

基于原子范数最小化的限定区域波达方向快速估计

张景铭^{1,2} 吴敏^{1,2} 郝程鹏^{1,2†} 高一丁^{1,2} 程文鑫³

(1 中国科学院声学研究所 北京 100190)

(2 中国科学院大学 北京 100049)

(3 海装装备项目管理中心 北京 100071)

摘要 受限于有界引理的应用条件, 基于原子范数最小化(atomic norm minimization, ANM)的波达方向(direction of arrival, DOA)估计方法通常只能在全区域进行角度搜索, 带来大量的运算冗余。针对这一问题, 本文通过对对偶变量进行带通滤波和降采样, 使得相应的对偶三角多项式不等式约束可以使用有界引理转化为半正定约束, 从而将对偶问题转化为半正定规划(semi-definite programming, SDP)问题, 进而得到了基于 ANM 的限定区域 DOA 估计方法。为了提升上述算法的运算效率, 本文还提出了一种适用于上述算法的快速求解算法, 通过原对偶内点法提升了运算速度。仿真结果表明, 相比于原始 ANM 算法, 所提限定区域的 ANM 算法的运算时间更短; 所提快速求解算法在估计精度与原算法一致的条件下运算速度进一步提升。

关键词 限定区域, 波达方向估计, 原子范数最小化, 半正定规划, 原对偶内点法

PACS 数 43.30, 43.60

Fast constrained area DOA estimation based on atomic norm minimization

Abstract Due to the constraints of the bounded lemma, direction of arrival (DOA) estimation methods based on atomic norm minimization (ANM) usually necessitates exhaustive search over the entire angular domain, resulting in substantial computational redundancy. To address this challenge, this paper proposes a dual-variable processing framework involving bandpass filtering and downsampling. This approach enables the conversion of dual trigonometric polynomial inequality constraints into semidefinite constraints through the bounded lemma, thereby transforming the dual problem into a semidefinite programming (SDP) formulation. Consequently, an ANM-based DOA estimation method with angular sector constraints is developed. To enhance computational efficiency, we further propose a fast algorithm that leverages primal-dual interior-point methods to accelerate computation. Simulation results demonstrate that, compared to the original ANM algorithm, the proposed constrained area ANM algorithm significantly reduces computational time; additionally, the proposed fast algorithm further increases computation speed while maintaining the same estimation accuracy as the original algorithm.

Keywords Constrained area, Direction of arrival estimation, Atomic norm minimization, Semi-definite programming, Primal-dual interior point method

PACS number 43.30, 43.60

* 国家自然科学基金（62371446, 62001468, 61971412）资助；中国科学院青年创新促进会（2023030）资助。

† 通讯作者：郝程鹏, haochengp@mail.ioa.ac.cn

引言

基于压缩感知的波达方向(direction of arrival, DOA)估计方法可以在少量快拍数的条件下实现高分辨 DOA 估计，因而在近年来受到广泛研究^{[1][2][3]}。早期的压缩感知算法是基于网格字典的，即将目标的 DOA 划分为离散的网格，各个格点对应的导向向量可组成一个超完备字典。由于目标 DOA 仅落在有限的网格上，即具备稀疏特性，这使得 DOA 估计问题转换为稀疏恢复问题。实际工程中，目标 DOA 的范围通常已知^{[4][5][6][7][8]}，因而仅需在限定范围内进行 DOA 估计。事实上，在存在目标先验信息的情况下，可以通过将 DOA 搜索范围限制在目标区域内以降低运算复杂度，本文中这种情况称为限定区域的 DOA 估计。Yang 等人^[4]通过设计零陷矩阵滤波器，使得来波信号的 DOA 被限制在目标区域内，并给出了一种基于稀疏谱拟合的 DOA 估计方法。在此基础上，Zhang 等人^[5]通过将字典范围限制在目标区域内实现了 DOA 搜索范围的限制，并基于稀疏贝叶斯(sparse Bayesian learning, SBL)算法实现了 DOA 估计，提升了运算效率。

上述稀疏方法假设目标 DOA 均落在事先划定的网格上，实际目标 DOA 可落在网格外，会造成网格失配问题。Chi 等人^[9]详细分析了网格失配的影响，并指出此时有网格算法的性能会极大的下降。Zhang 等人^[10]指出在进行多基地联合定位时，网格失配会造成目标的遗漏。为此，后续研究提出了一系列补偿的方法以减小网格失配的影响^{[11][12][13][14]}，此类方法统称为离网格算法。然而，这些方法中仍假设网格存在，导致连续取值的 DOA 依然无法被准确的估计出来。以原子范数最小化(atomic norm minimization, ANM)方法为代表的无网格算法由于能在连续字典上得到稀疏解在近年来受到广泛关注^{[15][16]}。由于涉及到无限不可列个参数的优化，ANM 问题本身无法被直接求解。为此，Candès 等人^[17]通过对 ANM 的对偶问题进行推导，将对偶原子范数的约束转换为三角多项式不等式约束。利用有界引理^[18]，可以将三角多项式不等式约束转换为半正定约束，从而将对偶问题转换为半正定规划(semi-definite programming, SDP)问题，从而得以规划求解。虽然有界引理为 ANM 问题的求解提供了方法，但同时也限制了 ANM 方法的应用场景。在本文所考虑的问题中，为了将 DOA 搜索范围限制在目标区域中以降低算法复杂度，类比有网格算法中将离散字典限制在目标区域内的方法^[5]，

此时可以构造对应的原子集,使得其中的原子均被限制在目标区域中,从而实现 DOA 搜索范围的限制。然而,这将使得对应的对偶原子范数约束不满足全频带的三角多项式不等式约束的形式,导致有界引理无法使用。因此,基于 ANM 的无网格 DOA 估计方法只能在全区域进行目标 DOA 的搜索,造成了计算冗余。近年来出现了一些尝试拓宽 ANM 算法应用范围的尝试^{[19][20][21]},这些算法通过对对偶变量进行处理,使得对偶原子范数约束能被写成三角多项式不等式约束的形式,以满足有界引理的要求,但这些算法仅适用于相应的特定场景,尚不具备普遍性,因而无法被应用于本文所考虑的限定区域 DOA 估计问题中。为了避免有界引理带来的限制, Mishra 等人^[22]推导了限定频带上三角多项式不等式约束的 Gram 矩阵参数化表示,将有界引理进行了推广,并将其用于存在先验信息的谱估计问题中。为了进一步利用先验信息以降低算法复杂度, Mahata 等人^[23]利用椭圆球面波函数对带限信号进行正交分解,并通过舍弃特征值较小的椭圆球面波函数分解项降低了算法复杂度。

另外,虽然通过有界引理转换得到的 SDP 问题与原子范数最小化问题等价,但由于其规模等问题,现有的通用求解器,例如 CVX 工具包^[24]等难以对其进行高效求解。为了提升求解效率, Hansen 等人^[25]基于原对偶内点法提出了一种快速内点法,通过将增广 Karush-Kuhn-Tucker (KKT)条件进行解析求解和利用伪牛顿法有限内存 Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno(Limited-memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno, L-BFGS)算法^[26]来获得更新步长,同时将半正定约束用有限点的三角多项式不等式约束替代,使用快速傅里叶变换 (fast Fourier transform, FFT) 来判定约束条件,显著提升了求解速度。然而,上述算法对信号的形式有着严格要求,虽然 Gao 等人^[27]将快速内点法推广到了多测量向量(Multiple Measurement Vectors, MMV)部分观测的情况,但其应用场景仍然受限。

为了在实现无网格 DOA 估计的同时充分利用目标 DOA 范围的先验以降低复杂度,本文基于原子范数最小化方法,通过对对偶变量进行带通滤波和降采样,解决了所构造原子集对应的对偶原子范数约束不满足全频带三角多项式不等式约束的问题,将 ANM 问题转换为了可规划求解的 SDP 问题,并基于此提出了一种限定区域的 ANM 算法(CA-ANM)。为了进一步提升运算速度,本文还基于原对偶内点法提出了一种可用于求解 CA-ANM 问题的快速算法(FCA-ANM)。理论分析和仿真结果表明,相比于原始 ANM 算法,所提 CA-ANM 算法的运算复杂度更低,运算时间更短;所提快速求解算法 FCA-ANM 在估计精度上与基于 CVX 工具包求解的 CA-ANM 算法一致的情况下运算速度进一步提升。

1 信号模型

假设空间中存在的 K 个窄带远场信号源分别从方向 θ^k 到达某 N 元均匀线阵。

可以将接收信号 \mathbf{x} 表示为^[28]

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s} + \mathbf{n} \in \mathbb{C}^N, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta^1), \mathbf{a}(\theta^2), \dots, \mathbf{a}(\theta^K)]$, $\theta^k \in [-90^\circ, 90^\circ], k=1, 2, \dots, K$,

$\mathbf{a}(\theta) = \left[1, \exp(-j2\pi f_c \frac{d \sin \theta}{c}), \dots, \exp(-j2\pi f_c \frac{(N-1)d \sin \theta}{c}) \right]^T$ 为阵列导向向量, f_c

为载波频率, $d = \frac{c}{2f_c}$ 为阵元间距, c 为波速, \mathbf{s} 为信号源的幅值, \mathbf{n} 为噪声。DOA

估计的目标在于从接收信号 \mathbf{x} 中恢复出方向 $\boldsymbol{\theta} = \{\theta^k\}_{k=1}^K$ 。实际工程中, 通常对目标 DOA 的范围存在先验。例如, 在多帧 DOA 估计问题中, 可以通过前几帧的 DOA 估计结果确定目标 DOA 的范围, 在后续帧的估计中可认为目标的 DOA 仅存在于确定的范围内; 当干扰存在时, 通过利用空域矩阵滤波器可使得来波信号仅存在于事先划定的范围内^[29]。假设已知目标的 DOA 范围为 $[\theta_1, \theta_2]$, 即 $\boldsymbol{\theta} \subset [\theta_1, \theta_2]$ 。基于这一特性, 可以仅在 $[\theta_1, \theta_2]$ 的范围内对目标 DOA 进行搜索, 因此算法复杂度相比 DOA 范围未知的情况相对更低。

2 基于原子范数最小化的限定区域 DOA 快速估计方法

2.1 问题构建

当不对目标的 DOA 的范围进行限制时, 为了从式(1)中的接收信号 \mathbf{x} 中估计 DOA, 可以构造原子集 $\mathbb{A} = \{\mathbf{a}(\theta)\mathbf{e}^{j\phi} : \theta \in [-90^\circ, 90^\circ], \phi \in [0, 2\pi)\}$, 并定义 \mathbf{x} 的原子范数 $\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{A}}$ 为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{A}} &\triangleq \inf \{t > 0 : \mathbf{x} \in t \cdot \text{conv}(\mathbb{A})\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^K c_k : \mathbf{x} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k \in \mathbb{A}, c_k > 0 \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

目标的 DOA 可以通过求解如下原子范数最小化问题进行估计

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathbb{A}}, \quad s.t. \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_2 \leq \epsilon. \quad (3)$$

当噪声不存在时, 上式转换为

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathbb{A}}, \quad s.t. \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}. \quad (4)$$

由于优化问题(3)和(4)涉及到无限个参数的优化, 因此无法直接求解。Candès 等人^[17]指出, 优化问题(4)等价于如下半正定规划问题

$$\min_{t, \mathbf{u}} \frac{1}{2}(t + u_0), \quad s.t. \begin{bmatrix} \text{Toep}(\mathbf{u}) & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^H & t \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (5)$$

其中 $\text{Toep}(\cdot)$ 为 Toeplitz 算子, 其作用是将向量 \mathbf{u} 转换为 Toeplitz 矩阵 $\text{Toep}(\mathbf{u})$ 。

容易证明, 对解得的 $\text{Toep}(\mathbf{u})$ 做 Vandermonde 分解得到

$$\text{Toep}(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^K p_k \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k), \quad (6)$$

其中解得的 $\{\theta_k\}_{k=1}^K$ 即为目标 DOA。

下面考虑对目标 DOA 范围有先验的情况。在基于字典的有网格参数估计框架下,这一先验信息可以通过对字典进行限制实现,即使得离散划分 $\Theta_{\text{dic}} \subset [\theta_1, \theta_2]$ 。对应到无网格的框架中,即构造新的原子集 $\mathbb{A}^{\text{new}} = \{\mathbf{a}(\theta) \mathbf{e}^{j\phi}, \theta \in [\theta_1, \theta_2], \phi \in [0, 2\pi)\}$ 。可以提出对应的原子范数最小化问题为

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}}, \quad \text{s.t.} \|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2^2 \leq \epsilon, \quad (7)$$

其中 ϵ 为噪声容限。当无噪声时,对应的原子范数最小化问题为

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}}, \quad \text{s.t.} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}. \quad (8)$$

本文主要针对无噪声的情况进行算法推导,有噪声情况的推导过程与之类似。

容易得到优化问题(8)的对偶问题为

$$\max_{\mathbf{q}} \langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad \text{s.t.} \|\mathbf{q}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}}^* \leq 1, \quad (9)$$

其中 $\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}}^*$ 表示 \mathbf{q} 的对偶原子范数,可以计算为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}}^* &= \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}} \leq 1} \langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}} = \max_{\mathbf{a} \in \mathbb{A}^{\text{new}}} \langle \mathbf{q}, \mathbf{a} \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \max_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} |\langle \mathbf{q}, \mathbf{a}(\theta) \rangle|. \end{aligned} \quad (10)$$

为了便于后续讨论,这里将入射角 θ 映射为空间频率 f , 即 $-2\pi f = 2\pi f_c d \sin \theta / c = \pi \sin \theta$, $f \in [f_L, f_H] \triangleq [-\sin \theta_2 / 2, -\sin \theta_1 / 2]$ 。将之代入式(10)有

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}}^* = \max_{f \in [f_L, f_H]} \left| \sum_{n=0}^{N-1} q_n \exp(-j2\pi fn) \right| = \max_{f \in [f_L, f_H]} |q(f)|, \quad (11)$$

其中对偶三角多项式 $q(f) \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} q_n \exp(-j2\pi fn)$, q_n 表示对偶变量 \mathbf{q} 的第 n 个元素。

类似的,后文均用粗斜体变量表示序列,用其斜体形式表示序列对应的离散时间 Fourier 变换,下标表示序列中元素的指标。因此 $\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}}^* \leq 1$ 等价于

$$|q(f)|^2 \leq 1, \forall f \in [f_L, f_H]. \quad (12)$$

注意到利用有界引理^[18]可以将约束 $|q(f)|^2 \leq 1, \forall f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 转换为半正定约束。

然而式(12)中仅对 $f \in [f_L, f_H]$ 中的情况进行了限制,因此有界引理不适用。注意到对偶多项式 $q(f)$ 实际上可以视为有限支撑序列 \mathbf{q} 的离散时间 Fourier 变换,因此可以通过对 \mathbf{q} 进行处理以使用有界引理。具体来说,若能构造序列 $\tilde{\mathbf{q}}$, 使得其频谱 $\tilde{q}(f)$ 在 $[f_L, f_H]$ 与 $q(f)$ 保持一致, 同时在其它频率上均为 0, 则

$|\tilde{q}(f)| \leq 1, \forall f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 与 $|q(f)|^2 \leq 1, \forall f \in [f_L, f_H]$ 近似等价。此时可对约束

$|\tilde{q}(f)| \leq 1, \forall f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 应用有界引理并将其转换为半正定约束。基于上述讨论，

可以首先使用理想带通滤波器对 \mathbf{q} 进行滤波。令通带为 $[f_L, f_H]$ 的理想带通滤波器为 $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^\infty$ ，其延时 n 后得到的序列为 \mathbf{h}_n ，可以构造理想带通滤波器算子为

$\mathbf{H} : \mathbf{q} \in \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbf{H}^\circ \mathbf{q} = \sum_{n=0}^{N-1} q_n \mathbf{h}_n \triangleq \mathbf{q}_H \in \mathbb{C}^\infty$ ，此时序列 \mathbf{q}_H 的离散时间 Fourier 变换

$q_H(f)$ 满足： $q_H(f) = \begin{cases} q(f), & f \in [f_L, f_H] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。从而有

$$|q(f)|^2 \leq 1, \forall f \in [f_L, f_H] \Leftrightarrow |q_H(f)| \leq 1, \forall f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \quad (13)$$

注意到利用有界引理转换得到的半正定约束中半正定矩阵的规模为 $(D+1) \times (D+1)$ ，其中 D 为变量 \mathbf{q}_H 的维数。由于此时输出的 \mathbf{q}_H 具有无穷维，因此无法将问题转换为有限大小的 SDP 问题。假设希望利用有界引理构造 $M \times M$ 的半正定矩阵，则需要设计降维算子 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{M \times \infty}$ ，使得

$$\mathcal{F}^\circ \mathbf{G}^\circ \mathbf{q}_H \approx \mathcal{F}^\circ \mathbf{q}_H, \quad (14)$$

其中 \mathcal{F} 为离散时间 Fourier 变换算子。仿真实验证明，通过对 \mathbf{q}_H 进行简单截断来设计 \mathbf{G} 已足够。具体的，延时的理想滤波器 \mathbf{h}_n 主瓣中心对应的索引为 $i_n = n$ ，则取 i_0 前侧约第四至第五旁瓣和 i_{N-1} 后侧同样约第四至第五旁瓣的部分即可。假设理想滤波器 \mathbf{h} 第五旁瓣的位置为 l_5 ，则将 \mathbf{h}_n 截断为其 $-l_5$ 和 $N-1+l_5$ 间的部分即可。令截断后的 \mathbf{h}_n 为 $\tilde{\mathbf{h}}_n$ ， $\tilde{\mathbf{H}} = [\tilde{\mathbf{h}}_0, \tilde{\mathbf{h}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{h}}_{N-1}]$ ，变换后的序列为 $\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{q}$ 。

尽管做了截断，但上述方法输出的 $\tilde{\mathbf{q}}$ 的维数 $N+2l_5$ 大于 \mathbf{q} 的维数 N ，导致最后得到的 SDP 问题规模较大。事实上，由于 $\tilde{\mathbf{q}}$ 的频谱被限制在 $[f_L, f_H]$ 中，其带宽 $B = f_H - f_L < 1$ ，因此完全可以通过降低采样率来减少采样数量。具体的，回到截断前的 \mathbf{q}_H ，此信号为严格的带通信号，因此可以对其重采样以使其频带充满 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 。具体的，首先对 \mathbf{q}_H 进行移相使得其成为低通信号 \mathbf{q}_{H_0} ，频带为 $[-B/2, B/2]$ 。当 $1/B$ 为整数时，直接对其进降采样 $1/B$ 倍即可； $1/B$ 不为整数时，则可通过对其用模拟低通滤波器进行内插，得到模拟信号，再按照 B 的 Nyquist 采样率重新采样即可。上述过程可以直接对 \mathbf{H} 进行。具体的，首先对延时理想带通滤波器 \mathbf{h}_n 进行移相使其称为延时理想低通滤波器 $\hat{\mathbf{h}}_n$ 。由于 $\hat{\mathbf{h}}_n$ 为带宽

为 B 的信号，因此可以将其内插为同样带宽为 B 的模拟信号 $\hat{h}_n(t)$ 。最后以 B 的 Nyquist 采样率对 $\hat{h}_n(t)$ 进行采样即可得到序列 $\tilde{\mathbf{h}}_n$ 。此时 $\tilde{\mathbf{h}}_n$ 的主瓣中心对应的索引为 $i_n = Bn$ 。令得到的新的滤波算子为 \mathbf{H}_0 ，令以和之前相似的准则做截断后，即将 $\tilde{\mathbf{h}}_n$ 截断为其 $i_0 - l_5 = -5$ 和 $i_{N-1} + l_5 = B(N-1) + 5$ 间的部分，得到的滤波矩阵为 $\tilde{\mathbf{H}}_0$ ，输出的信号为 $\tilde{\mathbf{q}}_0$ 。此时 $\tilde{\mathbf{q}}_0$ 的维数 $N_0 = \lceil B(N-1) \rceil + 11$ 通常比 \mathbf{q} 的维数更小，大约为 $O(NB)$ ，其中 $\lceil \cdot \rceil$ 表示向上取整。基于上述讨论，可以将 $|q(f)|^2 \leq 1, \forall f \in [f_L, f_H]$ 近似等价为 $|\tilde{q}_0(f)|^2 \leq 1$ ，其中 $\tilde{q}_0(f)$ 表示 $\tilde{\mathbf{q}}_0$ 的离散时间 Fourier 变换， $\forall f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ， $\tilde{\mathbf{q}}_0 = \tilde{\mathbf{H}}_0 \mathbf{q}$ 。由此可以得到对偶问题的 SDP 形式为

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_0} \langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad s.t. \quad \tilde{\mathbf{q}}_0 = \tilde{\mathbf{H}}_0 \mathbf{q} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \tilde{\mathbf{q}}_0 \\ \tilde{\mathbf{q}}_0^H & 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \sum_{i=1}^{N_0-k} \mathbf{P}_{i,i+k} = \delta_k, k=0,1,\dots,N_0-1. \end{aligned} \quad (15)$$

此时对应的原问题的 SDP 为

$$\min_{t, \mathbf{u}, \mathbf{y}} \frac{1}{2}(t + u_0), s.t. \begin{bmatrix} \mathbf{Toep}(\mathbf{u}) & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^H & t \end{bmatrix} \succeq 0, \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{H}}_0^H \mathbf{y}. \quad (16)$$

通过对解得的 $\mathbf{Toep}(\mathbf{u})$ 进行 Vandermonde 分解，可以将其写为如下形式：

$$\mathbf{Toep}(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^K p_k \mathbf{a}^0(f_k^0) \mathbf{a}^{0H}(f_k^0), \quad (17)$$

其中 $\mathbf{a}^0(f^0) = [1, \exp(j2\pi f^0), \dots, \exp(j2\pi f^0(N_0-1))]^T$ 。此时可以从中提取频率 $\{f_k^0\}_{k=1}^K$ 。按照前文的讨论，空间频率 f 可以通过 $f_k = f_k^0 \cdot B + \frac{f_H + f_L}{2}$ 得到，将空间频率对应回入射角 θ 即可实现 DOA 估计。

当考虑噪声和截断误差时，可以将优化问题(16)修正为

$$\min_{t, \mathbf{u}, \mathbf{y}} \frac{1}{2}(t + u_0), s.t. \begin{bmatrix} \mathbf{Toep}(\mathbf{u}) & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^H & t \end{bmatrix} \succeq 0, \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{H}}_0^H \mathbf{y}\|_2^2 \leq \epsilon, \quad (18)$$

其中 ϵ 为噪声容限。

将优化问题(16)与优化问题(5)对比，可以将接收信号 \mathbf{x} 理解为信号 \mathbf{y} 通过观测矩阵 $\tilde{\mathbf{H}}_0^H$ 的观测。为了表述方便，将空域导向向量 $\mathbf{a}(\theta)$ 也写作空间频率的函数的形式，具体的，令 $\mathbf{a}_f(f) = [1, \exp(j2\pi f), \dots, \exp(j2\pi f(N-1))]^T$ 。这里 $\mathbf{a}_f(f)$ 为式(1)中导向向量 $\mathbf{a}(\theta)$ 的空间频率表示，即 $\mathbf{a}_f(-f_c \frac{d \sin \theta}{c}) = \mathbf{a}(\theta)$ 。容易证明，

$$\mathbf{a}_f(f^0 \cdot B + \frac{f_H + f_L}{2}) \approx \tilde{\mathbf{H}}_0^H \mathbf{a}^0(f^0). \quad (19)$$

进一步的，建立新的原子集为 $\mathbb{A}^{\text{new}} = \left\{ \mathbf{a}^0(f) e^{j\phi} : f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \phi \in [0, 2\pi) \right\}$ ，可以看出

$$\mathbb{A}^{\text{new}} \approx \widetilde{\mathbf{H}}_0^H \circ \mathbb{A}^0 \triangleq \left\{ \widetilde{\mathbf{H}}_0^H \mathbf{a}^0 : \mathbf{a}^0 \in \mathbb{A}^0 \right\}. \quad (20)$$

事实上，优化问题(16)可以看作当原子集为 $\widetilde{\mathbf{H}}_0^H \circ \mathbb{A}^0$ 时的 ANM 问题。定理 1 给出了更一般情况下的结论。

定理 1 对初始原子集 \mathbb{A} ，定义原子集 \mathbb{A}^{new} 为 $\mathbb{A}^{\text{new}} = \left\{ \mathbf{G}^H \mathbf{a} : \mathbf{a} \in \mathbb{A} \right\}$ ，其中 \mathbf{G} 为任意指定的观测矩阵。则有

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}} = \min_{\mathbf{y}} \|\mathbf{y}\|_{\mathbb{A}}, \quad s.t. \mathbf{x} = \mathbf{G}^H \mathbf{y}. \quad (21)$$

定理 1 证明于附录 A 中。

式(18)可被视作定理 1 中的特殊情况。具体的，当原子集为 $\widetilde{\mathbf{H}}_0^H \circ \mathbb{A}^0$ 时，此时可以构造 ANM 问题为

$$\min_{\mathbf{y}_0} \|\mathbf{y}_0\|_{\widetilde{\mathbf{H}}_0^H \circ \mathbb{A}^0}, \quad s.t. \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}\|_2^2 \leq \epsilon. \quad (22)$$

利用定理 1，上式恰好等价于式(18)。

值得一提的是，现有文献中大部分基于 ANM 的参数估计方法都是通过将接收信号 \mathbf{x} 视作从某个可以使用 ANM 方法进行参数估计的信号， \mathbf{y} ，通过某种观测矩阵 \mathbf{G} 得到的观测，利用 \mathbf{y} 在对应原子集中稀疏性实现参数估计^[19]。这些文献大多仅关注了被观测信号 \mathbf{y} 的稀疏性，忽视了观测矩阵 \mathbf{G} 的作用。本文提出的定理 1 为理解观测矩阵 \mathbf{G} 的作用提供了一种思路：其使得通过 \mathbf{G} 观测得到的信号在由 \mathbf{G} 限制的原子集 $\mathbf{G}^H \circ \mathbb{A}$ 中具有稀疏性。

通过式(18)和式(19)还可对算子 $\widetilde{\mathbf{H}}_0$ 由于截断带来的误差进行分析。具体的，将式(19)代入式(1)，有

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(f^k) s_k + \mathbf{n} \\ &= \sum_{k=1}^K \left(\widetilde{\mathbf{H}}_0^H \mathbf{a}^0 \left(\left(f^k - \frac{f_H + f_L}{2} \right) / B \right) + \mathbf{w}_k \right) s_k + \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $\mathbf{w}_k = \mathbf{a}(f^k) - \widetilde{\mathbf{H}}_0^H \mathbf{a}^0 \left(\left(f^k - \frac{f_H + f_L}{2} \right) / B \right)$ 可被理解为截断噪声。从上式可以看出，截断带来的影响为引入了额外的噪声。基于上述讨论，对于给定的截断后的维数 N_0 ，截断算子 \mathbf{G} 的设计应使得截断噪声 \mathbf{w}_k 的功率 $\|\mathbf{w}_k\|_2^2$ 尽量小。仿真实验证明，当将理想滤波器截断至 i_0 前侧第五旁瓣和 i_{N-1} 后侧同样第五旁瓣的部分时，

截断噪声功率约为-30 dB，相比于接收噪声 \mathbf{n} ，此时截断噪声几乎可被忽略不计。

2.2 基于原对偶内点法的通用原子范数最小化问题求解方法

综上所述，上述限定区域问题的 DOA 估计问题可以通过式(18)进行求解。式(18)对噪声的约束是硬约束，因此在一些情况中可能出现没有可行解的问题。为此，可以将目标函数改写成原子范数正则化的形式^[30]

$$\min_{t, \mathbf{u}, \mathbf{y}} \tau \cdot (t + u_0) + \|\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{H}}_0^H \mathbf{y}\|_2^2, \quad (24)$$

其中 τ 为正则化参数。为了高效求解式(24)，本节将给出一种基于原对偶内点法的快速求解方法。

本文主要考虑以下更一般的原子范数最小化问题

$$\begin{aligned} p^* = \min_{\mu} \tau \cdot \left(\text{Tr}(\mathbf{W}) + \frac{1}{N} \text{Tr}(\text{Toep}(\mathbf{u})) \right) + \|\mathbf{G}^H \mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2^2, \quad s.t. \\ \mu \in \mathcal{K} = \left\{ \mu \mid \begin{bmatrix} \text{Toep}(\mathbf{u}) & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^H & \mathbf{W} \end{bmatrix} \succeq 0, \mathbf{u} \in \mathcal{C} \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{N \times M}$ ， $\mathbf{Y} = \mathbf{G}^H \mathbf{Y}_0$ ， $\mu = [\mathbf{u}^T, \text{vec}(\mathbf{X})^T, \text{vec}(\mathbf{W})^T]^T$ ， $\mathcal{C} = \{\mathbf{u} \mid \text{Toep}(\mathbf{u}) \succeq 0\}$ 。

优化问题(24)可被视作优化问题(25)的特例，其中 $\mathbf{G} = \widetilde{\mathbf{H}}_0$ ， $\mathbf{X} = \mathbf{y}$ ， $\mathbf{Y} = \mathbf{x}$ ， $\mathbf{W} = t$ 。

将 μ 的对偶变量记为 $\lambda = [\xi^T, \text{vec}(\mathbf{S})^T, \text{vec}(\mathbf{V})^T]^T$ 。优化问题(25)的 Lagrange 对偶可被写为如下形式：

$$\mathcal{L}(\mu, \lambda) = \tau \cdot \left(\text{Tr}(\mathbf{W}) + \frac{1}{N} \text{Tr}(\text{Toep}(\mathbf{u})) \right) + \|\mathbf{G}^H \mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2^2 - \langle \mu, \lambda \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (26)$$

其中 $\mu \in \mathcal{K}$ ， $\lambda \in \mathcal{K}^*$ ， \mathcal{K}^* 为 \mathcal{K} 的对偶锥。Gao 等人^[27]推导得到

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^* = \left\{ \lambda \mid \mathbf{V} \succeq 0, \mathbf{S} = 0, \xi \in \mathcal{C}^* \right\} \cup \\ \left\{ \lambda = [\xi^T, \text{vec}(\mathbf{S})^T, \text{vec}(\mathbf{V})^T]^T \mid \mathbf{V} \succ 0, \left(\xi - \frac{1}{4} \text{Toep}^*(\mathbf{S} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{S}^H) \right) \in \mathcal{C}^* \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

由此可以得到对应的对偶问题为

$$d^* = \max_{\lambda} g(\lambda) = \max_{\lambda} \inf_{\mu} \mathcal{L}(\mu, \lambda), s.t. \quad \mu \in \mathcal{K}, \lambda \in \mathcal{K}^*. \quad (28)$$

对偶间隙为

$$\eta(\mu, \lambda) = f(\mu) - g(\lambda). \quad (29)$$

由于原问题(25)满足 KKT 条件^[31]，因此有

$$\eta(\mu^*, \lambda^*) = p^* - d^* = 0. \quad (30)$$

容易证明，对偶函数 $g(\lambda)$ 的值为

$$g(\lambda) = -\frac{1}{4} \|\Sigma^{-1/2} \mathbf{U}^H \mathbf{S}\|_2^2 - \langle \mathbf{U}^H \mathbf{S}, \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0 \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (31)$$

其中 $\mathbf{G}\mathbf{G}^H = [\mathbf{U}, \mathbf{U}_c] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{U}, \mathbf{U}_c]^H = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{U}^H$ 是 $\mathbf{G}\mathbf{G}^H$ 的特征值分解。

本节的目标是在原对偶内点法的框架下对原问题(25)进行求解。具体的，本节使用对数齐次函数 $F(\boldsymbol{\mu})$ 作为和原锥 \mathcal{K} 对应的障碍函数。 $F(\boldsymbol{\mu})$ 定义如下：

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\mu}) &= -\log \det \left(\begin{bmatrix} \text{Toep}(\mathbf{u}) & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^H & \mathbf{W} \end{bmatrix} \right) \\ &= -\log \det(\text{Toep}(\mathbf{u})) - \log \det(\mathbf{W} - \mathbf{X}^H \text{Toep}^{-1}(\mathbf{u}) \mathbf{X}), \end{aligned} \quad (32)$$

其中 $\log(\cdot)$ 表示自然对数函数。

原对偶内点法通过迭代求解以下问题来求解式(25)

$$\min_{\boldsymbol{\mu}} f(\boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{t} F(\boldsymbol{\mu}), \quad (33)$$

其中 $t > 0$ 在每次迭代中递增。可以证明当 $t \rightarrow \infty$ 时式(33)的解收敛于式(25)的解^[31]。式(33)对应的增广 KKT 条件为

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = 0, \quad (34a)$$

$$\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{K}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{K}^*, \quad (34b)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = -\frac{1}{t} \nabla_{\boldsymbol{\mu}} F(\boldsymbol{\mu}). \quad (34c)$$

这里梯度算子 ∇ 定义为 Wirtinger 导数，定义为 $\nabla_{z=a+jb} f(z) \triangleq \frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{\partial f}{\partial a} + j \frac{\partial f}{\partial b}$ ^[32]。

由式(34)可得

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \tau \mathbf{I}, \\ \mathbf{S} = 2\mathbf{G}\mathbf{G}^H (\mathbf{X} - \mathbf{Y}_0), \\ \boldsymbol{\xi} = \tau \mathbf{W}, \end{cases} \quad (35)$$

和

$$\mathbf{W} = \frac{1}{t\tau} \mathbf{I} + \mathbf{X}^H \text{Toep}^{-1}(\mathbf{u}) \mathbf{X}, \quad (36a)$$

$$-\tau \mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{G}^H (\text{Toep}(\mathbf{u}) \mathbf{A} - \mathbf{Y}_0), \quad (36b)$$

$$\tau \mathbf{W} = \frac{1}{t} \text{Toep}^*(\text{Toep}^{-1}(\mathbf{u})) + \tau \text{Toep}^*(\mathbf{A} \mathbf{A}^H), \quad (36c)$$

其中 $\mathbf{A} = \text{Toep}^{-1}(\mathbf{u}) \mathbf{X}$ 。与文献[27]和文献[25]类似，原对偶变量 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 可分别从式(36)和式(35)中解得。具体的， \mathbf{u} 可从式(36c)求得， \mathbf{X} 可从式(36b)中解得， \mathbf{W} 可通过式(36a)得到。对偶变量可从式(35)中求得。在本节所研究的问题中，主要的技术难点来源于式(36b)中 \mathbf{A} 的求解。在文献[25]中，式(36b)右边与 \mathbf{A} 相关的部分

可以直接移到左边， Λ 可以利用 Levinson-Durbin 算法快速求解。文献[27]中的问题可以视为本节所研究问题的一个特例，其中的观测矩阵 $\mathbf{G} = \mathbf{\Gamma}^H$ 为简单的元素选择矩阵。由于左乘 Λ 的矩阵不具备 Toeplitz 结构，因此此时无法使用 Levinson-Durbin 算法进行快速求解。然而，由于 $\mathbf{\Gamma}^H \mathbf{\Gamma}$ 是幂等的，因此需要求逆的矩阵的规模可以被大幅降低。这一点使得文献[27]中提出的算法的速度得到了提升。相比之下，本节中考虑的问题更具有一般性，此时 $\mathbf{G}\mathbf{G}^H$ 并不总是具有幂等性。基于这一问题，本节提出以下方法以高效求解式(36b)。基于 $\mathbf{G}\mathbf{G}^H$ 的特征值分解，有

$$-\tau \Lambda = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{U}^H (\text{Toep}(\mathbf{u}) \Lambda - \mathbf{Y}_0). \quad (37)$$

同时对式(37)的两边左乘 $\mathbf{U}\mathbf{U}^H$ ，可以得到

$$-\tau \mathbf{U}\mathbf{U}^H \Lambda = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{U}^H (\text{Toep}(\mathbf{u}) \Lambda - \mathbf{Y}_0) = -\tau \Lambda \quad (38)$$

由此可得

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^H \Lambda = \Lambda. \quad (39)$$

从式(37)可得

$$-\tau \mathbf{U} \Sigma^{-1} \mathbf{U}^H \Lambda = \mathbf{U} \mathbf{U}^H (\text{Toep}(\mathbf{u}) \Lambda - \mathbf{Y}_0). \quad (40)$$

因此有

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^H (\text{Toep}(\mathbf{u}) + \tau \mathbf{U} \Sigma^{-1} \mathbf{U}^H) \Lambda = \mathbf{U} \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0. \quad (41)$$

注意到 $\mathbf{U}\mathbf{U}^H \Lambda = \Lambda$ ，因此有

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^H (\text{Toep}(\mathbf{u}) + \tau \mathbf{U} \Sigma^{-1} \mathbf{U}^H) \mathbf{U} \mathbf{U}^H \Lambda = \mathbf{U} \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0. \quad (42)$$

由于 \mathbf{U} 为列满秩矩阵，因此有

$$\begin{aligned} & (\mathbf{U}^H (\text{Toep}(\mathbf{u}) + \tau \mathbf{U} \Sigma^{-1} \mathbf{U}^H) \mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}^H \Lambda \\ &= (\mathbf{U}^H \text{Toep}(\mathbf{u}) \mathbf{U} + \tau \Sigma^{-1}) \cdot \mathbf{U}^H \Lambda = \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0. \end{aligned} \quad (43)$$

结合式(39)可以得出以下结果：

$$\Lambda = \mathbf{U} (\mathbf{U}^H \text{Toep}(\mathbf{u}) \mathbf{U} + \tau \Sigma^{-1})^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0. \quad (44)$$

值得一提的是，在式(44)中仅需要计算 $(\mathbf{U}^H \text{Toep}(\mathbf{u}) \mathbf{U} + \tau \Sigma^{-1})$ 的逆，其规模相比式(36b)中需要求逆的矩阵得到了大幅降低。需要注意的是通常只能得到 \mathbf{Y}_0 的观测 $\mathbf{Y} = \mathbf{G}^H \mathbf{Y}_0$ 。为了计算式(44)中出现的 $\mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0$ ，可以推得

$$\mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0 = \Sigma^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{G} \mathbf{Y}. \quad (45)$$

基于以上讨论，当求得 \mathbf{u} 后，原变量和对偶变量可以被解析的解出，并且可以被写为 \mathbf{u} 的函数，分别为 $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u})$ 和 $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{u})$ 。以上结果总结如下：

$$\mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0 = \Sigma^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{G} \mathbf{Y}, \quad (46a)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \left(\mathbf{U}^H \mathbf{Toep}(\mathbf{u}) \mathbf{U} + \tau \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0, \quad (46b)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{Toep}(\mathbf{u}) \mathbf{A}, \quad (46c)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{t\tau} \mathbf{I} + \mathbf{X}^H \mathbf{Toep}^{-1}(\mathbf{u}) \mathbf{X}, \quad (46d)$$

$$\mathbf{V} = \tau \mathbf{I}, \quad (46e)$$

$$\mathbf{S} = 2\mathbf{G}\mathbf{G}^H \mathbf{X} - 2\mathbf{G}\mathbf{Y}, \quad (46f)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \tau \mathbf{W}. \quad (46g)$$

值得注意的是式(46b)，式(46c)以及式(46d)可以高效求解。具体的，式(46b)和式(46c)中的 $\mathbf{Toep}(\mathbf{u})\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{Toep}(\mathbf{u})\mathbf{A}$ 可以通过快速 Fourier 变换求解，而式(46d)中的 $\mathbf{Toep}^{-1}(\mathbf{u})\mathbf{X}$ 则可以通过 Levinson-Durbin 算法快速求解。

最后考虑从式(36c)中求解 \mathbf{u} 的问题。容易验证式(36c)的求解与下面的优化问题等价：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{U}} \psi_t(\mathbf{U}) &= \tau \cdot (\mathbf{W}^T \mathbf{U}) + \tau \cdot (\mathbf{Y}_0^H \mathbf{A}) - \frac{1}{t} \log \det(\mathbf{Toep}(\mathbf{u})), \\ \text{s.t. } \mathbf{U} &\in \mathcal{C}. \end{aligned} \quad (47)$$

问题(47)可以通过 Newton 或伪 Newton 法进行求解。沿用文献[27]和文献[25]中的方法，本节仍使用伪 Newton 法中的有限内存 Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno(Limited Memory BFGS, L-BFGS)算法^[26]来实现对搜索方向的高效求解。L-BFGS 算法需要对 Hessian 矩阵进行初始化，通常将其初始化为单位矩阵 $\widehat{\mathbf{H}}_i = \mathbf{I}$ 。Hansen 等人^[25]发现这样的初始化会导致算法收敛很慢，因此提出了一种启发式的 Hessian 矩阵的对角矩阵近似

$$\widehat{\mathbf{H}}_i = \text{diag}(1, \frac{N-1}{2N}, \dots, \frac{1}{2N}, \frac{N-1}{2N}, \dots, \frac{1}{2N}) \nabla_u^2 [\psi_{t_i}(\mathbf{u}_{i-1})]_{00}. \quad (48)$$

本节中沿用这一初始化方案，并对其中的 $\nabla_u^2 [\psi_t(\mathbf{u})]_{00}$ 进行了如下计算：

$$\begin{aligned} \nabla_u^2 [\psi_t(\mathbf{u})]_{00} &= 8\tau \text{Tr} \left(\mathbf{A}^H \mathbf{U} (\mathbf{U}^H \mathbf{Toep}(\mathbf{u}) \mathbf{U} + \tau \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \mathbf{U}^H \mathbf{A} \right) \\ &+ \frac{4}{t} \text{Tr} \left(\mathbf{Toep}^{-1}(\mathbf{u}) \mathbf{Toep}^{-1}(\mathbf{u}) \right). \end{aligned} \quad (49)$$

至此已经完成了算法主要的更新步骤的推导，基于原对偶内点法的框架，其余步骤仍沿用文献[27]和文献[25]中的设定，完整算法总结于表 1 中。

表 1 基于原对偶内点法的限定区域原子范数最小化方法 (FCA-ANM)

输入： 接收信号 \mathbf{Y} ，观测矩阵 \mathbf{G} ，正则化参数 τ ，容限 ϵ ，相对容限 ϵ_{rel} ，回溯线搜索参数 (α, β)

输出: \mathbf{u}, X

- 1: 对 $(\boldsymbol{\mu}_0, \lambda_0)$ 进行初始化, $f_{\text{LB}} \leftarrow g(\lambda_0)$
 - 2: $\eta_i \leftarrow f(\boldsymbol{\mu}_i) - f_{\text{LB}}$, $t_i \leftarrow \max\left(t_{i-1}, \frac{\theta_F}{\sigma \cdot \eta_{i-1}}\right)$
 - 3: **while** $\eta \geq \epsilon$ 且 $\eta / f(\boldsymbol{\mu}) \geq \epsilon_{\text{rel}}$ **do**
 - 4: 利用 L-BFGS 算法求解式(47)并得到线搜索方向 $\Delta \mathbf{u}$, 其中初始化的 Hessian 矩阵 $\hat{\mathbf{H}}$ 通过式(48)和式(49)求得
 - 5: 通过回溯线搜索方法得到更新步长 s
 - 6: $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} + s\Delta \mathbf{u}$
 - 7: 根据式 (53) 对 $(\boldsymbol{\mu}, \lambda)$ 进行更新, $\eta_i \leftarrow f(\boldsymbol{\mu}_i) - f_{\text{LB}}$,
 $t_i \leftarrow \max\left(t_{i-1}, \frac{\theta_F}{\sigma \cdot \eta_{i-1}}\right)$
 - 8: **end while**
-

2.3 算法复杂度分析

本文主要采用下列算法进行 DOA 估计: 首先是忽略对 DOA 范围的先验, 直接采用式(5)中描述的原子范数最小化方法进行 DOA 估计, 并在估计后将所限定区域外的 DOA 估计值排除, 称此方法为 ANM 方法; 其次是基于第 2.2 节中提出的离散划分构造的字典的有网格方法, 为了提高效率采用 SBL 方法求解, 并使用文献[35]中提供的求解包进行实现, 将此方法称为限定区域(Constrained Area)-SBL 方法, 简称为 CA-SBL 方法; 之后是基于本文提出的式(17)中描述的原子范数最小化方法进行求解, 将其命名为限定区域(Constrained Area)-ANM 方法, 简称为 CA-ANM 方法; 最后是利用本文提出的基于原对偶内点法的快速求解方法对 CA-ANM 进行求解的方法, 称之为快速(Fast)CA-ANM 方法, 简称为 FCA-ANM 方法。由于有网格的 CA-SBL 算法的求解机制与其余的无网格算法不同, 本小节仅对三种基于原子范数最小化方法的算法的复杂度进行分析。现有的通用求解器一般使用内点法进行半正定规划问题的求解, 其单次迭代的复杂度主要来源于牛顿方向的求解。因此, 一次迭代中, ANM 算法和 CA-ANM 算法的复杂度分别为 $O(N^3)$ 和 $O(N^3 B^3)$ ^[27]。对于本文所提快速求解算法, 其单次迭代的复杂度主要来源于 L-BFGS 优化, 其复杂度为 $O(N^2 B^2)$ 。

3 数值仿真

本节对第 2 节中提出的算法进行数值仿真。假设有 3 个远场平面波信号照射在阵元数 N_m 的均匀线阵上, 其 DOA 分别为 0° , 13.2° 和 -17.8° 。上述 DOA 设置

主要是为了体现有网格方法网格失配的影响。具体的，以 1° 为间隔进行划分得到 θ_{dic} ，此时目标存在不落在网格上的 DOA，产生网格失配。假设在探测前已知目标 DOA 的范围为 $[-30^\circ, 30^\circ]$ 。令接收噪声为服从 $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_{N_m})$ 的圆高斯白噪声。阵元间距取半波长 $d = \frac{\lambda}{2}$ ，此时不存在混叠。本节的仿真均基于 MATLAB 2021b 进行，其中涉及到的优化问题均使用 CVX 工具包^[24]求解，求解器采用 SDPT3。仿真所用设备的 CPU 为 12th Gen Intel(R) Core(TM) i7-12700H 2.30 GHz，机带 RAM 为 16.0 GB。

首先验证各算法在噪声环境下的性能。分别验证阵元数 $N_m = 50$ 和 $N_m = 100$ 时算法的性能，设置信噪比(signal-to-noise ratio, SNR)为-20 dB 到 30 dB 和-20 dB 到 10 dB。对每个 SNR 进行 100 次 Monte Carlo 仿真。分别从估计成功次数和估计的根均方误差(root mean square error, RMSE)两个角度刻画算法的性能。对于一次 Monte Carlo 仿真，定义估计的根方误差(root square error, RSE)为

$$\text{RSE} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{Tar}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} (\hat{\theta}_k - \theta_k)^2},$$

其中 $N_{\text{Tar}} = 3$ 为目标个数， $\hat{\theta}_k$ 为第 k 个目标的 DOA 估计， θ_k 为第 k 个目标的真实 DOA。由于有网格算法 CA-SBL 中网格间隔为 1° ，因此仅将真实值附近一个网格内的估计认定为成功估计，因此定义当 $\text{RSE} \leq 0.5^\circ$ 时估计成功。RSE 可被理解为估计得到的 DOA 与真实 DOA 间的欧氏距离。本文中对成功估计的定义与文献[34]中类似，其中将估计值落在真实值附近的单元中的情况定义为成功估计。对于估计成功的仿真轮次，定义估计的 RMSE 为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{succ}}^{\text{trial}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{succ}}^{\text{trial}}} \left[\frac{1}{N_{\text{Tar}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} (\hat{\theta}_{k,n} - \theta_k)^2 \right]},$$

其中 $N_{\text{succ}}^{\text{trial}} \leq 100$ 为成功估计次数， $\hat{\theta}_{k,n}$ 为第 n 次成功估计中对第 k 个目标的 DOA 估计。将 $N_m = 50$ 时各算法的成功估计次数和 RMSE 随 SNR 的变化曲线分别绘制于图 1(a)和图 1(b)中，将 $N_m = 100$ 时各算法的成功估计次数和 RMSE 随 SNR 的变化曲线分别绘制于图 1(c)和图 1(d)中。

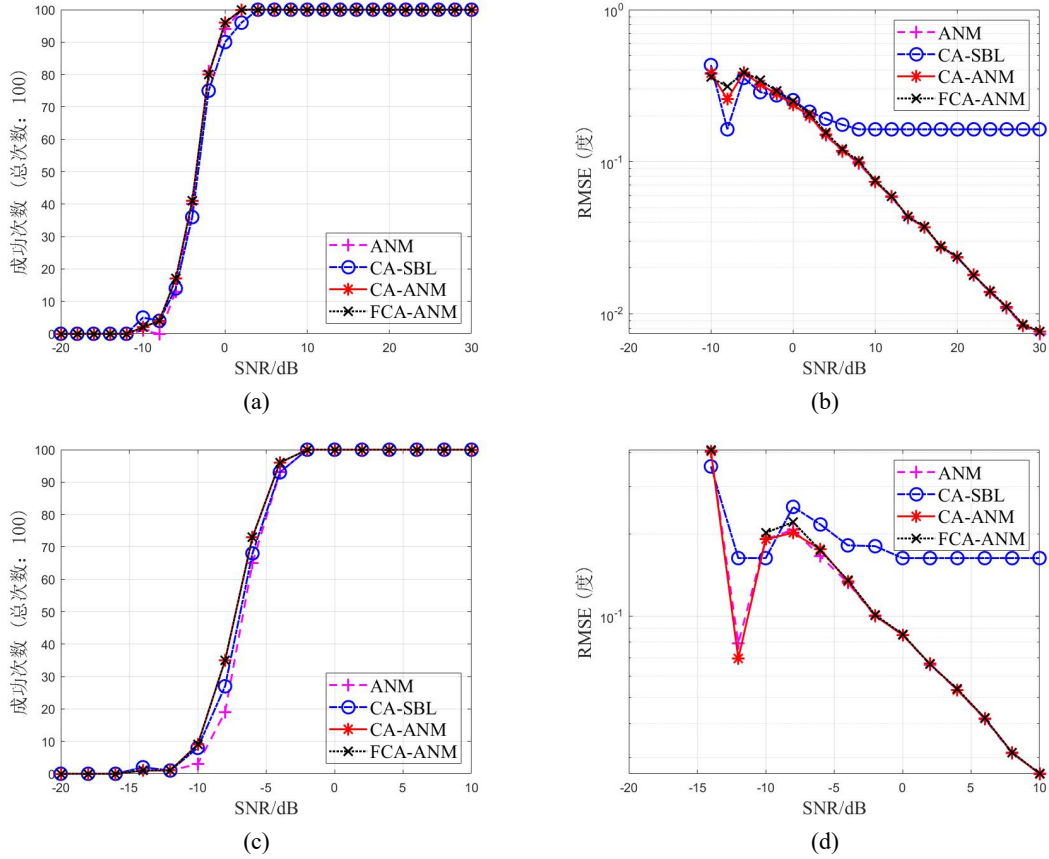


图 1 阵元数 $N_m = 50$ 和 100 时不同信噪比下的成功估计次数和 RMSE

(a) 成功估计次数 V.S. SNR, $N_m = 50$; (b) RMSE V.S. SNR, $N_m = 50$;

(c) 成功估计次数 V.S. SNR, $N_m = 100$; (d) RMSE V.S. SNR, $N_m = 100$

当 $N_m = 50$ 时, 从图 1(a)中可以看出, 当信噪比高于 0 dB 时所有方法均能成功实现 DOA 估计, 其中本文提出的限定区域的估计方法 CA-SBL、CA-ANM 和 FCA-ANM 在低信噪比时成功率略高于原始的 ANM 方法。这说明通过限定 DOA 的估计范围有益于提升算法鲁棒性。从图 1(b)中可以看出, 所有方法的估计精度在低信噪比时相当。然而, 当信噪比高于 5 dB 后, 由于受到网格失配的影响, CA-SBL 方法的性能不再有明显提升, 而其余的无网格方法则随着信噪比增加提升了估计精度, 展现了无网格的优越性。在无网格方法中, ANM、CA-ANM 和 FCA-ANM 的性能几乎一致。当 $N_m = 100$ 时, 从图 1(c)和图 1(d)可以看出, 此时各算法成功估计次数和 RMSE 随 SNR 变化的趋势与 $N_m = 50$ 时一致。但在同一 SNR 下, $N_m = 100$ 时各算法的成功估计次数和精度均高于 $N_m = 50$ 时的表现, 由此可见阵元个数的增加有利于提升算法的鲁棒性。

接下来对各个算法的运算速度进行比较, 此时固定 $\text{SNR} = 30$ dB。首先对阵元个数对运算速度的影响进行仿真。将阵元个数 N_m 设置为 20 到 100 。对于每一个 N_m , 进行 100 次 Monte Carlo 仿真并记录各算法的运算时间, 将各次仿真记录

的时间进行平均作为真实的运算时间。仍然认为当一次仿真的 $RSE \leq 5^\circ$ 时估计成功。仿真结果表明，对于每一个 N_m ，此时所有算法的成功估计次数均为 100 次。将各算法 RMSE 和运算时间随阵元个数 N_m 变化的曲线分别绘制于图 2(a)和图 2(b)中。

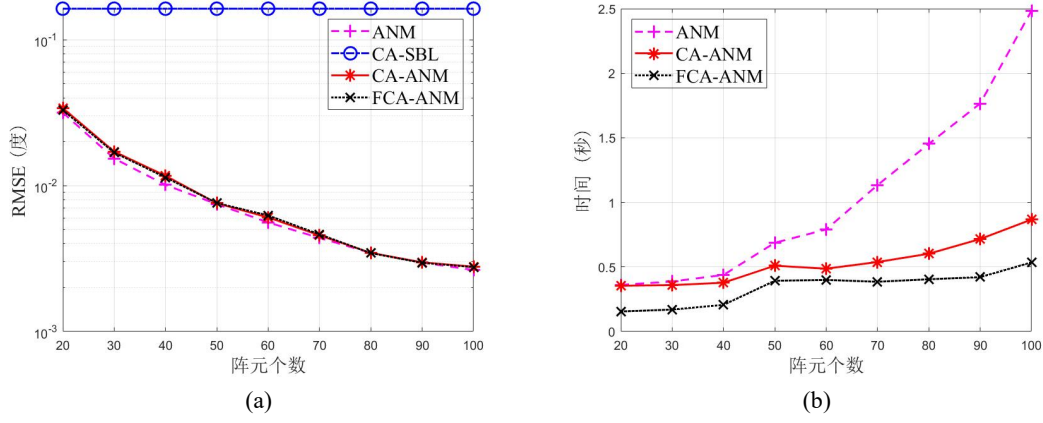


图 2 阵元个数不同时的 RMSE 以及运算时间

(a) RMSE V.S. 阵元个数; (b) 运算时间 V.S. 阵元个数

从图 2(a)中可以看出，由于受到网格失配的影响，有网格的 CA-SBL 算法的估计精确性弱于无网格的 ANM、CA-ANM 和 FCA-ANM 方法。在无网格算法中，对全区域进行 DOA 估计的 ANM 算法的精度略优于所提限定区域的 DOA 估计算法，而快速算法 FCA-ANM 和 CA-ANM 的表现则基本一致，进一步体现了快速算法的可靠性。由于有网格的 CA-SBL 算法的求解机制与其余的无网格算法不同，为了公平起见图 2(b)中仅对三种无网格算法的运算时间进行对比。从图 2(b)中可以看出，随着阵元个数的增加，所有算法的运算时间均呈现上升趋势，同时对于所有的阵元个数，本文提出的快速算法 FCA-ANM 的运算时间均显著低于其它算法，体现了所提快速算法的高效性。另外，还可以发现当阵元个数较大时，本文所提 CA-ANM 算法的运算时间显著低于 ANM 算法。这与第 2 节中的讨论一致，即 ANM 算法中对偶变量 q 的维数为 N ，而 CA-ANM 算法中对偶变量 \tilde{q}_0 的维数则约为 $O(NB)$ ，其中 $B < 1$ 为空间频率的带宽，因此 CA-ANM 算法的运算量将小于 ANM 算法。

下面对 DOA 搜索范围对算法速度的影响进行仿真。仍固定 $SNR=30$ dB，以 0° 为中心，设置角度范围为 60° （即 $[-30^\circ, 30^\circ]$ ）到 180° （即全空间），进行 100 次 Monte Carlo 仿真。仿真结果表明，对于每一个搜索范围，此时所有算法的成功估计次数均为 100 次。将各算法 RMSE 和运算时间随角度范围变化的曲线分别绘制于图 3(a)和图 3(b)中。

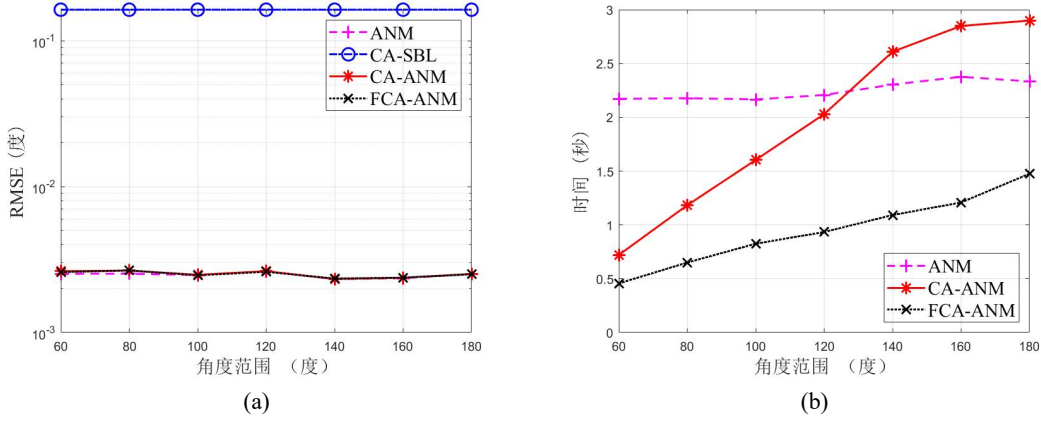


图 3 DOA 搜索范围不同时的 RMSE 以及运算时间

(a) RMSE V.S. 角度范围; (b) 运算时间 V.S. 角度范围

从图 3(a)中可以看出, 由于受到网格失配的影响, 有网格的 CA-SBL 算法的估计精确性弱于无网格的 ANM、CA-ANM 和 FCA-ANM 方法。对于不同的 DOA 搜索范围, 各算法的精度基本一致, 说明对 DOA 的搜索范围进行限制不会影响算法的精度。从图 3(b)可以看出, 所提限制区域算法 CA-ANM 和 FCA-ANM 的运算时间均随角度搜索范围的扩大而上升。当 DOA 搜索范围不超过 120° 时, 所提 CA-ANM 算法的运算时间小于 ANM 算法, 表明通过减少 DOA 搜索范围可以提升运算速度, 这与之前的分析一致。当 DOA 搜索范围较大时, 此时空间频率的带宽 B 接近 1, CA-ANM 算法对算法规模的缩减不明显, 同时其所对应的优化问题形式相比 ANM 算法更复杂, 导致其运算时间超过 ANM 算法。相比之下, 所提快速算法 FCA-ANM 算法的运算速度显著优于 CA-ANM 算法, 且运算时间始终小于 ANM 算法, 展现了所提快速算法的高效性。

如第 2.1 节最后所述, 对映射算子 \mathbf{H}_0 进行截断得到 $\tilde{\mathbf{H}}_0$ 会引入额外的噪声。为了验证此噪声对算法性能造成的影响, 分别验证从截断至主瓣处到截断至第 30 旁瓣处时 CA-ANM 算法的性能。设置阵元数 $N_m = 100$, SNR 从 -20 dB 到 30 dB。将各截断方法引入的截断噪声与 DOA 的关系绘制于图 4 中, 将各算法的成功估计次数和 RMSE 随 SNR 的变化曲线分别绘制于图 5(a)和图 5(b)中。

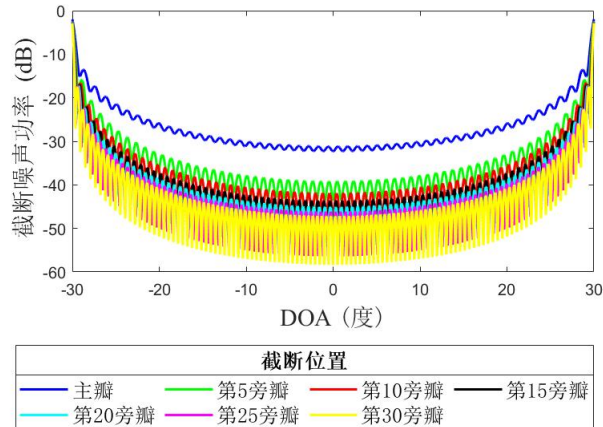


图 4 截断误差与 DOA 的关系

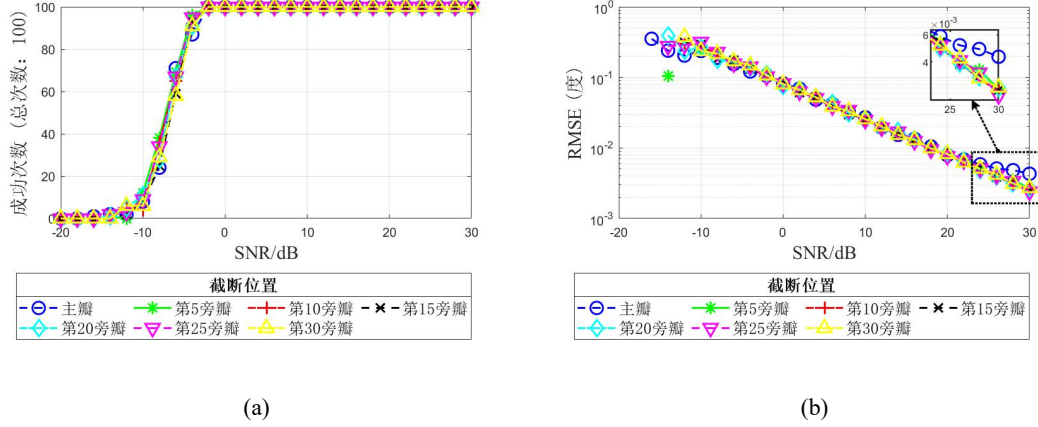


图 5 截断阶数不同时 CA-ANM 算法在不同信噪比下的成功估计次数和 RMSE
(a) 成功估计次数 V.S. SNR; (b) RMSE V.S. SNR

从图 4 可以看出, 对于所有截断方法, 截断噪声在 0° 附近最小, 而在靠近边缘处较大。当仅截断至主瓣处时, 此时所有 DOA 对应的截断噪声均较大, 约为 -20 dB。而当截断至第五旁瓣即以上时, 大部分区域的截断噪声均不超过 -30 dB。随着截断阶数的升高, 截断噪声的最小值下降, 且边缘截断噪声较高的区域更窄。

从图 5(a)可以看出, 对于不同的截断方法, CA-ANM 算法的成功估计次数基本保持一致。而从图 5(b)则可以看出, CA-ANM 算法估计结果的 RMSE 在低信噪比下基本保持一致, 但当信噪比较高时 (大于 20 dB), 截断至主瓣处的算法的 RMSE 高于其它算法。这与图 4 中截断误差的仿真结果一致, 截断至主瓣处的算法的截断误差约为 -20 dB, 因此当信噪比达到 20 dB 时截断误差的影响开始显现, 使得相应算法的性能在此时弱于其它算法。相比之下, 截断至第五旁瓣处的算法的性能在仿真的信噪比区间中与其它算法保持一致, 证明了将截断算子 \mathbf{G} 设计为截断至第 5 旁瓣处的合理性。

最后对截断噪声对算法收敛性的影响进行仿真。由于 CA-ANM 算法通过 CVX 包进行优化求解, 因此无法对其收敛性直接进行仿真, 此处仅对本文所提基于原对偶内点法进行优化求解的 FCA-ANM 算法的收敛性进行仿真。如前所述, 截断操作的影响仅为引入了额外的噪声, 因此不应对算法的收敛性造成显著影响。对信噪比为 30 dB 的情况进行仿真, 将利用 CVX 包解得的 Toeplitz 矩阵 $\mathbf{Toep}(\mathbf{u})$ 中的 \mathbf{u} 记为 \mathbf{u}_{opt} 。将 FCA-ANM 算法在不同截断方法下每次迭代后得到 \mathbf{u} 与 \mathbf{u}_{opt} 的归一化平方误差绘制于图 6 中。从图 6 可以看出, 截断方法的不同几乎不对算法收敛性产生影响。

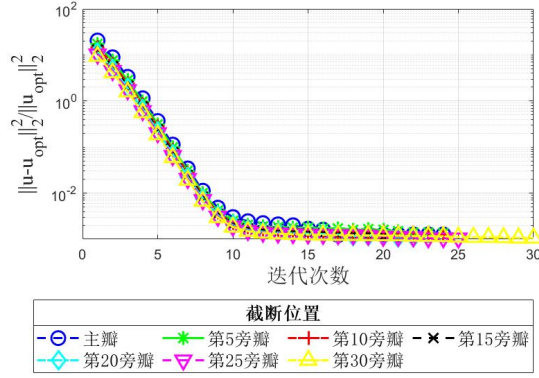


图 6 归一化平方误差与迭代次数关系

4 结论

本文基于原子范数最小化方法提出了一种无网格的限定区域波达方向估计算法。为了提升算法效率，本文进一步基于原对偶内点法提出了一种快速求解算法。仿真结果表明，相比于传统的原子范数最小化算法，本文所提算法运算时间更短，且在噪声环境下能实现更准确的波达方向估计。相比与有网格算法，所提算法由于不受到网格失配的影响，波达方向估计精度更高。与原算法相比，所提快速算法在精度上与其性能一致，但运算时间大幅降低，体现了快速算法的优越性。

本文在从映射算子 \mathbf{H}_0 中得到有限维的映射算子 $\widetilde{\mathbf{H}}_0$ 的过程中引入了截断误差。虽然仿真实验证明这一误差在多数情况下并不显著影响算法性能，但未来通过进一步减小截断误差对估计精度带来的影响将有望进一步提升算法性能。

参考文献

- [1] Candes E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J/OL]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509. DOI: 10.1109/TIT.2005.862083.
- [2] Donoho D. Compressed sensing [J/OL]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306. DOI: 10.1109/TIT.2006.871582.
- [3] Yang Z, Li J, Stoica P, et al. Sparse methods for direction-of-arrival estimation[M]//Academic Press Library in Signal Processing, Volume 7. Academic Press, 2018: 509-581.
- [4] Yang Y, Zhang Y, Yang L. Wideband sparse spatial spectrum estimation using matrix filter with nulling in a strong interference environment[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2018, 143(6): 3891-3898.
- [5] Zhang Y, Yang Y, Yang L, et al. Sparse Bayesian learning for wideband direction-of-arrival estimation via beamformer power outputs in a strong interference environment[J]. JASA Express Letters, 2022, 2(1).

- [6] 王燕, 吴文峰, 范展, 梁国龙. 一种声矢量阵子空间拟合算法及其矩阵预滤波器设计[J]. 声学学报, 2014, 39(3): 324-330. DOI: 10.15949/j.cnki.0371-0025.2014.03.011
- [7] 韩东, 李建, 康春玉, 黄海宁, 李启虎. 拖曳线列阵声呐平台噪声的空域矩阵滤波抑制技术[J]. 声学学报, 2014, 39(1): 27-34. DOI: 10.15949/j.cnki.0371-0025.2014.01.003
- [8] 鄢社锋, 侯朝焕, 马晓川. 矩阵空域预滤波目标方位估计[J]. 声学学报, 2007, 32(2): 151-157. DOI: 10.15949/j.cnki.0371-0025.2007.02.009
- [9] Chi Y, Pezeshki A, Scharf L, et al. Sensitivity to basis mismatch in compressed sensing [C/OL]//2010 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. 2010: 3930-3933. DOI: 10.1109/ICASSP.2010.5495800.
- [10] Zhang G, Liu H, Dai W, et al. Passive joint emitter localization with sensor self-calibration [J/OL]. Remote Sensing, 2023, 15(3). DOI: 10.3390/rs15030671.
- [11] Fannjiang A, Tseng H C. Compressive radar with off-grid targets: a perturbation approach [J/OL]. Inverse Problems, 2013, 29(5): 054008.
- [12] Guo Q, Xin Z, Zhou T, et al. Off-grid space alternating sparse Bayesian learning [J/OL]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2023, 72: 1-10. DOI: 10.1109/TIM.2023.3243677.
- [13] Fu H, Dai F, Hong L. Two-dimensional off-grid DOA estimation with metasurface aperture based on MMV sparse bayesian learning [J/OL]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2023, 72: 1-18. DOI: 10.1109/TIM.2023.3318716.
- [14] Huang H, So H C, Zoubir A M. Off-grid direction-of-arrival estimation using second order Taylor approximation [J/OL]. Signal Processing, 2022, 196: 108513. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2022.108513>.
- [15] Chandrasekaran V, Recht B, Parrilo P A, et al. The convex algebraic geometry of linear inverse problems [C/OL]//2010 48th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton). 2010: 699-703. DOI: 10.1109/ALLERTON.2010.5706975.
- [16] Chandrasekaran V, Recht B, Parrilo P A, et al. The convex geometry of linear inverse problems [J/OL]. Foundations of Computational Mathematics, 2012, 12(6): 805-849.
- [17] Candès E J, Fernandez-Granda C. Towards a mathematical theory of super-resolution [J/OL]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2014, 67(6): 906-956. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.21455>. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.21455>.
- [18] Dumitrescu B. Positive trigonometric polynomials and signal processing applications [M]. Springer Publishing Company, Incorporated, 2007.
- [19] Gao S, Wang M, Zhang Z, et al. Efficient gridless DOA estimation for non-uniformly spaced linear arrays in automotive radar sensors [J]. IEEE Sensors Journal, 24(17): 27737-27749, 2024. DOI: 10.1109/JSEN.2024.3428530.
- [20] Wu Y, Wakin M B, Gerstoft P. Gridless DOA estimation with multiple frequencies [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2023, 71: 417-432. DOI: 10.1109/TSP.2023.3244091.
- [21] Zhang J, Wu M, Hao C, et al. Wideband joint elevation-azimuth angle estimation based on multiple frequency model and atomic norm minimization [C/OL]//2024 IEEE-APS Topical Conference on Antennas and Propagation in Wireless Communications (APWC). 2024: 24-29. DOI: 10.1109/APWC61918.2024.10701980.
- [22] Mishra K V, Cho M, Kruger A, et al. Spectral super-resolution with prior knowledge[J]. IEEE

- transactions on signal processing, 2015, 63(20): 5342-5357.
- [23] Mahata K, Hyder M M. Fast frequency estimation with prior information[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 66(1): 264-273.
- [24] Grant M, Boyd S. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.1 [EB/OL]. 2014.
- [25] Hansen T L, Jensen T L. A fast interior-point method for atomic norm soft thresholding [J]. Signal Processing, 2019, 165: 7-19.
- [26] Nocedal J, Wright S J. Numerical optimization [M]. Springer, 1999.
- [27] Gao Y, Wu M, Li Z, et al. Fast gridless DOA estimation algorithm for MA-ANS scenarios using a modified fastIPM [J]. IEEE Signal Processing Letters, 31: 1845-1849, 2024. DOI: 10.1109/LSP.2024.3419695.
- [28] 鄢社锋. 优化阵列信号处理. 上册, 波束优化理论与方法 [M]. 科学出版社, 2018.
- [29] Yan S, Ma Y. Optimal design and verification of temporal and spatial filters using second-order cone programming approach [J]. Science in China Series F: Information Sciences, 2006, 49: 235-253.
- [30] Bhaskar B N, Tang G, Recht B. Atomic norm denoising with applications to line spectral estimation [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(23): 5987-5999. DOI: 10.1109/TSP.2013.2273443.
- [31] Boyd S, Vandenberghe L. Convex optimization [M]. Cambridge university press, 2004.
- [32] Brandwood D H. A complex gradient operator and its application in adaptive array theory [C]// IEE Proceedings H (Microwaves, Optics and Antennas): volume 130. IET Digital Library, v1983: 11-16.
- [33] Nannuru S, Gemba K L, Gerstoft P, et al. Sparse Bayesian learning with multiple dictionaries [J/OL]. Signal Processing, 2019, 159: 159-170. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.02.003>.
- [34] Kase Y, Nishimura T, Ohgane T, et al. Accuracy improvement in DOA estimation with deep learning[J]. IEICE Transactions on communications, 2022, 105(5): 588-599.

5 附录 A

定理 1 证明: 首先考虑 \mathbf{G} 为列满秩的情况。基于(2)中原子范数的定义, 可以对 $\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}}$ 做如下转换

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}} &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^K |c_k| : \mathbf{x} = \sum_{k=1}^K c_k \cdot \mathbf{G}^H \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k \in \mathbb{A} \right\} \\ &= \min_{\mathbf{x}^c} \inf \left\{ \sum_{k=1}^K |c_k| : \bar{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^K c_k \cdot \bar{\mathbf{G}}^H \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k \in \mathbb{A} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

其中 $\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}^T, \mathbf{x}^{cT}]^T$, $\bar{\mathbf{G}} = [\mathbf{G}, \mathbf{G}^c] \in \mathbb{C}^{N_0 \times N_0}$, 使得 $\bar{\mathbf{G}}$ 的所有列构成 \mathbb{C}^{N_0} 一组中的基, 为避免符号过多, 下文将这组基也以 $\bar{\mathbf{G}}$ 表示。根据基 $\bar{\mathbf{G}}$ 构造对应的对偶基 $\tilde{\mathbf{G}} = [\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{G}}^c]$, 可被进一步写为

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{x} \|_{\mathbb{A}_{\text{new}}} &= \min_{\mathbf{x}^c} \inf \left\{ \sum_{k=1}^K |c_k| : \bar{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^K c_k \cdot \bar{\mathbf{G}}^H \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k \in \mathbb{A} \right\} \\
&= \min_{\mathbf{x}^c} \inf \left\{ \sum_{k=1}^K |c_k| : \tilde{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k \in \mathbb{A} \right\}.
\end{aligned} \tag{A2}$$

令 $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{x}}$ ，容易验证 $\mathbf{x} = \mathbf{G}^H \mathbf{y}$ ，并且有

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{x} \|_{\mathbb{A}_{\text{new}}} &= \min_{\mathbf{x}^c} \inf \left\{ \sum_{k=1}^K |c_k| : \tilde{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k \in \mathbb{A} \right\} \\
&= \min_{\mathbf{x}^c} \inf \left\{ \sum_{k=1}^K |c_k| : \mathbf{y} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k \in \mathbb{A} \right\} = \min_{\mathbf{x}^c} \| \mathbf{y} \|_{\mathbb{A}},
\end{aligned} \tag{A3}$$

即

$$\| \mathbf{x} \|_{\mathbb{A}_{\text{new}}} = \min_{\mathbf{y}} \| \mathbf{y} \|_{\mathbb{A}}, \quad s.t. \mathbf{x} = \mathbf{G}^H \mathbf{y}. \tag{A4}$$

当 \mathbf{G} 不为列满秩时，不妨令 \mathbf{G} 的秩为 M 且前 M 列 \mathbf{G}^0 满秩。令

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}^0, \mathbf{G}^1] = \mathbf{G}^0 [\mathbf{I}_M, \mathbf{P}], \text{ 有 } \mathbf{G}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{G}. \text{ 构造新的原子集 } \mathbb{A}_{\text{new}}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^H \circ \mathbb{A}_{\text{new}},$$

可以证明 $\mathbb{A}_{\text{new}} = [\mathbf{I}_M, \mathbf{P}]^H \circ \mathbb{A}_{\text{new}}^0$ 。由于 $\begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ 列满秩，因此有

$$\| \mathbf{x}^0 \|_{\mathbb{A}_{\text{new}}^0} = \min_{\mathbf{x}} \| \mathbf{x} \|_{\mathbb{A}_{\text{new}}}, \quad s.t. \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^H \mathbf{x}. \tag{A5}$$

由于 $\mathbb{A}_{\text{new}} = [\mathbf{I}_M, \mathbf{P}]^H \circ \mathbb{A}_{\text{new}}^0$ ，因此对 $\forall \mathbf{x} \in \{t \cdot \text{conv}(\mathbb{A}_{\text{new}})\}$ ，有

$$\mathbf{x} = [\mathbf{I}_M, \mathbf{P}]^H \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^H \mathbf{x}, \tag{A6}$$

从而 $\| \mathbf{x}^0 \|_{\mathbb{A}_{\text{new}}^0} = \| [\mathbf{I}_M, \mathbf{P}]^H \mathbf{x}^0 \|_{\mathbb{A}_{\text{new}}}$ 。因此有

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{x} \|_{\mathbb{A}_{\text{new}}} &= \| [\mathbf{I}_M, \mathbf{0}] \mathbf{x} \|_{\mathbb{A}_{\text{new}}^0} = \min_{\mathbf{y}} \| \mathbf{y} \|_{\mathbb{A}}, \quad s.t. [\mathbf{I}_M, \mathbf{0}] \mathbf{x} = \mathbf{G}^{0H} \mathbf{y} \\
&= \min_{\mathbf{y}} \| \mathbf{y} \|_{\mathbb{A}}, \quad s.t. \mathbf{x} = \mathbf{G}^H \mathbf{y},
\end{aligned} \tag{A7}$$

由此定理得证。