$\dot{x} = Ax + Bu$

即使输入不为0，当0看，稳定性与输入有关？==无关.

$\dot{x} = Ax$ --- 零输入

现代控制理论 课程 期末 试卷 A 考试形式 闭 卷

考试用时 2 小时，本试卷共 3 页，另请加答题纸___张，草稿纸 2 张.

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分	合分人
得分											

一、填空题（每空 1 分，共 10 分）。

得分	评分人

1、标准 II 型反馈形式为 输出反馈至状态变量一阶导数 .

2、状态空间表达式是 时域 数学模型。

3、系统响应包含 零状态响应 与 零输入 响应两部分。

4、线性变换的变换矩阵特点是: 逆矩阵存在

5、能观性性是指 输出 对状态变量的表现能力。能控→输入对状态变量

6、任何状态不完全能控的线性定常连续系统，总可以分解成完全能控子系 的关系 统和 完全不能控 子系统两部分。

7、李亚普诺夫第二方法是通过判定 能量函数的导数 来判定系统的稳定性。

8、能控标准 I 型的对偶系统数学模型是 能观标准 II 型 .

9、在系统综合中，采用 状态 反馈，改变了原状态方程，而输出 $\dot{x}=Ax+Bu$, $y=Cx$ 方程不变。

10、受控对象采用状态反馈的综合方法，可以任意配置闭环极点的充分必要条件： 系统必须完全能控 .

数学表达式：I、II 型

结构：积分器的连接形式，反馈方式 (串、并) (状态、输出)

表达式：随时间变化(时域)

复域

结构图：

第二法：1. 能量函数

2. 能量函数的导数

3. 导数正负

第一方法 间接方法 (求系统零输入响应(求平衡状态)

$\dot{x}=Ax=0$

2. 范数 =

3. 范数 = 是否趋向于0

二、简答题（每题 5 分，共 10 分）。

得分	评分人

1、简述 $\Sigma(A,B,C)$ 约当标准型变换步骤。

解：① 求系统 $\Sigma(A,B,C)$ 的特征值 λ_i $(i=1,2,\cdots n)$

② 求特征向量 P_i $(i=1,2,\cdots n)$

③ 令 $T=(P_1 \cdots P_n)$，求出 $T^{-1}=\cdots$

④ $\bar{A}=T^{-1}AT$; $B=T^{-1}B$; $C=CT$

⑤ 写成约当标准型：$\begin{cases}\dot{\bar{x}}=T^{-1}AT\bar{x}+T^{-1}Bu \\ y=\bar{C}\cdot\bar{x}\end{cases}$

2、简述系统能控与能观性分解的意义.

让能控不能观的子系统进行状态反馈，能观而不能控的子系统进行输出反馈至 $\dot{x}$，最终实现所有极点均可任意配置.

1. 为系统综合做准备

状态反馈极点可以任意配置条件：系统完全能控

输出反馈至 $\dot{x}$ 极点可以任意配置条件：系统完全能观

2. 对于不完全能控，能观的系统，可以进行能控，能观的分解

2、简述李亚普诺夫第二法判定系统稳定性的方法。

答：① 求平衡状态 x_e

② 构造能量函数 $V(x)$，$V(x)$ 为正定的

③ 求 $V(x)$ 一阶导数 $\dot{V}(x)$

若 $\dot{V}(x)$ 半负定，则系统稳定

若 $\dot{V}(x)$ 负定，则系统渐近稳定

若还有 $\|x\| \to \infty$ 时，$V(x) \to \infty$，则系统大范围渐近稳定

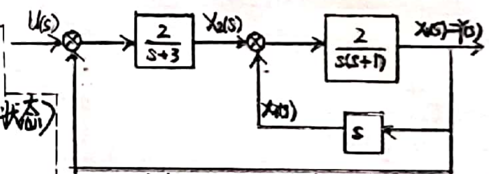
若 $\dot{V}(x)$ 正定，则系统不稳定

三、已知系统结构图如图示。

得分	评分人

（1）写出系统状态变量为 x_1, x_2, x_3 的状态空间表达式。（5 分）。

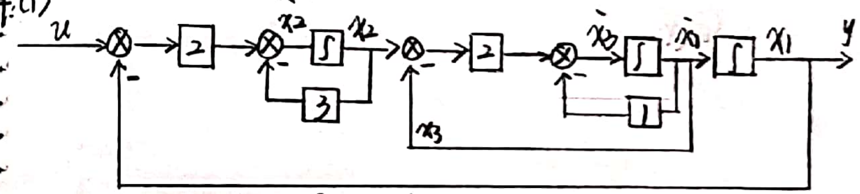
（2）写出能控标准型状态空间表达式。画出结构图。（10 分）。



$\begin{cases}\dot{x}_1=x_3 \\ \dot{x}_2=-2x_1-3x_2+2u \\ \dot{x}_3=2x_2-3x_3 \\ y=x_1\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&-3&0\\0&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}u$，$y=(1,0,0)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

解：(1)



(2) 化为能控标准型，首先判别系统是否能控.

$M=(B, AB, A^2B)$

$=\begin{pmatrix}0&0&4\\2&-6&18\\0&4&-24\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&9\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

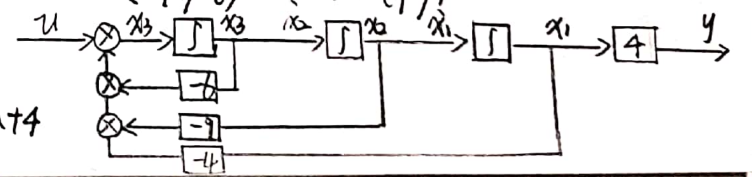
$r(M)=3$ 满秩，系统完全能控.

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\2&\lambda+3&0\\0&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^3+6\lambda^2+9\lambda+4$

$\therefore a_0=4,\ a_1=9,\ a_2=6$

$T_{c1}=(A^2B, AB, B)=\begin{pmatrix}1&0&0\\a_2&1&0\\a_1&a_2&1\end{pmatrix}$

$\bar{A}=T_{c1}^{-1}AT_{c1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-4&-9&-6\end{pmatrix}$，$\bar{B}=T_{c1}^{-1}B=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\bar{C}=C\cdot T_{c1}=(4,0,0)$



扫描全能王 创建

考公式

四、已知系统 $\dot{x}(t)=\overset{A}{\begin{bmatrix}-a&0\\0&-b\end{bmatrix}}x(t)+\overset{B}{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}u(t)$，$x(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，

得分	评分人
$\xrightarrow{L^{+}}$	

试求系统在单位阶跃输入作用下的响应。（10 分）

解：$sX(s)-x(0)=AX(s)+BU(s) \Rightarrow X(s)=(sI-A)^{-1}x(0)+(sI-A)^{-1}U(0)$

$x(t)=\phi(t)x(0)+\int_0^t\phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$

先求 $\phi(t)$：$sI-A=\begin{bmatrix}s&\\&s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-a&\\&-b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+a&\\&s+b\end{bmatrix}$ $(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+a&\\&s+b\end{bmatrix}$

取拉氏反变换：$\phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}e^{-at}&\\&e^{-bt}\end{bmatrix}$

$\therefore x(t)=\begin{bmatrix}e^{-at}&\\&e^{-bt}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{a}&\\&-\frac{1}{b}\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}e^{-at}&\\&e^{-bt}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$（记公式）

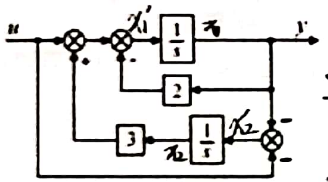
或：$\begin{bmatrix}e^{-at}&\\&e^{-bt}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-a(t-\tau)}&\\&e^{-b(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\times 1\,d\tau$（积分）

$=\begin{bmatrix}e^{-at}\\e^{-bt}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{a}(1-e^{-at})\\\frac{1}{b}(1-e^{-bt})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a}+\frac{a-1}{a}e^{-at}\\\frac{1}{b}+\frac{b-1}{b}e^{-bt}\end{bmatrix}$

五、设某控制系统的模拟结构图如下，写出状态空间表达式并判定系统稳定性。（10 分）

积分器前面

得分	评分人



$\begin{cases}\dot{x}_1=-2x_1+3x_2+u\\\dot{x}_2=-x_1-u\\y=x_1\end{cases}$

$\therefore \dot{x}=\begin{pmatrix}-2&3\\-1&0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}u$

$y=(1\quad 0)\,x$

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&-3\\1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+2)+3=0$

$\therefore \lambda_1=\sqrt{2}j-1$，$\lambda_2=-1-\sqrt{2}j$ 都具有负实部

$\therefore$ 系稳，是稳定的

六、已知系统动态方程为 $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-2&2&0\\0&-2&0\\0&-4&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\y=\begin{bmatrix}0&1&1\end{bmatrix}x\end{cases}$ $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

得分	评分人

（1）判定状态变量的能控与能观。（7 分）

（2）求传递函数 $Y(s)/U(s)$。（8分） 结构图等效变换，梅森公式

(1) $M=(b\quad Ab\quad A^2b)$

$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

$rank\,M=1<3$

$\therefore$ 系稳，不能控

$N=\begin{pmatrix}C\\CA\\CA^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-6&0\\0&12&0\end{pmatrix}$

$rank\,N=2<3$

$\therefore$ 系稳，不能观

(2) $\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B$

$(sI-A)^{-1}=\begin{pmatrix}s+2&-2&0\\0&s+2&0\\0&4&s\end{pmatrix}^{-1}$

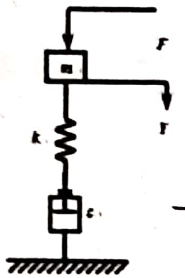
$=\frac{1}{s(s+2)^2}\begin{pmatrix}s(s+2)&2s&0\\0&s(s+2)&0\\0&-4(s+2)&(s+2)^2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\frac{1}{s+2}&\frac{2}{(s+2)^2}&0\\0&\frac{1}{s+2}&0\\0&\frac{-4}{s(s+2)}&\frac{1}{s}\end{pmatrix}$

$\therefore C(sI-A)^{-1}B=\frac{1}{s}$

七、用李雅普诺夫第二法判断系统的稳定性。系统输入为F，输出为位移Y。(15分)。

得分	评分人



能量函数

$V(x)=\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}kY^2$

$\dot{V}(x)=mV+kY$

$=m\dot{Y}+kY$

$\Rightarrow$ 状态空间表达式

$F-kY-C\dot{Y}=m\ddot{Y}$

$m\ddot{Y}+C\dot{Y}+kY=0$

$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\frac{k}{m}x_1-\frac{c}{m}x_2\end{cases}$

$\begin{cases}\text{弹簧储能: } \frac{1}{2}kx_1^2\\ \text{质量动能: } \frac{1}{2}mx_2^2\end{cases}$

能量函数 $V(x)=\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}mx_2^2$

$\dot{V}(x)=kx_1\dot{x}_1+mx_2\cdot\dot{x}_2$

$=kx_1x_2+mx_2(-\frac{k}{m}x_1-\frac{c}{m}x_2)$

$=kx_1x_2-kx_1x_2-Cx_2^2=-Cx_2^2<0$

$\dot{V}(x)$ 是半负定的

本系统是渐进稳定的，当 $x\to\infty$，$V(x)\to\infty$，大范围渐进稳定.

八、已知系统的状态方程为 $\begin{cases}\dot{x}_1=x_1+x_2+u\\ \dot{x}_2=-2x_2\\ y=2x_1+x_2\end{cases}$

得分	评分人

1、设计全维状态观测器，要求极点配置在-3、-4。(7分) 完全能控

2、如取状态反馈 $u=k\hat{x}+v$，其中 $k=[-2\quad -3]$，v为参考输入，$\hat{x}$为状态估计值，求由对象、状态观测器以及状态反馈组成的闭环系统的状态空间表达式，画出结构图。(8分)

解：1. $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&-2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $C=(2\quad 1)$

1° 判断可观

$N=\begin{pmatrix}C\\CA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\2&0\end{pmatrix}$

$\text{rank}N=2$

满秩，系统可观，可设计全维状态观测器

2° 设 $G=\begin{pmatrix}g_1\\g_2\end{pmatrix}$

$A-GC=\begin{pmatrix}1-2g_1&1-g_1\\-2g_2&-2-g_2\end{pmatrix}$

$|SI-(A-GC)|=(S+3)(S+4)$

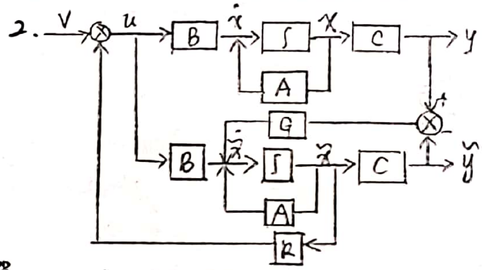
$\Rightarrow S^2+(2g_1+g_2+1)S+4g_1+g_2-2=S^2+7S+12$

$\Rightarrow g_1=4,\ g_2=-2,\quad G=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

要设计的全维状态观测器

$\dot{\hat{x}}=\begin{pmatrix}-7&-3\\4&0\end{pmatrix}\hat{x}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}u+\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}y$

$\hat{y}=(2\quad 1)\hat{x}$

2.


$\begin{cases}\dot{x}=AX+Bu\\ \dot{\hat{x}}=(A-GC)\hat{x}+Bu+Gy\\ y=Cx\end{cases}$

将 $u=k\hat{x}+v$ 代入

$\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}=AX+Bk\hat{x}+BV\\ \dot{\hat{x}}=GCx+(A-GC+Bk)\hat{x}+BV\\ y=Cx\end{cases}$

状态空间表达式：

$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\hat{x}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-2&-3\\0&-2&0&0\\8&4&-9&-6\\-4&-2&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \hat{x}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}u$

$y=(2\ 1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}x\\ \hat{x}\end{pmatrix}$