$$B_{k,\ell}^1 \quad \leq C\|(a+\delta A^{\alpha/2})^{-1}e_k\|_{\mathcal{H}}\|(a+\delta A^{\alpha/2})^{-1}e_\ell\|_{\mathcal{H}} \quad \leq C\|(\underline{a}+\delta A^{\alpha/2})^{-1}e_k\|_H\|(a+\delta A^{\alpha/2})^{-1}e_\ell\|_{\mathcal{H}} \quad = C\frac{1}{a+\delta\lambda_k^{\alpha/2}}\frac{1}{a+}$$