情報通信実験第２ 第７回（通信方式）講義資料

1 フーリエ変換、スペクトル

定義 1.1 (フーリエ変換)**.** 信号 $s(t)$ に対して

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi tf} \, \mathrm{d}t$$

が存在するとき、$S(f)$ を $s(t)$ のフーリエ変換といい、

$$s(t) \leftrightarrow S(f)$$

と書く。ただし、$j = \sqrt{-1}$ である。 □

定義 1.2 (フーリエ逆変換)**.** 信号 $s(t)$ とそのフーリエ変換 $S(f)$ に対して、以下が成り立つ。

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} \, \mathrm{d}f$$

□

定義 1.3 (デルタ関数)**.** 以下を満たす偶関数 $\delta(t)$ をデルタ関数という。

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(\tau - t)\mathrm{d}t = s(\tau)$$

□

命題 1.4 (フーリエ変換の性質). いくつかのフーリエ変換の性質を述べる。

1. (双対性)

$$g(t) \leftrightarrow G(f) \Longrightarrow G(t) \leftrightarrow g(-f)$$

2. (時間シフト)

$$g(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} G(f)$$

3. (時間スケーリング)

$$g(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} G(f/a)$$

4. (時間領域の畳み込み)

$$[g_1 * g_2](t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) g_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau \leftrightarrow G_1(f) G_2(f)$$

□

例 1.5.

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow T\,\mathrm{sinc}(fT)$$
$$\mathrm{sinc}(2Wt) \leftrightarrow \frac{1}{2W}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$$
$$\Lambda(t) \leftrightarrow \mathrm{sinc}^2(f)$$

ただし、以下の定義を用いた。1.5 はオイラーの公式から、1.5 はフーリエ変換の双対性から、1.5 は 1.5 とフーリエ変換の畳み込みに関する性質から導出される。

$$\Lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1-|x|, & |x| \le 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1+x, & -1 \le x < 0 \\ 1-x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\operatorname{sinc}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & (t \ne 0) \\ 1 & (t = 0) \end{cases}$$

$$\operatorname{rect}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & (|t| \le \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

□

命題 1.6. $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$ をインパルス応答 $h(t)$ の LTI システムに入力した出力 $y(t)$ は

$$y(t) = H(f_0)x(t)$$

となる。ただし、$H(f)$ は $h(t)$ のフーリエ変換である。正確に書くと、以下の通りである。

$$y(t) = [x * h](t) = \int e^{j2\pi f_0 (t-\tau)} h(\tau) d\tau$$

これは、単一周波数信号 $Ae^{j2\pi f_0 t}$ に対して、$H(f_0)$ 倍されて出力されることを表している。 □

証明.

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int Ae^{j2\pi f_0 (t-\tau)} h(\tau) d\tau \\
&= \left[\int e^{-j2\pi\tau} h(\tau) d\tau\right] Ae^{j2\pi f_0 t} \\
&= H(f_0) Ae^{j2\pi f_0 t}
\end{aligned}
$$

□

定義 1.7 (スペクトル)**.** 信号 $s(t)$ に対して、$s(t)$ のフーリエ変換

$$
S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t} s(t) \mathrm{d}t
$$

を $s(t)$ の周波数スペクトルまたは単にスペクトルという。 □

定義 1.8 (低域信号、ベースバンド信号 (baseband signal))**.** $X(f)$ が $[-B, +B]$ にのみ非ゼロ成分を有するとき、$x(t)$ は帯域幅 B の低域通過信号であるという。
例：$\mathrm{sinc}(2Bt)$ は帯域幅 B のベースバンド信号である。 □

定義 1.9 (帯域通過信号、バンドパス信号 (bandpass signal))**.** $B \ll f_c$ に対して、$X(f)$ が

$$
[-f_c - B, -f_c + B] \cup [f_c - B, f_c + B]
$$

にのみ非ゼロ成分を有するとき、$x(t)$ は f_c を中心とする帯域幅 $2B$ の帯域通過信号であるという。$\ll$ の意味は、文脈に依存する。
例：$\mathrm{sinc}(2Bt)\cos(2\pi f_c t)$ は f_c を中心とする帯域幅 $2B$ の帯域通過信号である。 □

2　システム、線形時不変 (LTI) システム

定義 2.1 (システム)**.** 信号 $x(t)$ から信号 $y(t)$ への写像 $x \mapsto y = \mathcal{H}[x]$ をシステムという。$x(t)$ を入力、$y(t)$ は出力と呼ばれる。 □

定義 2.2 (因果的)**.** 時刻 t_0 までの入力が一致するなら時刻 t_0 までの出力は一致するシステム $\mathcal{H}$ は、因果的であると言う。正確に言うと以下の条件となる。任意の t_0 に対して、以下を満たす。

$$\forall t \le t_0, x_1(t) = x_2(t) \Rightarrow \forall t \le t_0, \mathcal{H}[x_1](t) = \mathcal{H}[x_2](t)$$

□

定義 2.3 (LTI システム、フィルタ)**.** 次を満たすシステム $\mathcal{H}$ は線形であると言う。

$$\mathcal{H}[ax] = a\mathcal{H}[x]$$

$$\mathcal{H}[x_1 + x_2] = \mathcal{H}[x_1] + \mathcal{H}[x_2]$$

次を満たすシステム $\mathcal{H}$ は時不変であると言う。任意の $T \geq 0$ に対して、以下が成り立つ。

$$\mathcal{H}[x](t-T) = y(t-T)$$

線形で時不変なシステムを LTI システムという。

入力信号のスペクトルを変化させて出力する目的で用いる LTI システムをフィルタという。 □

命題 2.4 (LTI システムの因果性)**.** LTI システム $\mathcal{H}$ が因果的であることと $\mathcal{H}$ のインパルス応答 h が以下を満たすことは同値である。

$$h(t) = 0, \quad \forall\, t < 0$$

□

定義 2.5 (インパルス応答)**.** LTI システム $\mathcal{H}$ に対して、インパルス $\delta(t)$ を入力した出力 $\mathcal{H}[\delta]$ を $\mathcal{H}$ のインパルス応答という。 □

命題 2.6 (LTI システムの特徴付け)**.** インパルス応答 $h(t)$ を有する LTI システムに $x(t)$ を入力した出力は

$$\begin{aligned} y(t) &= (h * x)(t) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

と表される。

$x(t), y(t), h(t)$ のフーリエ変換 $X(f), Y(f), H(f)$ に関して以下が成り立つ。

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

$\square$

定義 2.7 (電力)**.** 信号 $s(t)$ に対して、$s(t)$ の電力を

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)\mathrm{d}t$$

によって定義する。 $\square$

3　フーリエ変換の数値計算

帯域幅がほとんど W であり、区間 $[a, b]$ 以外ではほとんど 0 である孤立信号 $x(t)$ に対して、サンプリング周期 $T_s \leq \frac{1}{2W}$ で得た $x(t)$ の有限個の標本

$$x[n] := x(nT_s) \text{ for } n \in \mathbb{Z} \text{ subject to } a \leq nT_s \leq b$$

から、数値計算により解像度 $\Delta f (\leq \Delta f_0)$ のスペクトル

$$X(f) \text{ for } |f| \leq W$$

つまり

$$\begin{aligned} &X(k\Delta f) \text{ for } k \in \mathbb{Z} \\ &\text{subject to } -f_s/2 \leq k\Delta f \leq f_s/2 \text{ with } W \leq f_s/2 \end{aligned}$$

を近似的に効率的に求める方法を述べる。
　離散時間フーリエ変換

$$X_d(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi f n T_s}$$

に対して、以下が成り立つ。

$$X(f) = T_s X_d(f) \text{ for } |f| < W$$

1. 入力信号 $x(t)$ の帯域幅が W となるように W を大きめに見積もる。

2. 設計周波数解像度 Δf_0 を設定する。

3. サンプリング周期 $T_s := 1/(2W)$ とサンプリング周波数 $f_s := 1/T_s$ を設定する。

4. 非零成分をほとんど網羅するように、周期 T_s でサンプルする。

   $$x[n] := x(nT_s) \text{ for } n \in \mathbb{Z} \text{ subject to } a \le nT_s \le b$$

   サンプル数を N_s とする。

5. $x[n]$ の長さが N になるように後半に 0 を埋め込む。ただし、N は以下で定義される。

   $$p := \max(\lceil \log_2(N_s) \rceil, \lceil \log_2(f_s/\Delta f_0) \rceil),$$
   $$N := 2^p$$

サンプルデータの始まりのインデックスを n_0 と書くと、サンプルデータは $(x[n_0],\ldots,x[n_0+N-1])$ に格納されている。これらが $(x[0],\ldots,x[N-1])$ に格納されるように、シフトする。

6. 周波数解像度 $\Delta f := f_s/N$ を設定する。$\Delta f \le \Delta f_0$ となる。

7.
$$
\begin{aligned}
X_d(k\Delta f) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn\Delta f T_s} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}
\end{aligned}
$$
for $k=0,\ldots,N-1$ を FFT アルゴリズムにより計算する。

8.
$$
X_d(k\Delta f) = X_d((k+N)\Delta f)
$$
と、
$$
X(f) = T_s X_d(f) \text{ for } |f| < W
$$
の関係より、
$$
X(k\Delta f) \text{ for } k \in \mathbb{Z} \text{ subject to } -f_s/2 \le k\Delta f \le f_s/2
$$
を求める。

定義 3.1 (DFT). $\alpha = e^{-\frac{j2\pi}{N}}$ とする。複素数列 x_0^{N-1} から、複素数列 X_0^{N-1} への変換

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \alpha^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi kn/N}$$

をサイズ N の離散フーリエ変換という。 □

定理 3.2 (FFT). サイズ N の DFT

$$(x_n)_{n=0}^{N-1} \mapsto (X_k)_{k=0}^{N-1}$$

は、サイズ $N/2$ の DFT

$$(x_{2m})_{m=0}^{N/2-1} \mapsto (E_k)_{k=0}^{N/2-1}$$

とサイズ $N/2$ の DFT

$$(x_{2m+1})_{m=0}^{N/2-1} \mapsto (O_k)_{k=0}^{N/2-1}$$

を用いて、$0 \leq k < \frac{N}{2}$ に対して、

$$X_k = E_k + \alpha^k O_k \tag{3.3}$$

$$X_{k+\frac{N}{2}} = E_k - \alpha^k O_k \tag{3.4}$$

と再帰的に計算できる。 □

証明. 証明：

$$
\begin{aligned}
X_k &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{-\frac{2\pi i}{N}(2m)k} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(2m+1)k} \\
&= \underbrace{\sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{-\frac{2\pi i}{N/2}mk}}_{\text{DFT of even}-\text{indexed part of } x_m} \\
&\quad + e^{-\frac{2\pi i}{N}k} \underbrace{\sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{-\frac{2\pi i}{N/2}mk}}_{\text{DFT of odd}-\text{indexed part of } x_m} \\
&= E_k + e^{-\frac{2\pi i}{N}k} O_k.
\end{aligned}
$$

となり (3.3) を導けた。さらに E_k, O_k が周期 $N/2$ であることを使って (3.4) を導出できる。 □

課題 7-1 ファイル `FT.m` では、以下の信号 $x(t)$ のフーリエ変換を数値計算により求め、解析的に求めたフーリエ変換 $X(f)$

と比較し表示している。

$$
\begin{aligned}
x(t) &:= 2\Lambda(t/2) - \Lambda(t) \\
&= \begin{cases} t+2, & -2 \le t < -1 \\ 1, & -1 \le t < 1 \\ -t+2, & 1 \le t < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\
X(f) &= 4\,\mathrm{sinc}^2(2f) - \mathrm{sinc}^2(f)
\end{aligned}
$$

以下の問に答えよ：

1. 上記の信号とは異なる持続時間・帯域幅・スペクトルの概形を有する信号 $x(t)$ を定義し、フーリエ変換を数値計算により求め、解析的に求めたフーリエ変換 $X(f)$ と比較し表示するプログラムを作成せよ。

2. 信号 $x(t)$ の定義を書け。

3. フーリエ変換 $X(f)$ を解析的に求めよ。

4. $x(t)$ と、数値計算と解析によりそれぞれ求めた $X(f)$ を描画し提出せよ。

4　パルス変調

定義 4.1 (パルス変調)**.** 連続信号 $m(t)$ を間隔 T_s でサンプリングした標本列 (m_i) によって、パルス信号列のパラメータ (振

幅 (PAM)、持続時間 (PDM)、間隔 (PPM)) を変化させることで、$m(t)$ を変調する変調方式をパルス変調という。 □

定義 4.2 (パルス振幅変調, Pulse-Amplitude Modulation)**.** パルス信号に幅 $T < T_s$ の矩形パルスを用いる。 □

5 パルス振幅変調, Pulse-Amplitude Modulation

6 AM、アナログ振幅変調

目的 6.1 (アナログ通信、アナログ変調)**.** アナログ通信の目的は、以下の制限の下で、送信者が帯域幅 B の低域信号 $m(t)$ を受信者に伝えることである。

1. 与えられたキャリア周波数 $f_c \gg B$ を中心とするできるだけ狭い帯域の帯域通過信号 $u(t)$ を送信する。
2. できるだけ高い復調後 SNR になるようにする。
3. できるだけ簡単な装置で実現する。

低域信号 $m(t)$ から帯域通過信号 $u(t)$ への写像をアナログ変調または単に変調という。 □

定義 6.2 (DSB-AM 信号). 以下の変調 $m(t) \mapsto u(t)$ を DSB-AM といい、変調信号 $u(t)$ を DSB-AM 信号という。

$$
\begin{aligned}
u(t) &= m(t)c(t) \\
&:= m(t)A_c \cos(2\pi f_c t)
\end{aligned}
$$

ただし、$f_c \gg W$ である。ここで、W はベースバンド信号 $m(t)$ の帯域幅である。$c(t) := A_c \cos(2\pi f_c t)$ を搬送波といい、f_c をキャリア周波数という。 □

命題 6.3 (DSB-AM 信号のスペクトルと電力). DSB-AM 信号 $u(t)$ のスペクトルは次式で与えられる。

$$
U(f) = \frac{A_c}{2}\Big[M(f - f_c) + M(f + f_c)\Big]
$$

これより、DSB-AM 信号 $u(t)$ の帯域幅は $2W$ であることが分かる。

DSB-AM 信号 $u(t)$ の電力は以下で与えられる。

$$
P_u = \frac{A_c^2}{2}[P_m]
$$

第 2 項はメッセージ信号に由来する。メッセージ信号に由来する電力の割合

$$
\eta = \frac{a^2 P_{m_n}}{1 + a^2 P_{m_n}}
$$

を変調効率という。変調効率 η はできるだけ大きい方が望ましいが、$\eta \leq 0.5$ となる。 □

命題 6.4 (同期検波：DSB-AM 信号の復調). DSB-AM 信号の復調の手順を述べる。まず、受信器は $\cos(2\pi f_c t)$ を変調信号 $u(t)$ に乗じて $y(t)$ を得る。

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t)\cos(2\pi f_c t) \\ &= A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t) \\ &= \frac{A_c}{2}m(t) + \frac{A_c}{2}m(t)\cos(2\pi 2 f_c t) \end{aligned}$$

フーリエ変換は以下の通りとなる。

$$Y(f) = \frac{A_c}{2}M(f) + \frac{A_c}{4}M(f-2f_c) + \frac{A_c}{4}M(f+2f_c)$$

これより、$y(t)$ を帯域幅 W のローパスフィルタに通すことで、第 1 項だけが残りフィルタ出力として

$$\frac{A_c}{2}m(t)$$

を得る。この復調法を同期検波という。 □

課題 7-2 ファイル `DSB_AM.m` では、以下のメッセージ信号 $m(t)$ を搬送波 $c(t) = \cos(2\pi f_c t)$ で、変調し DSB-AM 信号 $u(t)$ を計算している。さらに、同期検波により、$m(t)$ を復元している。ただし、キャリア周波数 $f_c = 250$ Hz, $t_0 = 0.15$ である。カットオフ周波数 150Hz のローパスフィルタを用いている。

$$m(t) := \begin{cases} 1, & 0 \le t < t_0/3 \\ -2, & t_0/3 \le t < 2t_0/3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

以下の問に答えよ：

1. 上記の設定とは異なる持続時間・帯域幅・スペクトルの概形を有するメッセージ信号 $m(t)$ を定義せよ。さらに、上記の設定とは異なるキャリア周波数とカットオフ周波数の同期検波を行い、`DSB_AM.m` と同様の出力を表示するプログラムを作成せよ。

2. メッセージ信号 $m(t)$ の定義を与え、フーリエ変換 $M(f)$ を解析的に求めよ。

3. 変調信号 $u(t)$ と、フーリエ変換 $U(f)$ を解析的に求めよ。

4. 作成したプログラムの出力を描画し提出せよ。

定義 6.5 (Conventional AM, AM 信号、振幅変調信号)**.** 以下の変調 $m(t) \mapsto u(t)$ を AM といい、$u(t)$ を AM 信号という。

$$u(t) = A_c[1 + am(t)]\cos(2\pi f_c t)$$

1. 正規化メッセージ信号 $m_n(t)$ は $|m_n(t)| < 1$ for all t を満たす。

2. 変調指数 a は $0 \leq a \leq 1$ を満たす。

3. $f_c \gg W$ である。ただし、W はベースバンド信号 $m(t)$ の帯域幅。

□

命題 6.6 (AM 信号のスペクトルと電力). AM 信号 $u(t)$ のスペクトルは次式で与えられる。

$$U(f) = \frac{A_c}{2}\Big[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) \\ + M_n(f - f_c) + M_n(f + f_c))\Big]$$

これより、AM 信号 $u(t)$ の帯域幅は $2W$ であることが分かる。

AM 信号 $u(t)$ の電力は以下で与えられる。

$$P_u = \frac{A_c^2}{2}[1 + a^2 P_{m_n}]$$

第 2 項はメッセージ信号に由来する。メッセージ信号に由来する電力の割合

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a^2 P_{m_n}}{1 + a^2 P_{m_n}}$$

を変調効率という。変調効率 η はできるだけ大きい方が望ましいが、$\eta \leq 0.5$ となる。 □

命題 6.7 (包絡線検波：AM 信号の復調). AM 信号の上側のピーク値を結んでできる包絡線から直流 (DC) 成分を除いた信号は、メッセージ信号 $m(t)$ と一致している。このように包絡線を取り出すことで、メッセージ信号を取り出す復調を包絡線検波という。 □

課題 7-3 ファイル `AM.m` では、以下のメッセージ信号 $m(t)$ を搬送波 $c(t) = \cos(2\pi f_c t)$ で、変調し AM 信号 $u(t)$ を計算し

ている。さらに、包絡線検波により、$m(t)$ を復元している。ただし、キャリア周波数 $f_c = 250$ Hz, 変調指数 $a = 0.25$、$t_0 = 0.15$ である。

$$m(t) := \begin{cases} 1, & 0 \leq t < t_0/3 \\ -2, & t_0/3 \leq t < 2t_0/3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

以下の問に答えよ：

1. 上記の設定とは異なる持続時間・帯域幅・スペクトルの概形を有するメッセージ信号 $m(t)$ を定義せよ。さらに、上記の設定とは異なるキャリア周波数とカットオフ周波数の包絡線検波を行い、`AM.m` と同様の出力を表示するプログラムを作成せよ。

2. メッセージ信号 $m(t)$ の定義を与え、フーリエ変換 $M(f)$ を解析的に求めよ。

3. 変調信号 $u(t)$ と、フーリエ変換 $U(f)$ を解析的に求めよ。

4. 作成したプログラムの出力を描画し提出せよ。

5. 変調・復調に関して、DSB-AM 信号と AM 信号を比較し考察せよ。