

$$\sigma_{i+1}^{-1}(V({}^\ell)) \subset V({\mathcal P}_a^\ell) \cup V({\mathcal P}_b^\ell) \text{ and } \sigma_{i+1}(\{v_a^\ell, v_b^\ell\}) \notin V({}^\ell),$$