

$$\sigma_{i+1}^{-1}(\sigma_i(v_a^\ell) \in N_{X_L}(v_a^\ell) \cap V(\mathcal{P}_a^\ell),$$