$$|\sigma_i^{-1}(\{\kappa_a^\ell,\kappa_b^\ell\})\cap (V(\mathcal{P}_a^\ell)\setminus \{v_a^\ell\})|=1$$