a}=\frac{5000\times10^{-10}}{0.4\times10^{-3}}=0.00125<<1$，故 $\theta_1\approx\frac{\lambda}{a}=0.00125\text{rad}$，$2\theta_1\approx0.0025\text{rad}$ (5 分)

（2）暗纹的位置$x_k=f\tan\theta_k\approx f\sin\theta_k=f\,k\frac{\lambda}{a}$，　$\Delta x=x_{k+1}-x_k=\frac{f\lambda}{a}$,

$$\lambda=\frac{a\Delta x}{f}=\frac{4\times10^{-4}\times1\times10^{-3}}{0.8}\text{m}=5\times10^{-7}\text{m}=5000\,\mathring{\text{A}}$$ (5 分)