



中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

硕士学位论文

基于无网格压缩感知的宽带信号高分辨参数估计方法研究

作者姓名: 张景铭

指导教师: 侯朝焕 研究员 中国科学院声学研究所

郝程鹏 研究员 中国科学院声学研究所

学位类别: 工学硕士

学科专业: 信号与信息处理

培养单位: 中国科学院声学研究所

2025 年 6 月

High-resolution Parameter Estimation for Wide-band Signals
Based on Gridless Compressive Sensing

A thesis submitted to
University of Chinese Academy of Sciences
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Master of Engineering
in Signal and Information Processing
By
ZHANG Jingming
Supervisor: Professor HOU Chaohuan
Professor HAO Chengpeng

Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences

June, 2025

中国科学院大学 学位论文原创性声明

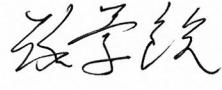
本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。承诺除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体享有著作权的研究成果，未在以往任何学位申请中全部或部分提交。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人或集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：
日期：2025.5.20

中国科学院大学 学位论文授权使用声明

本人完全了解并同意遵守中国科学院大学有关收集、保存和使用学位论文的规定，即中国科学院大学有权按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则，保留并向国家指定或中国科学院指定机构送交学位论文的电子版和印刷版文件，且电子版与印刷版内容应完全相同，允许该论文被检索、查阅和借阅，公布本学位论文的全部或部分内容，可以采用扫描、影印、缩印等复制手段以及其他法律许可的方式保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延期后适用本声明。

作者签名：
导师签名：
日期：2025.5.20 日期：2025.5.20

摘要

声呐能够在水下实现探测、通信和导航等功能，因此被广泛应用于水下警戒、情报搜集和资源勘探等方面。当今时代海洋安全形式的日益严峻和对海洋资源开发的不断深入给声呐的探测性能带来了更高的要求，这需要对水下目标参数实现更精准，更高分辨的估计。

相比于传统方法，基于压缩感知的方法可以在源数量未知、有限快拍数和信号源高度相干等条件下实现参数估计，并显著提升估计精度。在基于压缩感知的参数估计方法中，以原子范数最小化 (Atomic Norm Minimization, ANM) 方法为代表的无网格方法由于不受网格失配的影响近年来受到广泛关注。然而，现有的基于原子范数最小化的无网格压缩感知参数估计方法通常对信号模型有着严格限制，难以被直接应用于实际应用中广泛存在的宽带信号和多维参数提取等场景。

针对上述问题，本文旨在拓宽无网格压缩感知方法的应用范围。按照应用场景复杂度的层层递进，依次对限定范围的窄带一维波达方向 (Direction of Arrival, DOA) 估计问题、宽带被动声呐俯仰角-方位角联合估计问题、宽带主动声呐角度-距离联合估计问题和宽带主动声呐角度-速度联合估计问题展开研究。基于原子范数最小化理论，本文在上述场景信号模型所对应的原子集的对偶原子范数约束不满足三角多项式约束的情况下推导了相应原子范数最小化问题的半正定规划 (Semi-definite Programming, SDP) 形式，提出了一系列高分辨无网格参数估计算法，解决了上述场景中模型不适配的问题，并针对部分运算复杂度高的算法推导了快速算法，实现了更高精度和分辨率的参数估计性能。本文的主要工作和创新成果总结如下：

(1) 限定范围的窄带一维 DOA 估计：当目标的 DOA 限定在一定区域范围内时，可以通过仅对目标区域的 DOA 进行搜索以降低算法复杂度。受限于有界引理的应用条件，基于 ANM 的 DOA 估计方法难以被直接应用于限定区域的 DOA 估计问题中，从而导致全区域角度搜索带来大量的运算冗余。针对这一问题，本文通过对对偶变量进行带通滤波和降采样，使得相应的对偶三角多项式不等式约束可以使用有界引理转化为半正定约束，并将对偶问题转化为半正定规划问题，进而得到了基于 ANM 的限定区域 DOA 估计方法。为了提升上述算法的运算效率，本文还提出了一种适用于上述算法的快速求解算法，通过原对偶内点法提升了运算速度。仿真结果表明，相比于原始 ANM 算法，所提限定区域的 ANM 算法的运算时间更短；所提快速求解算法在估计精度与原算法一致的条件下运算速度进一步提升。

(2) 宽带俯仰角-方位角联合估计：现有的方位估计算法大多针对窄带一维场景设计，无法被直接应用于宽带信号和高维参数提取的场景中。为了解决宽带被动声呐的二维定位问题，本文提出了一种二维多频 ANM 算法 (2DMFANM)

以估计宽带信号的俯仰角和方位角。为了降低 2DMFANM 的运算复杂度以便于部署, 本文提出了两种快速算法, 分别为 2DMFDANM 和 2DMFANM_SizeRedu。具体的, 2DMFDANM 通过将空间角频率解耦以降低原始算法的规模, 而 2DMFANM_SizeRedu 则通过去除原算法中的冗余信息以提升速度。理论和仿真分析表明上述两种算法可以以稍微降低估计精度的代价显著提升运算速度。数值仿真和实验验证展现了所提方法相比于现有算法的优越性。

(3) 宽带主动声呐角度-距离联合估计: 为了实现宽带主动声呐的二维定位, 本文对角度-距离联合估计问题进行了研究。相比于窄带声呐, 宽带声呐能实现更高的距离分辨率。然而, 由于带宽增加而带来的窄带假设被破坏和距离徙动等问题使得传统窄带算法难以被直接应用于宽带的情况下。为了解决这一问题, 基于宽带线性调频 (Linear Frequency Modulation, LFM) 脉冲声呐, 本文分别针对单脉冲和多脉冲的情况基于原子范数最小化理论提出了单脉冲 ANM 方法和多脉冲 ANM 方法以从宽带回波信号中估计目标的角度和距离。针对多脉冲情况下距离徙动的问题, 由于传统的 Keystone 变换无法抑制速度模糊的影响, 本文提出了一种新的变换策略, 在单脉冲 ANM 方法的基础上得到了一种可以抑制速度模糊的多脉冲积累方法。数值仿真证明所提单脉冲算法可以抑制混叠, 实现准确的距离-角度联合估计; 而多脉冲算法则可在速度模糊存在的情况下成功利用多个脉冲进行相干积累, 实现更低信噪比下的高分辨距离-角度联合估计。

(4) 宽带主动声呐角度-速度联合估计: 水下混响为声呐探测中所面临的主要问题, 多普勒/速度信息的提取是混响抑制的主要手段。为充分利用信号的多维信息, 本文研究了宽带主动声呐的角度-速度联合估计方法。首先, 本文研究了宽带 LFM 脉冲声呐的角度-速度联合估计问题, 并基于推导的信号模型分别提出了一种基于多字典稀疏贝叶斯学习 (Sparse Bayesian Learning, SBL) 方法的有网格算法和两种基于原子范数最小化的无网格算法。为了实现无网格的角度-速度联合估计, 本文根据推导的信号模型构造了相应的原子集并提出了对应的 ANM 算法。为了进一步利用距离信息带来的特殊结构, 本文在角度-速度-距离联合估计算法的基础上通过将距离信息与角度-速度信息解耦得到了一种考虑距离信息的角度-速度联合估计算法。数值仿真结果显示所提算法均可以在快-慢时间耦合、空域导向向量随频率改变、混叠以及速度模糊等问题存在的条件下实现角度-速度的高分辨精确估计。特别的, 所提无网格方法由于不受到网格失配的影响, 在高信噪比下性能优于有网格的多字典 SBL 算法。同时, 由于利用了距离的结构信息, 考虑距离信息的角度-速度联合估计算法的性能优于忽略距离信息的算法。

综上所述, 本文基于原子范数最小化理论, 对水下常见场景中的参数估计问题进行了研究, 实现了各场景下高分辨无网格的参数估计, 解决了模型不匹配的问题, 并针对部分运算复杂度过高的算法设计了相应的快速算法, 极大的拓宽了无网格方法的适用范围。

关键词: 原子范数最小化, 宽带信号, 多维参数估计, 半正定规划

Abstract

Sonars are capable of accomplishing tasks such as underwater detection, communication, and navigation and are therefore widely used in underwater policing, intelligence gathering and resource exploration. In the current era, the increasingly severe maritime security situation and the continuous deepening of ocean resource development have resulted in higher requirements for the detection performance of the sonars, which requires more accurate and higher-resolution estimation of underwater target parameters.

Compared with traditional methods, algorithms based on compressive sensing (CS) can achieve parameter estimation under the conditions of unknown number of sources, limited snapshots, and highly coherent signal sources and significantly improve the resolution. Among the CS-based parameter estimation methods, gridless methods based on atomic norm minimization (ANM) have attracted much attention in recent years because they are not affected by grid mismatch. However, existing gridless CS-based parameter estimation methods based on ANM usually have strict limitations on the signal model, making it difficult to apply them directly to scenarios of wideband signals and multidimensional parameter retrieval which are widely used in practical applications.

To address these problems, this study aims to broaden the application scope of gridless compressive sensing methods. This study sequentially investigates the problems of narrowband one-dimensional Direction of Arrival (DOA) estimation with constrained area, the joint elevation-azimuth angle estimation for wideband passive sonar, the joint angle-range estimation for wideband active sonar, and the joint angle-velocity estimation for wideband active sonar, according to the progressively increasing complexity of application scenarios. Based on the atomic norm minimization theory, this study derives the semi-definite programming (SDP) form of the corresponding atomic norm minimization problem under the condition that the dual atomic norm constraints of the atomic sets corresponding to the signal models in the aforementioned scenarios do not satisfy the trigonometric polynomial constraints. A series of high-resolution gridless parameter estimation algorithms are proposed to address the model mismatch issues in the aforementioned scenarios. In addition, for some algorithms with high computational complexity, fast algorithms are derived, achieving higher accuracy and resolution in the parameter estimation performance. The main contributions of this dissertation are summarized as follows:

- (1) Narrowband DOA Estimation with Constrained Area: When the region of the DOA is known, the algorithm complexity can be reduced by searching for DOAs only within a constrained area. However, owing to the constraints imposed by the bounded lemma, the ANM-based DOA estimation methods cannot be directly applied

to constrained-area DOA estimation problems, which leads to significant computational redundancy. To address this issue, this paper proposes a method that applies band-pass filtering and down-sampling to the dual variable such that the corresponding dual triangular polynomial inequality constraints can be transformed into semi-definite constraints using the bounded lemma. This transformation converts the dual problem into a semi-definite programming problem, leading to a constrained area DOA estimation method based on ANM. To improve the computational efficiency of the aforementioned algorithm, a fast algorithm is proposed, which speeds up the computation through the primal-dual interior point method.

(2) Wideband Joint Elevation-Azimuth Angle Estimation: Most of the existing angle estimation algorithms are designed only for narrowband one-dimensional scenarios, which can not be directly applied to scenarios involving wideband signals and multi-dimensional parameters. In order to address the two-dimensional source localization problem of wideband passive sonar, this dissertation proposes a two-dimensional multi-frequency ANM algorithm (2DMFANM) to estimate the elevation and azimuth angles of wideband signals gridlessly. In order to reduce the computational burden of 2DMFANM, two fast algorithms, 2DMFDANM and 2DMFANM_SizeRedu, are proposed. Specifically, 2DMFDANM reduces the size of the original algorithm by decoupling the spatial angular frequencies, while 2DMFANM_SizeRedu removes the redundant information in the original algorithm to increase the speed. Theoretical and simulation analyses show that the above two algorithms can significantly improve the computational speed at the cost of slightly reducing estimation accuracy. Numerical simulations and experimental verification demonstrate the superiority of the proposed method over the state-of-the-art algorithms.

(3) Joint Angle-Range Estimation for Wideband Active Sonar: In order to realize the two-dimensional source localization of wideband active sonar, this dissertation studies the problem of joint angle-range estimation. Compared to narrowband sonar, wideband sonar can achieve higher range resolution. However, the problems of violation of the narrowband assumption and range migration due to the increase in bandwidth make it difficult to apply traditional narrowband algorithms directly to the wideband case. In order to solve this problem, based on wideband Linear Frequency Modulation (LFM) pulse sonar, this dissertation proposes a single-pulse ANM method and a multi-pulse ANM method for the single-pulse and multi-pulse cases, respectively, based on the atomic norm minimization theory, to estimate the angles and ranges of the targets from the wideband received signals. For the problem of range migration in the multi-pulse case, since the traditional Keystone transform cannot suppress the effect of velocity ambiguity, this dissertation proposes a new transform strategy to obtain a multi-pulse accumulation method based on the single-pulse ANM method that can suppress velocity ambiguity. Numerical simulations prove that the proposed single-pulse

algorithm can suppress aliasing and realize accurate joint distance-angle estimation, whereas the multi-pulse algorithm can successfully utilize the coherent accumulation of multiple pulses in the presence of velocity ambiguity and realize the high-resolution joint angle-range estimation with a lower signal-to-noise ratio.

(4) Joint Angle-Velocity Estimation for Wideband Active Sonar: Underwater reverberation is a major problem in sonar detection, and the extraction of Doppler/velocity information is the main means of reverberation suppression. In order to fully utilize the multi-dimensional information of the signal, this dissertation investigates the joint angle-velocity estimation problem for wideband LFM pulse sonar. Based on the deduced signal model, this dissertation proposes a grid-based algorithm based on a multi-dictionary sparse Bayesian Learning (SBL) method and two types of gridless algorithms based on atomic norm minimization. In order to realize the gridless joint angle-velocity estimation, this dissertation constructs the corresponding atom sets and proposes the corresponding ANM algorithms based on the derived signal model. In order to further utilize the special structure brought by the range information, this dissertation derives a joint angle-velocity estimation algorithm that considers the range information by decoupling the range information from the angle-velocity information based on the joint angle-velocity-range estimation algorithm. Numerical simulation results show that the proposed algorithms can realize accurate high-resolution estimations of angle-velocity under the conditions of fast-slow time coupling, frequency-dependent changes in spatial steering vectors, aliasing, and velocity ambiguity. In particular, the proposed gridless methods outperform the on-grid multi-dictionary SBL algorithm at high signal-to-noise ratios because they are unaffected by grid mismatches. Meanwhile, the joint angle-velocity estimation algorithm that considers the range information outperforms the algorithm that ignores the range information owing to the utilization of the structural information of the range.

In summary, based on the atomic norm minimization theory, this dissertation investigates parameter estimation problems in common underwater scenes, realizes high-resolution gridless parameter estimation in these scenes, and significantly broadens the scope of application of gridless methods.

Key Words: atomic norm minimization, wideband signals, multi-dimensional parameter estimation, semi-definite programming

目 录

| | |
|--------------------------------------|----|
| 第1章 绪论 | 1 |
| 1.1 背景和意义 | 1 |
| 1.2 国内外研究进展和现状 | 2 |
| 1.2.1 基于波束形成的目标参数估计方法 | 2 |
| 1.2.2 基于子空间方法的目标参数估计方法 | 3 |
| 1.2.3 基于压缩感知的目标参数估计方法 | 5 |
| 1.3 本文主要工作和创新点 | 9 |
| 1.4 本文的结构安排 | 12 |
| 第2章 基于压缩感知的参数估计理论及其在DOA估计中的应用 | 15 |
| 2.1 前言 | 15 |
| 2.2 有网格压缩感知理论简介 | 15 |
| 2.3 基于原子范数最小化方法的无网格压缩感知方法简介 | 17 |
| 2.4 基于原子范数最小化的限定范围DOA估计方法 | 20 |
| 2.4.1 算法设计 | 20 |
| 2.4.2 基于内点法的通用原子范数最小化问题求解方法 | 25 |
| 2.4.3 数值仿真 | 31 |
| 2.5 基于多原子集的稀疏参数估计方法性能分析 | 37 |
| 2.6 本章小结 | 41 |
| 第3章 基于多频率模型的宽带信号俯仰角-方位角联合估计 | 43 |
| 3.1 前言 | 43 |
| 3.2 信号模型 | 43 |
| 3.3 算法设计 | 45 |
| 3.3.1 二维多频原子范数最小化算法-2DMFANM | 45 |
| 3.3.2 解耦算法 - 2DMFDANM | 50 |
| 3.3.3 降规模算法 - 2DMFANM_SizeRedu | 53 |
| 3.4 仿真结果 | 55 |
| 3.4.1 2DMFANM 算法仿真 | 55 |
| 3.4.2 解耦和降规模算法仿真 | 56 |
| 3.4.3 噪声环境下算法参数估计性能仿真 | 61 |
| 3.4.4 目标俯仰角和方位角由于阵列移动而改变时的算法性能仿真 | 62 |
| 3.5 本章小结 | 64 |

| | |
|--------------------------------------|-----|
| 第 4 章 基于 ANM 的宽带主动声呐角度-距离联合估计 | 65 |
| 4.1 前言 | 65 |
| 4.2 信号模型 | 66 |
| 4.3 单脉冲角度-距离联合估计 | 68 |
| 4.4 基于多脉冲相干积累的角度-距离联合估计 | 73 |
| 4.5 数值仿真 | 79 |
| 4.6 本章小结 | 87 |
| 第 5 章 基于压缩感知的宽带主动声呐角度-速度联合估计 | 89 |
| 5.1 前言 | 89 |
| 5.2 基于多字典 SBL 的有网格压缩感知宽带角度-速度联合估计 | 89 |
| 5.3 基于原子范数最小化的无网格压缩感知宽带角度-速度联合估计 | 92 |
| 5.4 数值仿真 | 97 |
| 5.5 本章小结 | 101 |
| 第 6 章 总结与展望 | 103 |
| 6.1 本文工作总结 | 103 |
| 6.2 未来工作展望 | 104 |
| 参考文献 | 107 |
| 附录一 定理 2.2 证明 | 115 |
| 附录二 定理 3.1 证明 | 117 |
| 附录三 第 4 章相关结论和引理证明 | 121 |
| 附录三.1 多快拍情况下基于原子范数最小化的距离-角度联合估计 | 121 |
| 附录三.2 基于原子范数最小化的角度-距离-速度联合估计算法 | 121 |
| 附录三.3 无距离徙动情况下的角度-距离-速度联合估计算法 | 122 |
| 附录三.4 引理 4.1 证明 | 123 |
| 致谢 | 125 |
| 作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与其他相关学术成果 | 127 |

图目录

| | |
|---|-----|
| 图 1-1 论文整体框架图 | 10 |
| 图 1-2 论文结构示意图 | 12 |
| 图 2-1 阵元数 $N_m = 50$ 和 100 时不同信噪比下的成功估计次数和 RMSE | 34 |
| 图 2-2 阵元个数不同时的 RMSE 以及运算时间 | 34 |
| 图 2-3 DOA 搜索范围时的 RMSE 以及运算时间 | 35 |
| 图 2-4 截断误差与 DOA 的关系 | 36 |
| 图 2-5 截断阶数不同时 CA-ANM 算法在不同信噪比下的成功估计次数和 RMSE | 36 |
| 图 3-1 阵列设置示意图 | 44 |
| 图 3-2 无噪声情况下空间角频率和俯仰角-方位角估计结果 | 57 |
| 图 3-3 算法 6 估计结果 | 57 |
| 图 3-4 快速算法估计结果 | 58 |
| 图 3-5 RMSE 和成功估计次数随信噪比的变化 | 62 |
| 图 3-6 阵列移动时目标的俯仰角、方位角和空间角频率 | 63 |
| 图 3-7 阵列移动时空间角频率和俯仰角-方位角的估计结果 | 63 |
| 图 4-1 主动声呐示意图 | 67 |
| 图 4-2 大孔径 ($N_m = 100$) 下的归一化功率谱 | 80 |
| 图 4-3 小孔径 ($N_m = 5$) 下的归一化功率谱 | 81 |
| 图 4-4 距离-角度估计结果 | 82 |
| 图 4-5 不同信噪比下的成功估计次数和归一化 RMSE | 84 |
| 图 4-6 SNR=-10 dB 时距离-角度估计结果 | 85 |
| 图 4-7 不同信噪比下的成功估计次数和归一化 RMSE, $N_m = 20$ | 86 |
| 图 5-1 传统算法角度-速度联合估计结果 | 98 |
| 图 5-2 角度-速度估计结果 | 98 |
| 图 5-3 不同信噪比下的成功估计次数和归一化 RMSE | 99 |
| 图 5-4 角度-速度联合估计结果, SNR = 0 dB | 100 |

表目录

| | |
|------------------------------|----|
| 表 3-1 成功估计次数(总次数: 100) | 56 |
| 表 3-2 运行时间 /s | 59 |
| 表 3-3 俯仰角-方位角估计的 RMSE | 59 |
| 表 3-4 空间角频率估计的 RMSE | 59 |

符号列表

运算符

| 符号 | 意义 |
|----------------------------|----------------------------|
| $\text{Spark}(\mathbf{A})$ | 矩阵 \mathbf{A} 中最小线性相关的列数 |
| $\text{rank}(\mathbf{A})$ | 矩阵 \mathbf{A} 的秩 |
| \otimes | Kronecker 积 |
| \odot | Khatri-Rao 积 |
| $\text{vec}(\mathbf{A})$ | 对矩阵 \mathbf{A} 做向量化 |
| \diamond | 张量积 |
| $(\cdot)^T$ | 矩阵转置 |
| $(\cdot)^H$ | 矩阵共轭转置 |
| $(\cdot)^{-1}$ | 矩阵求逆 |
| $(\cdot)^\dagger$ | 矩阵伪逆 |
| $\ \cdot\ _p$ | l_p 范数 |

缩写

| | |
|--------|--|
| DOA | Direction of Arrival |
| ULA | Uniform Linear Array |
| LCMV | Linearly Constrained Minimum Variance |
| MVDR | Minimum Variance Distortionless Response |
| FIB | Frequency Invariant Beamforming |
| MUSIC | MULTiple SIgnal Classification |
| ESPRIT | Estimating Signal Via Rotational Invariance Techniques |
| MEMP | Matrix Enhancement and Matrix Pencil |
| ISSM | Incoherent Signal-Subspace Method |
| CSSM | Coherent Signal-Subspace Method |
| RSS | Rotational Signal-Subspace |
| SST | Signal-Subspace Transform |
| CS | Compressed Sensing |
| NSP | Null Space Property |
| RIP | Restricted Isometry Property |
| SMV | Single Measurement Vector |

| | |
|--------|---|
| MMV | Multiple Measurement Vector |
| SBL | Sparse Bayesian Learning |
| ANM | Atomic Norm Minimization |
| SDP | Semi-Definite Programming |
| MM | Majorize-Minimization |
| RANM | Reweighted Atomic Norm Minimization |
| ADMM | Alternating Direction Method of Multipliers |
| APG | Accelerated Proximal Gradient |
| DANM | Decoupled ANM |
| LFM | Linear Frequency Modulation |
| DFT | Discrete Fourier Transform |
| RMSE | Root Mean Square Error |
| RSE | Root Square Error |
| TV | Total Variation |
| FIR | Finite Impulse Response |
| LTI | Linear Time Invariant |
| KKT | Karush-Kuhn-Tucker |
| L-BFGS | Limited Memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno |
| CPI | coherent processing interval |

第1章 绪论

1.1 背景和意义

为了在水下完成水下警戒、情报搜集、资源勘探等任务，实现复杂的探测、通信和导航功能，需要对水下目标的相关参数进行估计，这些参数主要包括目标的波达方向 (Direction of Arrival, DOA)、速度和距离等。声波在水下具有最佳的传播性能，是信息在水下传播最有效的载体。通过向目标主动发送声波，可以从回波信号中提取目标的距离和速度等参数；利用水听器阵列，通过获取和分析其接收信号，可以从中提取目标的 DOA 信息。利用声呐阵列接收的回波信号对上述参数进行估计是水声信号处理的热点问题之一，多年来受到研究人员的高度关注。水下目标的参数估计问题在过去数十年中被广泛研究，各种估计方法层出不穷。当今时代海洋安全形式的日益严峻和对海洋资源开发的不断深入^[1] 给声呐的探测性能带来了更高的要求，这需要对水下目标参数实现更精准、更高分辨率的估计。近年来，围绕目标的高分辨参数估计吸引了大量目光，逐渐成为研究焦点。

现有的高分辨参数估计方法多集中于理想采样的窄带信号的一维参数估计，难以被直接应用于广泛存在于实际应用场景中的非理想采样的宽带高维参数估计问题中：

(1) 相比于窄带信号，宽带信号在水下探测、通信等领域中有许多优势和更广阔的应用场景。具体的，在被动声呐的 DOA 估计中，由于水下舰船噪声通常包括由机械噪声信号组成的窄带部分和由水动力效应和螺旋桨空化造成的二阶圆平稳信号组成的宽带部分^[2-6]，因此应被视作宽带信号进行处理。在主动声呐探测中，相比窄带信号，宽带信号能提供更高的距离分辨率^[7]。同时在水下通信领域中，宽带信号可允许更高速的数据传输和更高质量的音视频传输，实现多路信号同时传输，提高了信道利用率。因此，研究适用于宽带信号的参数估计方法具有重要意义；

(2) 在实际水下背景中，存在大量需要进行多维参数估计的场景。在被动参数估计方面，为了实现目标定位，需要进行二维及以上的 DOA 估计^[8]。在主动参数估计方面，为了对目标进行定位和分类，常常需要对目标的角度、速度和距离等参数中的两个或三个进行联合估计^[9-12]。因此，研究高维参数的估计方法具有重要的实际意义；

(3) 在实际应用中，宽带信号常常无法实现理想采样。具体来说，在空间角度估计方面，受制于空间限制和阵元间的耦合，阵元间的间距通常不能过小^[13]，导致在某些频段上可能出现混叠；在速度估计方面，受制于相干处理间隔的长度，部分频段上可能会出现速度模糊的现象。因此，研究如何在非理想采样的情况下实现准确的参数估计具有重要意义。

相比于传统方法，基于压缩感知的方法可以应用于源数量未知、有限的快拍

数以及高度或完全相干的信号源等情况，同时能显著提升分辨率^[14]，因此在近年来被广泛应用于目标参数估计问题中。然而，现有的基于压缩感知的参数估计方法通常对信号模型有严格限制，通用性较差，难以被直接应用于各具体应用场景。

综上所述，研究适用于宽带信号和多维参数等应用场景的压缩感知目标参数估计方法是实现高分辨参数估计、提升声呐探测和通信性能的关键所在。

1.2 国内外研究进展和现状

阵列信号处理理论发展至今已诞生了大量适用于理想采样的窄带信号的一维参数估计方法。从出现的时间和基本技术路线上看，可以将这些方法按出现的时间先后分为波束形成类、子空间类和压缩感知类。出于实际应用的需要，各个年代均有研究人员尝试将当时主流的参数估计方法应用到第1.1节中的特殊场景中，即非理想采样的宽带和多维参数估计。因此，针对这些特殊类型信号的参数估计方法的发展历史基本和窄带信号的一维参数估计方法的发展历程一致，其技术路线也经历了从波束形成，子空间到近年流行的压缩感知算法的转变。为了厘清目标参数估计的主要研究内容，本节将按参数估计的技术路线进行分类，分别对波束形成类方法、子空间类方法在宽带和多维参数估计等特殊场景中的应用情况做简要回顾，并在最后对本文主要采用的压缩感知稀疏恢复类方法的理论及其在各特殊场景中的应用情况做简要综述。

1.2.1 基于波束形成的目标参数估计方法

波束形成是阵列信号处理领域的经典问题，早期常被用于 DOA 等目标参数的估计问题中^[15,16]。在距离和速度等参数的估计方面，通过对接收信号进行匹配滤波或解线频调^[17]，信号可被转换为多维复正弦波的叠加，其频率决定于待估计的参数（即距离和速度），因此可将上述参数估计问题转换为频率估计问题。多维频率估计问题在信号模型上与阵列信号模型一致，因此波束形成方法也常被用于距离和速度等参数的估计问题^[7]。经典的传统波束形成法^[18]由 Bartlett 于 1956 年提出。该方法的分辨能力受到瑞利限^[19]的限制，依赖于阵列的孔径。为了突破瑞利限，一类线性约束最小方差 (Linearly Constrained Minimum Variance, LCMV) 波束形成器^[20]在之后被提出，其中最具代表性的是由 Capon 等提出的最小方差无失真响应算法 (Minimum Variance Distortionless Response, MVDR)^[21]。为了提升 MVDR 的鲁棒性，一系列鲁棒波束形成器相继被提出^[22-24]。

由于宽带信号的信号模型与窄带信号不同，因此上述方法均无法被直接应用于宽带波束形成问题中。宽带波束形成通常是通过对各通道的信号做滤波后相加实现的^[18]。由于波束的宽度会随着信号频率的降低而展宽^[16]，因此宽带波束形成问题主要在于设计不随信号频率变化的波束响应，此类问题称为频率不变波束形成 (Frequency Invariant Beamforming, FIB)。基于傅里叶变换关系，Liu 等^[25]提出了一种适用于一维、二维和三维阵列以及连续和离散孔径的频率不变

波束形成器。对于任意形状的阵列，一系列基于最小二乘的频率不变波束形成器相继被提出^[26]。

由于此类算法的估计精度和分辨率均不足，因此近年来的研究较少，逐步被其它方法取代。

1.2.2 基于子空间方法的目标参数估计方法

为了提升分辨率，Schmidt 等人^[27,28]提出了多重信号分类 (Multiple SIgnal Classification, MUSIC) 方法，标志着子空间方法的诞生。此类方法受到主成分分析技术的启发，基于特征值分解将信号的协方差矩阵划分为信号子空间和噪声子空间，并基于噪声子空间得到了信号的伪谱。这种伪谱峰尖锐，易于从中分辨信源。基于子空间的思想，Roy 等人^[29]进一步提出了旋转不变子空间方法 (Estimating Signal Via Rotational Invariance Techniques, ESPRIT)^[29]。与 MUSIC 方法不同，ESPRIT 基于信号子空间的旋转不变特性进行参数估计，参数可以解析求得，无需进行谱峰搜索，从而实现了无网格的参数估计。在此之后，针对上述两类子空间方法都产生了一系列的改进算法，基于 MUSIC 的改进算法有：求根 MUSIC 算法^[30]，加权 MUSIC 算法等。基于 ESPRIT 的改进算法有：最小二乘 ESPRIT 算法，总体最小二乘 ESPRIT 算法^[31]等。

子空间方法显著提升了参数估计的分辨率，突破了瑞利限。但是，为了准确分辨信号子空间和噪声子空间，子空间方法需要信源相互独立。若信源间相干，则常会出现估计结果的遗漏。另外，当信噪比不足时，此类方法需要事先已知信源数量才能准确分辨噪声子空间。对于信源相干的情况，可以适用空间平滑技术^[32]进行处理，但这会导致阵列孔径下降。由于这些问题的存在，一系列基于子空间拟合的算法开始出现，例如最大似然估计算法^[33]和加权子空间拟合算法^[34]等。这类算法基于信号的概率分布，通过高维搜索实现参数估计。相比于子空间方法，此类算法对信源相干性不敏感，适用于低信噪比环境和少量快拍的场景。然而，由于涉及到非线性多维优化和多维谱峰搜索，这些算法通常具有庞大的运算量，极大的限制了其应用范围。

为了将一维参数估计方法拓展到二维，Hua 等人^[35]提出了增强矩阵和矩阵束 (Matrix Enhancement and Matrix Pencil, MEMP) 方法来估计二维空间频率。通过将矩阵束的思想引入 MUSIC，2 维 MUSIC 算法^[36]在之后被提出。Haardt 等人^[37]给出了一种二维酉 ESPRIT 算法，将 ESPRIT 推广至二维。为了解决相干信号的问题，空间平滑方法也被应用于这些算法中^[38-41]。

为了处理宽带信号，通常将其分割为多个子带，采用多频率模型进行表示。每一个子带中的信号均可被视为窄带信号，因此可以用窄带算法进行处理。Wax 等人^[42]将子空间方法独立的应用于各个子带并提出了非相干子空间方法 (Incoherent Signal-Subspace Method, ISSM)。ISSM 通过将各个子带得到的参数估计结果取简单平均以得到最终的参数估计。容易看出，这忽略了子带间的联合信息，因此其性能会降低。另外，当高频频子带中存在混叠时，即使低频频子带得到了准确

的参数估计，在与高频率子带的结果平均后也会出现错误结果。为了联合利用各自带间的信息，Wang 等人^[43]提出了相干子空间方法 (Coherent Signal-Subspace Method, CSSM)。CSSM 利用聚焦矩阵将各个子带转换到参考频率，通过对参考频率使用窄带算法实现宽带参数估计。基于此，一类旋转子空间 (Rotational Signal-Subspace, RSS) 聚焦矩阵在之后被提出^[44]。Doron 等人^[45]在之后将 RSS 推广为一类更通用的信号子空间变换 (Signal-Subspace Transform, SST) 矩阵。然而，CSSM 需要对参数进行预估计以确定聚焦矩阵，因此使得其应用受限。为此，一系列改进的算法在之后被相继提出^[46,47]。在这类算法中，Doron 等人^[48–50]在系列文章中提出的聚焦算法以及其背后的波场建模理论尤其值得关注。波场建模理论通过对波场进行正交分解将阵列观测信号分解为只与阵列形状有关的观测矩阵部分和只与波场，即目标信号源，相关的系数部分。基于此模型，他们给出了传感器阵列对波场进行完全恢复的条件，并在此基础上推导了一种聚焦矩阵，并给出了其误差界限。

值得注意的是，基于波场建模理论中的信号模型还可设计出适用于非理想采样的任意形状阵列的参数估计算法。事实上，Doron 等人在系列文章的第二部分^[49]中就给出了一种适用于任意阵列的 MUSIC 算法。Belloni 等人^[51]进一步提出了流形分离方法 (Manifold Separation Technique, MST)，给出了采样矩阵的阶数选择准则，并且结合子空间方法实现了任意形状阵列的参数估计。美中不足的是，正如其名字所言，波场建模理论只适用于波场，因此只能用于解决空域 DOA 的估计问题，无法被应用于目标的距离和速度等参数的估计问题。另外，波场建模理论中假定阵列可以对来自空间中所有信号的角度进行估计，即在二维情况下能够估计 0 到 360 度的角度，在三维情况下能估计全空间的角度。而在实际应用中，广泛存在的线阵和平面阵都无法实现所有角度的估计。将波场建模理论应用于这些阵列上时会出现角度模糊的问题。最后，由于基于波场建模理论的方法需要将采样矩阵的阶数限制为有限阶，这使得信号建模存在误差，相当于人为引入了附加噪声。这些问题极大的限制了波场建模理论的使用范围。对于线阵，当阵元间距为半波长的整数倍时，通过对接收信号的协方差矩阵做向量化的方法以将信号模型转换为和均匀线阵 (Uniform Linear Array, ULA) 一致的形式，这种阵列的代表是嵌套阵^[52] 和互质阵^[53]。这一操作还增大了阵列的自由度，提升了参数估计性能。然而，对于多快拍的信号，在对其协方差矩阵做向量化后最终只得到了一个快拍的数据，这使得子空间方法无法使用。此时通常使用空间平滑的方法来得出可使用的协方差矩阵^[52,53]，代价是减少了自由度。

虽然上述算法主要应用于目标 DOA 的估计问题，但由于信号模型的一致，这些算法也被广泛应用于目标的距离和速度等参数的估计中。Xu 等人^[54]将 MUSIC 算法用于距离估计的问题中，并提出了一种补偿距离徙动的策略。Belfiori 等人^[55] 使用二维 MUSIC 算法实现了距离-角度联合估计。Kim 等人^[56]为了将 ESPRIT 算法应用于距离-角度联合估计问题中，首先使用离散 Fourier 变换对距离进行估计，并在之后利用 ESPRIT 实现了角度估计。

子空间方法虽然大幅提升了参数估计的分辨率，但其需要对信号的协方差矩阵做精确估计已得到精确的信号子空间和噪声子空间，这通常需要大量样本。另外，此类方法还受制于信号源的相干性，虽然空间平滑等方法可以对这一点进行改善，但却降低了有效孔径。实际应用中，存在大量小样本条件下的参数估计问题，导致子空间方法难以被使用。基于压缩感知的方法能够在小样本的条件下进行目标参数估计，因此近年来受到广泛关注。

1.2.3 基于压缩感知的目标参数估计方法

2006年，Candes、Romberg、Tao等学者联合发表了压缩感知(Compressed sensing, CS)理论^[57,58]，之后稀疏表示的思想开始被应用至参数估计领域。压缩感知理论指出，若信号可以由一个超完备集合中的有限个基函数进行线性表示，即信号在某变换域上具备“稀疏性”，则可以通过这种稀疏表示来提取和表征原始信号的主要信息。也就是说，可以通过远低于Nyquist采样率的频率对信号进行采样，再通过相应的算法实现信号的重构或者参数的提取。在目标参数估计问题中，通常仅有少量的几个信源离散地分散在整个参数空间中。例如在DOA估计问题中，阵列传感器所接收到的信号可以看做是整个角度空间内某几个方向的入射信号与噪声的叠加，故阵列信号天生具有稀疏特性，可以将其转化为稀疏信号重构模型，从而设计和应用稀疏表示类的算法来予以解决。最初的基于压缩感知的目标参数估计是基于字典的，即通过将目标参数空间划分成离散的网格，各个格点对应的导向向量可以组成一个超完备框架(字典)，由此目标参数估计问题便可被转换为稀疏恢复问题。稀疏恢复问题本质上是一个 l_0 优化问题，因此是NP难的，无法直接求解。虽然如此， l_0 优化的结果提示了稀疏类方法的理论极限，因此对其性能进行分析仍有重要的理论价值。对于单观测矢量(Single Measurement Vector, SMV)的情况，给定字典 \mathbf{A} ，对于任意稀疏度为 K 的信号， l_0 优化有唯一解的充要条件是 $K < \frac{\text{Spark}(\mathbf{A})-1}{2}$ ^[57]。基于以上结果，人们长期认为理论上 l_0 优化至多能恢复稀疏度为 $\frac{\text{Spark}(\mathbf{A})-1}{2}$ 的信号。对多观测矢量(Multiple Measurement Vector, MMV)的情况，假设观测到的信号为 $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ ，Chen等人^[59]证明了此时 l_0 优化可以恢复稀疏度为 $\frac{\text{Spark}(\mathbf{A})-1+\text{rank}(\mathbf{Y})}{2}$ 的信号。在实际实验中常常发现稀疏度大于上述界限的信号也可通过稀疏恢复算法进行恢复。为了解释这一现象，Lai等人^[60]基于测度理论证明了几乎所有稀疏度小于 $\text{Spark}(\mathbf{A})-1$ 的信号都可通过 l_0 优化唯一恢复。

当字典满足零空间性质(Null Space Property, NSP)^[61]、有限等距性质(Restricted Isometry Property, RIP)^[61]等条件时，可以通过 l_1 松弛将原NP难的零范数最小化问题转换为凸问题求解。然而，RIP条件需要字典的相干性较弱，而阵列流形通常是强相干的，导致稀疏恢复的效果无法得到保证。但是，在DOA估计问题中，信号源的值并不是关键，主要在于对角度的估计，因此，只要能较好的估计信号向量的支撑集即可^[14]，可以用伪谱来实现对目标参数的估计。在这种条件下， l_1 优化可以在一定程度上提供较好的参数估计性能。为了使得优化的性能可以逼近 l_0 优化，Lai等人^[60]提出了一种尾部优化算法，Zheng等人^[62]

将此方法应用于 DOA 估计中，相比 l_1 优化获得了更高的分辨能力。当问题规模上升时，优化的运算复杂度急剧上升，无法满足实时性的要求。为此，基选择 (Basis Selection, BS) 类方法被广泛用于稀疏恢复问题的求解，如匹配追踪算法 (MP)^[63] 和正交匹配追踪算法 (OMP)^[64]，这些基于贪婪算法的方法虽然降低了 DOA 估计的精度，但显著提升了运算速度。基于这一特点，近年来一些学者开始研究提升 BS 方法精度的策略。Li 等人^[65] 提出了一种调整的 OMP 算法，相比传统的贪婪算法大大提升了精度。Han 等人^[66] 从一种牛顿化的 OMP(NOMP) 受到启发，该方法通过牛顿精炼和反馈策略来实现近似最优，他们将此方法拓展至二维，并使用二维 FFT 实现此算法，在提升精度的同时大大提升了运算效率。尽管上述算法一定程度上改善了贪婪算法带来的精度下降问题，但无法完全避免其带来的次优解的问题。稀疏贝叶斯学习 (Sparse Bayesian Learning, SBL) 算法是一种非贪婪的稀疏恢复算法。与基追踪算法不同，SBL 算法将具有稀疏特性的系数向量视为参数未知的随机向量，通过最大化其证据来获得对未知参数的估计^[67]。相比基追踪算法，SBL 算法的运算速度大幅提升，因此越来越受到关注。

与1.2.2节类似，宽带信号仍是通过将其分割为多个子带并转换为多频率模型进行处理。通过利用各个子带信号的联合稀疏性，上述方法能够实现正对宽带信号的参数估计。Tang 等人^[68] 证明了基于字典的稀疏恢复算法可用于宽带信号的 DOA 估计，并且可以抑制混叠。Gemba 等人^[69] 将 SBL 方法应用于实际的宽带水声信号，并发现该方法能有效实现目标的 DOA 估计，并进一步利用 SBL 方法实现了水下声源定位^[70]。Nannuru 等^[71] 将上述方法总结为多字典 SBL 算法，并分析了其抑制混叠的性能。

上述方法都是建立在待估计的参数均落在事先划分好的网格上的假设之下的，因此统称为在网格 (on-grid) 算法。当真实的参数不落在网格上时，称为网格失配。Chi^[72] 等人详细分析了网格失配的影响。特别的，Zhang^[73] 等人指出，当使用多个阵列联合定位时，网格失配会导致无法探测到目标，极大的影响定位的性能。为此，人们提出了一系列补偿的方法以减小网格失配的影响^[74-77]，这类方法被统称为离网格 (off-grid) 算法。然而，在这些方法中仍然假设了网格的存在，因此连续取值的参数依然不能完美的被估计出来。

近年来，一些直接处理连续参数而不施加离散网格的方法被提出，统称为无网格 (gridless) 算法。需要指出的是，无网格的概念并非由压缩感知理论首先提出。例如子空间算法中的 root-MUSIC^[30] 和 ESPRIT^[29] 算法就无需对网格进行搜索，因此也应被视为一种无网格算法。然而，和其它子空间方法一样，这些方法仍需要大量快拍数据以实现准确的信号协方差矩阵的估计，因此应用场景受限。在压缩感知理论中，为了实现无网格估计，最直观的操作是将经典压缩感知框架中的字典进行连续化。基于这一想法，Chandrasekaran 等人^[78,79] 提出了原子范数的概念和原子范数最小化 (Atomic Norm Minimization, ANM) 的方法。确切的说，原子范数是开发凸优化解法的通用方法，其目的是最小化给定的原子集

中的原子数量。原子范数的概念中并没有对原子集形式做具体限制，只要满足特定的条件使得其满足范数的定义即可。这使得原子集的设计拥有很大的自由度，因此很多问题都可以被视为原子范数最小化的特殊情况。例如在传统的基于字典的压缩感知框架中，其中原子可视为是具有单位范数的 1 稀疏向量；在低秩矩阵填充的核范数最小化问题中，可以将原子视作单位范数的秩一矩阵。对于本文主要考虑的参数估计问题，信号大多可以建模为频谱稀疏的信号，此时可以将原子视作具有连续值频率的 Vandermonde 向量。

值得指出的是，从直观上看，将基于字典的 l_1 优化问题连续化后得到的应该是全变分范数最小化问题而非上述提到的 ANM 问题。然而，Candès 等人指出，ANM 方法实质上和全变分范数最小化方法是等价的^[80,81]。Candès^[80]通过对 ANM 问题的对偶问题进行分析给出了 ANM 方法有效的必要条件，即对偶证明 (dual certificate)。当对偶证明成立时 ANM 方法可以有效实现参数估计。对偶证明本质上可以看作是对有限长度序列的频谱的约束。基于 Fejér 核的平方及其导数，Candès 构造了一种实现对偶证明的内插方法，并基于此种构造给出了能够保证对偶证明成立的参数分隔条件。值得注意的是上述分隔条件并非是 ANM 有效的充分条件，Candès 给出的证明中涉及到大量数值结果，实际应用中此条件可以进行放松。近期，Yang 等人^[82] 证明了当信号的协方差矩阵已知时，无需任何分隔条件，ANM 都可实现准确的参数估计。Bhaskar 等人^[83] 发现 ANM 方法充分利用了信号的稀疏性，因此还可用于信号的降噪。他们给出了有噪声情况下的原子范数正则化方法，并且给出了正则化参数的选取方法。

另外需要注意的是，由于涉及到无穷连续个参数的优化，ANM 问题本身无法直接求解。Candès 等^[80] 通过对 ANM 的对偶问题进行推导，将对偶原子范数的约束转换为三角多项式不等式约束。利用有界引理 (bounded lemma)^[84]，可以将三角多项式不等式约束转换为半正定规划 (Semi-Definite Programming, SDP) 问题，从而得以规划求解。值得一提的是，Teke 等人^[85] 证明了有界引理和传统系统理论中的离散时间有界引理本质上是一致的，这为后续研究中对其它形式原子集的相关处理提供了思路。Bhaskar^[83] 等人给出了基于交替乘子法 (Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM) 的快速求解方法。在求解完 ANM 问题后还需要从解得的变量中提取待估计的参数。基于对偶证明，Candès 通过提取对偶多项式中使得幅值为 1 的参数实现了目标参数估计。然而，实验证明这样的参数提取方式精度和鲁棒性均较低。通过将对偶问题的 SDP 再进行对偶，得到原问题的 SDP，Tang 等人^[86] 发现所得的半正定矩阵中含有 Toeplitz 的结构。基于 Carathéodory-Fejér-Toeplitz 定理^[87-89]，Tang 等人^[86] 发现可以通过 Vandermonde 分解从求得的 Toeplitz 中提取目标参数。他们还对随机观测的场景进行了研究，并且证明了针对一维谱估计问题，在不同频率之间的环绕距离不小于 $4/n$ 时，ANM 方法可以在 $O(r \log r \log n)$ 的样本条件下实现参数估计。值得注意的是，上述结果是基于概率得出的，其中随机观测的模型为 Bernoulli 观测，因此 Tang 等人^[86] 的结论并不适用于实际中特定阵列的情况。

上述方法均是基于 SMV 的情况推导的。Yang 等人^[90] 将上述结果推广至 MMV 的情况，并且分析了多快拍带来的性能提升。对于原子 0 范数最小化方法，性能极限和有网格的情况类似，均为 $\frac{\text{Spark}(\mathbb{A}) - 1 + \text{rank}(\mathbf{Y})}{2}$ ，其中 \mathbb{A} 为原子集。为了逼近原子 0 范数的性能，Yang 等人^[91] 通过对秩最小化问题进行凸松弛，并迭代对其上界最小化 (Majorize-Minimization, MM) 优化，提出了一种迭代求解算法。通过对对此方法进行分析，Yang 等人^[91] 发现此方法的每一次迭代等效于求解加权原子范数，因此将此方法命名为重加权原子范数最小化方法 (Reweighted Atomic Norm Minimization, RANM)。近期，Li 等人^[92] 通过将尾部优化算法推广至无网格的情况，提出了一种尾部原子范数最小化方法，相比 RANM，实现了更接近于 l_0 优化的性能。

虽然转换得到的 SDP 问题与原子范数最小化问题等价，但由于其规模等问题，现有的通用求解器，例如 CVX 工具包^[93] 等难以对其进行高效求解。为了提升求解效率，Li 等人^[94] 利用 ADMM 对 MMV 的情况进行快速求解，获得了快于通用求解器的求解速度。Tian 等人^[95] 基于加速近端梯度下降 (Accelerated Proximal Gradient, APG) 方法，提出了一种收缩阈值处理方法，显著提升了 APG 的速度。Chen 等人^[96] 通过将超优化方法^[97] 用于 ADMM 算法，提出了一种超优化 ADMM 方法，在 ANM 问题的求解上相比 ADMM 算法有更快的速度。上述求解方法均为一阶方法，相比于一阶方法，基于内点法的二阶方法有更快的收敛速度^[98]。基于内点法，Thomas 等人^[99] 提出了一种快速内点法，通过将增广 KKT 条件进行解析求解和利用伪牛顿法 L-BFGS^[100] 来获得更新步长，同时将半正定约束用有限点的三角多项式约束代替，使用快速傅里叶变换 (FFT) 来判定约束条件，显著提升了求解速度。Gao 等人^[101] 将快速内点法推广到了 MMV 部分观测的情况，拓宽了此方法的应用范围。

上述方法均只适用于一维参数估计的情况。在二维及多维情况中，类比一维情况的推导，虽然也可以将对偶原子范数的约束写成二(多)维三角多项式不等式约束的形式，但由于此时有界引理不适用，导致难以得出相应的 SDP 问题以便规划求解。利用平方和松弛 (Sum-of-Square Relaxation)^[84]，Chi 等人^[102] 将松弛后的三角多项式转换为 SDP，并且推导了原问题的 SDP 形式，发现其中存在块 Toeplitz 结构。由于 Carathéodory-Fejér-Toeplitz 定理^[87-89] 不适用于多维的情况，因此难以从此结构中提取目标参数。Yang 等人^[103] 修正了文献 [102] 中的缺陷，指出此时存在多层 Toeplitz 矩阵，并且提出了多层 Vandermonde 分解方法以提取目标参数。他们还进一步将重加权方法应用于多维情况^[91,103]，得到了更逼近 l_0 优化的解。由于多维操作中需要对信号进行向量化，使得 SDP 的求解规模急剧上升。为了降低二维 ANM 方法的运算复杂度，Zhang 等人^[104] 提出了一种解耦原子范数最小化 (Decoupled ANM, DANM) 方法。DANM 本质上是一种一维 MMV 算法，需要对求解的两个参数进行匹配，其二维信息是通过对 MMV 信号功率谱的先验获得的。因此，虽然 DANM 显著降低了问题的规模，但同时也降低了算法性能。

从上述讨论可以看出，求解 ANM 问题的关键步骤在于将对偶原子范数约束转换为 SDP 问题，这一转换主要是基于有界引理^[84] 进行的，这要求信号模型满足一定的 Vandermonde 结构。在非理想采样的情况下，由于阵元的间距不一，从而不存在固定的 Vandermonde 结构，难以得到可求解的 ANM 问题。为此，Gao 等人^[105] 利用 Jacobi-Anger 展开^[51] 将这种情况下的阵列流行展开为观测矩阵乘上一个具备 Vandermonde 结构的向量的形式，从而利用 ANM 方法对其进行求解。然而，如前所述，这样的展开会带来角度模糊，降低了算法性能。

为了将无网格方法推广到宽带信号，Wu 等人^[106] 将原子范数拓展到多频模型，并通过对偶向量进行映射得到了等价的三角多项式约束，从而利用有界引理^[84] 得到了可求解的 SDP 形式。近期，此方法被进一步推广至稀疏阵列和 MMV 的情况^[107]，并在实际水声数据中进行了算法验证^[108]。然而，此方法要求各子带中心频率为最低频率的整数倍。当信号为高频带通信号时，会导致导出的虚拟阵列的孔径过大，带来大量运算复杂度的同时无法有效提升参数估计精度和分辨率。

综上所述，虽然无网格压缩感知理论提出至今已过去十余年，基本完成了基本理论的建立，但其在具体场景下的应用仍受到各种限制。目前的已有研究虽对无网格参数估计算法在多维、非理想采样和宽带等场景下的应用做了部分探索，但距离在实际水下探测、通信等任务中的应用仍存在一定的距离。

1.3 本文主要工作和创新点

为了在有限快拍数的条件下实现高分辨参数估计，同时避免有网格方法带来的网格失配的问题，本文主要利用基于原子范数最小化的无网格压缩感知理论对宽带信号目标参数估计问题展开研究。按照应用场景复杂度的层层递进，本文依次研究了限定范围的窄带一维 DOA 估计问题、宽带被动声呐俯仰角-方位角联合估计问题、宽带主动声呐角度-距离联合估计问题和宽带主动声呐角度-速度联合估计问题。如第1.2.3节所述，ANM 方法在具体场景中应用的主要难点在于如何将对偶原子范数约束转化 SDP 约束并得到可规划求解的 SDP 问题。针对不同的应用场景，本文根据建立的信号模型提出了相应的原子集以使用 ANM 方法。这些原子集对应的对偶原子范数约束通常不具备能直接利用有界引理转化为半正定约束的形式。为此，本文提出了一系列处理方法，最终得出了相应 ANM 问题的 SDP 形式，实现了相关参数的高分辨无网格估计。除此之外，本文还对部分运算复杂度高的算法的快速求解进行了探索，使得其更易于在实际应用中部署。各研究内容的主要难点及其之间的关系总结于图 1-1 中。

本文的主要工作和创新点可总结如下：

- (1) 当目标的 DOA 限定在一定区域范围内时，可以通过仅对目标区域的 DOA 进行搜索以降低算法复杂度。受限于有界引理的应用条件，基于 ANM 的 DOA 估计方法难以被直接应用于限定区域的 DOA 估计问题中，从而导致全区域角度搜索带来大量的运算冗余。针对这一问题，本文通过对对偶变量进行带通

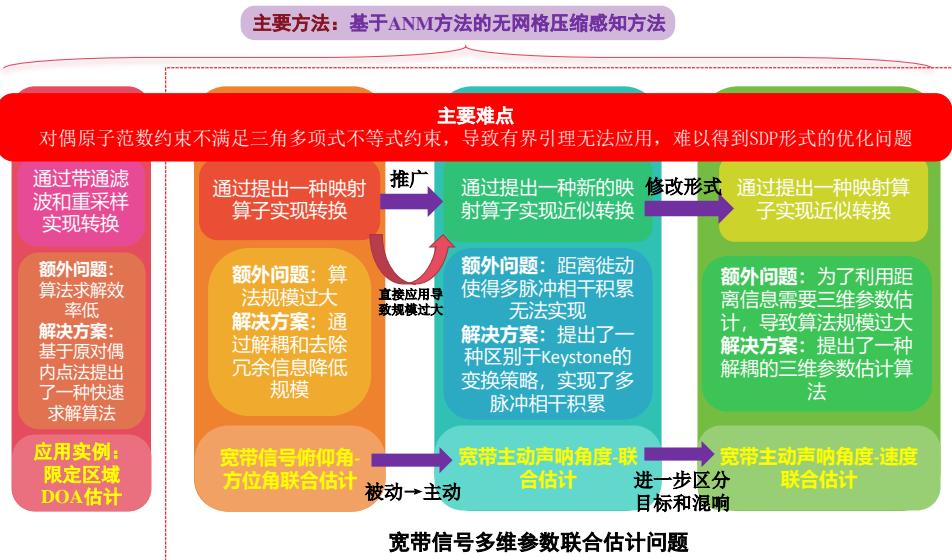


图 1-1 论文整体框架图

Figure 1-1 Structure of the dissertation

滤波和降采样，使得相应的对偶三角多项式不等式约束可以使用有界引理转化为半正定约束，并将对偶问题转化为半正定规划问题，进而得到了基于 ANM 的限定区域 DOA 估计方法。为了提升上述算法的运算效率，本文还提出了一种适用于上述算法的快速求解算法，通过原对偶内点法提升了运算速度。仿真结果表明，相比于原始 ANM 算法，所提限定区域的 ANM 算法的运算时间更短；所提快速求解算法在估计精度与原算法一致的条件下运算速度进一步提升。

(2) 针对现有针对窄带一维 DOA 估计的算法无法被直接应用于涉及宽带信号和高维参数提取的场景中以及有网格方法存在的网格失配的问题，为实现宽带被动声呐的二维定位，本文提出了一种二维多频原子范数最小化算法 (2DM-FANM) 以无网格地估计宽带信号的俯仰角和方位角。具体的，本文利用多频模型来建模宽带信号，并推导了对应的信号模型。基于信号模型的结构，本文构造了相应的原子集和可以无网格地估计俯仰角和方位角的原子范数最小化问题。针对提出的原子集对应的对偶原子范数约束不具备三角多项式不等式约束的形式的问题，本文提出了一种新的映射算子，将对偶原子范数约束转化为了二元三角多项式不等式约束，并利用有界引理将对偶问题转化为了 SDP 问题，并通过 Lagrange 对偶分析得到了原问题的 SDP 形式。为了降低 2DMFANM 的运算障碍以便于部署，本文提出了两种快速算法，分别为 2DMFDANM 和 2DM-FANM_SizeRedu。具体的，2DMFDANM 通过将空间角频率解耦以降低原始算法的规模，而 2DMFANM_SizeRedu 则通过去除原算法中的冗余信息以提升速度。理论和仿真分析表明上述两种算法可以以稍微降低估计精度的代价显著提升运算速度。数值仿真和实验验证展现了所提方法相比于现有算法的优越性。

(3) 为了实现宽带主动声呐的二维定位，本文对宽带线性调频 (Linear Frequency Modulation, LFM) 脉冲声呐的角度-距离联合估计问题进行了研究，分别

针对单脉冲和多脉冲的情况基于原子范数最小化理论提出了单脉冲 ANM 方法和多脉冲 ANM 方法以实现目标角度-距离的无网格估计。具体的，为了解决宽带信号存在的不满足窄带假设和距离徙动的问题，本文推导了体现这两种问题的接收信号模型。为了实现单脉冲情况下的无网格角度-距离联合估计，基于推导的模型构造了相应的原子集和对应的原子范数最小化问题。针对构造的原子集对应的对偶原子范数约束不满足三角多项式不等式约束的形式的问题，提出了一种新的映射算子，将对偶原子范数约束近似转换为了二元三角多项式不等式约束，并利用有界引理将对偶问题转换为了 SDP 问题。针对多脉冲情况下由于距离徙动导致难以实现相干积累以及传统的 Keystone 变换无法抑制速度模糊的影响的问题，提出了一种新的变换策略，得到了一种可以抑制速度模糊的多脉冲积累方法。数值仿证明所提单脉冲算法可以抑制混叠，实现准确的距离-角度联合估计；而多脉冲算法则可在速度模糊存在的情况下成功利用多个脉冲进行相干积累，实现更低信噪比下的高分辨距离-角度联合估计。

(4) 水下混响是声呐探测中面临的主要问题，多普勒/速度信息的提取是抑制混响的主要手段。为充分利用信号的多维信息，本文研究了宽带 LFM 脉冲声呐的角度-速度联合估计问题，分别基于多字典 SBL 方法和原子范数最小化理论提出了有网格和无网格的角度-速度联合估计算法。特别的，根据是否利用距离信息带来的特殊结构，在无网格估计的框架下，分别提出了忽略距离信息的 ANM 算法和考虑距离信息的 ANM 算法。具体的，针对宽带信号存在的快-慢时间耦合和空域导向向量随频率改变等问题，本文通过构造多字典稀疏恢复问题实现了在上述问题存在时的角度-速度联合估计，同时还改善了速度模糊的影响。所提算法使用多字典 SBL 算法求解构造的稀疏恢复问题，加快了求解速度。为了实现无网格的角度-速度联合估计，本文根据推导的信号模型构造了相应的原子集并提出了对应的原子范数最小化问题。针对所提原子集对应的对偶原子范数约束不满足三角多项式不等式约束的形式的问题，提出了一种新的映射算子，将对偶原子范数约束近似转换为了二元三角多项式不等式约束，并利用有界引理将对偶问题转换为了 SDP 问题，通过 Lagrange 对偶分析得到了原问题的 SDP 形式。为了利用距离信息带来的特殊结构，首先在上述算法的基础上提出了一种角度-速度-距离联合估计方法。针对上述三维参数估计算法规模过大的问题，通过将距离与角度-速度解耦得到了一种考虑距离信息的角度-速度联合估计算法。数值仿真结果显示所提算法均可以在快-慢时间耦合、窄带假设被破坏、角度混叠以及速度模糊等问题存在的条件下实现角度-速度的高分辨精确估计。特别的，所提无网格方法由于不受到网格失配的影响，在高信噪比下性能优于有网格的多字典 SBL 算法。同时，由于利用了距离的结构信息，考虑距离信息的角度-速度联合估计算法的性能优于忽略距离信息的算法。

1.4 本文的结构安排

本文从压缩感知和稀疏恢复的理论出发，对水下目标参数估计问题展开研究。论文结构如下：

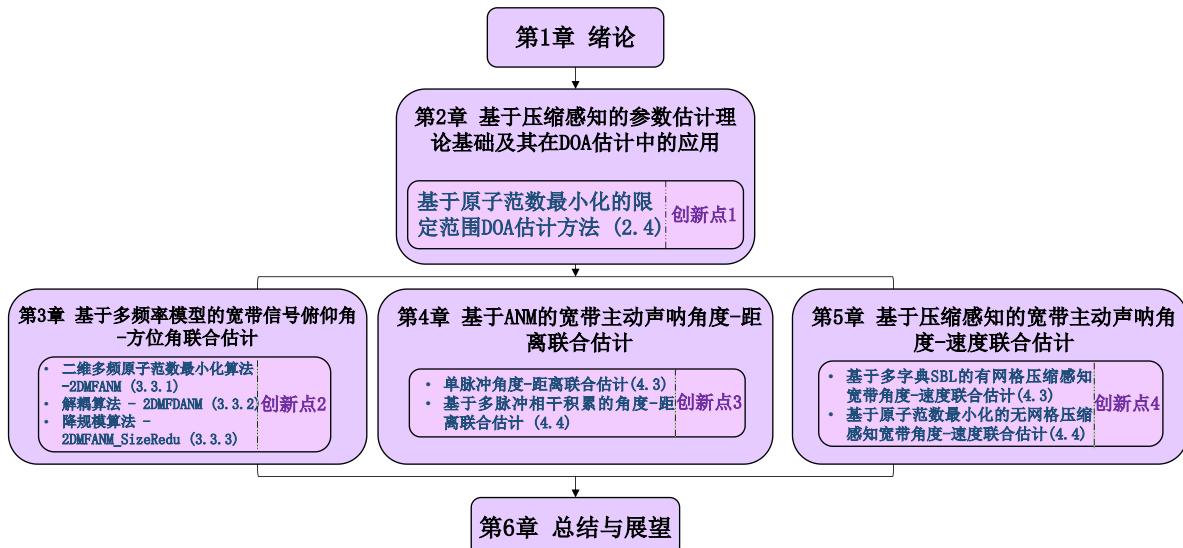


图 1-2 论文结构示意图

Figure 1-2 Diagram of dissertation structure

第一章为绪论。本章对目标参数估计问题的背景及研究现状做了简要介绍，并基于研究现状阐述了选题意义，并在最后对本文主要创新点做了总结。

第二章为压缩感知的参数估计理论基础及其在 DOA 估计中的应用。首先对传统基于字典的有网格方法做了简要介绍，并紧接着详细介绍了基于原子范数最小化方法的无网格方法。之后，为了说明原子范数最小化方法在实际场景中应用的困难，以限定区域的 DOA 估计问题为例，介绍了将原子范数最小化方法应用于实际问题的技术路线，并提出了一种限定区域的原子范数最小化方法(CA-ANM)。为了快速求解上述原子范数最小化 SDP 问题，本章还提出了一种基于原对偶内点法的快速求解方法(FCA-ANM)。上述算法的有效性均通过仿真数据得到了验证。本章内容对应创新点(1)。

第三章为基于多频率模型和原子范数最小化方法的宽带信号俯仰角-方位角联合估计，对应创新点(2)。本章首先对基于多频率模型对宽带背景下的俯仰角-方位角联合估计的信号模型进行了推导。基于此，本章推导了基于原子范数最小化的俯仰角-方位角联合估计算法，即二维多频原子范数最小化算法(2DMFANM)。针对算法规模过大的问题，本章接下来推导了两种快速算法，分别为解耦的 2DMFDANM 和去除冗余信息的 2DMFANM_SizeRedu，并对其理论性能做了证明。最后，本章通过仿真和实验数据对所提算法的有效性和优越性做了验证。

第四章为基于原子范数最小化的宽带主动声呐角度-距离联合估计，对应创新点(3)。本章首先推导了当发射信号为宽带线性调频(Linear Frequency Modu-

lation, LFM) 脉冲波时的接收信号模型。之后，基于信号模型的结构，本章首先研究了单脉冲情况下的角度-距离联合估计问题，并推导了基于单脉冲 ANM 的角度-距离联合估计算法。紧接着，为了实现距离徙动情况下多脉冲的相干积累，本章进一步提出了一种基于多脉冲 ANM 的角度-距离联合估计算法。最后，本章通过数值仿真对上述算法的有效性和优越性进行了验证。

第五章为基于压缩感知的宽带主动声呐角度-速度联合估计。基于第四章推导的信号模型，本章分别从有网格和无网格的角度给出了基于多字典 SBL 算法的角度-速度联合估计算法和基于 ANM 的角度-速度联合估计算法。为了利用距离信息带来的特殊结构，本章还给出了一种考虑距离信息的基于 ANM 的角度-速度联合估计算法。最后，本章通过数值仿真对所提算法的优越性进行了验证。

第六章为结论与展望。本章对本文的研究内容进行了总结，并针对其中的不足之处对后续研究方向进行了说明。

本文的结构示意图如图 1-2 所示。

第2章 基于压缩感知的参数估计理论及其在DOA估计中的应用

2.1 前言

本文主要使用基于压缩感知参数估计方法，因此在本章以窄带一维DOA估计问题为例对此类方法的基本理论进行介绍。本章首先对基于字典有网格方法的DOA估计基本原理进行简要介绍，并通过对字典进行连续化阐述基于全变分范数最小化和原子范数最小化理论的无网格算法。接下来，本章对原子范数最小化问题的基本处理流程做了全面阐述，并详细说明了三角多项式不等式约束在原子范数最小化问题中的重要性。

当目标的DOA限定在一定区域范围内时，可以通过仅对目标区域的DOA进行搜索以降低算法复杂度。为了说明原子范数最小化方法在实际场景中应用的难点，本章对限定区域的DOA估计问题进行了研究，并基于原子范数最小化理论设计无网格DOA估计算法以避免网格失配的影响。在此问题中，主要的难点在于：虽然对偶原子范数约束可被写作三角多项式不等式约束，但此时的频段范围不为全频段，导致有界引理无法使用。为了解决这一问题，本章通过对偶变量进行带通滤波并重采样使得相应的三角不等式约束可以使用有界引理转化为半正定约束，并将对偶问题转化为了SDP问题。通过对对偶问题进行Lagrange分析，得到了原问题的SDP形式。为了提升上述算法的运算效率，本章还基于原对偶内点法提出了一种适用于上述算法的快速求解算法，显著提升了算法的运算速度。

最后，针对本文主要研究的宽带问题中广泛使用的多原子集原子范数最小化方法，本章通过对原子0范数最小化方法的理论性能界限进行分析和证明阐述了此类方法的优势。

本章内容组织如下：第2.2节对有网格压缩感知技术进行了简要介绍，并对网格失配问题的来源进行了说明；第2.3节在上一节的基础上通过对离散字典连续化对基于原子范数最小化的无网格压缩感知方法进行了阐述；第2.4节对限定范围的DOA估计问题进行了研究，并推导了基于原子范数最小化的无网格DOA估计方法，同时基于原对偶内点法对快速求解算法进行了推导。本节的最后通过仿真实验将所提算法与已有算法进行了对比，展现了所提算法的优越性；第2.5节对基于多原子集的原子范数最小化方法的性能界限进行了分析；最后第2.6节对本章内容进行了总结。

2.2 有网格压缩感知理论简介

假设空间中存在的 K 个窄带远场信号源分别从方向 θ_k 到达某 N 元均匀线阵。可以将接收信号 \mathbf{x} 表示为^[18]

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{s} + \mathbf{n} \in \mathbb{C}^N, \quad (2-1)$$

其中 $\mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$, $\theta_k \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], k = 1, 2, \dots, K$, $\mathbf{a}(\theta) = [1, \exp(-j2\pi f_c \frac{d \sin \theta}{c}), \dots, \exp(-j2\pi f_c \frac{(N-1)d \sin \theta}{c})]^T$ 为阵列导向向量, f_c 为载波频率, $d = \frac{c}{2f_c}$ 为阵元间距, c 为波速, \mathbf{s} 为信号源的幅值, \mathbf{n} 为噪声。DOA 估计的目标在于从接收信号 \mathbf{x} 中恢复出方向 $\boldsymbol{\Theta} = \{\theta_k\}_{k=1}^K$ 。

基于字典的有网格稀疏恢复方法基于以下假设: 可以构造一组对空间 DOA 的离散划分 $\boldsymbol{\Theta}_{\text{dic}} = \{\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_I\}, I \gg N > K$, 使得目标 DOA 集合 $\boldsymbol{\Theta} \subset \boldsymbol{\Theta}_{\text{dic}}$, 即目标 DOA 均落在划分的离散网格上, 这也是有网格方法名字的来源。基于离散的网格, 可以构造超完备字典 $\mathbf{A}_{\text{dic}} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta}_{\text{dic}})$, 因此接收信号可以表示为

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_{\text{dic}} \mathbf{s}_{\text{sparse}} + \mathbf{n}, \quad (2-2)$$

其中 $\mathbf{s}_{\text{sparse}} \in \mathbb{C}^I$ 。假设 $\boldsymbol{\Theta}$ 对应于 $\boldsymbol{\Theta}_{\text{dic}}$ 中的指标为 $T = \{i_1, i_2, \dots, i_K\}$, 此时 DOA 估计问题转换为从 \mathbf{x} 中对 $\mathbf{s}_{\text{sparse}}$ 进行恢复, $\mathbf{s}_{\text{sparse}}$ 中的非零元对应了目标 DOA, 即 $[\mathbf{s}_{\text{sparse}}]_T = \mathbf{s}$, $[\mathbf{s}_{\text{sparse}}]_{T^C} = 0$ 。由于 $I \gg N$, 因此上述问题是欠定的。对比(2-2)和(2-1), 可以看出与目标信号对应的 $\mathbf{s}_{\text{sparse}}$ 是稀疏的, 即其大部分元素均为 0。基于这一特点, 可以通过以下 l_0 优化问题来求解 $\mathbf{s}_{\text{sparse}}$:

$$(l_0) : \quad \mathbf{s}_{\text{sparse}} = \arg \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{s}\|_0, \quad \text{s.t. } \|\mathbf{x} - \mathbf{A}_{\text{dic}} \mathbf{s}\|_2^2 \leq \epsilon, \quad (2-3)$$

其中 $\|\cdot\|_0$ 表示 0 范数, ϵ 为噪声容限。当不考虑噪声时, 上述问题转换为

$$(l_0) : \quad \mathbf{s}_{\text{sparse}} = \arg \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{s}\|_0, \quad \text{s.t. } \mathbf{x} = \mathbf{A}_{\text{dic}} \mathbf{s}. \quad (2-4)$$

上述讨论仅对稀疏这一概念做了笼统的说明, 在具体的稀疏恢复算法中, 不同的方法对稀疏性有着不同的要求和刻画。在有网格算法中, l_0 优化最为充分的利用了信号的稀疏性, 因此对信号稀疏性的要求最低。以下不加证明的给出使得方法(2-4)有效的条件。

定理 2.1. 对任意的 $\boldsymbol{\Theta} \in \boldsymbol{\Theta}_{\text{dic}}$, 当 $K < \frac{N-1}{2}$ 时, $\forall \mathbf{s} \in \mathbb{C}^K$, 方法(2-4)的解唯一, 且 $[\mathbf{s}_{\text{sparse}}]_T = \mathbf{s}$, $[\mathbf{s}_{\text{sparse}}]_{T^C} = 0$; 当 $\frac{N}{2} \leq K < N$ 时, 对几乎所有 $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^K$, 方法(2-4)的解唯一, 且 $[\mathbf{s}_{\text{sparse}}]_T = \mathbf{s}$, $[\mathbf{s}_{\text{sparse}}]_{T^C} = 0$ 。

利用文献[60]中的引理 1.1 和定理 2.1 容易得到上述定理 2.1 的证明。从定理 2.1 可以看出, 对于有网格的 l_0 算法, 稀疏性的体现仅在于目标的个数上, 只要目标的个数足够少, 此算法便可得到正确的估计。虽然 l_0 算法有最强的参数估计性能, 但由于其求解是 NP-难的, 因此实际中无法使用。应用中最常见的是将无法规划求解的 l_0 优化问题凸松弛为 l_1 优化^[109]的基追踪算法, 即

$$(l_1) : \quad \mathbf{s}_{\text{sparse}} = \arg \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{s}\|_1, \quad \text{s.t. } \mathbf{x} = \mathbf{A}_{\text{dic}} \mathbf{s}, \quad (2-5)$$

其中 $\|\mathbf{s}\|_1 = \sum_{i=1}^I |s_i|$ 。相较于 l_0 范数, l_1 范数也能起到稀疏约束的作用并优化出具有稀疏性的解 $\mathbf{s}_{\text{sparse}}$ 。然而, l_1 和 l_0 范数的性能存在差距, 只有在特定的条

件下公式(2-5)和公式(2-4)的解才具有等价性。除了基追踪算法外，基于贝叶斯压缩感知的方法^[110]也被广泛研究，但其本质上和基追踪算法同属 l_1 优化算法。

上述有网格算法均基于目标参数落在事先划分的网格上的假设，当此假设不满足时会出现网格失配^[72]的问题。为了缓解这一问题，后来还出现了一系列离网格算法^[74-77]。此类算法的主要思路是在有网格字典的基础上加上内插项以估计网格间的参数，其中内插项的参数主要通过最大似然估计等方法获得。由于这些内插项主要通过阵列流形的一阶或高阶 Taylor 展开获得，因此天然存在误差，使得离网格算法的性能仍受到网格的限制，因此本章不再对此类算法做更多介绍。

2.3 基于原子范数最小化方法的无网格压缩感知方法简介

为了从根本上解决网格失配的影响，近年来出现了一系列之间处理连续参数而不引入网格的无网格算法，其中最具代表性的是原子范数最小化方法^[78]。原子范数最小化方法是(2-5)中 l_1 优化算法在连续情况下的直接推广。具体的，首先将离散字典连续化，成为连续的集合 $\mathbb{A}_1 = \{\mathbf{a}(\theta) : \theta \in [-\pi/2, \pi/2]\}$ 。对 $\mathcal{L}^1[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的复值函数 $s(\theta)$ ，定义 $\mathbb{A}_1 s \triangleq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{a}(\theta) s(\theta) d\theta$ 。基于此， l_1 范数 $\|s\|_1 = \sum_{i=1}^I |s_i|$ 自然从求和转换为积分。由于积分涉及到函数的可积性等性质，出于数学上严格的考虑，此处将 s 理解为复测度以在技术上提供便捷，并将积分转换为全变分(Total Variation, TV) 范数。具体的，按照上述设定，(2-2)转换为

$$\mathbf{x} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{a}(\theta) s(\theta) d\theta. \quad (2-6)$$

这里需要将 s 视为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的复测度。不失一般性，取 $\mathbb{T} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的 Borel σ -域 $\mathcal{B}(\mathbb{T})$ ，构成可测空间 $(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}))$ 。由此(2-6)可被转换为

$$\mathbf{x} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{a}(\theta) s(d\theta). \quad (2-7)$$

目标信号对应的复测度可被表示为

$$s_{\text{obj}} = \sum_{k=1}^K s_k \delta_{\theta_k}, \quad (2-8)$$

其中 δ_{θ_k} 表示 θ_k 处的 Dirac 测度。为了避免符号混淆，此处对相关符号进行区分： s, s_{obj} 表示上述定义的复测度， s_k 表示(2-1)中 s 的第 k 个元素。对于任意 $(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}))$ 上的复测度 s ，对任意 $\mathbb{S} \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$ ，可以定义 s 的全变分 $|s|(\mathbb{S})$ 为^[111]

$$|s|(\mathbb{S}) = \sup \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |s(\mathbb{S}_n)| : \mathbb{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{S}_n, \mathbb{S}_n \text{互不相交} \right\}, \quad (2-9)$$

其中 \mathbb{S}_n 为 $\mathcal{B}(\mathbb{T})$ -可测集。类比有网格情况下 l_1 范数的定义，可以定义相应的全变分范数为 $\|s\|_{\text{TV}} \triangleq |s|(\mathbb{T})$ ^[80]。在上述定义的基础上，可以得出有网格 l_1 优化算法的连续形式为

$$s_{\text{sparse}} = \arg \min_s \|s\|_{\text{TV}}, \quad s.t. \mathbf{x} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{a}(\theta) s(d\theta). \quad (2-10)$$

下面的定理证明，当目标角度 Θ 满足一定条件时，通过上述优化问题求得的 s_{sparse} 就是和目标对应的 s_{obj} ，也就是说可以通过全变分范数最小化方法实现无网格 DOA 估计。

定理 2.2. 若对任意 $s \in \mathbb{C}^K, |s_k| = 1$ ，都存在对偶三角多项式

$$q(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} q_n \exp(j2\pi f_c \frac{d \sin \theta}{c} n) = \sum_{n=0}^{N-1} q_n \exp(j\pi \sin \theta n) \quad (2-11)$$

满足 $\begin{cases} q(\theta_k) = s_k, & \theta_k \in \Theta \\ |q(\theta)| < 1, & \text{其它} \end{cases}$ ，则全变分范数最小化算法(2-10)可以实现准确的无网格 DOA 估计。

定理 2.2 的证明附于附录一中。

值得注意的是，在全变分最小化问题(2-10)中，优化变量为分布在全域中的测度 s ，通常是扩散的。但定理 2.2 却证明了优化的结果 s_{sparse} 是集中在 Θ 上的，为点测度， $\{\theta_k\}, k = 1, 2, \dots, K$ 为其原子。基于这一观察，可以看出对所有的测度 s 进行搜索实际上是不必要的，事实上仅对点测度进行搜索即可获得需要的结果。基于这一现象，容易得到原子范数的概念：

定义 2.1. 给定原子集 \mathbb{A} ， \mathbf{x} 的原子范数 $\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{A}}$ 定义为^[78]

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{A}} &\triangleq \inf \{t > 0 : \mathbf{x} \in t \cdot \text{conv}(\mathbb{A})\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^K c_k : \mathbf{x} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k \in \mathbb{A}, c_k > 0 \right\}, \end{aligned} \quad (2-12)$$

其中 $\text{conv}(\mathbb{A})$ 表示由原子集 \mathbb{A} 构成的凸壳。

为了使得原子范数满足范数的性质，原子集 \mathbb{A} 需要满足一定的对称性^[86]。因此需要对前面提出的集合 \mathbb{A}_1 做修正，得到相应的原子集为

$$\mathbb{A} = \left\{ \mathbf{a}(\theta) e^{j\phi} : \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \phi \in [0, 2\pi) \right\}.$$

此时可以得到相应的原子范数最小化 (Atomic Norm Minimization, ANM) 问题为

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathbb{A}}, \quad s.t. \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}. \quad (2-13)$$

容易看出，当定理2.2的条件满足时，原子范数最小化问题(2-13)和全变分范数最小化问题(2-10)等价。

定理2.2中的条件通常被称作对偶证明(dual certificate)。这是最常用的验证原子范数最小化方法有效性的充分条件。

由于涉及到无穷连续个参数的优化，原子范数最小化问题(2-13)通常无法直接求解。为此，可以对其对偶问题进行分析。(2-13)的对偶问题为

$$\max_{\mathbf{q}} \langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad s.t. \|\mathbf{q}\|_{\mathbb{A}}^* \leq 1, \quad (2-14)$$

其中 $\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{A}}^*$ 指 \mathbf{q} 的对偶原子范数，定义为

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{A}}^* = \sup_{\mathbf{x}} \left\{ \langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}} : \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{A}} \leq 1 \right\}. \quad (2-15)$$

可以进一步计算 $\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{A}}^*$ 如下：

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{A}}^* = \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{A}} \leq 1} \langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}} = \max_{\mathbf{a} \in \mathbb{A}} \langle \mathbf{q}, \mathbf{a} \rangle_{\mathbb{R}} = \max_{\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |\langle \mathbf{q}, \mathbf{a}(\theta) \rangle|. \quad (2-16)$$

容易看出对于(2-1)中定义的 $\mathbf{a}(\theta)$ ，有

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{a}(\theta) \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} q_n \exp(j\pi \sin \theta n) \triangleq q(\theta). \quad (2-17)$$

可以看出此时上式为三角多项式，与定理2.2中的多项式一致。因为其出现在对偶问题中，因此将其称为对偶三角多项式。基于上述推导，(2-14)中的对偶原子范数约束等价于

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{A}}^* \leq 1 \iff |q(\theta)|^2 \leq 1, \forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \quad (2-18)$$

根据有界引理^[84]，上述三角多项式约束等价于以下半正定条件

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{q} \\ \mathbf{q}^H & 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \sum_{i=1}^{N-k} \mathbf{H}_{i,i+k} = \delta_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2-19)$$

其中 $\delta_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。由此，对偶问题(2-14)可以被转换为如下半正定规划(semidefinite programming, SDP)问题

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{q}} \langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{q} \\ \mathbf{q}^H & 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \sum_{i=1}^{N-k} \mathbf{H}_{i,i+k} = \delta_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (2-20)$$

并可以通过规划求解。对偶问题的求解还提供了一种估计 DOA 参数的方法。具体的，根据定理 2.2，可以看出解得的对偶多项式 $q(\theta) = \langle \mathbf{q}, \mathbf{a}(\theta) \rangle$ 满足

$$\begin{cases} |q(\theta_k)| = 1, & \theta_k \in \Theta \\ |q(\theta)| < 1, & \text{其它。} \end{cases} \quad (2-21)$$

因此，可以通过提取使得 $|q(\theta)| = 1$ 的 θ 来实现 DOA 估计。然而，此方法的鲁棒性较差，导致 DOA 估计精度较低^[19]。注意到(2-20)中 $\sum_{i=1}^{N-k} \mathbf{H}_{i,i+k} = \delta_k, k = 0, 1, \dots, N - 1$ 实质上为 Toeplitz 算子的伴随算子。基于 Carathéodory-Fejér-Toeplitz 定理^[87-89]，Toeplitz 矩阵 $\mathbf{Toep}(\mathbf{u})$ 可以通过 Vandermonde 分解写成 $\sum_k p_k \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k)$ 的形式，其中蕴含了待估的 DOA 信息。基于这一特性，通过对(2-20)进行 Lagrange 对偶分析，得到原问题的 SDP 形式为

$$\min_{t,u} \frac{1}{2}(t + u_0), \text{s.t. } \begin{bmatrix} \mathbf{Toep}(\mathbf{u}) & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^H & t \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (2-22)$$

其中 $\mathbf{Toep}(\cdot)$ 为 Toeplitz 算子，将向量 \mathbf{u} 转换为 Toeplitz 矩阵 $\mathbf{Toep}(\mathbf{u})$ 。容易证明，对解得的 $\mathbf{Toep}(\mathbf{u})$ 做 Vandermonde 分解得到的 θ 即为目标 DOA，此方法相比直接在对偶多项式中进行提取有更高的精度和鲁棒性。

以上介绍了原子范数最小化方法的概念及其基本求解流程。可以将 ANM 方法的使用流程总结如下：首先构造原子集，并提出相应的原子范数最小化问题；其次对原问题进行 Lagrange 对偶分析，得到对应的对偶问题；之后将对偶问题中的对偶原子范数约束转换为半正定约束，得到对偶 SDP 问题；最后从对偶 SDP 问题中得到原问题的 SDP 形式，并实现参数估计。上述流程中的关键点在于提出与实际问题对应的原子集以及将对偶问题转换为 SDP。实际中，很多原子集对应的对偶原子范数约束并不能被直接写成三角多项式不等式约束的形式，因此难以用有界引理转换为 SDP。本文所考虑的问题几乎都存在这种问题。以下将以限定范围的 DOA 估计问题为例说明这种情况下的处理方法。

2.4 基于原子范数最小化的限定范围 DOA 估计方法

本节考虑限定范围的 DOA 估计问题。阵列和信号源的设定仍与2.2节中一致，唯一的区别在于此时已知 DOA 的范围为 $[\theta_1, \theta_2]$ 。基于这一特性，可以仅在 $[\theta_1, \theta_2]$ 的范围内对目标 DOA 进行搜索，因此算法复杂度相比 DOA 范围未知的情况相对更低。

2.4.1 算法设计

在基于字典的有网格参数估计框架下，这一先验信息可以通过对字典进行限制实现，即使得离散划分 $\Theta_{\text{dic}} \subset [\theta_1, \theta_2]$ 。对应到无网格的框架中，即构造新的原子集 $\mathbb{A}^{\text{new}} = \{\mathbf{a}(\theta)e^{j\phi}, \theta \in [\theta_1, \theta_2], \phi \in [0, 2\pi)\}$ 。可以提出对应的原子范数最

小化问题为

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}}, \quad s.t. \|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2^2 \leq \epsilon, \quad (2-23)$$

其中 ϵ 为噪声容限。当无噪声时，对应的原子范数最小化问题为

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}}, \quad s.t. \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}. \quad (2-24)$$

本节针对无噪声的情况进行算法推导，有噪声情况的推导过程类似，此处不再进行详细推导。

容易得到(2-24)的对偶问题为

$$\max_{\mathbf{q}} \langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad s.t. \|\mathbf{q}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}}^* \leq 1, \quad (2-25)$$

其中 $\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}}^*$ 表示 \mathbf{q} 的对偶原子范数，可以计算为

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}}^* = \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}} \leq 1} \langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}} = \max_{\mathbf{a} \in \mathbb{A}^{\text{new}}} \langle \mathbf{q}, \mathbf{a} \rangle_{\mathbb{R}} = \max_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} |\langle \mathbf{q}, \mathbf{a}(\theta) \rangle|. \quad (2-26)$$

为了便于后续讨论，这里将入射角 θ 映射为空间频率 f ，即 $-2\pi f = 2\pi f_c d \sin \theta / c = \pi \sin \theta, f \in [f_L, f_H] \triangleq [-\sin \theta_2/2, -\sin \theta_1/2]$ 。将之代入(2-26)有

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}}^* = \max_{f \in [f_L, f_H]} \left| \sum_{n=0}^{N-1} q_k \exp(-j2\pi f n) \right| = \max_{f \in [f_L, f_H]} |q(f)|, \quad (2-27)$$

其中对偶三角多项式 $q(f) \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} q_k \exp(-j2\pi f n)$ 。因此 $\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}}^* \leq 1$ 等价于

$$|q(f)|^2 \leq 1, \forall f \in [f_L, f_H]. \quad (2-28)$$

注意到利用有界引理^[84] 可以将 $|q(f)|^2 \leq 1, \forall f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 转换为半正定约束。然而(2-28)中仅对 $f \in [f_L, f_H]$ 中的情况进行了约束，因此有界引理不适用。注意到对偶多项式 $q(f)$ 实际上可以视为有限支撑序列 \mathbf{q} 的离散时间 Fourier 变换，因此可以通过对 \mathbf{q} 进行处理以使用有界引理。一种直观的处理方法是利用有限冲击响应 (Finite Impulse Response, FIR) 带通滤波器对序列 \mathbf{q} 进行滤波，将其转换为通带为 $[f_L, f_H]$ 的带通信号 $\tilde{\mathbf{q}}$ 。此时 $|\tilde{q}(f)| \leq 1, \forall f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 与 $|q(f)|^2 \leq 1, \forall f \in [f_L, f_H]$ 近似等价。然而此方法鲁棒性很差，在信噪比较低时难以实现准确的 DOA 估计。事实上，滤波的目的在于将原对偶变量 \mathbf{q} 映射为新的对偶变量 $\tilde{\mathbf{q}}$ ，使得 $\tilde{\mathbf{q}}$ 的频带限制在 $[f_L, f_H]$ 中且和 \mathbf{q} 在其中的频谱保持一致。此处并不要求此映射通过线性时不变 (Linear Time Invariant, LTI) 滤波器实现，而实际中大部分滤波器设计都基于 LTI 的假设下进行，因此得到的滤波器在此问题中并不一定有最好的效果。基于上述讨论，可以首先使用理想带通滤波器对 \mathbf{q} 进行滤波。令理想低通滤波器为 $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^\infty$ ，其延时 n 后为 \mathbf{h}_n ，可以构造理想带通滤波器算子为 $\mathbf{H} : \mathbf{q} \in \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbf{H} \circ \mathbf{q} = \sum_{n=0}^{N-1} q_n \mathbf{h}_n = \mathbf{q}_{\mathbf{H}} \in \mathbb{C}^\infty$ ，此时 $q_{\mathbf{H}}(f) = \begin{cases} q(f), & f \in [f_L, f_H] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。此时由于输出的 $\mathbf{q}_{\mathbf{H}}$ 具有无穷维，因此无法将问

题转换为有限大小的 SDP 问题。假设希望利用有界引理构造 $M \times M$ 的半正定矩阵，则需要设计降维算子 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{M \times \infty}$ ，使得

$$\mathcal{F} \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{q}_H \approx \mathcal{F} \circ \mathbf{q}_H, \quad (2-29)$$

其中 \mathcal{F} 为离散时间 Fourier 变换算子。仿真实验证明，通过对 \mathbf{q}_H 进行简单截断来设计 \mathbf{G} 已足够。具体的，假设延时的理想滤波器 \mathbf{h}_n 主瓣中心对应的索引为 i_n ，则取 i_0 前侧约第四至第五旁瓣和 i_{N-1} 后侧同样约第四至第五旁瓣的部分即可。令截断后的 \mathbf{h}_n 为 $\tilde{\mathbf{h}}_n$ ， $\tilde{\mathbf{H}} = [\tilde{\mathbf{h}}_0, \tilde{\mathbf{h}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{h}}_{N-1}]$ ，得到的输出为 $\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{q}$ 。此时的 $\tilde{\mathbf{H}}$ 不满足 LTI 的条件，但是可以获得比使用 LTI 的 FIR 带通滤波器更好的效果。这里对这一点提供一些直觉上的解释。假设 FIR 带通滤波器通过基于理想带通滤波器的脉冲响应不变法设计，截取后得到的 FIR 滤波器为 $\hat{\mathbf{h}}$ 。此时的滤波矩阵可

以写作 $\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \hat{h}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hat{h}_1 & \hat{h}_0 & \cdots & 0 \\ \hat{h}_2 & \hat{h}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$ 。当输出向量的维数一样，都限定为 M 时，容易看

出此时 $\hat{\mathbf{H}}$ 非 0 处的元素和 $\tilde{\mathbf{H}}$ 完全一致，而在 $\hat{\mathbf{H}}$ 为 0 的地方 $\tilde{\mathbf{H}}$ 却不为 0，因此 $\tilde{\mathbf{H}}$ 保留了更多信息，从而有更好的性能。

尽管做了截断，但上述方法输出的 $\tilde{\mathbf{q}}$ 通常有着比 \mathbf{q} 更高的维数，导致最后得到的 SDP 问题规模较大。事实上，由于 $\tilde{\mathbf{q}}$ 的频谱被限制在 $[f_L, f_H]$ 中，其带宽 $B = f_H - f_L < 1$ ，因此完全可以通过降低采样率来减少采样数量。具体的，回到截断前的 \mathbf{q}_H ，此信号为严格的带通信号，因此可以对其重采样以使其频带充满 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 。具体的，首先对 \mathbf{q}_H 进行移相使得其成为低通信号 \mathbf{q}_{H_0} ，频带为 $[-B/2, B/2]$ 。当 $1/B$ 为整数时，直接对其进降采样 $1/B$ 倍即可； $1/B$ 不为整数时，则可通过对其用模拟低通滤波器进行内插，得到模拟信号，再按照 B 的 Nyquist 采样率重新采样即可。上述过程可以直接对 \mathbf{H} 进行，令得到的新的滤波算子为 \mathbf{H}_0 ，令以和之前相似的准则做截断后得到的滤波矩阵为 $\tilde{\mathbf{H}}_0$ ，输出的信号为 $\tilde{\mathbf{q}}_0$ 。此时 $\tilde{\mathbf{q}}_0$ 的维数 N_0 通常比 \mathbf{q} 更小，大约为 $O(NB)$ 。

基于上述讨论，可以将 $|q(f)|^2 \leq 1, \forall f \in [f_L, f_H]$ 近似等价为 $|\tilde{q}_0(f)|^2 \leq 1, \forall f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ， $\tilde{\mathbf{q}}_0 = \tilde{\mathbf{H}}_0\mathbf{q}$ 。由此可以得到对偶问题的 SDP 形式为

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_0} & \langle \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle_R, \quad s.t. \quad \mathbf{q}_0 = \tilde{\mathbf{H}}_0 \mathbf{q} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_0^H & 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \sum_{i=1}^{N_0-k} \mathbf{P}_{i,i+k} = \delta_k, k = 0, 1, \dots, N_0 - 1. \end{aligned} \quad (2-30)$$

此时对应的原问题的 SDP 为

$$\min_{t, \mathbf{u}, \mathbf{y}} \frac{1}{2}(t + u_0), s.t. \begin{bmatrix} \text{Toep}(\mathbf{u}) & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^H & t \end{bmatrix} \succeq 0, \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{H}}_0^H \mathbf{y}. \quad (2-31)$$

通过对解得的 $\text{Toep}(\mathbf{u})$ 进行 Vandermonde 分解，得到

$$\text{Toep}(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}^0(f_k^0) \mathbf{a}^{0H}(f_k^0) \quad (2-32)$$

的形式，其中 $\mathbf{a}^0(f^0) = [1, \exp(j2\pi f^0), \dots, \exp(j2\pi f^0(N_0 - 1))]^T$ ，可以从中提取频率 $\{f_k^0\}_{k=1}^K$ 。按照前文的讨论，空间频率 f 可以通过 $f_k = f_k^0 \cdot \mathbf{B} + \frac{f_H + f_L}{2}$ 得到，将空间频率对应回入射角 θ 即可实现 DOA 估计。

当考虑噪声和截断误差时，可以将(2-31)修正为

$$\min_{t, \mathbf{u}, \mathbf{y}} \frac{1}{2}(t + u_0), \text{s.t.} \begin{bmatrix} \text{Toep}(\mathbf{u}) & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^H & t \end{bmatrix} \succeq 0, \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{H}}_0^H \mathbf{y}\|_2^2 \leq \epsilon, \quad (2-33)$$

其中 ϵ 为噪声容限。将(2-31)与(2-22)对比，可以将接收信号 \mathbf{x} 理解为信号 \mathbf{y} 通过观测矩阵 $\tilde{\mathbf{H}}_0^H$ 的观测。这一点并非巧合。令 $\mathbf{a}(f) = [1, \exp(j2\pi f), \dots, \exp(j2\pi f(N-1))]^T$ ，容易证明，

$$\mathbf{a}(f^0 \cdot \mathbf{B} + \frac{f_H + f_L}{2}) \approx \tilde{\mathbf{H}}_0^H \mathbf{a}^0(f^0). \quad (2-34)$$

进一步的，建立新的原子集为 $\mathbb{A}^0 = \left\{ \mathbf{a}^0(f)e^{j\phi} : f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \phi \in [0, 2\pi) \right\}$ ，可以看出

$$\mathbb{A}^{\text{new}} \approx \tilde{\mathbf{H}}_0^H \circ \mathbb{A}^0 \triangleq \left\{ \mathbf{H}_0^H \mathbf{a}^0 : \mathbf{a}^0 \in \mathbb{A}^0 \right\}. \quad (2-35)$$

事实上，(2-33)可以看作当原子集为 $\tilde{\mathbf{H}}_0^H \circ \mathbb{A}^0$ 时的 ANM 问题。定理 2.3 给出了更一般情况下的结论。

定理 2.3. 对以向量为原子的原子集 \mathbb{A}^0 ，定义其对应的多测量矢量原子集为 $\mathbb{A}_{\text{MMV}}^0 = \left\{ \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}^H : \mathbf{a} \in \mathbb{A}^0 \subset \mathbb{C}^{N_0}, \mathbf{p} \in \mathbb{C}^L, \|\mathbf{p}\|_2^2 = 1 \right\}$ 。定义原子集 \mathbb{A}^{new} 为

$$\mathbb{A}^{\text{new}} = \left\{ [\mathbf{G}_1^H \mathbf{a}, \mathbf{G}_2^H \mathbf{a}, \dots, \mathbf{G}_L^H \mathbf{a}] \odot \mathbf{p}^H : \mathbf{a} \in \mathbb{A}^0, \|\mathbf{p}\|_2^2 = 1 \right\},$$

其中 \odot 表示 Khatri-Rao 积。则有

$$\|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}} = \min_{\mathbf{Y}=[\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_L]} \|\mathbf{Y}\|_{\mathbb{A}_{\text{MMV}}^0}, \quad \text{s.t.} [\mathbf{X}]_{:,k} = \mathbf{x}_k = \mathbf{G}_k^H \mathbf{y}_k, k = 1, 2, \dots, L, \quad (2-36)$$

其中 $[\mathbf{X}]_{:,k}$ 表示 \mathbf{X} 的第 k 列。

证明。首先考虑 \mathbf{G}_k 均为列满秩的情况。基于定义 2.1 中原子范数的定义，可以对 $\|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}}$ 做如下转换

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}} &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^K |c_k| : \mathbf{X} = \sum_{k=1}^K c_k \cdot [\mathbf{G}_1^H \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{G}_L^H \mathbf{a}_k] \odot \mathbf{p}_k^H \right\} \\ &= \min_{\mathbf{X}^c} \inf \left\{ \sum_{k=1}^K |c_k| : \bar{\mathbf{X}} = \sum_{k=1}^K c_k \cdot [\bar{\mathbf{G}}_1^H \mathbf{a}_k, \dots, \bar{\mathbf{G}}_F^H \mathbf{a}_k] \odot \mathbf{p}_k^H \right\}, \end{aligned} \quad (2-37)$$

其中 $\bar{\mathbf{X}} = [\mathbf{X}^T, \mathbf{X}^{cT}]^T$, $\bar{\mathbf{G}}_k = [\mathbf{G}_k, \mathbf{G}_k^c] \in \mathbb{C}^{N_0 \times N_0}, k = 1, 2, \dots, L$, 使得 $\bar{\mathbf{G}}_k$ 的所有列构成 \mathbb{C}^{N_0} 一组中的基, 为避免符号过多, 下文将这组基也以 $\bar{\mathbf{G}}_k$ 表示。

根据基 $\bar{\mathbf{G}}_k$ 构造对应的对偶基 $\tilde{\mathbf{G}}_k = [\tilde{\mathbf{G}}_k, \tilde{\mathbf{G}}_k^c]$, (2-37) 可被进一步写为

$$\begin{aligned}\|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}} &= \min_{\mathbf{X}^c} \inf \left\{ \sum_{k=1}^K |c_k| : \bar{\mathbf{X}} = \sum_{k=1}^K c_k \cdot [\bar{\mathbf{G}}_1^H \mathbf{a}_k, \dots, \bar{\mathbf{G}}_L^H \mathbf{a}_k] \odot \mathbf{p}_k^H \right\} \\ &= \min_{\mathbf{X}^c} \inf \left\{ \sum_{k=1}^K |c_k| : [\tilde{\mathbf{G}}_1 [\bar{\mathbf{X}}]_{:,1}, \dots, \tilde{\mathbf{G}}_L [\bar{\mathbf{X}}]_{:,L}] = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}_k \mathbf{p}_k^H \right\}.\end{aligned}\quad (2-38)$$

令 $\mathbf{Y} = [\tilde{\mathbf{G}}_1 [\bar{\mathbf{X}}]_{:,1}, \tilde{\mathbf{G}}_2 [\bar{\mathbf{X}}]_{:,2}, \dots, \tilde{\mathbf{G}}_L [\bar{\mathbf{X}}]_{:,L}]$, 容易验证 $[\mathbf{X}]_{:,k} = \mathbf{G}_k^H [\mathbf{Y}]_{:,k}$, 并且有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}} &= \min_{\mathbf{X}^c} \inf \left\{ \sum_{k=1}^K |c_k| : [\tilde{\mathbf{G}}_1 [\bar{\mathbf{X}}]_{:,1}, \dots, \tilde{\mathbf{G}}_L [\bar{\mathbf{X}}]_{:,L}] = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}_k \mathbf{p}_k^H \right\} \\ &= \min_{\mathbf{X}^c} \inf \left\{ \sum_{k=1}^K |c_k| : \mathbf{Y} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}_k \mathbf{p}_k^H \right\} = \min_{\mathbf{X}^c} \|\mathbf{Y}\|_{\mathbb{A}_{\text{MMV}}^0},\end{aligned}\quad (2-39)$$

即 $\|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}^{\text{new}}} = \min_{\mathbf{Y}=[y_1, \dots, y_L]} \|\mathbf{Y}\|_{\mathbb{A}_{\text{MMV}}^0}$, s.t. $[\mathbf{X}]_{:,k} = \mathbf{x}_k = \mathbf{G}_k^H \mathbf{y}_k, k = 1, 2, \dots, L$ 。

当 \mathbf{G}_k 不为列满秩时, 不妨令 \mathbf{G}_k 的秩为 M 且前 M 列 \mathbf{G}_k^0 满秩。令 $\mathbf{G}_k = [\mathbf{G}_k^0, \mathbf{G}_k^1] = \mathbf{G}_k^0 [\mathbf{I}_M, \mathbf{P}_k]$, 有 $\mathbf{G}_k^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{G}$ 。构造新的原子集 $\mathbb{A}_{\text{new}}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^H \circ \mathbb{A}_{\text{new}}$, 可以证明 $\mathbb{A}_{\text{new}} = [\mathbf{I}_M, \mathbf{P}_k]^H \circ \mathbb{A}_{\text{new}}^0$ 。由于 $\begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ 列满秩, 因此有 $\|\mathbf{X}^0\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}^0} = \min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}}$, s.t. $\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^H \mathbf{X}$ 。由于 $\mathbb{A}_{\text{new}} = [\mathbf{I}_M, \mathbf{P}_k]^H \circ \mathbb{A}_{\text{new}}^0$, 因此对 $\forall \mathbf{X} \in \{t \cdot \text{conv}(\mathbb{A}_{\text{new}})\}$, 有

$$\mathbf{X} = [\mathbf{I}_M, \mathbf{P}_k]^H \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^H \mathbf{X} \quad (2-40)$$

。从而 $\|\mathbf{X}^0\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}^0} = \|[\mathbf{I}_M, \mathbf{P}_k]^H \mathbf{X}^0\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}^0}$ 。因此有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}} &= \|[\mathbf{I}_M, \mathbf{0}] \mathbf{X}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}^0} \\ &= \min_{\mathbf{Y}=[y_1, \dots, y_L]} \|\mathbf{Y}\|_{\mathbb{A}_{\text{MMV}}^0}, \quad \text{s.t. } [[\mathbf{I}_M, \mathbf{0}] \mathbf{X}]_{:,k} = \mathbf{G}_k^{0H} \mathbf{y}_k, k = 1, 2, \dots, L \\ &\stackrel{(2-40)}{=} \min_{\mathbf{Y}=[y_1, \dots, y_L]} \|\mathbf{Y}\|_{\mathbb{A}_{\text{MMV}}^0}, \quad \text{s.t. } [\mathbf{X}]_{:,k} = \mathbf{G}_k^H \mathbf{y}_k, k = 1, 2, \dots, L.\end{aligned}\quad (2-41)$$

□

(2-33)可以视作定理2.3中的特殊情况。具体的，当原子集为 $\tilde{\mathbf{H}}_0^H \circ \mathbb{A}^0$ 时，此时可以构造ANM问题为

$$\min_{\mathbf{y}_0} \|\mathbf{y}_0\|_{\tilde{\mathbf{H}}_0^H \circ \mathbb{A}^0}, \quad s.t. \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}\|_2^2 \leq \epsilon. \quad (2-42)$$

利用定理2.3，上式恰好等价于(2-33)。

值得一提的是，现有文献中大部分基于ANM的参数估计方法都是通过将接收信号 \mathbf{x} 视作从某个可以使用ANM方法进行参数估计的信号， \mathbf{y} ，通过某种观测矩阵 \mathbf{G} 得到的观测，利用 \mathbf{y} 在对应原子集中稀疏性实现参数估计这些文献大多仅关注了被观测信号 \mathbf{y} 的稀疏性，忽视了观测矩阵 \mathbf{G} 的作用。本节提出的定理2.3为理解观测矩阵 \mathbf{G} 的作用提供了一种思路：其使得通过 \mathbf{G} 观测得到的信号在由 \mathbf{G} 限制的原子集 $\mathbf{G}^H \circ \mathbb{A}$ 中具有稀疏性。

通过公式(2-33)和(2-34)还可对算子 $\tilde{\mathbf{H}}_0$ 由于截断带来的误差进行分析。具体的，将(2-34)代入(2-1)，有

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(f^k) s_k + \mathbf{n} \\ &= \sum_{k=1}^K \left(\tilde{\mathbf{H}}_0^H \mathbf{a}^0 \left(\left(f^k - \frac{f_H + f_L}{2} \right) / B \right) + \mathbf{w}_k \right) s_k + \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2-43)$$

其中 $\mathbf{w}_k = \mathbf{a}(f^k) - \tilde{\mathbf{H}}_0^H \mathbf{a}^0 \left(\left(f^k - \frac{f_H + f_L}{2} \right) / B \right)$ 可被理解为截断噪声。从上式可以看出，截断带来的影响为引入了额外的噪声。基于上述讨论，对于给定的截断后的维数 N_0 ，截断算子 \mathbf{G} 的设计应使得截断噪声 \mathbf{w}_k 的功率 $\|\mathbf{w}_k\|_2^2$ 尽量小。仿真实验证明，当将理想滤波器截断至 i_0 前侧第五旁瓣和 i_{N-1} 后侧同样第五旁瓣的部分时，截断噪声功率约为-30 dB，相比于接收噪声 \mathbf{n} ，此时截断噪声几乎可被忽略不计。

2.4.2 基于内点法的通用原子范数最小化问题求解方法

综上所述，上述限定区域问题的DOA估计问题可以通过(2-33)进行求解。(2-33)对噪声的约束是硬约束，因此在一些情况中可能出现没有可行解的问题。为此，可以改写成原子范数正则化的形式

$$\min_{t, \mathbf{u}, \mathbf{y}} \tau \cdot (t + u_0) + \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{H}}_0^H \mathbf{y}\|_2^2, \quad (2-44)$$

其中 τ 为正则化参数。为了高效求解(2-44)，本节提出了一种基于内点法的快速求解方法。

本节主要考虑以下更一般的原子范数最小化问题

$$\begin{aligned} p^* &= \min_{\mu} \tau \cdot \left(\text{Tr}(\mathbf{W}) + \frac{1}{N} \text{Tr}(\text{Toep}(\mathbf{u})) \right) + \|\mathbf{G}^H \mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2^2, \quad s.t. \\ \mu \in \mathcal{K} &= \left\{ \mu \left| \begin{bmatrix} \text{Toep}(\mathbf{u}) & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^H & \mathbf{W} \end{bmatrix} \succeq 0, \mathbf{u} \in \mathcal{C} \right. \right\}, \end{aligned} \quad (2-45)$$

其中 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{N \times M}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{G}^H \mathbf{Y}_0$, $\boldsymbol{\mu} = [\mathbf{u}^T, \text{vec}(\mathbf{X})^T, \text{vec}(\mathbf{W})^T]^T$, $\mathcal{C} = \{\mathbf{u} | \text{Toep}(\mathbf{u}) \succeq 0\}$ 。将 $\boldsymbol{\mu}$ 的对偶变量记为 $\lambda = [\xi^T, \text{vec}(\mathbf{S})^T, \text{vec}(\mathbf{V})^T]^T$ 。 (2-45) 的 Lagrange 对偶可被写为如下形式:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\mu}, \lambda) = \tau \cdot \left(\text{Tr}(\mathbf{W}) + \frac{1}{N} \text{Tr}(\text{Toep}(\mathbf{u})) \right) + \|\mathbf{G}^H \mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2^2 - \langle \boldsymbol{\mu}, \lambda \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (2-46)$$

其中 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{K}$, $\lambda \in \mathcal{K}^*$, \mathcal{K}^* 为 \mathcal{K} 的对偶锥。Gao 等人^[101] 推导得到

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^* = & \left\{ \lambda = [\xi^T, \text{vec}(\mathbf{S})^T, \text{vec}(\mathbf{V})^T] | \mathbf{V} \succ 0, \left(\xi - \frac{1}{4} \text{Toep}^*(\mathbf{S} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{S}^H) \right) \in \mathcal{C}^* \right\} \\ & \cup \{ \lambda | \mathbf{V} \succeq 0, \mathbf{S} = 0, \xi \in \mathcal{C}^* \}. \end{aligned} \quad (2-47)$$

(注: (2-47)的形式和文献 [101] 中略有不同, 本文对对偶锥 \mathcal{K}^* 重新进行了推导, 并对文献 [101] 中可能由于笔误原因出现的错误进行了修正。)

由此可以得到对应的对偶问题为

$$d^* = \max_{\lambda} g(\lambda) = \max_{\lambda} \inf_{\boldsymbol{\mu}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\mu}, \lambda), \text{s.t. } \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{K}, \lambda \in \mathcal{K}^*. \quad (2-48)$$

对偶间隙为

$$\eta(\boldsymbol{\mu}, \lambda) = f(\boldsymbol{\mu}) - g(\lambda). \quad (2-49)$$

由于原问题 (2-45) 满足 Karush-Kuhn-Tucker(KKT) 条件^[98], 因此有

$$\eta(\boldsymbol{\mu}^*, \lambda^*) = p^* - d^* = 0. \quad (2-50)$$

命题 2.4. 对偶函数 $g(\lambda)$ 的值为

$$g(\lambda) = -\frac{1}{4} \|\Sigma^{-1/2} \mathbf{U}^H \mathbf{S}\|_2^2 - \langle \mathbf{U}^H \mathbf{S}, \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0 \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (2-51)$$

其中 $\mathbf{G} \mathbf{G}^H = [\mathbf{U}, \mathbf{U}_c] \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [\mathbf{U}, \mathbf{U}_c]^H = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{U}^H$ 是 $\mathbf{G} \mathbf{G}^H$ 的特征值分解。

证明. 从(2-46)容易看出

$$\xi = \tau \cdot \mathbf{W}, \mathbf{V} = \tau \mathbf{I}, \quad (2-52)$$

其中 $\mathbf{W} = \frac{1}{N} \text{Toep}^*(\mathbf{I})$ 。将(2-52)代入(2-46)和(2-48), 有

$$g(\lambda) = \inf_{\boldsymbol{\mu}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\mu}, \lambda) = \inf_{\mathbf{X}} \|\mathbf{G}^H \mathbf{X} - \mathbf{G}^H \mathbf{Y}_0\|_2^2 - \langle \mathbf{S}, \mathbf{X} \rangle_{\mathbb{R}}. \quad (2-53)$$

令矩阵 \mathbf{G} 的奇异值分解为 $\mathbf{G} = \mathbf{U} \sqrt{\Sigma} \mathbf{V}_0^H$, 有

$$\begin{aligned} g(\lambda) = & \inf_{\mathbf{X}} \|\mathbf{V}_0 \sqrt{\Sigma} \mathbf{U}^H \mathbf{X} - \mathbf{V}_0 \sqrt{\Sigma} \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0\|_2^2 - \langle \mathbf{U}^H \mathbf{S}, \mathbf{U}^H \mathbf{X} \rangle_{\mathbb{R}} \\ & - \langle \mathbf{U}_c^H \mathbf{S}, \mathbf{U}_c^H \mathbf{X} \rangle_{\mathbb{R}} \\ = & \inf_{\mathbf{X}} \|\sqrt{\Sigma} \mathbf{U}^H \mathbf{X} - \sqrt{\Sigma} \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0\|_2^2 - \langle \mathbf{U}^H \mathbf{S}, \mathbf{U}^H \mathbf{X} \rangle_{\mathbb{R}} - \langle \mathbf{U}_c^H \mathbf{S}, \mathbf{U}_c^H \mathbf{X} \rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned} \quad (2-54)$$

令 $\Phi = \mathbf{U}^H \mathbf{X}$, $\Psi = \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0$, $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{U}^H \mathbf{S}$ 并将其代入上式可得

$$\begin{aligned}
g(\lambda) &= \inf_{\Phi, \mathbf{U}_c^H \mathbf{X}} \|\sqrt{\Sigma}(\Phi - \Psi)\|_2^2 - \langle \tilde{\mathbf{S}}, \Phi \rangle_{\mathbb{R}} - \langle \mathbf{U}_c^H \mathbf{X}, \mathbf{U}_c^H \mathbf{S} \rangle_{\mathbb{R}} \\
&= \inf_{\Phi, \mathbf{U}_c^H \mathbf{X}} \|\sqrt{\Sigma}(\Phi - \Psi)\|_2^2 - \langle \Sigma^{-1/2} \tilde{\mathbf{S}}, \Sigma^{1/2} \Phi \rangle_{\mathbb{R}} - \langle \mathbf{U}_c^H \mathbf{X}, \mathbf{U}_c^H \mathbf{S} \rangle_{\mathbb{R}} \\
&= \inf_{\Phi, \mathbf{U}_c^H \mathbf{X}} \|\sqrt{\Sigma}(\Phi - \Psi)\|_2^2 - \langle \Sigma^{-1/2} \tilde{\mathbf{S}}, \Sigma^{1/2} \Phi \rangle_{\mathbb{R}} + \langle \Sigma^{-1/2} \tilde{\mathbf{S}}, \Sigma^{1/2} \Psi \rangle_{\mathbb{R}} \quad (2-55) \\
&\quad - \langle \Sigma^{-1/2} \tilde{\mathbf{S}}, \Sigma^{1/2} \Psi \rangle_{\mathbb{R}} - \langle \mathbf{U}_c^H \mathbf{X}, \mathbf{U}_c^H \mathbf{S} \rangle_{\mathbb{R}} \\
&= \inf_{\Phi, \mathbf{U}_c^H \mathbf{X}} \|\sqrt{\Sigma}(\Phi - \Psi) - \frac{1}{2} \Sigma^{-1/2} \tilde{\mathbf{S}}\|_2^2 - \frac{1}{4} \|\Sigma^{-1/2} \tilde{\mathbf{S}}\|_2^2 \\
&\quad - \langle \mathbf{U}_c^H \mathbf{X}, \mathbf{U}_c^H \mathbf{S} \rangle_{\mathbb{R}} - \langle \Sigma^{-1/2} \tilde{\mathbf{S}}, \Sigma^{1/2} \Psi \rangle_{\mathbb{R}}。
\end{aligned}$$

由此可得 $\mathbf{U}_c^H \mathbf{S} = 0$ 且

$$\begin{aligned}
g(\lambda) &= -\frac{1}{4} \|\Sigma^{-1/2} \tilde{\mathbf{S}}\|_2^2 - \langle \Sigma^{-1/2} \tilde{\mathbf{S}}, \Sigma^{1/2} \Psi \rangle_{\mathbb{R}} \quad (2-56) \\
&= -\frac{1}{4} \|\Sigma^{-1/2} \tilde{\mathbf{S}}\|_2^2 - \langle \mathbf{U}^H \mathbf{S}, \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0 \rangle_{\mathbb{R}}。
\end{aligned}$$

□

本节的目标是在原对偶内点法的框架下对原问题(2-45)进行求解。具体的，本节将使用对数齐次函数 $F(\mu)$ 作为和原锥 \mathcal{K} 对应的障碍函数。 $F(\mu)$ 定义如下：

$$\begin{aligned}
F(\mu) &= -\log \det \left(\begin{bmatrix} \text{Toep}(u) & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^H & \mathbf{W} \end{bmatrix} \right) \quad (2-57) \\
&= -\log \det(\text{Toep}(u)) - \log \det(\mathbf{W} - \mathbf{X}^H \text{Toep}^{-1}(u) \mathbf{X})。
\end{aligned}$$

原对偶内点法通过迭代求解以下问题来求解(2-45)：

$$\min_{\mu} f(\mu) + \frac{1}{t} F(\mu), \quad (2-58)$$

其中 $t > 0$ 在每次迭代中递增。可以证明当 $t \rightarrow \infty$ 时(2-58)的解收敛于(2-45)的解^[98]。(2-58)对应的增广 KKT 条件为

$$\begin{cases} \nabla_{\mu} \mathcal{L}(\mu, \lambda) = 0, & (a) \\ \mu \in \mathcal{K}, \lambda \in \mathcal{K}^*, & (b) \\ \lambda = -\frac{1}{t} \nabla_{\mu} F(\mu). & (c) \end{cases} \quad (2-59)$$

这里梯度算子 ∇ 定义为 Wirtinger 导数，定义为 $\nabla_{z=a+jb} f(z) \triangleq \frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{\partial f}{\partial a} + j \frac{\partial f}{\partial b}$ ^[112]。

从(2-59)(a) 可以得到

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \tau \mathbf{I}, \\ \mathbf{S} = 2\mathbf{G}\mathbf{G}^H(\mathbf{X} - \mathbf{Y}_0), \\ \xi = \tau \mathbf{W}. \end{cases} \quad (2-60)$$

从(2-59)(c) 可以推得

$$\begin{cases} \mathbf{V} = -\frac{1}{t} \nabla_{\mathbf{W}} F(\boldsymbol{\mu}), \\ \mathbf{S} = -\frac{1}{t} \nabla_{\mathbf{X}} F(\boldsymbol{\mu}), \\ \boldsymbol{\xi} = -\frac{1}{t} \nabla_{\mathbf{U}} F(\boldsymbol{\mu}). \end{cases} \quad (2-61)$$

将(2-60)代入(2-61)有

$$\begin{cases} \mathbf{W} = \frac{1}{t\tau} \mathbf{I} + \mathbf{X}^H \mathbf{Toep}^{-1}(\mathbf{u}) \mathbf{X}, & (a) \\ -\tau \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{G} \mathbf{G}^H (\mathbf{Toep}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{Y}_0), & (b) \\ \tau \mathbf{W} = \frac{1}{t} \mathbf{Toep}^*(\mathbf{Toep}^{-1}(\mathbf{u})) + \tau \mathbf{Toep}^*(\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Lambda}^H), & (c) \end{cases} \quad (2-62)$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{Toep}^{-1}(\mathbf{u}) \mathbf{X}$ 。和文献 [99] 和文献 [101] 类似，原对偶变量 $\boldsymbol{\mu}$ 和 λ 可分别从(2-62)和(2-60)中解得。具体的， \mathbf{u} 可从 (2-62)(c) 求得， \mathbf{X} 可从(2-62)(b) 中解得， \mathbf{W} 可通过(2-62)(a) 得到。对偶变量可从 (2-60)中求得。在本节所研究的问题中，主要的技术难点来源于(2-62)(b) 的求解。在文献 [99] 中，(2-62)(b) 右边与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相关的部分可以直接移到左边， $\boldsymbol{\Lambda}$ 可以利用 Levinson-Durbin 算法快速求解。文献 [101] 中的问题可以视为本节所研究问题的一个特例，其中的观测矩阵 $\mathbf{G} = \boldsymbol{\Gamma}^H$ 为简单的元素选择矩阵。由于左乘 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的矩阵不具备 Toeplitz 结构，因此此时无法使用 Levinson-Durbin 算法进行快速求解。然而，由于 $\boldsymbol{\Gamma}^H \boldsymbol{\Gamma}$ 是幂等的，因此需要求逆的矩阵的规模可以被大幅降低。这一点使得文献 [101] 中提出的算法的速度得到了提升。相比之下，本节中考虑的问题更具有一般性，此时 $\mathbf{G} \mathbf{G}^H$ 并不总是具有幂等性。基于这一问题，本节提出以下方法以高效求解(2-62)(b)。基于 $\mathbf{G} \mathbf{G}^H$ 的特征值分解，有

$$-\tau \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}^H (\mathbf{Toep}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{Y}_0). \quad (2-63)$$

同时对(2-63)的两边左乘 $\mathbf{U} \mathbf{U}^H$ ，可以得到

$$-\tau \mathbf{U} \mathbf{U}^H \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}^H (\mathbf{Toep}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{Y}_0) = -\tau \boldsymbol{\Lambda}. \quad (2-64)$$

由此可得

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^H \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}. \quad (2-65)$$

从(2-63)可得

$$-\tau \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^H \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{U} \mathbf{U}^H (\mathbf{Toep}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{Y}_0). \quad (2-66)$$

因此有

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^H (\mathbf{Toep}(\mathbf{u}) + \tau \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^H) \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{U} \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0. \quad (2-67)$$

注意到 $\mathbf{U} \mathbf{U}^H \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}$ ，因此有

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^H (\mathbf{Toep}(\mathbf{u}) + \tau \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^H) \mathbf{U} \mathbf{U}^H \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{U} \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0. \quad (2-68)$$

由于 \mathbf{U} 为列满秩矩阵，因此有

$$\begin{aligned} & (\mathbf{U}^H (\mathbf{Toep}(\mathbf{u}) + \tau \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^H) \mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}^H \boldsymbol{\Lambda} \\ &= (\mathbf{U}^H \mathbf{Toep}(\mathbf{u}) \mathbf{U} + \tau \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \cdot \mathbf{U}^H \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0. \end{aligned} \quad (2-69)$$

结合(2-65)可以得出以下结果:

$$\Lambda = \mathbf{U} (\mathbf{U}^H \text{Toep}(\mathbf{u}) \mathbf{U} + \tau \Sigma^{-1})^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0。 \quad (2-70)$$

值得一提的是, 在(2-70)中仅需要计算 $(\mathbf{U}^H \text{Toep}(\mathbf{u}) \mathbf{U} + \tau \Sigma^{-1})$ 的逆, 其规模相比(2-62)(b)中需要求逆的矩阵得到了大幅降低。

需要注意的是通常只能得到 \mathbf{Y}_0 的观测 $\mathbf{Y} = \mathbf{G}^H \mathbf{Y}_0$ 。为了计算(2-70)中出现的 $\mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0$, 可以推得

$$\mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0 = \Sigma^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{G} \mathbf{Y}。 \quad (2-71)$$

基于以上讨论, 当求得 \mathbf{u} 后, 原变量和对偶变量可以被解析的解出, 并且可以被写为 \mathbf{u} 的函数, 分别为 $\mu(\mathbf{u})$ 和 $\lambda(\mathbf{u})$ 。以上结果总结如下:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0 = \Sigma^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{G} \mathbf{Y}, & (0) \\ \Lambda = \mathbf{U} (\mathbf{U}^H \text{Toep}(\mathbf{u}) \mathbf{U} + \tau \Sigma^{-1})^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0, & (1) \\ \mathbf{X} = \text{Toep}(\mathbf{u}) \Lambda, & (P1) \\ \mathbf{W} = \frac{1}{t\tau} \mathbf{I} + \mathbf{X}^H \text{Toep}^{-1}(\mathbf{u}) \mathbf{X}, & (P2) \\ \mathbf{V} = \tau \mathbf{I}, & (D1) \\ \mathbf{S} = 2\mathbf{G}\mathbf{G}^H \mathbf{X} - 2\mathbf{G}\mathbf{Y}, & (D2) \\ \xi = \tau \mathbf{W}. & (D3) \end{array} \right. \quad (2-72)$$

值得注意的是(2-72)(1),(2-72)(P1)以及(2-72)(P2)可以高效求解。具体的,(2-72)(1)和(2-72)(P1)中的 $\text{Toep}(\mathbf{u}) \mathbf{U}$ 和 $\text{Toep}(\mathbf{u}) \Lambda$ 可以通过快速 Fourier 变换求解, 而(2-72)(P2)中的 $\text{Toep}^{-1}(\mathbf{u}) \mathbf{X}$ 则可以通过 Levinson-Durbin 算法快速求解。

最后考虑从(2-62)(c)中求解 \mathbf{u} 的问题。容易验证(2-62)(c)的求解与下面的优化问题等价:

$$\min_{\mathbf{U}} \psi_t(\mathbf{U}) = \tau \cdot (\mathbf{W}^T \mathbf{U}) + \tau \cdot (\mathbf{Y}_0^H \Lambda) - \frac{1}{t} \log \det(\text{Toep}(\mathbf{u})), \quad s.t. \mathbf{U} \in \mathcal{C}。 \quad (2-73)$$

为了保证内容完整性, 在给出后续求解步骤之前, 此处先对原对偶内点法^[98]做简单回顾。原对偶内点法通过迭代的求解扰动 KKT 条件(2-59)以实现对原问题的求解。具体的, 此算法基于(2-59), 在每一次迭代中同步更新原变量和对偶变量。与障碍法不同, 在此方法中, (2-58)和(2-59)中的参数 t 在每一次迭代中都随着对偶间隙改变。具体的, 给定第 $(i-1)$ 次迭代得到的原变量和对偶变量 $(\mu_{i-1}, \lambda_{i-1})$, 可以根据(2-49)求得对应的对偶间隙 η_{i-1} 。由此, 第 i 次迭代中的参数 t 相应的更新为 $t_i = \frac{\theta_F}{\sigma \cdot \eta_{i-1}}$, 其中 $\sigma \in (0, 1)$ 。 θ_F 是障碍函数 $F(\mu)$ 的阶数, 在本节的问题中等于 $N + L$ 。具体到本节所研究的问题, 原对偶内点法在每一次迭代中基于(2-73)和(2-72)更新原变量和对偶变量。

回到本节研究的问题中, 问题(2-73)可以通过 Newton 或拟 Newton 法进行求解。本节中使用的更新方法与传统方法略有不同, 因此在此对找到搜索方向后的

过程做详细说明。在大部分情况下，步长都是通过回溯线搜索法确定的，这需要步长 s 满足

$$\begin{cases} \psi_t(\mathbf{u} + s\Delta\mathbf{u}) \leq \psi_t(\mathbf{u}) + \alpha \cdot s\Delta\mathbf{u}^T \nabla_{\mathbf{u}}\psi_t(\mathbf{u}), \\ \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u} + s\Delta\mathbf{u}) \in \mathcal{K}, \\ \lambda(\mathbf{u} + s\Delta\mathbf{u}) \in \mathcal{K}^*, \end{cases} \quad (2-74)$$

其中 α 为满足 $\alpha \in (0, 1)$ 的常数。当上述条件不满足时，步长收缩为 $s = \beta s$ ，其中 $\beta \in (0, 1)$ 。在每次迭代中，上述条件通常会被多次验证，大大增加了运算负担。因此，本节对此方法进行了改进，通过将第三个条件移除以对算法进行加速。值得注意的是第二个条件可以通过验证 $(\mathbf{u} + s\Delta\mathbf{u}) \in \mathcal{C}$ 来验证。本节改进的回溯线搜索方法总结于算法 1 中。

算法 1 回溯线搜索方法

- 1: 输入: $\alpha, \beta, \mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}, t$
 - 2: 输出: s
 - 3: $s \leftarrow 1$
 - 4: **while** $\psi_t(\mathbf{u} + s\Delta\mathbf{u}) > \psi_t(\mathbf{u}) + \alpha \cdot s\Delta\mathbf{u}^T \nabla_{\mathbf{u}}\psi_t(\mathbf{u})$ 或 $(\mathbf{u} + s\Delta\mathbf{u}) \notin \mathcal{C}$ **do**
 - 5: $s \leftarrow \beta s$
 - 6: **end while**
-

由于上述提出的回溯线搜索方法中没有考虑对偶可行性，因此求得的 $\lambda(\mathbf{u} + s\Delta\mathbf{u})$ 可能是不可行的，从而导致不可靠的对偶间隙。为了解决这一问题，本节以新的下界 f_{LB} 来代替对偶下界 $g(\lambda)$ 来表征 $f(\boldsymbol{\mu})$ 的下界。 f_{LB} 的更新准则如下所示：

$$f_{LB}^{\text{new}} = \begin{cases} f_{LB}^{\text{old}}, & \lambda \notin \mathcal{K}^*, \\ \max(f_{LB}^{\text{old}}, g(\lambda)), & \lambda \in \mathcal{K}^*. \end{cases} \quad (2-75)$$

为了避免引入过多符号，此处仍沿用 η 来表示当前的 $f(\boldsymbol{\mu})$ 与其最优值的间隔的估计。 η 的更新准则如下

$$\eta = f(\boldsymbol{\mu}) - f_{LB}. \quad (2-76)$$

为了确保 $\{t_i\}$ 是一个递增序列，将 t 的更新准则调整如下

$$t_i = \max \left(t_{i-1}, \frac{\theta_F}{\sigma \cdot \eta_{i-1}} \right). \quad (2-77)$$

沿用文献 [99] 和 [101] 中的方法，本节仍使用拟 Newton 法中的有限内存 Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno(Limited Memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno, L-BFGS) 算法^[100] 来实现对搜索方向的高效求解。L-BFGS 算法需要对 Hessian 矩阵进行初始化，通常将其初始化为单位矩阵 $\hat{\mathbf{H}}_i = \mathbf{I}$ 。Hansen 等人^[99] 发现这样的初始化会导致算法收敛很慢，因此提出了一种启发式的 Hessian 矩阵的对角矩阵近似

$$\hat{\mathbf{H}}_i = \text{diag}(1, \frac{N-1}{2N}, \dots, \frac{1}{2N}, \frac{N-1}{2N}, \dots, \frac{1}{2N}) \nabla_{\mathbf{u}}^2[\psi_{t_i}(\mathbf{u}_{i-1})]_{00}. \quad (2-78)$$

本节中沿用这一初始化方案，并对其中的 $\nabla_{\mathbf{u}}^2[\psi_t(\mathbf{u})]_{00}$ 进行了如下计算：

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{u}}^2[\psi_t(\mathbf{u})]_{00} &= 8\tau \text{Tr} (\Lambda^H \mathbf{U} (\mathbf{U}^H \text{Toep}(\mathbf{u}) \mathbf{U} + \tau \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \mathbf{U}^H \Lambda) \\ &\quad + \frac{4}{t} \text{Tr} (\text{Toep}^{-1}(\mathbf{u}) \text{Toep}^{-1}(\mathbf{u})).\end{aligned}\tag{2-79}$$

至此已经完成了算法主要的更新步骤。本节剩余部分将对算法的初始化和停止条件进行讨论。初始化步骤的目标在于找到一组可行的原变量和对偶变量 $(\boldsymbol{\mu}_0, \lambda_0)$ 以开启更新过程。文献 [99] 和文献 [101] 中的初始化方法在本节研究的问题中仍然适用。具体的， $(\boldsymbol{\mu}_0, \lambda_0)$ 可以通过算法 2 获得。

算法 2 初始化

- 1: **输出:** $(\boldsymbol{\mu}_0, \lambda_0)$, where $\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathcal{K}$, $\lambda_0 \in \mathcal{K}^*$
- 2: $\mathbf{u} \leftarrow [10\|\mathbf{Y}\|_2^2/M, 0, \dots, 0]^T$
- 3: $f_{LB} \leftarrow -\infty$
- 4: 根据(2-72)计算 $(\boldsymbol{\mu}, \lambda)$
- 5: 根据(2-76)和(2-77)计算 η 和 t
- 6: **while** $\lambda \notin \mathcal{K}^*$ **do**
- 7: $\mathbf{u} \leftarrow 2\mathbf{u}$
- 8: 根据(2-72)计算 $(\boldsymbol{\mu}, \lambda)$
- 9: 根据(2-76)和(2-77)计算 η 和 t
- 10: **end while**
- 11: $(\boldsymbol{\mu}_0, \lambda_0) \leftarrow (\boldsymbol{\mu}, \lambda)$

由于 $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$, 因此 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{K}$ 总是满足。换句话说，只要算法 2 收敛，初始化便可成功。事实上，算法 2 一定会收敛。若不收敛，则 $\mathbf{u} \rightarrow [+∞, 0, \dots, 0]^T$ 。由此可得 $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{U} \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_0$ 。因此 $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{0}$ 。根据(2-47)，可以看出 λ 总会收敛到 $\text{int}\mathcal{K}^*$ 中的点中，使得算法 2 收敛。

基于原对偶内点法的框架，当估计的间隔 η 满足 $\eta < \epsilon$ 或 $\eta/f(\boldsymbol{\mu}) < \epsilon_{\text{rel}}$ 时算法停止，其中 ϵ 和 ϵ_{rel} 为很小的正数。完整的算法总结于算法 3 中。如文献 [99] 中所讨论的，此算法能够收敛。

2.4.3 数值仿真

本小节对第2.4节中提出的算法进行数值仿真。假设有 3 个远场信号照射在阵元数 $N_m = 100$ 的均匀线阵上，其 DOA 分别为 0° , 13.2° 和 -17.8° 。上述 DOA 设置主要是为了体现有网格方法网格失配的影响。具体的，以 1° 为间隔进行划分得到 Θ_{dic} ，此时目标存在不落在网格上的 DOA，产生网格失配。假设在探测前已知目标 DOA 的范围为 $[-30^\circ, 30^\circ]$ 。令接收噪声为服从 $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_{N_m})$ 的圆高斯白噪声。阵列间距取半波长 $d = \frac{\lambda}{2}$ ，此时不存在混叠。本节的仿真均基于 MATLAB 2021b 进行，其中涉及到的优化问题均使用 CVX 工具包^[93]求解，求

算法 3 基于内点法的通用原子范数最小化问题快速求解方法

- 1: **输入:** 接收信号 \mathbf{Y} , 观测矩阵 \mathbf{G} , 正则化参数 τ , 容限 ϵ , 相对容限 ϵ_{rel} , 回溯线搜索参数 (α, β)
- 2: **输出** \mathbf{u}, \mathbf{X}
- 3: 通过算法 2 对 $(\boldsymbol{\mu}_0, \lambda_0)$ 进行初始化, $f_{\text{LB}} \leftarrow g(\lambda_0)$
- 4: 根据(2-76)和(2-77)计算 η 和 t
- 5: **while** $\eta \geq \epsilon$ 且 $\eta/f(\boldsymbol{\mu}) \geq \epsilon_{\text{rel}}$ **do**
- 6: 利用 L-BFGS 算法求解(2-73)并得到线搜索方向 $\Delta\mathbf{u}$, 其中初始化的 Hessian 矩阵 $\hat{\mathbf{H}}$ 通过(2-78)和(2-79)求得
- 7: 通过算法 1 得到更新步长 s
- 8: $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} + s\Delta\mathbf{u}$
- 9: 分别根据(2-72), (2-76)和(2-77)对 $(\boldsymbol{\mu}, \lambda)$, η 和 t 进行更新
- 10: **end while**

解器采用 SDPT3。仿真所用设备的 CPU 为 12th Gen Intel(R) Core(TM) i7-12700H 2.30 GHz, 机带 RAM 为 16.0 GB。

本节主要采用以下算法进行 DOA 估计: 首先是忽略对 DOA 范围的先验, 直接采用(2-22)中描述的原子范数最小化方法进行 DOA 估计, 并在估计后将所限定区域外的 DOA 估计值排除, 称此方法为 ANM 方法; 其次是基于第2.4.1节中提出的离散划分 Θ_{dic} 构造的字典的有网格方法, 为了提高效率采用稀疏贝叶斯学习 (Sparse Bayesian Learning, SBL) 方法求解, 并使用文献 [71] 中提供的求解包进行实现, 将此方法称为限定区域 (Constrained Area)-SBL 方法, 简称为 CA-SBL 方法; 之后是基于本章提出的(2-33)中描述的原子范数最小化进行求解, 将其命名为限定区域 (Constrained Area)-ANM 方法, 简写为 CA-ANM 方法; 最后是利用本章提出的基于内点法的快速求解方法对 CA-ANM 进行求解的方法, 称之为快速 (Fast)CA-ANM 方法, 简写为 FCA-ANM 方法。

首先验证各算法在噪声环境下的性能。分别验证阵元数 $N_m = 50$ 和 $N_m = 100$ 时算法的性能, 设置信噪比 (signal-to-noise ratio, SNR) 为 -20 dB 到 30 dB 和 -20 dB 到 10 dB。对每个 SNR 进行 100 次 Monte Carlo 仿真。算法的性能可以从估计成功次数和估计的根均方误差 (root mean square error, RMSE) 两个角度进行刻画。对于一次 Monte Carlo 仿真, 定义估计的根方误差 (root square error, RSE) 为

$$\text{RSE} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{Tar}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} (\hat{\theta}_k - \theta_k)^2}, \quad (2-80)$$

其中 $N_{\text{Tar}} = 3$ 为目标个数, $\hat{\theta}_k$ 为第 k 个目标的 DOA 估计, θ_k 为第 k 个目标的真实 DOA。由于有网格算法 CA-SBL 中网格间隔为 1° , 因此仅将真实值附近一个网格内的估计认定为成功估计, 因此定义当 $\text{RSE} \leq 0.5^\circ$ 时估计成功。RSE 可被理解为估计得到的 DOA 与真实 DOA 间的欧氏距离。本文中对成功估计的定

于与文献[113]中类似，其中将估计值落在真实值附近的单元中的情况定义为成功估计。对于估计成功的仿真轮次，定义估计的RMSE为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{trial}}^{\text{succ}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{trial}}^{\text{succ}}} \left[\frac{1}{N_{\text{Tar}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} (\hat{\theta}_{k,n} - \theta_k)^2 \right]}, \quad (2-81)$$

其中 $N_{\text{trial}}^{\text{succ}} \leq 100$ 为成功估计次数， $\hat{\theta}_{k,n}$ 为第 n 次成功估计中对第 k 个目标的 DOA 估计。将 $N_m = 50$ 时各算法的成功估计次数和 RMSE 随 SNR 的变化曲线分别绘制于图 2-1a 和图 2-1b 中，将 $N_m = 100$ 时各算法的成功估计次数和 RMSE 随 SNR 的变化曲线分别绘制于图 2-1c 和图 2-1d 中。

当 $N_m = 50$ 时，从图 2-1a 中可以看出，当信噪比高于 0 dB 时所有方法均能成功实现 DOA 估计，其中本章提出的限定区域的估计方法 CA-SBL、CA-ANM 和 FCA-ANM 在低信噪比时成功率略高于原始的 ANM 方法。这说明通过限定 DOA 的估计范围有益于提升算法鲁棒性。从图 2-1b 中可以看出，所有方法的估计精度在低信噪比时相当。然而，当信噪比高于 0 dB 后，由于受到网格失配的影响，CA-SBL 方法的性能不再有明显提升，而其余的无网格方法则随着信噪比增加提升了估计精度，展现了无网格的优越性。在无网格方法中，ANM、CA-ANM 和 FCA-ANM 的性能几乎一致。当 $N_m = 100$ 时，从图 2-1c 和图 2-1d 可以看出，此时各算法成功估计次数和 RMSE 随 SNR 变化的趋势与 $N_m = 50$ 时一致。但在同一 SNR 下， $N_m = 100$ 时各算法的成功估计次数和精度均高于 $N_m = 50$ 时的表现，由此可见阵元个数的增加有利于提升算法的鲁棒性。

接下来对各个算法的运算速度进行比较，此时固定 SNR=30 dB。首先对阵元个数对运算速度的影响进行仿真。将阵元个数 N_m 设置为 20 到 100。对于每一个 N_m ，进行 100 次 Monte Carlo 仿真并记录各算法的运算时间，将各次仿真记录的时间进行平均作为真实的运算时间。仍然认为当一次仿真的 RSE $\leq 5^\circ$ 时估计成功。仿真结果表明，对于每一个 N_m ，此时所有算法的成功估计次数均为 100 次。将各算法 RMSE 和运算时间随阵元个数 N_m 变化的曲线分别绘制于图 2-2a 和图 2-2b 中。

从图 2-2a 中可以看出，由于受到网格失配的影响，有网格的 CA-SBL 算法的估计精确性弱于无网格的 ANM、CA-ANM 和 FCA-ANM 方法。在无网格算法中，对全区域进行 DOA 估计的 ANM 算法的精度略优于所提限定区域的 DOA 估计算法，而快速算法 FCA-ANM 和 CA-ANM 的表现则基本一致，进一步体现了快速算法的可靠性。由于有网格的 CA-SBL 算法的求解机制与其余的无网格算法不同，为了公平起见图 2-2b 中仅对三种无网格算法的运算时间进行对比。从图 2-2b 中可以看出，随着阵元个数的增加，所有算法的运算时间均呈现上升趋势，同时对于所有的阵元个数，本章提出的快速算法 FCA-ANM 的运算时间均显著低于其它算法，体现了所提快速算法的高效性。另外，还可以发现当阵元个数较大时，本章所提 CA-ANM 算法的运算时间显著低于 ANM 算法。这与第 2.4.1 节中的讨论一致，即 ANM 算法中对偶变量 q 的维数为 N ，而 CA-ANM 算法中对

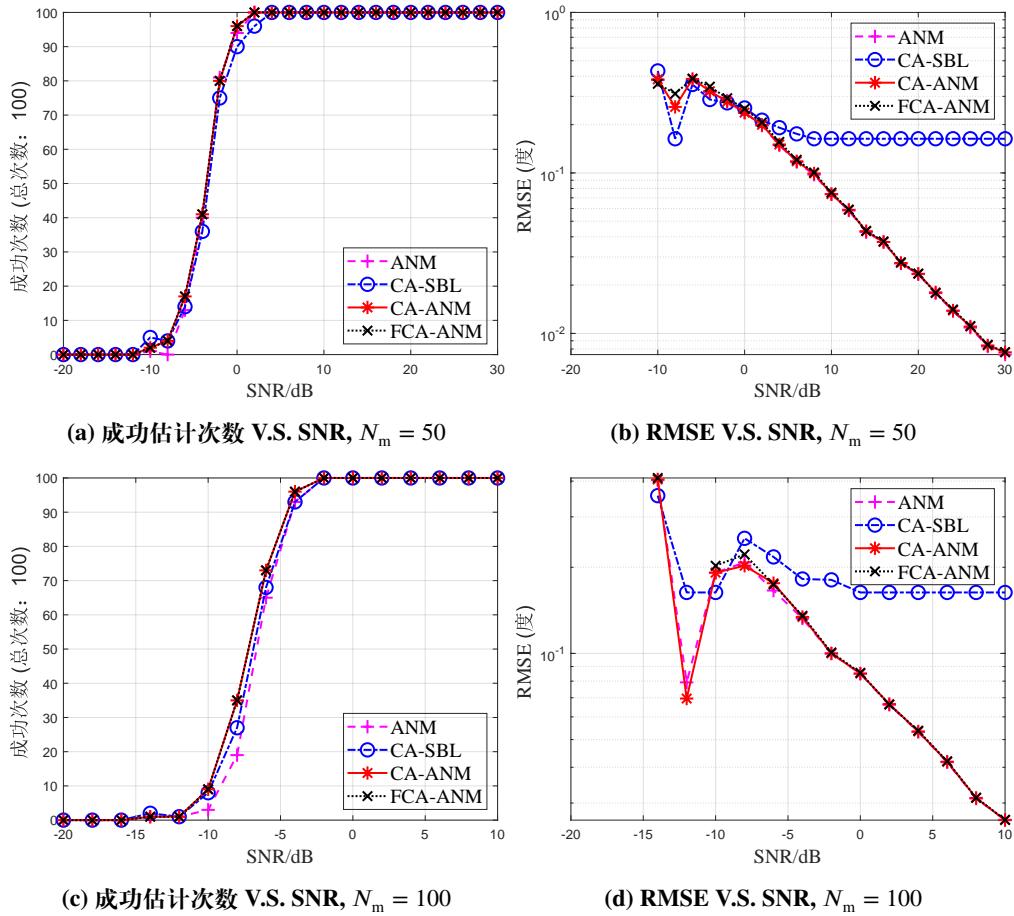
图 2-1 阵元数 $N_m = 50$ 和 100 时不同信噪比下的成功估计次数和 RMSE

Figure 2-1 Number of Successful Trials and RMSE under Different SNRs when the numbers of array elements are 50 and 100

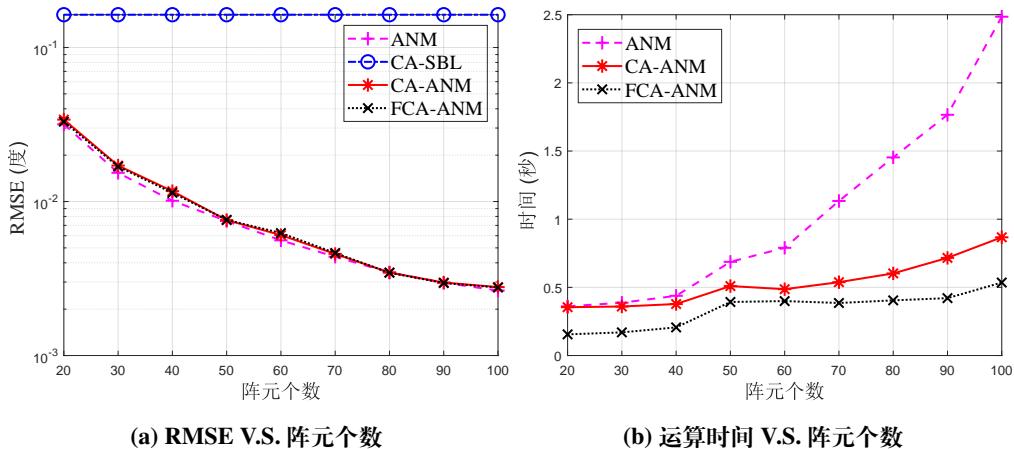


图 2-2 阵元个数不同时的 RMSE 以及运算时间

Figure 2-2 RMSE and Computation Time under Different Number of Array Elements

偶变量 $\tilde{\mathbf{q}}_0$ 的维数则约为 $O(NB)$, 其中 $B < 1$ 为空间频率的带宽, 因此 CA-ANM 算法的运算量将小于 ANM 算法。

下面对 DOA 搜索范围对算法速度的影响进行仿真。仍固定 SNR=30 dB, 以为中心, 设置角度范围为 60° (即 $[-30^\circ, 30^\circ]$) 到 180° (即全空间), 进行 100 次 Monte Carlo 仿真。仿真结果表明, 对于每一个搜索范围, 此时所有算法的成功估计次数均为 100 次。将各算法 RMSE 和运算时间随角度范围变化的曲线分别绘制于图 2-3a 和图 2-3b 中。

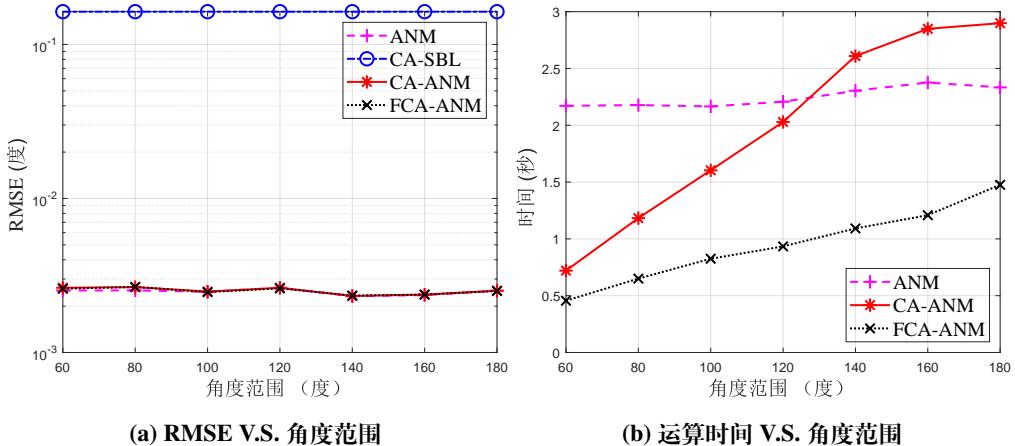


图 2-3 DOA 搜索范围时的 RMSE 以及运算时间

Figure 2-3 RMSE and Computation Time under Different Search Area of DOA

从图 2-3a 可以看出, 由于受到网格失配的影响, 有网格的 CA-SBL 算法的估计精确性弱于无网格的 ANM、CA-ANM 和 FCA-ANM 方法。对于不同的 DOA 搜索范围, 各算法的精度基本一致, 说明对 DOA 的搜索范围进行限制不会影响算法的精度。从图 2-3b 可以看出, 所提限制区域算法 CA-ANM 和 FCA-ANM 的运算时间均随角度搜索范围的扩大而上升。当 DOA 搜索范围不超过 120° 时, 所提 CA-ANM 算法的运算时间小于 ANM 算法, 表明通过减少 DOA 搜索范围可以提升运算速度, 这与之前的分析一致。当 DOA 搜索范围较大时, 此时空间频率的带宽接近 1, CA-ANM 算法对算法规模的缩减不明显, 同时其所对应的优化问题形式相比 ANM 算法更复杂, 导致其运算时间超过 ANM 算法。相比之下, 所提快速算法 FCA-ANM 算法的运算速度显著优于 CA-ANM 算法, 且运算时间始终小于 ANM 算法, 展现了所提快速算法的高效性。

如第 2.4.1 节最后所述, 对映射算子 \mathbf{H}_0 进行截断得到 $\tilde{\mathbf{H}}_0$ 会引入额外的噪声。为了验证此噪声对算法性能造成的影响, 分别验证从截断至主瓣处到截断至第 30 旁瓣处时 CA-ANM 算法的性能。设置阵元数 $N_m = 100$, SNR 从 -20dB 到 30dB。将各截断方法引入的截断噪声与 DOA 的关系绘制于图 2-4 中, 将各算法的成功估计次数和 RMSE 随 SNR 的变化曲线分别绘制于图 2-5a 和图 2-5b 中。

从图 2-4 可以看出, 对于所有截断方法, 截断噪声在 0° 附近最小, 而在靠近边缘处较大。当仅截断至主瓣处时, 此时所有 DOA 对应的截断噪声均较大, 约

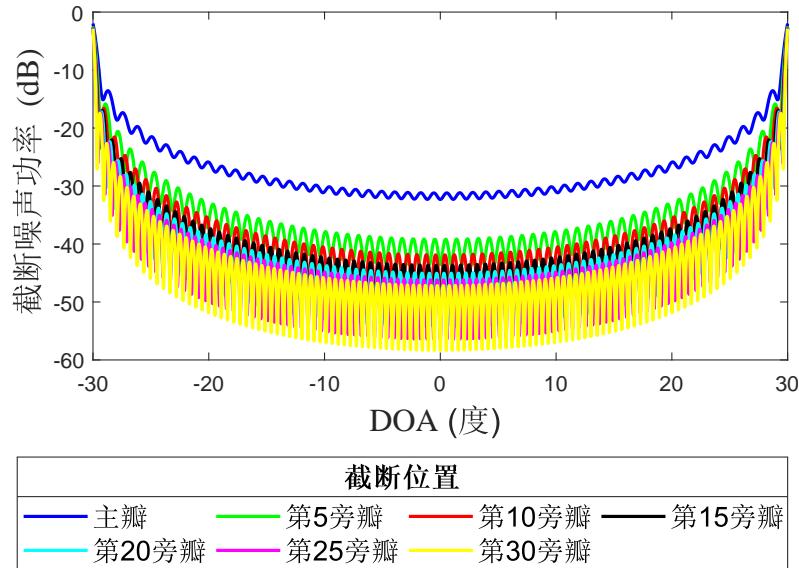


图 2-4 截断误差与 DOA 的关系

Figure 2-4 Relationship Between Truncation Errors and the DOAs

为-20 dB。而当截断至第五旁瓣即以上时，大部分区域的截断噪声均不超过-30 dB。随着截断阶数的升高，截断噪声的最小值下降，且边缘截断噪声较高的区域更窄。

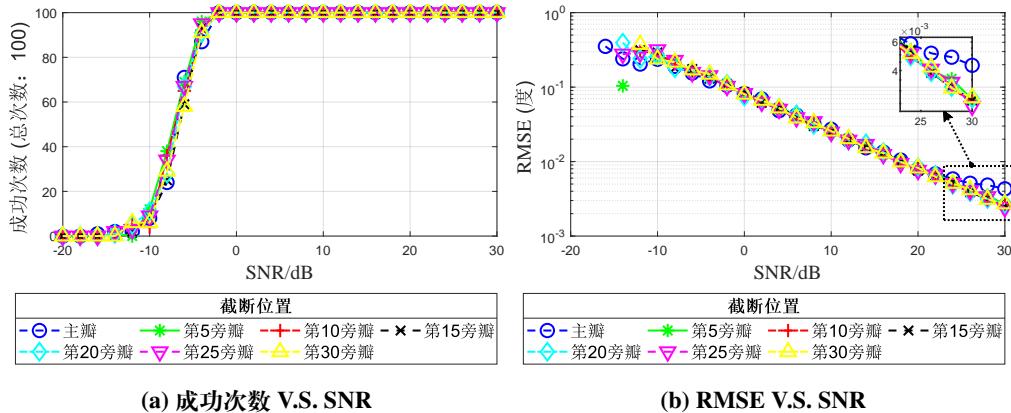


图 2-5 截断阶数不同时 CA-ANM 算法在不同信噪比下的成功估计次数和 RMSE

Figure 2-5 Number of Successful Trials and RMSE of CA-ANM under Different SNRs when the truncation orders are varying

从图 2-5a可以看出，对于不同的截断方法，CA-ANM 算法的成功估计次数基本保持一致。而从图 2-5b则可以看出，CA-ANM 算法估计结果的 RMSE 在低信噪比下基本保持一致，但当信噪比较高时（大于 20 dB），截断至主瓣处的算法的 RMSE 高于其它算法。这与图 2-4中截断误差的仿真结果一致，截断至主瓣处的算法的截断误差约为-20 dB，因此当信噪比达到 20 dB 时截断误差的影响开始显现，使得相应算法的性能在此时弱于其它算法。相比之下，截断至第五旁瓣处的算法的性能在仿真的信噪比区间中与其它算法保持一致，证明了将截断算

子 \mathbf{G} 设计为截断至第 5 旁瓣处的合理性。

2.5 基于多原子集的稀疏参数估计方法性能分析

本文主要关注基于无网格压缩感知方法的宽带信号参数估计问题，主要在多频率模型的基础上对宽带信号进行处理，其主要思想是将宽带信号视作有限个子带的窄带信号的组合，具体的介绍详见本文第3章。基于这一模型，适用于宽带信号参数估计问题的原子集通常可以写成以下形式：

$$\mathbb{A}_{\text{multi}} = \left\{ \left[\mathbf{a}_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \mathbf{a}_{N_f}(\boldsymbol{\theta}) \right] \odot \mathbf{p}_{\boldsymbol{\theta}}^H : \mathbf{a}_k(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{A}_k, k = 1, \dots, N_f, \|\mathbf{p}_{\boldsymbol{\theta}}\|_2^2 = 1 \right\}, \quad (2-82)$$

其中 $\mathbb{A}_k = \{ \mathbf{a}_k(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \}$, $\boldsymbol{\theta}$ 为待估参数, $\boldsymbol{\Theta}$ 为待估参数所有可能的取值的集合。此处的 $\boldsymbol{\theta}$ 代表了待估计的参数，包括但不限于速度，角度，距离等。集合 \mathbb{A}_k 由于通常不具备对称性因此严格意义上不能被视为原子集，但从物理意义的角度上看，本文仍将其视作广义上的原子集。由于 $\mathbb{A}_{\text{multi}}$ 的定义中涉及到多个原子集，因此在本文中将基于此原子集的原子范数最小化问题称为基于多原子集的原子范数最小化。此时多个原子集通过共有的参数 $\boldsymbol{\theta}$ 被结合起来，能够产生类似“相干积累”的作用，从而相比单原子集通常有更好的参数估计性能，例如在第3章中的俯仰角-方位角联合估计问题中具有抑制混叠的效果，在第4章中的角度-速度联合估计问题中具有缓解速度模糊的作用。由于原子范数最小化方法可以视作原子零范数最小化的凸松弛，其效果上界为原子零范数最小化，因此本节尝试从原子零范数最小化的角度对基于多原子集的稀疏参数估计方法的性能进行理论分析，为后续的应用提供理论基础。

值得注意的是，当(2-82)中的原子集为离散有限集时，此方法退化为多字典稀疏恢复算法。此类算法被广泛应用于宽带信号的 DOA 估计问题中^[69-71]，并被发现具备抑制混叠的性能。然而，现有研究大多仅在信号特性的层面上对其抑制混叠的功能做了分析，但这并不能解释稀疏恢复方法是如何利用这些信号特性实现混叠抑制的。在本文之前，仅有文献 [68] 基于稀疏恢复方法对这一特性做了解释，但其分析均是建立在其文中的特殊问题上的，因而不具备普适性。相比之下，本节给出的以下定理更加通用。

在给出定理之前，为了便于讨论，此处假设参数集合 $\boldsymbol{\Theta}$ 中的参数均为一维参数，不妨令 $\boldsymbol{\Theta} \triangleq \left[-\frac{\theta_{\max}}{2}, \frac{\theta_{\max}}{2} \right]$ 。在本文所考虑的问题中，原子集 \mathbb{A}_k 中的元素 $\mathbf{a}_k(\boldsymbol{\theta})$ 通常具备如下性质：

$$\mathbf{a}_k(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{a} \left(\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{f_k} \theta_{\max} \right), f_k \geq 1, k = 1, 2, \dots, N_f. \quad (2-83)$$

上式可以理解为：对于第 k 个原子集 \mathbb{A}_k ，其取值由 $\boldsymbol{\theta} \in \left[-\frac{\theta_{\max}}{2f_k}, \frac{\theta_{\max}}{2f_k} \right]$ 中的取值决定，其余区间中参数的取值为 $\left[-\frac{\theta_{\max}}{2f_k}, \frac{\theta_{\max}}{2f_k} \right]$ 中取值的复制。令 $\boldsymbol{\Theta}_k = \left[-\frac{\theta_{\max}}{2f_k}, \frac{\theta_{\max}}{2f_k} \right]$ ，

$\mathbb{A}'_k \triangleq \{\mathbf{a}_k(\theta) : \theta \in \Theta_k\}$ 。假设

$$\text{Spark}(\mathbb{A}'_1) = \text{Spark}(\mathbb{A}'_2) = \cdots = \text{Spark}(\mathbb{A}'_{N_f}),$$

定义 $\text{Spark}^\dagger(\mathbb{A}_{\text{multi}}) \triangleq \text{Spark}(\mathbb{A}'_1)$ 。有以下定理：

定理 2.5. 对于任意信号 \mathbf{X} 满足

$$\mathbf{X} = \sum_{n=1}^N c_n [\mathbf{a}_1(\theta_n), \mathbf{a}_2(\theta_n), \dots, \mathbf{a}_{N_f}(\theta_n)] \odot \mathbf{p}_{\theta_n}^H,$$

其中 $c_n > 0$ 。当 $N \leq \frac{\text{Spark}^\dagger(\mathbb{A}_{\text{multi}})-1}{2}$ 时，若存在 $k \in \{1, 2, \dots, N_f\}$ 使得

$$[\mathbf{a}_k(\theta_1), \mathbf{a}_k(\theta_2), \dots, \mathbf{a}_k(\theta_N)] \quad (2-84)$$

满秩，且存在 $m \neq k$ 使得 $0 < |f_k - f_m| < 1$ 或存在 k 使得 $f_k \leq 1$ ，对 $\forall n = 1, 2, \dots, N$, \mathbf{p}_{θ_n} 的每个元素均不为0，则对于几乎所有满足要求的参数 $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$, $\|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}_{\text{multi}}, 0} = N$ ，且上述分解为唯一原子分解。

为了证明定理 2.5，首先需要对 $\|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}_{\text{multi}}, 0}$ 做初步分析。在参数估计问题中，求解 \mathbf{X} 关于 $\mathbb{A}_{\text{multi}}$ 的原子0范数分解是为了求得对应的支撑集 $\mathcal{T} = \{\theta_n, n = 1, \dots, N\}$ 。对此有如下引理。

引理 2.6. 令

$$\tilde{\mathcal{T}} \triangleq \arg \min_{\mathcal{T}} \#\mathcal{T}, \text{s.t. } \mathbf{X} = \sum_{n=1}^N c_n [\mathbf{a}_1(\theta_n), \mathbf{a}_2(\theta_n), \dots, \mathbf{a}_{N_f}(\theta_n)] \odot \mathbf{p}_{\theta_n}^H, \theta_n \in \mathcal{T}, \quad (2-85)$$

上式可能有多个解，因此 $\tilde{\mathcal{T}}$ 应被理解为所有解得的支撑集 \mathcal{T} 的集合。类似的，定义

$$\tilde{\mathcal{T}}_k \triangleq \arg \min_{\mathcal{T}_k} \#\mathcal{T}_k, \text{s.t. } \mathbf{x}_k = [\mathbf{X}]_{:,k} = \sum_{n=1}^N c_n^k \mathbf{a}_k(\theta_n), k = 1, \dots, N_f, \theta_n \in \mathcal{T}_k. \quad (2-86)$$

令 $N_0 \triangleq \max_{k \in \{1, 2, \dots, N_f\}} \#\mathcal{T}_k$, s.t. $\mathcal{T}_k \in \tilde{\mathcal{T}}_k$ 。定义

$$\tilde{\mathcal{T}}_k^{\text{new}} \triangleq \arg \min_{\mathcal{T}_k} \#\mathcal{T}_k, \text{s.t. } \mathbf{x}_k = \sum_{n=1}^N c_n^k \mathbf{a}_k(\theta_n), k = 1, \dots, N_f, \theta_n \in \mathcal{T}_k, \#\mathcal{T}_k = N_0. \quad (2-87)$$

当 \mathbf{p}_{θ_n} 的每个元素均不为0, $\forall n = 1, 2, \dots, N$ 时，有 $\tilde{\mathcal{T}} = \bigcap_{k=1}^{N_f} \tilde{\mathcal{T}}_k^{\text{new}}$ 。

证明. 令 $\tilde{\mathcal{T}}_0 \triangleq \bigcap_{k=1}^{N_f} \tilde{\mathcal{T}}_k^{\text{new}}$ 。令 $N \triangleq \#\mathcal{T}$, s.t. $\mathcal{T} \in \tilde{\mathcal{T}}$ 。依据定义，引理 2.6 等价于证明 $N = N_0$ 。对于 $\forall \mathcal{T}_0 \in \tilde{\mathcal{T}}_0$ ，依据定义容易得出 \mathcal{T}_0 为(2-85)的一个可行解，因此 $N_0 \geq N$ 。不妨设当 $k = k_0$ 时, $\#\mathcal{T}_{k=k_0} = N_0, \mathcal{T}_k \in \tilde{\mathcal{T}}_k$ 。依据定义，对于任意 $\mathcal{T} \in \tilde{\mathcal{T}}$, \mathcal{T} 为(2-86)，其中 $k = k_0$ 的一个可行解。因此 $N \geq N_0$ 。综上有 $N = N_0$ ，因此 $\tilde{\mathcal{T}} = \bigcap_{k=1}^{N_f} \tilde{\mathcal{T}}_k^{\text{new}}$ 。 \square

接下来给出定理2.5的证明。

证明. 令 $\mathcal{T}^* \triangleq \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}$ 。基于引理2.6中的相关定义, 需要证明 $\tilde{\mathcal{T}} = \bigcap_{k=1}^{N_f} \tilde{\mathcal{T}}_k^{\text{new}} = \{\mathcal{T}^*\}$ 。

首先对 $\tilde{\mathcal{T}}_k$ 的结构进行分析。如前所述, 对于 $\forall \theta_n, n = 1, 2, \dots, N$, $\exists \bar{\theta}_n^k \in \Theta_k$, 使得 $\mathbf{a}_k(\theta_n) = \mathbf{a}_k(\bar{\theta}_n^k)$ 。由此可以建立从 Θ 到 Θ_k 的映射 \mathcal{R}_k , 使得 $\mathcal{R}_k(\theta) = \bar{\theta}^k$ 。特别的, 当 $f_k \leq 1$ 时, 有 $\mathcal{R}_k(\theta) = \theta$ 。令 $\mathcal{T}_k^0 = \mathcal{R}_k(\mathcal{T}^*) = \{\bar{\theta}_1^k, \dots, \bar{\theta}_{N_k}^k\}$, 其中 $N_k \leq N$ 。由于 $N_k \leq N \leq \frac{\text{Spark}^\dagger(\mathbb{A}_{\text{multi}})-1}{2} = \frac{\text{Spark}(\mathbb{A}'_k)-1}{2}$, 由文献[90]中的定理1可得 $\|\mathbf{x}_k\|_{\mathbb{A}'_k, 0} = N_k$, 且支撑集 \mathcal{T}_k^0 对应的原子分解为使得 \mathbf{x}_k 关于原子集 \mathbb{A}'_k 的原子0范数最小的唯一原子分解, 同时 $[\mathbb{A}_k]_{\mathcal{T}_k^0}$ 满秩。对于 $\forall \mathcal{T}_k \in \tilde{\mathcal{T}}_k$, 容易证明 $\mathcal{R}_k(\mathcal{T}_k)$ 为 \mathbf{x}_k 关于原子集 \mathbb{A}'_k 的一个原子分解, 因此 $\#\mathcal{R}_k(\mathcal{T}_k) \geq N_k$ 。又 $\mathcal{R}_k(\mathcal{T}_k)$ 也是 \mathbf{x}_k 关于原子集 \mathbb{A}_k 的一个原子分解, 因此 $\#\mathcal{R}_k(\mathcal{T}_k) \geq \#\mathcal{T}_k$ 。又 $\#\mathcal{R}_k(\mathcal{T}_k) \leq \#\mathcal{T}_k$, 因此 $\|\mathbf{x}_k\|_{\mathbb{A}_k, 0} = \#\mathcal{T}_k = \#\mathcal{R}_k(\mathcal{T}_k) \geq N_k$ 。又 \mathcal{T}_k^0 为 \mathbf{x}_k 关于原子集 \mathbb{A}_k 的一个原子分解, 因此 $N_k = \#\mathcal{T}_k^0 \geq \|\mathbf{x}_k\|_{\mathbb{A}_k, 0}$ 。综上 $\|\mathbf{x}_k\|_{\mathbb{A}_k, 0} = N_k$ 。结合上述讨论得到的: $\mathcal{R}_k(\mathcal{T}_k)$ 为 \mathbf{x}_k 关于原子集 \mathbb{A}'_k 的一个原子分解、支撑集 \mathcal{T}_k^0 对应的原子分解为使得 \mathbf{x}_k 关于原子集 \mathbb{A}'_k 的原子0范数最小的唯一原子分解和 $\#\mathcal{R}_k(\mathcal{T}_k) = N_k = \#\mathcal{T}_k^0$, 可以得到 $\mathcal{R}_k(\tilde{\mathcal{T}}_k) = \{\mathcal{T}_k^0\}$ 。特别的, 当 $f_k \leq 1$ 时, 可以得出 $\tilde{\mathcal{T}}_k = \{\mathcal{T}_k^0\}$ 。

接下来对 $\tilde{\mathcal{T}}_k^{\text{new}}$ 的结构进行分析。由于存在 k 使得 $[\mathbf{a}_k(\theta_1), \mathbf{a}_k(\theta_2), \dots, \mathbf{a}_k(\theta_N)]$ 满秩, 假设此时的 $k = k_0$ 。从之前的讨论可以看出

$$\text{span}\left([\mathbb{A}_{k_0}]_{\mathcal{T}^*}\right) = \text{span}\left([\mathbb{A}_{k_0}]_{\mathcal{R}_{k_0}(\mathcal{T}^*)}\right). \quad (2-88)$$

由于 $[\mathbb{A}_{k_0}]_{\mathcal{T}^*}$ 满秩, 因此 $\#\mathcal{R}_{k_0}(\mathcal{T}^*) \geq \#\mathcal{T}^*$, 即 $\#\mathcal{R}_{k_0}(\mathcal{T}^*) = \#\mathcal{T}^*$ 。又 $\mathcal{T}_{k_0}^0 = \mathcal{R}_{k_0}(\mathcal{T}^*)$, 因此 $\#\mathcal{T}_{k_0}^0 = \#\mathcal{T}^* = N$ 。同理, 由于 $[\mathbb{A}_k]_{\mathcal{T}_k^0}$ 满秩, 因此 $\#\mathcal{T}_k^0 \leq \#\mathcal{T}^* = N, k = 1, 2, \dots, N_f$ 。综上有 $N_0 = N$, 因此 $\tilde{\mathcal{T}}_{k_0}^{\text{new}} = \tilde{\mathcal{T}}_{k_0}$ 。由于 $N \leq \frac{\text{Spark}(\mathbb{A}'_k)-1}{2}, \forall k = 1, 2, \dots, N_f$, 因此当 $\#\mathcal{T}_k^0 < N$ 时, 不存在使得 $\#\mathcal{T}_k' = N$ 的 \mathbf{x}_k 关于原子集 \mathbb{A}'_k 的原子分解 \mathcal{T}_k' 。由此可将 $\tilde{\mathcal{T}}_k^{\text{new}}$ 表示为 $\tilde{\mathcal{T}}_k^{\text{new}} = \{\mathcal{T}_k^{\text{new}} | \#\mathcal{T}_k^{\text{new}} = N, \mathcal{R}_k(\mathcal{T}_k^{\text{new}}) = \mathcal{T}_k^0\}$ 。由于 $\#\mathcal{T}^* = N$, $\mathcal{R}_k(\mathcal{T}^*) = \mathcal{T}_k^0$, 因此 $\mathcal{T}^* \in \tilde{\mathcal{T}}_k^{\text{new}}, \forall k = 1, 2, \dots, N_f$ 。特别的, 当 $f_k \leq 1$ 时, $\tilde{\mathcal{T}}_k^{\text{new}} = \{\mathcal{T}^*\}$ 。

基于上述讨论, 若存在 $m \neq k_0$, 使得 $\tilde{\mathcal{T}}_{k_0}^{\text{new}} \cap \tilde{\mathcal{T}}_m^{\text{new}} = \{\mathcal{T}^*\}$, 则定理得证。当存在 k 使得 $f_k \leq 1$ 时, 上式显然, 下面讨论 $f_k > 1, \forall k = 1, 2, \dots, N_f$ 的情况。事实上, 假设存在 $\mathcal{T}' \neq \mathcal{T}^*$, $\mathcal{T}' \in \tilde{\mathcal{T}}_{k_0}^{\text{new}} \cap \tilde{\mathcal{T}}_m^{\text{new}}$, 则 \mathcal{T}' 应满足 $\#\mathcal{T}' = N$, 且 $\mathcal{R}_m(\mathcal{T}') = \mathcal{T}_m^0 = \mathcal{R}_m(\mathcal{T}^*)$, $\mathcal{R}_{k_0}(\mathcal{T}') = \mathcal{T}_{k_0}^0 = \mathcal{R}_{k_0}(\mathcal{T}^*)$ 。因此 \mathcal{T}' 可被写为如下

形式：

$$\begin{aligned}\mathcal{T}' &= \left\{ \theta_1 + N_1 \cdot \frac{1}{f_{k_0}} \theta_{\max}, \dots, \theta_N + N_N \cdot \frac{1}{f_{k_0}} \theta_{\max} \right\} \\ &= \left\{ \theta_1 + N'_1 \cdot \frac{1}{f_m} \theta_{\max}, \dots, \theta_N + N'_N \cdot \frac{1}{f_m} \theta_{\max} \right\},\end{aligned}\quad (2-89)$$

其中 $N_1, \dots, N_N, N'_1, \dots, N'_N$ 为整数。 $(2-89)$ 等价于以下情况：

$$\begin{aligned}&\exists \text{对序列 } \{1, 2, \dots, N\} \text{ 的一种排列 } \{n_1, n_2, \dots, n_N\}, \text{使得} \\ &\theta_k + N_k \cdot \frac{1}{f_{k_0}} \theta_{\max} = \theta_{n_k} + N'_{n_k} \cdot \frac{1}{f_m} \theta_{\max}, k = 1, 2, \dots, N.\end{aligned}\quad (2-90)$$

$(2-90)$ 可分两种情况讨论。当 $\{n_1, n_2, \dots, n_N\} \neq \{1, 2, \dots, N\}$ 时，此时存在 $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}, i \neq j$ ，使得 $\theta_i + N_i \cdot \frac{1}{f_{k_0}} \theta_{\max} = \theta_j + N'_j \cdot \frac{1}{f_m} \theta_{\max}$ ，即 $\theta_i - \theta_j = N'_j \cdot \frac{1}{f_m} \theta_{\max} - N_i \cdot \frac{1}{f_{k_0}} \theta_{\max}$ 。当 θ_i 固定时，由于 N_i 和 N'_j 均为整数，因此此时满足要求的 θ_j 在 Θ 中是有限的。假设所有的目标参数均均匀分布在参数空间 Θ 中，基于上述观察，容易证明此时满足要求的目标参数所构成的集合为整个参数空间中的一个零测集，即出现上述情况的概率为 0。当 $\{n_1, n_2, \dots, n_N\} = \{1, 2, \dots, N\}$ 时，此时对所有 $n = 1, 2, \dots, N$ ，有 $\theta'_n \triangleq \theta_n + N_n \cdot \frac{1}{f_{k_0}} \theta_{\max} = \theta_n + N'_n \cdot \frac{1}{f_m} \theta_{\max}$ 。由于 $f_m - f_{k_0} \neq 0$ ，因此 $N_n \neq N'_n$ 。对上式进行等量代换可得 $(f_{k_0} - f_m)(\theta'_n - \theta_n) = (N_n - N'_n)\theta_{\max}$ 。又 $\theta'_n, \theta_n \in \left[-\frac{\theta_{\max}}{2}, \frac{\theta_{\max}}{2}\right]$ ，因此 $|\theta'_n - \theta_n| \leq \theta_{\max}$ 。又 $|f_{k_0} - f_m| < 1$ ，因此 $N_n - N'_n = 0$ ，与 $N_n \neq N'_n$ 矛盾。综合上述两种情况，可以总结出对于几乎所有满足条件的参数 $\{\theta_n\}_{n=1}^N$ ， $\tilde{\mathcal{T}}_{k_0}^{\text{new}} \cap \tilde{\mathcal{T}}_m^{\text{new}} = \{\mathcal{T}^*\}$ ，由此定理得证。□

下面对定理 2.5 做一些说明。为了展现多原子集的性能优势，本节提出了 Spark[†] 的概念。相比于传统的 Spark，Spark[†] 对原子集中非混叠部分的相干性进行了刻画。具体来说，令 \mathbb{A}_k 为频率为 f_k 时由该频率对应的导向向量构成的原子集。假如对所有频率均存在混叠，则对于每一个 k ， $\text{Spark}(\mathbb{A}_k) = 2$ ，此时单个原子集无法实现正确的参数估计。然而，对于其非混叠区域构成的原子集 \mathbb{A}'_k ，通常 $\text{Spark}(\mathbb{A}'_k) \gg 2$ 。当存在多个原子集时，由于各原子集的混叠区域不同，因此可以通过利用多原子集的信息将各原子集非混叠区域的性能发挥出来。需要说明的是，定理中要求 \mathbf{p}_{θ_n} 的每一个元素均不为 0 是为了使得每个原子集均得到使用。这一点可以通过一个极端的例子进行理解，假设 \mathbf{p}_{θ_n} 除了第一个元素外其余元素均为 0，此时相当于只观测到了第一个原子集 \mathbb{A}_1 上的信号，此时问题退化为单原子集的情况，其它原子集均无法发挥作用，因此无法实现性能提升。定理中要求存在 $k \in \{1, 2, \dots, N_f\}$ 使得 $[\mathbf{a}_k(\theta_1), \mathbf{a}_k(\theta_2), \dots, \mathbf{a}_k(\theta_N)]$ 满秩主要是为了使得至少在一个原子集中目标参数不存在混叠。容易证明，当目标参数在所有原子集中均存在混叠时，基于原子 0 范数最小化的参数估计算法可能失效。容易看出，原子集个数越多，上述情况出现的可能性越小，这进一步体现了多原子集的优势。

2.6 本章小结

本章对传统压缩感知理论进行了简要回顾，并在有网格方法的基础上详细介绍了基于原子范数最小化理论的无网格压缩感知理论，为后文开展的具体场景中的应用研究提供了理论基础。

原子范数最小化方法在具体场景中应用的主要困难在于如何将对偶原子范数约束转化为三角多项式不等式约束。为了说明这一点，本章以限定范围的DOA估计问题为例，基于原子范数最小化方法提出了一种无网格的DOA估计方法CA-ANM。为了提升CA-ANM算法的效率，本文进一步基于原对偶内点法提出了一种快速求解算法FCA-ANM。仿真结果表明，相比与原始ANM算法，所提CA-ANM算法运算时间更短，且噪声环境下能实现更准确的DOA估计。相比于有网格算法，所提算法由于不受到网格失配的影响，DOA估计精度更高。与原算法CA-ANM相比，所提快速算法FCA-ANM在精度上与其性能一致，但运算时间大幅降低，体现了快速算法的优越性。需要指出的是，当目标DOA先验范围达到或接近全空间时，所提限定范围算法的速度提升并不显著。因此，本章所提算法更适用于目标先验DOA范围更窄的情况。

最后，本章基于原子0范数最小化方法对多原子集原子范数最小化方法的理论界限进行了分析，为后文的具体应用提供了理论基础。

第3章 基于多频率模型的宽带信号俯仰角-方位角联合估计

3.1 前言

前两章对压缩感知方法的基本理论进行了介绍，从本章开始，本文将对压缩感知方法在宽带信号中的应用进行研究。被动声呐通过接收舰艇目标的辐射噪声实现对目标的探测^[3]。除了由机械噪声造成的窄带部分外，舰船噪声通常还包括由螺旋桨空化和水动力效应导致的宽带部分^[2-6]，因此被动声呐阵列接收的信号应被视作宽带信号进行处理。特别的，吨位 $T = 400t$ 以上的客、货船的噪声谱通常满足如下经验公式^[3]：

$$SL = 60 \log_{10} K + 9 \log_{10} T - 20 \log_{10} F - 66(\text{dB/Hz}), \quad (3-1)$$

其中 K 为航速 (kn)， F 为频率 (kHz)。从(3-1)中可以看出，随着频率的上升，舰艇的辐射噪声功率急剧下降，因此认为舰船辐射噪声主要集中在低频，将其建模为宽带低频信号。

为了实现宽带被动声呐的二维定位，本章主要研究宽带被动声呐的俯仰角-方位角联合估计问题。宽带信号通常利用多频率模型进行建模。基于所得信号模型，为了实现无网格的参数估计以避免网格失配的影响，本章主要基于原子范数最小化方法进行二维参数估计。相比窄带一维参数估计问题，本章所考虑问题的主要难点在于：1) 宽带信号对应的原子集的对偶原子范数约束不具备三角多项式不等式约束的形式，导致有界引理难以直接应用；2) 多维信息通常通过 Kronecker 积耦合在一起，这导致算法规模相比一维算法急剧上升，影响算法在实际应用中的部署。针对第一个问题，本文通过提出一种新的映射算子，将对偶原子范数约束转化为了二元三角多项式不等式约束，并利用有界引理将对偶问题转化为可规划求解的 SDP 问题，并通过 Lagrange 对偶分析得到了原问题的 SDP 形式。针对第二个问题，本章分别从解耦空间频率和去除冗余信息的角度提出了两种快速算法，显著提升了算法的运算速度。

本章内容组织如下：第3.2节基于二维多频模型对接收信号进行了建模，提出了相应的信号模型；基于提出的信号模型，第3.3节详细推导了基于原子范数的宽带二维无网格参数估计算法 2DMFANM 以及相应的快速算法 2DMFDANM 和 2DMFANM_SizeRedu；第3.4节通过数值仿真将所提算法与已有算法进行了对比，展现了所提算法的优越性；第3.5节基于实验数据对所提算法进行了验证，进一步说明了所提算法的可行性；最后第3.5节根据仿真和实验数据验证的结果，对本章所提算法进行总结。

3.2 信号模型

共有 K 个远场宽带平面波信号照射在 $N_1 \times N_2$ 的均匀矩形阵 (URA) 上。阵列在 x 轴方向有 N_1 个阵元，在 y 轴方向有 N_2 个阵元。第 k 个波的俯仰角和方

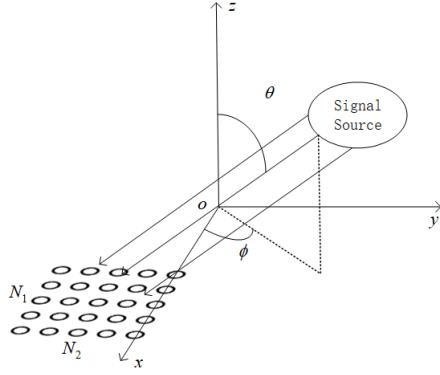


图 3-1 阵列设置示意图

Figure 3-1 Geometry of Array Configuration

位角分别由 θ_k 和 ϕ_k 表示, 如图 3-1 所示。宽带信号可以通过已有的谱分析技术用多频率模型表示, 如离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform, DFT), 滤波器组等^[106,107,114,115]。假设共有 N_f 个子带, 每个子带的中心频率为 $f \cdot f_0$, 其中 $f \in \{1, 2, \dots, N_f\}$ 。第 i 个信号源 s_i 可以被表示为

$$s_i = c_i \cdot [p_{\omega_i}^1, p_{\omega_i}^2, \dots, p_{\omega_i}^{N_f}] = c_i p_{\omega_i}^T, \quad (3-2)$$

其中 $p_{\omega_i}^T \triangleq [p_{\omega_i}^1, p_{\omega_i}^2, \dots, p_{\omega_i}^{N_f}]$, $\|p_{\omega_i}\| = 1$ 。这里 c_i 表示信号幅值, p_{ω_i} 包含了 N_f 个子带的功率。令阵元素引的集合为 J , 定义为 $J = \{0, 1, \dots, N_1 - 1\} \times \{0, 1, \dots, N_2 - 1\}$ 。因此第 k 个阵元在第 f 个子带接收到的信号可以被表示为

$$y_k^f = x_k^f + n_k^f, \quad (3-3)$$

$$x_k^f = x_{(k_1, k_2)}^f = \sum_{i=1}^r c_i \exp \left(j2\pi f f_0 \frac{d}{c} [\cos(\phi_i) \sin(\theta_i), \sin(\phi_i) \sin(\theta_i)] k \right) \cdot p_{\omega_i}^f, \quad (3-4)$$

其中 $k = [k_1, k_2]^T \in J$, c 表示声速, d 为阵元间距, n_k^f 为阵元接收到的噪声。定义空间角频率向量为 $\omega_i = [\omega_{1i}, \omega_{2i}]^T \triangleq f_0 \frac{d}{c} [\cos(\phi_i) \sin(\theta_i), \sin(\phi_i) \sin(\theta_i)]^T$, 有

$$x_k^f = x_{(k_1, k_2)}^f = \sum_{i=1}^r c_i \exp (j2\pi f \omega_i^T k) \cdot p_{\omega_i}^f. \quad (3-5)$$

包含俯仰角和方位角的信息可以通过确定 ω_i 来精确提取。具体的, 有

$$\theta = \arcsin (\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cdot \frac{c}{f_0 d}) \quad (3-6)$$

和

$$\phi = \arctan (\frac{\omega_2}{\omega_1}). \quad (3-7)$$

将从 N_f 个子带计算得到的信号组合在一起, 第 k 个阵元接收到的信号可以被表示为

$$\mathbf{y}_k = [y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^f] = \mathbf{X}_k + \mathbf{n}_k, \quad (3-8)$$

其中

$$\mathbf{X}_k = \left[x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^f \right] = \sum_{i=1}^r c_i \cdot [\exp(j2\pi\omega_i^T k), \dots, \exp(j2\pi N_f \omega_i^T k)] \odot p_{\omega_i}^T. \quad (3-9)$$

将所有阵元接收到的信号的第 f 个子带组合在一起，有如下矩阵表示

$$\mathbf{Y}^f = [y_k^f] = \mathbf{X}^f + \mathbf{N}^f, \quad (3-10)$$

其中 $\mathbf{X}^f = [x_k^f]$ 。

\mathbf{X}^f 可以被进一步表示为

$$\mathbf{X}^f = \sum_{i=1}^r (c_i p_{\omega_i}^f) \cdot \mathbf{a}_2(f, \omega_{2i}) \mathbf{a}_1(f, \omega_{1i})^T = \sum_{i=1}^r (c_i p_{\omega_i}^f) \mathbf{A}(f, \omega_i), \quad (3-11)$$

其中 $\mathbf{a}_k(f, \omega_{ki}) = [1, \exp(j2\pi f \omega_{ki}), \dots, \exp(j2\pi f \omega_{ki} \cdot (N_k - 1))]^T, k = 1, 2$, 表示导向向量。矩阵 $\mathbf{A}(f, \omega_i)$ 定义为: $\mathbf{A}(f, \omega_i) = \mathbf{a}_2(f, \omega_{2i}) \cdot \mathbf{a}_1(f, \omega_{1i})^T$ 。将公式(3-11)向量化可以得到对第 f 个子带的表示如下:

$$\tilde{\mathbf{x}}^f \triangleq \text{vec}(\mathbf{X}^f) = \sum_{i=1}^r (c_i p_{\omega_i}^f) \mathbf{a}_1(f, \omega_{1i}) \otimes \mathbf{a}_2(f, \omega_{2i}). \quad (3-12)$$

结合(3-9)和(3-12)，得到完整的信号模型为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}} &\triangleq [\tilde{\mathbf{x}}^1, \tilde{\mathbf{x}}^2, \dots, \tilde{\mathbf{x}}^{N_f}] = \sum_{i=1}^r c_i [\tilde{\mathbf{a}}(1, \omega_i), \tilde{\mathbf{a}}(2, \omega_i), \dots, \tilde{\mathbf{a}}(N_f, \omega_i)] \odot p_{\omega_i}^T \\ &= \sum_{i=1}^r c_i \tilde{\mathbf{A}}(\omega_i) \odot p_{\omega_i}^T, \end{aligned} \quad (3-13)$$

其中 $\tilde{\mathbf{A}}(\omega_i) \triangleq [\tilde{\mathbf{a}}(1, \omega_i), \tilde{\mathbf{a}}(2, \omega_i), \dots, \tilde{\mathbf{a}}(N_f, \omega_i)]$ 。相应的，当噪声存在时，有

$$\tilde{\mathbf{Y}} = [\text{vec}(\mathbf{Y}^1), \dots, \text{vec}(\mathbf{Y}^{N_f})] = \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{N}}, \quad (3-14)$$

其中 $\tilde{\mathbf{N}} = [\text{vec}(\mathbf{N}^1), \dots, \text{vec}(\mathbf{N}^{N_f})]$ 。

本章中，待估的 DOA 信息将从 $\tilde{\mathbf{Y}}$ 表示的信号中提取。

3.3 算法设计

3.3.1 二维多频原子范数最小化算法-2DMFANM

本小节中将介绍原始的 2DMFANM 算法以及其在俯仰角-方位角联合估计中的应用。

受到(3-13)的启发，定义原子集 \mathbb{A} 如下

$$\mathbb{A} \triangleq \{\tilde{\mathbf{A}}(\omega) \odot p_{\omega}^T | \omega \in [0, 1]^2, \|p_{\omega}\|_2 = 1\}. \quad (3-15)$$

\mathbb{A} 包含了所有由功率模式向量 \mathbf{p}_ω 调制的导向向量。不失一般性，将 \mathbf{p}_ω 归一化使其具有单位欧氏范数。为了从观测信号 $\tilde{\mathbf{Y}}$ 中提取 DOA 信息，提出如下 ANM 问题。当无噪声时：

$$\min_{\tilde{\mathbf{X}}} \|\tilde{\mathbf{X}}\|_{\mathbb{A}}, \quad \text{s.t.} \quad \tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{X}}. \quad (3-16)$$

当噪声存在时：

$$\min_{\tilde{\mathbf{X}}} \|\tilde{\mathbf{X}}\|_{\mathbb{A}}, \quad \text{s.t.} \quad \|\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_2 \leq \beta, \quad (3-17)$$

其中 β 表示噪声功率。这里原子范数 $\|\tilde{\mathbf{X}}\|_{\mathbb{A}}$ 定义为

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{X}}\|_{\mathbb{A}} &\triangleq \inf \{t \geq 0 | \tilde{\mathbf{X}} \in t \cdot \text{conv}(\mathbb{A})\} \\ &= \inf \left\{ \sum_\omega |c_\omega| : \tilde{\mathbf{X}} = \sum_\omega c_\omega \tilde{\mathbf{A}}(\omega) \odot \mathbf{p}_\omega^T \right\}. \end{aligned} \quad (3-18)$$

无噪声情况下的目标为 $\tilde{\mathbf{Y}}$ 找到利用 \mathbb{A} 中原子的最稀疏的表示。在噪声存在的情况下，目标为找到满足利用 \mathbb{A} 中原子的表示最稀疏的同时，观测 $\tilde{\mathbf{Y}}$ 在误差容限 β 内。

由于原子范数无法被直接计算，因此上述优化问题需转换为 SDP 问题求解。本小节剩余部分将详细给出将(3-16)转换为 SDP 的详细过程。当噪声存在时，(3-17) 可以通过类似的方法进行转换。

(3-16)的对偶问题为

$$\max_{\mathbf{Q}} \langle \tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{Q} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}}^* \leq 1, \quad (3-19)$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathbb{A}}^*$ 表示 (3-18)中定义的原子范数的对偶范数，定义为

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}}^* = \sup_{\|\tilde{\mathbf{X}}\|_{\mathbb{A}} \leq 1} \langle \mathbf{Q}, \tilde{\mathbf{Y}} \rangle_{\mathbb{R}}. \quad (3-20)$$

利用(3-13)中 $\tilde{\mathbf{X}}$ 的定义并且定义 $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{N_f}]$ ，可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}}^* &= \sup_{\|\tilde{\mathbf{X}}\|_{\mathbb{A}} \leq 1} \langle \mathbf{Q}, \tilde{\mathbf{Y}} \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \sup_{\omega, \mathbf{p}_\omega} \langle \mathbf{Q}, \tilde{\mathbf{A}}(\omega) \odot \mathbf{p}_\omega^T \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \sup_{\omega, \mathbf{p}_\omega} \text{Re} \left(\sum_{f=1}^{N_f} p_\omega^f q_f^H \tilde{\mathbf{a}}(f, \omega) \right). \end{aligned} \quad (3-21)$$

令 $\Psi(\mathbf{Q}, \omega) \triangleq [q_1^H \tilde{\mathbf{a}}(1, \omega), \dots, q_{N_f}^H \tilde{\mathbf{a}}(N_f, \omega)]^T$ 。可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}}^* &= \sup_{\mathbf{p}_\omega, \omega} \text{Re}(p_\omega^H \Psi(\mathbf{Q}, \omega)) \\ &= \sup_{\mathbf{p}_\omega, \omega} |p_\omega^H \Psi(\mathbf{Q}, \omega)| \\ &= \sup_{\omega} \|\Psi(\mathbf{Q}, \omega)\|_2. \end{aligned} \quad (3-22)$$

为了将 $\|\Psi(\mathbf{Q}, \omega)\|$ 写成多元三角多项式的形式以利用有界引理^[84] 得到 SDP，需要定义适合的映射算子。受到文献 [106] 中提出的映射算子的启发，提出一种

适用于二维信号的映射算子。令

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1(\omega_1) &\triangleq [\mathbf{A}_1(1, \omega_1), \mathbf{A}_1(2, \omega_1), \dots, \mathbf{A}_1(N_f, \omega_1)] \\ \mathbf{A}_2(\omega_2) &\triangleq [\mathbf{A}_2(1, \omega_2), \mathbf{A}_2(2, \omega_2), \dots, \mathbf{A}_2(N_f, \omega_2)].\end{aligned}\quad (3-23)$$

根据 $\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\omega})$ 的定义，有

$$\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{A}_1(\omega_1) \odot \mathbf{A}_2(\omega_2). \quad (3-24)$$

为了构造期望的映射算子，此处做如下定义：

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_1(\omega_1) &\triangleq [1, \exp(j2\pi\omega_1), \dots, \exp(j2\pi\omega_1 N_f(N_1 - 1))]^T \\ \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_2(\omega_2) &\triangleq [1, \exp(j2\pi\omega_2), \dots, \exp(j2\pi\omega_2 N_f(N_2 - 1))]^T,\end{aligned}\quad (3-25)$$

其中 $\mathbf{z}_1 \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_1}$, $\mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_2}$, $\tilde{N}_1 \triangleq N_f(N_1 - 1) + 1$, $\tilde{N}_2 \triangleq N_f(N_2 - 1) + 1$ 。令

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1(\omega_1) &\triangleq [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_1] \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_1 \times N_f} \\ \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_2(\omega_2) &\triangleq [\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_2] \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_2 \times N_f}\end{aligned}\quad (3-26)$$

以及

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\omega}) \triangleq \mathbf{Z}_1(\omega_1) \odot \mathbf{Z}_2(\omega_2) = [\mathbf{z}, \mathbf{z}, \dots, \mathbf{z}] \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \times N_f}, \quad (3-27)$$

其中 $\mathbf{z} \triangleq \mathbf{z}_1 \otimes \mathbf{z}_2$ 。

通过观察(3-24)-(3-27)，容易看出 $\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\omega})$ 可以视作 $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\omega})$ 的部分观测。因此，本章提出映射算子 \mathcal{R} ，使得

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathcal{R}(\mathbf{Z}), \quad \mathcal{R} : \quad \mathbb{C}^{\tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \times N_f} \rightarrow \mathbb{C}^{N_1 N_2 \times N_f}, \quad (3-28)$$

其中

$$[\mathcal{R}(\mathbf{Z})]_{(i-1)N_1+j,f} = \mathbf{Z}_{(i-1)f \tilde{N}_1+(j-1)f+1,f}. \quad (3-29)$$

令

$$\tilde{\mathbf{X}}' \triangleq \sum_{\boldsymbol{\omega}} c_{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{Z}(\boldsymbol{\omega}) \odot \mathbf{p}_{\boldsymbol{\omega}}^H. \quad (3-30)$$

从 (3-13), (3-28)和(3-30)可得 $\tilde{\mathbf{X}} = \mathcal{R}(\tilde{\mathbf{X}}')$ 。令

$$\mathbf{H} = \mathcal{R}^*(\mathbf{Q}), \mathbf{Q} = \mathcal{R}(\mathbf{H}). \quad (3-31)$$

将(3-31)代入 $\Psi(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\omega})$ 的定义，可以得到

$$\Psi(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{H}^H \mathbf{z}. \quad (3-32)$$

(3-22)由此可写作

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}}^* = \sup_{\boldsymbol{\omega}} \|\mathbf{H}^H \mathbf{z}\|_2, \quad (3-33)$$

从中可以看出

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}}^* \leq 1 \Leftrightarrow \|\mathbf{H}^H \mathbf{z}\|_2 \leq 1, \quad \forall \boldsymbol{\omega}. \quad (3-34)$$

值得注意的是式(3-34)的右侧构成了一个多元三角多项式不等式。通过多元三角多项式的有界引理^[84]以及运用合适的平方和松弛，这一不等式可以被写成以下 SDP 问题

$$\delta_k = \text{Tr}(\Theta_k \mathbf{P}_0), k \in \mathcal{H}, \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^H & \mathbf{I}_{N_f} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (3-35)$$

其中 \mathcal{H} 是半空间， $\Theta_k = \Theta_{k_1} \otimes \Theta_{k_2}$, $k = [k_1, k_2]$ 。 Θ_{k_i} 为除了第 k_i 个对角线为 1 其余均为 0 的 $\tilde{N}_i \times \tilde{N}_i$ 的 Toeplitz 矩阵， $i = 1, 2$ 。由此(3-19)可以被转换为如下 SDP

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}_0, \mathbf{H}} \langle \tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{Q} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad s.t. \\ & \delta_k = \text{Tr}(\Theta_k \mathbf{P}_0), k \in \mathcal{H}, \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^H & \mathbf{I}_{N_f} \end{bmatrix} \succeq 0, \mathbf{H} = \mathcal{R}^*(\mathbf{Q}). \end{aligned} \quad (3-36)$$

通过标准的 Lagrange 对偶分析，原问题(3-16)的 SDP 形式可以由(3-36)的对偶问题得到。

(3-36)的 Lagrangian 函数为

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}_0, \mathbf{H}, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_Q, \nu) \\ &= \langle \tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{Q} \rangle_{\mathbb{R}} + \left\langle \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \Lambda_2^H & \Lambda_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^H & \mathbf{I}_{N_f} \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \\ &+ \text{Re} \left\{ \sum_{k \in \mathcal{H}} \nu_k (\delta_k - \text{Tr}(\Theta_k \mathbf{P}_0)) \right\} - \langle \Lambda_Q, \mathbf{H} - \mathcal{R}^*(\mathbf{Q}) \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \langle \tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{Q} \rangle_{\mathbb{R}} + \langle \Lambda_Q, \mathcal{R}^*(\mathbf{Q}) \rangle_{\mathbb{R}} + \langle \mathbf{P}_0, \Lambda_1 \rangle_{\mathbb{R}} + 2 \langle \Lambda_2, \mathbf{H} \rangle_{\mathbb{R}} \\ &+ \text{Tr}(\Lambda_3) + \nu_0 - \langle \Lambda_Q, \mathbf{H} \rangle_{\mathbb{R}} - \langle \mathbf{P}_0, \text{Toep}_{2D}(\nu) \rangle_{\mathbb{R}}, \end{aligned} \quad (3-37)$$

其中 $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_Q$ 和 ν 为对偶变量。 Toep_{2D} 为将 $\nu = [\nu]_k$ 转换为二阶 Toeplitz 矩阵的二维 Toeplitz 算子。对偶函数为

$$\begin{aligned} & g(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_Q, \nu) \\ &= \sup_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}_0, \mathbf{H}} \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}_0, \mathbf{H}, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_Q, \nu), s.t. \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \Lambda_2^H & \Lambda_3 \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned} \quad (3-38)$$

令

$$\begin{aligned} J(\mathbf{Q}) &\triangleq \langle \tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{Q} \rangle_{\mathbb{R}} + \langle \Lambda_Q, \mathcal{R}^*(\mathbf{Q}) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathcal{R}(\Lambda_Q) + \tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{Q} \rangle_{\mathbb{R}}, \\ J(\mathbf{P}_0) &\triangleq \langle \mathbf{P}_0, \Lambda_1 \rangle_{\mathbb{R}} - \langle \mathbf{P}_0, \text{Toep}_{2D}(\nu) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{P}_0, \Lambda_1 - \text{Toep}_{2D}(\nu) \rangle_{\mathbb{R}}, \\ J(\mathbf{H}) &\triangleq 2 \langle \Lambda_2, \mathbf{H} \rangle_{\mathbb{R}} - \langle \Lambda_Q, \mathbf{H} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle 2\Lambda_2 - \Lambda_Q, \mathbf{H} \rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned} \quad (3-39)$$

将(3-39)代入(3-38)，有

$$\begin{aligned} & g(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_Q, \nu) \\ &= \sup_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}_0, \mathbf{H}} J(\mathbf{Q}) + J(\mathbf{P}_0) + J(\mathbf{H}) + \text{Tr}(\Lambda_3) + \nu_0, s.t. \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \Lambda_2^H & \Lambda_3 \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned} \quad (3-40)$$

容易看出, $J(\mathbf{Q})$, $J(\mathbf{P}_0)$ 和 $J(\mathbf{H})$ 的上确界存在, 当且仅当, $\tilde{\mathbf{Y}} = -\mathcal{R}(\Lambda_Q)$, $\text{Toep}_{2D}(\nu) = \Lambda_1 \geq 0$ 和 $\Lambda_Q = -2\Lambda_2$ 。令 $\tilde{\mathbf{X}}^* = -\Lambda_Q$, $\Lambda_3 = \frac{1}{2}\mathbf{W}$ 以及 $\nu = \frac{1}{2}\mu$, 原 SDP 可以被写成

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{W}, \mu, \tilde{\mathbf{X}}^*} \quad & \frac{1}{2}[\text{Tr}(\mathbf{W}) + \text{Tr}(\text{Toep}_{2D}(\mu))] \quad s.t. \\ \left[\begin{array}{cc} \text{Toep}_{2D}(\mu) & \tilde{\mathbf{X}}^* \\ \tilde{\mathbf{X}}^{*H} & \mathbf{W} \end{array} \right] \geq 0, \quad & \tilde{\mathbf{Y}} = \mathcal{R}(\tilde{\mathbf{X}}^*), \end{aligned} \quad (3-41)$$

其中 $\text{Toep}_{2D}(\mu)$ 为二阶 Toeplitz 矩阵, $\mu \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_1 \times \tilde{N}_2}$ 。当噪声存在时, 原 SDP 调整为如下形式

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{W}, \mu, \tilde{\mathbf{X}}^*} \quad & \frac{1}{2}[\text{Tr}(\mathbf{W}) + \text{Tr}(\text{Toep}_{2D}(\mu))] \quad s.t. \\ \left[\begin{array}{cc} \text{Toep}_{2D}(\mu) & \tilde{\mathbf{X}}^* \\ \tilde{\mathbf{X}}^{*H} & \mathbf{W} \end{array} \right] \geq 0, \quad & \|\tilde{\mathbf{Y}} - \mathcal{R}(\tilde{\mathbf{X}}^*)\|_2 \leq \epsilon. \end{aligned} \quad (3-42)$$

空间角频率向量可以利用 MaPP 方法^[103] 从提取。接下来, 俯仰角和方位角可以分别通过(3-6)和(3-7)计算。完整的算法总结于算法 4 中。

算法 4 二维多频原子范数最小化算法 2DMFANM

- 1: 输入: $\{\mathbf{Y}^f\}_{f=1}^{N_f}, N_1, N_2, N_f, \epsilon$
 - 2: 输出: $\{[\theta_i, \phi_i]\}_{i=1}^K$
 - 3: $\tilde{\mathbf{Y}} \leftarrow [\text{vec}(\mathbf{Y}^1), \dots, \text{vec}(\mathbf{Y}^f)]$
 - 4: **for** $k = 1$ to 2 **do**
 - 5: $\tilde{N}_k = N_f(N_k - 1) + 1$
 - 6: **end for**
 - 7: 根据(3-29)构造映射算子 R
 - 8: **if** 无噪声 **then**
 - 9: 求解(3-41)
 - 10: **else**
 - 11: 求解(3-42)
 - 12: **end if**
 - 13: $\{[\omega_{1i}, \omega_{2i}]\}_{i=1}^K \leftarrow \text{MaPP}(\text{Toep}_{2D}(\mu))$
 - 14: $\theta = \arcsin \left(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cdot \frac{c}{f_0 d} \right)$
 - 15: $\phi = \arctan \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)$
-

值得注意的是(3-35)和(3-36)中的半正定矩阵的大小为 $((N_f(N_1 - 1) + 1)(N_f(N_2 - 1) + 1) + N_f) \times ((N_f(N_1 - 1) + 1)(N_f(N_2 - 1) + 1) + N_f)$, 并且包含 $O((N_1 N_2 N_f^2)^2)$ 个元素。这将导致严重的运算障碍并阻碍算法在计算资源有限的实际应用场景中的部署。因此, 快速算法的设计是十分必要的。通过观察(3-35)和(3-36), PSD 矩阵的巨大规模可以归咎于两个主要因素。第一个因素是构造的映射算子提升

了过高的维数，导致(3-35)中 \mathbf{H} 中的较多全零行以及(3-41)中 $\tilde{\mathbf{X}}^*$ 中的全未知行。这导致了 PSD 矩阵的巨大规模。第二个因素是两个空间角频率通过(3-12)中的 Kronecker 积耦合在了一起，导致了 (3-41)中大规模的二阶 Toeplitz 矩阵。本节剩余部分将分别从这两个方面来解决计算量的问题。为了解决第一个问题，提出了一种降规模算法，记为 2DMFANM_SizeRedu。为了解决第二个问题，提出了一种解耦算法以解耦相应的矩阵，记为 2DMFDANM。

3.3.2 解耦算法 - 2DMFDANM

为了将空间角频率 ω_1 和 ω_2 解耦，将(3-13)和(3-14)中采集得到的数据重新排布为 $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}^{N_2 \times N_1 \times N_f}$ 和 $\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_2 \times N_f}$ ，定义如下：

$$[\mathbf{Y}_2]_{:, :, f} = \mathbf{Y}^f, [\mathbf{Y}_1]_{:, :, f} = [\mathbf{Y}^f]^T, \quad (3-43)$$

其中 \mathbf{Y}^f 如 (3-10) 所定义。

一种直观的解耦方案是将 \mathbf{Y}_1 和 \mathbf{Y}_2 视作两个文献 [107] 中定义的一维多测量向量多频率 (MMV-MF) 测量。这里 \mathbf{Y}_1 测量空间角频率 ω_1 ， \mathbf{Y}_2 测量空间角频率 ω_2 。文献 [107] 中指出，空间角频率 ω_1 和 ω_2 可以通过某种优化问题求得 (见 (附 2-14))。

由于 ω_1 和 ω_2 在上一步被解耦，因此需要一个配对步骤以提取正确的空间角频率。本章提出一种配对算法 MFParing 如下所示。假设已经得到解耦的估计 $\{\hat{\omega}_{1i}\}_{i=1}^{K_1}$ 和 $\{\hat{\omega}_{2i}\}_{i=1}^{K_2}$ ，根据(3-11)，有

$$\begin{aligned} \exists \mathbf{S}^f \in \mathbb{C}^{K_2 \times K_1}, & \quad s.t. \\ \mathbf{X}^f = \mathbf{A}_2(f, \hat{\omega}_2) \mathbf{S}^f \mathbf{A}_1(f, \hat{\omega}_1)^T, & \quad f = 1, 2, \dots, N_f, \end{aligned} \quad (3-44)$$

其中 $\mathbf{A}_k(f, \hat{\omega}_k) = [\mathbf{A}_k(f, \hat{\omega}_{k1}), \dots, \mathbf{A}_k(f, \hat{\omega}_{kr_k})]$, $k = 1, 2$ 。进一步有

$$\text{vec}(\mathbf{X}^f) = \mathbf{A}_1(f, \hat{\omega}_1) \otimes \mathbf{A}_2(f, \hat{\omega}_2) \text{vec}(\mathbf{S}^f). \quad (3-45)$$

值得注意的是所有 $\{\mathbf{S}^f\}_{f=1}^{N_f}$ 中的非 0 元素有相同的索引。因此，可以设计如下优化问题来配对空间角频率：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}^* = \arg \min_{\tilde{\mathbf{S}}} \|\tilde{\mathbf{S}}\|_{2,1}, & \quad s.t. \\ \|\text{vec}(\mathbf{X}^f) - \mathbf{A}_1(f, \hat{\omega}_1) \otimes \mathbf{A}_2(f, \hat{\omega}_2) \text{vec}(\mathbf{S}^f)\| \leq \epsilon, & \quad f = 1, \dots, N_f, \\ \tilde{\mathbf{S}} = [\text{vec}(\mathbf{S}^1), \dots, \text{vec}(\mathbf{S}^{N_f})]. \end{aligned} \quad (3-46)$$

将 $\tilde{\mathbf{S}}$ 中的每一列归一化得到 $\widetilde{\mathbf{S}}'$ 。令 $\tilde{\mathbf{s}} = \widetilde{\mathbf{S}}' \cdot \mathbf{1}_{N_f}$ 。最后选取中最大的 K 个元素的索引。通过这些索引可以得到对应的配对。上述配对算法总结于算法 5 中。完整的解耦算法总结于算法 6 中。

算法5 匹配算法 MFPairing

-
- 1: 输入: $\{\hat{\omega}_{1i}\}_{i=1}^K, \{\hat{\omega}_{2i}\}_{i=1}^K, \{\mathbf{Y}^f\}_{f=1}^{N_f}, N_1, N_2, N_f, \epsilon$
 - 2: 输出: $\{\theta_i, \phi_i\}_{i=1}^K$
 - 3: 求解(3-46)并获得 $\tilde{\mathbf{S}}$
 - 4: $N_{\text{ml}} = \sqrt{\text{diag}(\tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{S}})}$
 - 5: $\tilde{\mathbf{S}}' \leftarrow \tilde{\mathbf{S}} / N_{\text{ml}}$
 - 6: $\tilde{s} \leftarrow \tilde{\mathbf{S}}' \cdot \mathbf{1}_{N_f}$
 - 7: 找到 \tilde{s} 中最大的 K 个元素, 其指标记为 idx
 - 8: 根据 idx 配对空间角频率 $\{\omega_{1i}, \omega_{2i}\}_{i=1}^K$
 - 9: $\theta = \arcsin \left(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cdot \frac{c}{f_0 d} \right)$
 - 10: $\phi = \arctan \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)$
-

算法6 基于2个一维 MMV-MF ANM 的解耦算法

-
- 1: 输入: $\{\mathbf{Y}^f\}_{f=1}^{N_f}, N_1, N_2, N_f, \epsilon$
 - 2: 输出: $\{\theta_i, \phi_i\}_{i=1}^K$
 - 3: 根据(3-43)将 $\{\mathbf{Y}^f\}_{f=1}^{N_f}$ 重拍为 \mathbf{Y}_1 和 \mathbf{Y}_2
 - 4: 基于一维 MMV-MF ANM 估计 $\{\hat{\omega}_{1i}\}_{i=1}^K$ 和 $\{\hat{\omega}_{2i}\}_{i=1}^K$
 - 5: $\{\theta_i, \phi_i\}_{i=1}^K \leftarrow \text{Pairing}(\{\hat{\omega}_{1i}\}_{i=1}^K, \{\hat{\omega}_{2i}\}_{i=1}^K)$
-

尽管上述解耦相对简单直接, 但第3.4节中的仿真实验证明此种解耦算法的精度并不令人满意。造成这种现象的一个主要原因是 ω_1 和 ω_2 间的相互关系在将二维信号视为两个一维信号时完全丢失了。为了利用这一相互关系, 本章提出如下解耦算法。

令 $\mathbf{X} = [\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \dots, \mathbf{X}^{N_f}]$ 。基于(3-25), $\bar{\mathbf{X}}^f \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_2 \times \tilde{N}_1}$ 定义为

$$\bar{\mathbf{X}}^f = \sum_{i=1}^r (c_i p_{\omega_i}^f) \cdot \mathbf{z}_2(\omega_2) \mathbf{z}_1(\omega_1)^T = \sum_{i=1}^r (c_i p_{\omega_i}^f) \cdot \mathbf{z}_2(\omega_2) \mathbf{z}_1(-\omega_1)^H. \quad (3-47)$$

容易构造对应的映射算子 \mathcal{R}_d^f 使得

$$\mathbf{X}^f = \mathcal{R}_d^f(\bar{\mathbf{X}}^f), \quad \mathcal{R}_d^f : \mathbb{C}^{\tilde{N}_2 \times \tilde{N}_1} \rightarrow \mathbb{C}^{N_2 \times N_1}, \quad (3-48)$$

其中

$$[\mathcal{R}_d^f(\bar{\mathbf{X}}^f)]_{i,j} = \bar{\mathbf{X}}_{(i-1)f+1, (j-1)f+1}^f. \quad (3-49)$$

令 $\bar{\mathbf{X}} = [\bar{\mathbf{X}}^1, \dots, \bar{\mathbf{X}}^{N_f}]$, 可以构造对应的映射算子 $\mathcal{R}_d : \mathbb{C}^{\tilde{N}_2 \times \tilde{N}_1 N_f} \rightarrow \mathbb{C}^{N_2 \times N_1 N_f}$ 如下

$$[\mathcal{R}_d(\bar{\mathbf{X}})]_{:, N_1(f-1)+1:N_1 f} = \mathcal{R}_d^f(\bar{\mathbf{X}}_{:, \tilde{N}_1(f-1)+1:\tilde{N}_1 f}). \quad (3-50)$$

由此可得

$$\mathbf{X} = \mathcal{R}_d(\bar{\mathbf{X}}). \quad (3-51)$$

在无噪声的情况下，本章提出的解耦算法 2DMFDANM 如下定理所示：

定理 3.1. 若正确的空间角频率 $\{\omega_{2i}\}_{i=1}^{K_2}$ 可以通过文献 [107] 中的一维 MMV-MFANM 算法从 \mathbf{Y}_2 中估计，则 $\|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}}$ 可以通过求解以下优化问题计算：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{T}_2, \tilde{\mathbf{T}}_1, \bar{\mathbf{X}}} \quad & \frac{1}{2\sqrt{\tilde{N}_1 \tilde{N}_2}} [\text{Tr}(\mathbf{T}_2) + \text{Tr}(\tilde{\mathbf{T}}_1)] \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 & \bar{\mathbf{X}} \\ \bar{\mathbf{X}}^H & \tilde{\mathbf{T}}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \mathbf{Y} = \mathcal{R}_d(\bar{\mathbf{X}}), \end{aligned} \quad (3-52)$$

其中 $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}^1, \dots, \mathbf{Y}^{N_f}]$, \mathbf{T}_2 为 $\tilde{N}_2 \times \tilde{N}_2$ 的 Toeplitz 矩阵, $\tilde{\mathbf{T}}_1$ 为 $N_f \times N_f$ 的分块矩阵, 其中每一块都是 $\tilde{N}_1 \times \tilde{N}_1$ 的 Toeplitz 矩阵。

定理 3.1 的证明附于附录二中。

空间角频率 ω_1 和 ω_2 可以分别从 $\tilde{\mathbf{T}}_1$ 和 \mathbf{T}_2 中提取。具体的, \mathbf{T}_2 和 $\tilde{\mathbf{T}}_1$ 的秩分别为 K_2 和 K_1 。 \mathbf{T}_2 的 Vandermonde 分解对应了空间角频率 $\{\omega_{2i}\}_{i=1}^{K_2}$, 同时 $\tilde{\mathbf{T}}_1$ 满足如下结构:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}_1 &= \sum_{i=1}^{K_1} c_i \cdot (\mathbf{p}_{\omega_i} \otimes \mathbf{z}_1(-\omega_{1i})) (\mathbf{p}_{\omega_i} \otimes \mathbf{z}_1(-\omega_{1i}))^H \\ &= \sum_{i=1}^{K_1} c_i \cdot (\mathbf{p}_{\omega_i} \mathbf{p}_{\omega_i}^H) \otimes (\mathbf{z}_1(-\omega_{1i}) \mathbf{z}_1(-\omega_{1i})^H). \end{aligned} \quad (3-53)$$

定义 $\mathbf{S}(\mathbf{T}_1)$ 为

$$\mathbf{S}(\mathbf{T}_1) = \sum_{i=1}^{K_1} c_i \cdot (\mathbf{z}_1(-\omega_{1i}) \mathbf{z}_1(-\omega_{1i})^H) \otimes (\mathbf{p}_{\omega_i} \mathbf{p}_{\omega_i}^H), \quad (3-54)$$

有

$$\mathbf{S}(\mathbf{T}_1) = \mathbf{P}^{\tilde{N}_1 N_f} \tilde{\mathbf{T}}_1 \mathbf{P}^{N_f \tilde{N}_1}, \quad (3-55)$$

其中 $\mathbf{P}^{mn} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)^T$ 。注意到 $\mathbf{S}(\mathbf{T}_1)$ 为秩为 K_1 的 $\tilde{N}_1 \times \tilde{N}_1$ 的 PSD 分块 Toeplitz 矩阵, 由文献 [103] 中的引理 2 可以保证能被分解为(3-54)的形式, 由此得到对应的空间角频率 $\{\omega_{1i}\}_{i=1}^{K_1}$ 。

值得注意的是定理 3.1 中的前提条件仅仅是为了方便后续证明而提出, 数值仿真证明(附 2-1)即使在前提条件不满足的情况下也能准确恢复空间角频率。

当噪声存在时, (附 2-1)可以改进为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{T}_2, \tilde{\mathbf{T}}_1, \bar{\mathbf{X}}} \quad & \frac{1}{2\sqrt{\tilde{N}_1 \tilde{N}_2}} [\text{Tr}(\mathbf{T}_2) + \text{Tr}(\tilde{\mathbf{T}}_1)] \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 & \bar{\mathbf{X}} \\ \bar{\mathbf{X}}^H & \tilde{\mathbf{T}}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \|\mathbf{Y} - \mathcal{R}_d(\bar{\mathbf{X}})\|_2 \leq \epsilon. \end{aligned} \quad (3-56)$$

完整的解耦算法 2DMFDANM 总结于算法 7 中。(附 2-1)和(3-56)中的 PSD 矩阵的规模为 $(N_f(N_2 - 1) + 1 + N_f^2(N_1 - 1) + N_f) \times (N_f(N_2 - 1) + 1 + N_f^2(N_1 - 1) + N_f)$ 并且包含 $O((N_f N_2 + N_f^2 N_1)^2)$ 个元素。相比之下(3-41)和(3-42)中的 PSD 矩阵有 $O((N_1 N_2 N_f^2)^2)$ 个元素, 由此可见解耦算法相比原算法运算更高效。

值得注意的是(附 2-8)中的辅助问题本身也可被视为一种解耦算法, 其规模小于(附 2-1)中的算法。然而, 当定理 3.1 中的假设不满足时, (附 2-8)可能会失效, 而(附 2-1)中的算法由于 $\tilde{p} \geq \hat{p}$ 仍有机会能正确估计空间角频率。

算法 7 解耦算法 2DMFDANM

```

1: 输入:  $\{\mathbf{Y}^f\}_{f=1}^{N_f}, N_1, N_2, N_f, \epsilon$ 
2: 输出:  $\{\theta_i, \phi_i\}_{i=1}^K$ 
3:  $\mathbf{Y} \leftarrow [\mathbf{Y}^1, \dots, \mathbf{Y}^f]$ 
4: for  $k = 1, 2$  do
5:    $\tilde{N}_k = N_f(N_k - 1) + 1$ 
6: end for
7: 根据(3-50)构造映射算子  $\mathbf{R}_d$ 
8: if 无噪声 then
9:   求解(附 2-1)
10: else
11:   求解(3-56)
12: end if
13:  $\{\omega_{2i}\}_{i=1}^K \leftarrow \mathbf{T}_2$  的 Vandermonde 分解
14:  $\mathbf{S}(\mathbf{T}_1) = \mathbf{P}^{\tilde{N}_1 N_f} \widetilde{\mathbf{T}}_1 \mathbf{P}^{N_f \tilde{N}_1}$ 
15:  $\{\omega_{1i}\}_{i=1}^K \leftarrow$  decompose  $\mathbf{S}(\mathbf{T}_1)$  as in (3-54)
16:  $\{\theta_i, \phi_i\}_{i=1}^K \leftarrow$  Pairing( $\{\widehat{\omega}_{1i}\}_{i=1}^K, \{\widehat{\omega}_{2i}\}_{i=1}^K$ )

```

3.3.3 降规模算法 - 2DMFANM_SizeRedu

如3.3.1节所述, 在(3-35)中, 算法的庞大規模主要归咎于矩阵 \mathbf{H} 的稀疏性。因此可以通过调整此矩阵来降低规模。注意到映射算子 \mathcal{R} 的引入仅是为了将 $\Psi(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\omega}) \triangleq [q_1^H \tilde{\mathbf{a}}(1, \boldsymbol{\omega}), q_2^H \tilde{\mathbf{a}}(2, \boldsymbol{\omega}), \dots, q_{N_f}^H \tilde{\mathbf{a}}(N_f, \boldsymbol{\omega})]^T$ 写成 $\Psi(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{H}^H \mathbf{z}$ 的形式以导出二次型。这一目的可以通过更小的映射算子实现。

令 $\mathcal{U}_r = \{[m_1, m_2] \cdot f : m_k \in 0, 1, \dots, N_k - 1, k = 1, 2, f \in 1, \dots, N_f\}$ 。令

$$\mathbf{z}_r(\boldsymbol{\omega}) = \text{vec}(\mathbf{A}_{\mathcal{U}_{r2}}(\omega_2) \mathbf{A}_{\mathcal{U}_{r1}}(\omega_1)^T), \quad (3-57)$$

其中 $\mathbf{A}_{\mathcal{U}_{rk}}(\omega_k) = [\mathbf{A}_k(\omega_k)]_{\mathcal{U}_{rk}}, k = 1, 2$ 。令 $\mathbf{P}_k \in \mathbb{C}^{|\mathcal{U}_{rk}| \times \tilde{N}_k}, k = 1, 2$, 其中

$$[\mathbf{P}_k]_{i,j} = \begin{cases} 1, & j = \mathcal{U}_{rk}(i) + 1 \\ 0, & \text{其它。} \end{cases} \quad (3-58)$$

因此有

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_r(\boldsymbol{\omega}) &= \mathbf{A}_{\mathcal{V}_{r1}}(\omega_1) \otimes \mathbf{A}_{\mathcal{V}_{r2}}(\omega_2) \\ &= (\mathbf{P}_1 \mathbf{z}_1(\omega_1)) \otimes (\mathbf{P}_2 \mathbf{z}_2(\omega_2)) \\ &= (\mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2) \mathbf{z}.\end{aligned}\quad (3-59)$$

基于 (3-59), 可以定义新的映射算子 \mathcal{R}_r 。令 $\mathbf{H}_r = \mathcal{R}_r^*(\mathbf{Q})$, 有

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\omega}) &\triangleq [\mathbf{q}_1^H \tilde{\mathbf{a}}(1, \boldsymbol{\omega}), \mathbf{q}_2^H \tilde{\mathbf{a}}(2, \boldsymbol{\omega}), \dots, \mathbf{q}_{N_f}^H \tilde{\mathbf{a}}(N_f, \boldsymbol{\omega})]^T \\ &= \mathbf{H}_r^H \mathbf{z}_r(\boldsymbol{\omega}).\end{aligned}\quad (3-60)$$

同时可得

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_r(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{z}_r(\boldsymbol{\omega})^H &= (\mathbf{P}_1 \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_1^H \mathbf{P}_1^H) \otimes (\mathbf{P}_2 \mathbf{z}_2 \mathbf{z}_2^H \mathbf{P}_2^H) \\ &= \left(\mathbf{P}_1 \left(\sum_{k_1=-\tilde{N}_1}^{\tilde{N}_1} \Theta_{k_1} t_1^{-k_1} \right) \mathbf{P}_1^H \right) \otimes \left(\mathbf{P}_2 \left(\sum_{k_2=-\tilde{N}_2}^{\tilde{N}_2} \Theta_{k_2} t_2^{-k_2} \right) \mathbf{P}_2^H \right) \\ &= \sum_{k=-\tilde{N}}^{\tilde{N}} t^{-k} \Theta_k^r,\end{aligned}\quad (3-61)$$

其中 $t_1 = \exp(j\omega_1), t_2 = \exp(j\omega_2), \Theta_k = \Theta_{k_1} \otimes \Theta_{k_2}, t^{-k} = t_1^{-k_1} t_2^{-k_2}$ 。由此可得 $\mathbf{z}_r^H \mathbf{P}_r \mathbf{z}_r = \text{Tr}(\mathbf{P}_r \mathbf{z}_r \mathbf{z}_r^H) = \sum_{k=-\tilde{N}}^{\tilde{N}} t^{-k} \text{Tr}(\Theta_k^r \mathbf{P}_r)$ 。因此有

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}}^* \leq 1 \Leftarrow \text{Tr}(\Theta_k^r \mathbf{P}_r) = \delta_k, k \in \mathcal{H}, \begin{bmatrix} \mathbf{P}_r & \mathbf{H}_r \\ \mathbf{H}_r^H & \mathbf{I}_{N_f} \end{bmatrix} \geq 0, \mathcal{R}_r(\mathbf{H}_r) = \mathbf{Q}. \quad (3-62)$$

从(3-62)可以看出, \mathbf{P}_r 和 \mathbf{H}_r 的维数显著小于 \mathbf{P}_0 和 \mathbf{H} 。这极大的降低了问题的规模。但是, 需要注意到(3-62)的右侧比 $\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}}^* \leq 1$ 更严格, 这将影响算法的性能。为了得到和 (3-41)相似的形式, 需要得到 $\begin{bmatrix} \mathbf{P}_r & \mathbf{H}_r \\ \mathbf{H}_r^H & \mathbf{I}_{N_f} \end{bmatrix}$ 的对偶矩阵。相比于(3-41), 主要的区别在于 \mathbf{P}_r 的对偶。与之相关的 Lagrange 对偶为

$$\begin{aligned}\sum_{k_1=0}^{\tilde{N}_1} \sum_{k_2=-\tilde{N}_2}^{\tilde{N}_2} \nu_k \text{Tr}(\Theta_k^r \mathbf{P}_r) &= \sum_{k_1=0}^{\tilde{N}_1} \sum_{k_2=-\tilde{N}_2}^{\tilde{N}_2} \nu_k \text{Tr}(\Theta_k \mathbf{P}_{U'}^H \mathbf{P}_r \mathbf{P}_U) \\ &= \langle \text{Toep}_{2D}(\boldsymbol{\nu}), \mathbf{P}_{U'}^H \mathbf{P}_r \mathbf{P}_U \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{P}_r, \mathbf{T}(\boldsymbol{\nu}) \rangle_{\mathbb{R}},\end{aligned}\quad (3-63)$$

其中 $\mathbf{P}_U = \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2$ 。因此, 相应的原问题可以写为

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{W}, \boldsymbol{\mu}, \tilde{\mathbf{X}}^\bullet} \quad & \frac{1}{2} [\text{Tr}(\mathbf{W}) + \text{Tr}(\mathbf{T}(\boldsymbol{\mu}))] \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\boldsymbol{\mu}) & \tilde{\mathbf{X}}^\bullet \\ \tilde{\mathbf{X}}^{\bullet H} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq 0, \tilde{\mathbf{Y}} = \mathcal{R}_r(\tilde{\mathbf{X}}^\bullet), \mathbf{T}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{P}_U \text{Toep}_{2D}(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{P}_U^H,\end{aligned}\quad (3-64)$$

其中 $\text{Toep}_{2D}(\boldsymbol{\mu})$ 为二阶 Toeplitz 矩阵, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_1 \times \tilde{N}_2}$ 。当噪声存在时, 上述优化问题修改如下

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{W}, \boldsymbol{\mu}, \tilde{\mathbf{X}}^\bullet} \quad & \frac{1}{2} [\text{Tr}(\mathbf{W}) + \text{Tr}(\mathbf{T}(\boldsymbol{\mu}))] \quad s.t. \\ \left[\begin{array}{cc} \mathbf{T}(\boldsymbol{\mu}) & \tilde{\mathbf{X}}^\bullet \\ \tilde{\mathbf{X}}^{\bullet H} & \mathbf{W} \end{array} \right] \geqslant 0, \quad & \|\tilde{\mathbf{Y}} - \mathcal{R}_r(\tilde{\mathbf{X}}^\bullet)\| \leq \epsilon, \quad \mathbf{T}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{P}_U \text{Toep}_{2D}(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{P}_U^H. \end{aligned} \quad (3-65)$$

完整的算法总结于算法 8 中。

上述算法中的 \mathbf{P}_U 存在有降低算法规模的效果。这种降规模的方法也可用于前述的解耦算法中。根据(附 2-1), 关键在于移除 $\mathcal{R}_d^*(\mathbf{X})$ 中的全 0 行或全 0 列。移除全 0 列的情况已在附录二中的(附 2-8)中有过讨论。对移除全 0 行的情况, 可以将矩阵 \mathbf{T}_2 改进为 $\mathbf{T}_{2\text{new}} = \mathbf{P}_2 \mathbf{T}_2 \mathbf{P}_2^H$, 同时根据此修改相应的映射算子。

算法 8 降规模算法 2DMFANM_SizeRedu

```

1: 输入:  $\{\mathbf{Y}^f\}_{f=1}^{N_f}, N_1, N_2, N_f, \epsilon$ 
2: 输出:  $\{[\theta_i, \phi_i]\}_{i=1}^K$ 
3:  $\tilde{\mathbf{Y}} \leftarrow [\text{vec}(\mathbf{Y}^1), \dots, \text{vec}(\mathbf{Y}^f)]$ 
4: for  $k = 1$  to  $2$  do
5:    $\tilde{N}_k = N_f(N_k - 1) + 1$ 
6: end for
7: 构造映射算子  $R_r$ 
8: 根据(3-58)计算  $\mathbf{P}_1$  和  $\mathbf{P}_2$ 
9:  $\mathbf{P}_U \leftarrow \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2$ 
10: if 无噪声 then
11:   求解 (3-64)
12: else
13:   求解 (3-65)
14: end if
15:  $\{[\omega_{1i}, \omega_{2i}]\}_{i=1}^K \leftarrow \text{MaPP}(\text{Toep}_{2D}(\boldsymbol{\mu}))$ 
16:  $\theta = \arcsin \left( \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cdot \frac{c}{f_0 d} \right)$ 
17:  $\phi = \arctan \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)$ 

```

3.4 仿真结果

为了验证所提算法的有效性, 本节开展了一系列数值仿真实验。

3.4.1 2DMFANM 算法仿真

考虑三个宽带远场平面波照射在 5×5 的均匀矩形阵上的情况。声源的方位角和俯仰角分别设置为 $(-60^\circ, -45^\circ, -30^\circ)$ 和 $(30^\circ, 40^\circ, 45^\circ)$ 。设置波速为 $v =$

1500 m/s。当舰船航速不超过 40 kn 时，其辐射噪声的峰值频率在 100 Hz 到 800 Hz 间均匀变化^[6]。基于螺旋桨空泡噪声模型^[116]，舰船辐射噪声的仿真通常集中于 0 到 500 Hz 频段内^[5]。基于这一特点，设置多频率信号模型中的基频为 $f_0 = 100$ Hz。阵元间距设置为最大波长的一半，即 $d = \lambda/2$ 。假设(3-2)定义的信号是独立的，并且服从复高斯分布 $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{N_f})$ 。将噪声建模为高斯白噪声。仿真中优化问题的求解使用 CVX^[93] 实现。仿真均基于 MATLAB R2022b 进行，仿真设备具有两个 Intel(R) Xeon(R) Gold 6455B @ 3.00GHz。以下结果通过 100 次蒙特卡洛实验得出。

由于目前针对类似本文所考虑的小样本场景的宽带二维 DOA 估计方法的研究较少，为了展示所提方法的优越性，本文通过将现有的方法推广到宽带二维场景以与所提出的方法进行比较。所提出的方法与 ISSM^[42] 算法和基于 SBL 的算法^[71] 进行了比较。具体来说，为了在小样本场景中使用 ISSM 方法，本文采用 ANM 方法来估计不同子带对应的协方差矩阵，随后应用 ISSM 方法从这些协方差矩阵中估计期望的角度。该算法称为 ANM-ISSM。

在 2DMFANM 算法中，设置 $N_f = 5$ 。当没有噪声时，估计结果如图 3-2 所示。图 3-2a，图 3-2b 以及图 3-2c 对比了 2DMFANM 和 SBL 方法及 ANM-ISSM 方法对空间角频率的估计性能，而图 3-2d，图 3-2e 和图 3-2f 则对比了这些算法对俯仰角和方位角的估计性能。从图 3-2 可以看出，通过利用多频率的信息，本文所提算法 2DMFANM 和基于 SBL 的算法的估计的结果均集中在真值附近，而 ANM-ISSM 的估计结果则由于混叠而相对分散。此外，2DMFANM 算法相比基于 SBL 的算法估计结果更集中，这展现了所提算法的优越性。

3.4.2 解耦和降规模算法仿真

本小节将通过仿真展现所提快速算法的有效性。在给出所提快速算法的仿真结果之前，此处首先验证使用文献 [107] 中的一维 MMV-MF ANM 算法分别对两个维度进行估计的算法，即算法 6，不适用于本章所研究的二维情况。图 3-3 展示了当 N_f 设置为 5 时，算法 6 在无噪声情况下的估计结果。结果表明，该算法无法准确估计真实值，因此不能被视为有效的解耦方法。

表 3-1 成功估计次数 (总次数: 100)

Table 3-1 Number of Successful Trials (Total Trials: 100)

| 算法 | N_f | | | | |
|----------------------------|-------|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2DMFANM | 71 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 2DMFDANM | 68 | 72 | 92 | 96 | 97 |
| 2DMFANM_SizeRedu | 64 | 98 | 100 | 100 | 100 |
| 2DMFDANM_SizeRedu12 | 60 | 86 | 86 | 94 | 95 |
| 2DMFDANM_SizeRedu11 | 44 | 58 | 58 | 49 | 49 |
| 2DMFDANM_SizeRedu2 | 40 | 57 | 57 | 46 | 38 |

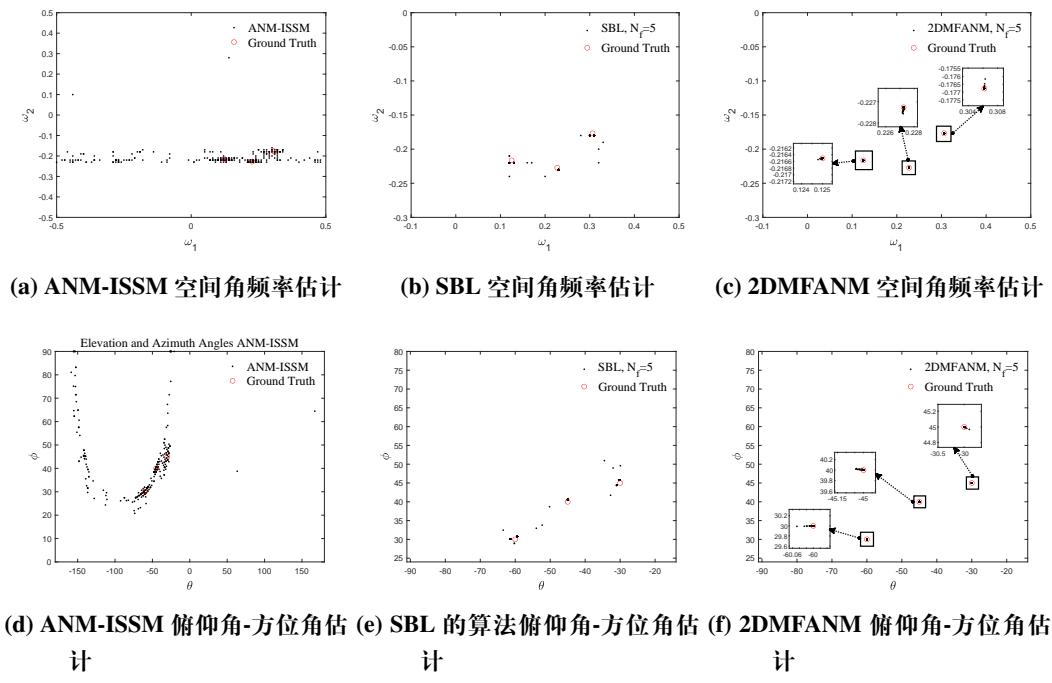


图 3-2 无噪声情况下空间角频率和俯仰角-方位角估计结果

Figure 3-2 Estimations of spatial angular frequencies and elevation and azimuth angles under the noiseless condition

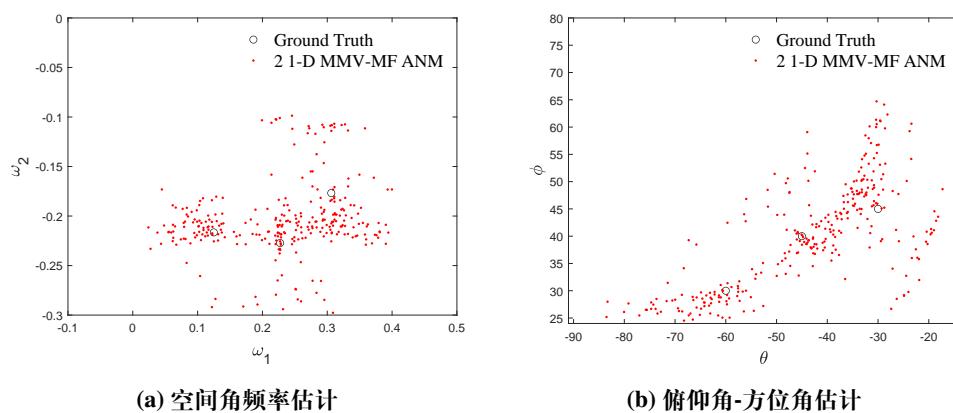


图 3-3 算法 6 估计结果

Figure 3-3 Estimation results of Algorithm 6

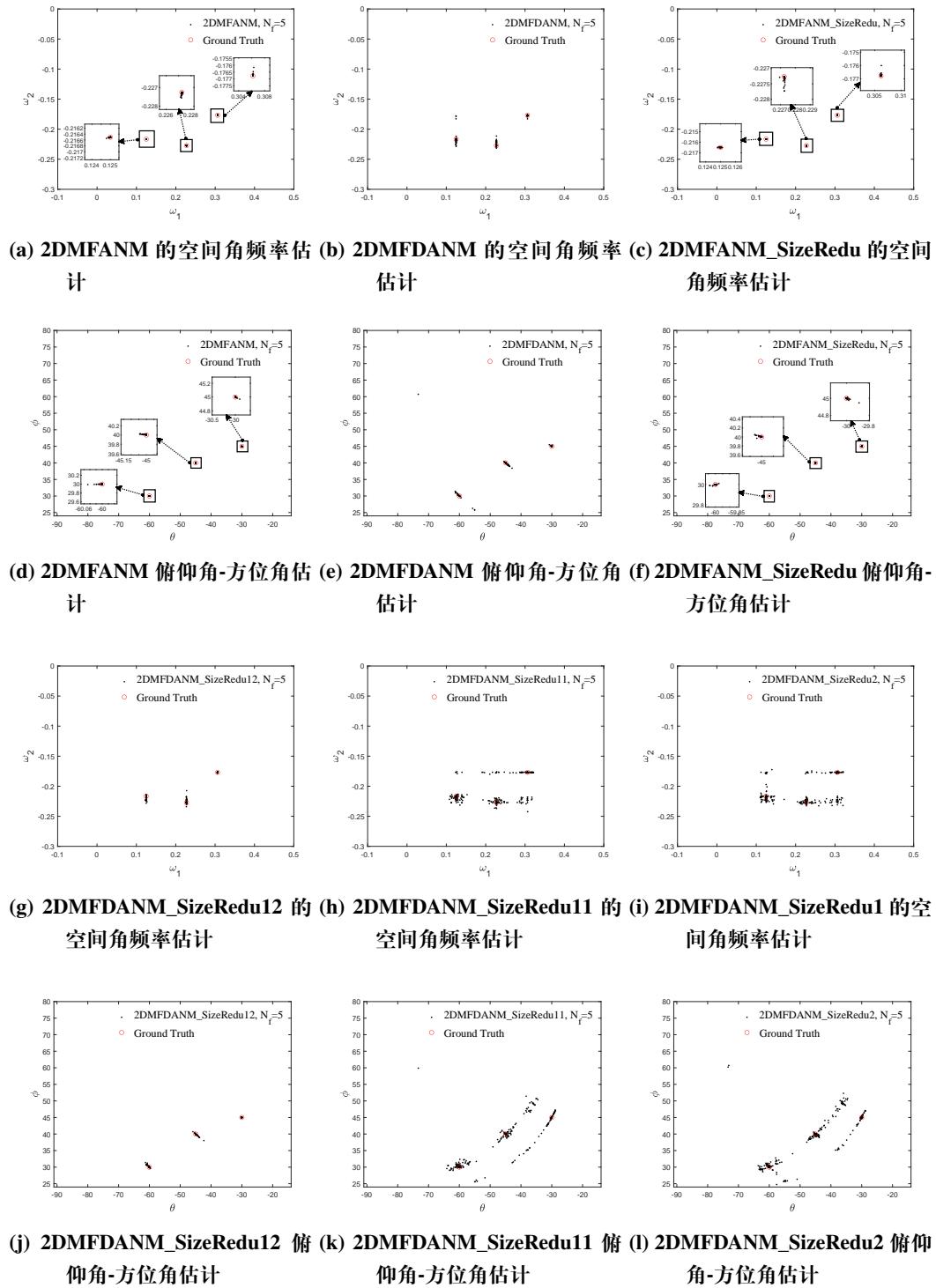


图 3-4 快速算法估计结果

Figure 3-4 Estimation results of fast algorithms

表 3-2 运行时间 /s

Table 3-2 Running Time /s

| 算法 | N_f | | | | |
|----------------------------|--------|--------|---------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2DMFANM | 0.4608 | 2.4002 | 13.3764 | 150.2877 | 863.6651 |
| 2DMFDANM | 0.7958 | 0.9415 | 6.0580 | 8.3916 | 31.8204 |
| 2DMFANM_SizeRedu | 0.4330 | 0.8744 | 2.7444 | 9.0755 | 71.1213 |
| 2DMFDANM_SizeRedu12 | 0.6627 | 0.8482 | 1.3451 | 4.8456 | 21.6289 |
| 2DMFDANM_SizeRedu11 | 0.6673 | 0.7560 | 0.8253 | 1.0317 | 1.3889 |
| 2DMFDANM_SizeRedu2 | 0.6618 | 0.7331 | 0.7553 | 0.8845 | 1.0855 |

表 3-3 俯仰角-方位角估计的 RMSE

Table 3-3 RMSE of Elevation and Azimuth Angles

| 算法 | N_f | | | | |
|----------------------------|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2DMFANM | 0.0431 | 3.4171×10^{-8} | 1.9641×10^{-8} | 1.18×10^{-8} | 2.2345×10^{-9} |
| 2DMFDANM | 6.1195 | 2.8204 | 5.2857 | 3.5938 | 2.9025 |
| 2DMFANM_SizeRedu | 0.4861 | 0.7944 | 1.0884×10^{-8} | 3.0678×10^{-9} | 1.0003×10^{-9} |
| 2DMFDANM_SizeRedu12 | 3.4289 | 5.1461 | 4.2065 | 6.7603 | 2.8091 |
| 2DMFDANM_SizeRedu11 | 1.7158 | 4.1229 | 3.9118 | 4.5334 | 2.6232 |
| 2DMFDANM_SizeRedu2 | 2.4921 | 6.1523 | 4.3622 | 4.4866 | 4.6134 |

表 3-4 空间角频率估计的 RMSE

Table 3-4 RMSE of Spatial Angular Frequency

| 算法 | N_f | | | | |
|----------------------------|--------|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2DMFANM | 0.0277 | 0.0076 | 8.1759×10^{-4} | 1.7506×10^{-4} | 6.2904×10^{-5} |
| 2DMFDANM | 0.0322 | 0.0158 | 0.0044 | 0.0029 | 0.0025 |
| 2DMFANM_SizeRedu | 0.0232 | 0.0112 | 0.0024 | 2.1556×10^{-4} | 8.1636×10^{-5} |
| 2DMFDANM_SizeRedu12 | 0.0298 | 0.0050 | 0.0050 | 0.0056 | 0.0054 |
| 2DMFDANM_SizeRedu11 | 0.0323 | 0.0248 | 0.0248 | 0.0239 | 0.0270 |
| 2DMFDANM_SizeRedu2 | 0.0352 | 0.0279 | 0.0279 | 0.0258 | 0.0227 |

如第3.3.3节最后一段中所述，降规模方法也可以应用于解耦算法。通过去除全零的列和行，式(附 2-1)中的 $\tilde{\mathbf{T}}_1$ 和 \mathbf{T}_2 的大小得到了显著缩小。为了避免混淆，本文将降低 $\tilde{\mathbf{T}}_1$ 和 \mathbf{T}_2 大小的算法分别称为 2DMFDANM_SizeRedu11 和 2DMFDANM_SizeRedu12。当 $\tilde{\mathbf{T}}_1$ 和 \mathbf{T}_2 的大小都被缩小时，该算法称为 2DMFDANM_SizeRedu2。需要注意的是，由于 \mathbf{T}_2 中包含的信息与 $\tilde{\mathbf{T}}_1$ 中包含的信息不同，算法 2DMFDANM_SizeRedu11 和 2DMFDANM_SizeRedu1 不能被视为是对称的。具体的， \mathbf{T}_2 仅包含了 DOA 数据，而 $\tilde{\mathbf{T}}_1$ 中还耦合了频率信息。

图 3-4展示了在无噪声的情况下，当 N_f 设置为 5 时原始算法和快速算法的估计结果。可以看出，降规模算法 2DMFDANM_SizeRedu 的估计精度与原始算法相当，而解耦算法则会产生伪峰。在降规模的解耦算法 2DMFDANM_SizeRedu11 和 2DMFDANM_SizeRedu2 中，这种性能下降更为显著。

表 3-2展示了当 N_f 设置为 1 到 5 时快速算法的运行时间。可以看出，原始算法的运行时间随着 N_f 的增加而显著增加，这显示了研究快速算法的必要性。解耦算法和降规模算法都具有降低运算时间的能力，其中解耦算法的加速效果更明显。与其它降规模相比，仅降低 \mathbf{T}_2 大小的 2DMFDANM_SizeRedu12 仅在速度上略有提升。然而，如图 3-4所示，尽管另外两种算法实现了更快的速度，但它们的估计精度过低，因此无法在实际场景中使用。

为了进一步分析快速算法的估计精度，定义空间角频率估计结果的根方误差 (root square error, RSE) 来判定一次估计是否成功。第 n 次仿真中第 k 个目标的 RSE 定义为

$$\text{RSE}_{\omega_k,n} = \sqrt{((\omega_{1k} - \hat{\omega}_{1k,n})^2 + (\omega_{2k} - \hat{\omega}_{2k,n})^2)}, \quad (3-66)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_k = [\omega_{1k}, \omega_{2k}]^T$ 是第 k 个目标的真实空间角频率， $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k,n} = [\hat{\omega}_{1k,n}, \hat{\omega}_{2k,n}]^T$ 是第 n 次仿真中对第 k 个目标的空间角频率的估计。从图 3-4b、图 3-4e、图 3-4g 和图 3-4j 可以看出，尽管存在一些孤立的伪峰，但绝大多数估计值都紧密地聚集在真实值附近。为了充分体现这一特性，在后续计算时通过计算 RSE 将伪峰排除。这里，当所有目标的估计的 RSE 均小于 0.05 时，认为此次估计成功。可以将 RSE 理解为估计值和真实值之间的欧氏距离。本文中对成功估计的定义与文献 [113] 中类似。在文献 [113] 中，当真实 DOA 落在估计单元内时，判定为估计成功。基于本文中对成功估计的定义，文献 [113] 中的估计单元可以被理解为真实值周围的一个圆域。

本文中使用根均方误差 (root mean square error, RMSE) 来评估估计的准确性。空间角频率和俯仰角-方位角的 RMSE 分别定义为

$$\text{RMSE}_{\boldsymbol{\omega}} = \left(\frac{1}{KN} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K ((\omega_{1k} - \hat{\omega}_{1k,n})^2 + (\omega_{2k} - \hat{\omega}_{2k,n})^2) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3-67)$$

和

$$\text{RMSE}_{\theta,\phi} = \left(\frac{1}{KN} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left((\theta_k - \hat{\theta}_{k,n})^2 + (\phi_k - \hat{\phi}_{k,n})^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3-68)$$

其中 N 为仿真次数, θ_k 和 ϕ_k 分别为第 k 个目标的真实俯仰角和方位角, $\hat{\theta}_{k,n}$ 和 $\hat{\phi}_{k,n}$ 分别为第 n 次仿真中对第 k 个目标的俯仰角和方位角的估计。

将仿真中成功估计的次数总结在表 3-1 中, 空间角频率、方位角和俯仰角的 RMSE 分别列在表 3-3 和表 3-4 中。从表 3-1 可以看出, 随着 N_f 的增加, 2DMF-DANM、2DMFDANM_SizeRedu 和 2DMFDANM_SizeRedu12 的成功率显著提高, 而其他降规模的解耦算法的性能则在 N_f 增加时没有显著改善。这些降规模的解耦算法 (2DMFDANM_SizeRedu11 和 2DMFDANM_SizeRedu2) 下降的性能表明, 尽管通过缩减 $\tilde{\mathbf{T}}_1$ 的尺寸可以显著地将解耦算法加速, 但由于破坏了 $\tilde{\mathbf{T}}_1$ 的结构, 导致估计精度显著下降。因此, 这两种算法无法被应用于要求高精度估计的实际场景中。

从表 3-4 和表 3-3 可以看出, 尽管原始算法 2DMFANM 的估计精度最高, 但其运算规模却随着 N_f 的增加而急剧上升。将规模算法 2DMFANM_SizeRedu 在大幅减少运行时间的同时, 达到了与 2DMFANM 相当的估计精度。然而, 当 N_f 较高时, 其运算负担仍然较重。解耦算法 2DMFDANM 具有最快的运行速度, 但其估计精度却有所下降。综上所述, 在计算资源充足的实际场景中, 2DMFANM_SizeRedu 比 2DMFDANM 更有优势, 因为此算法能够提供更精确的估计。相反, 在计算资源有限的场景中, 2DMFDANM 则可以在牺牲一定精度的情况下大幅提升运算速度。

3.4.3 噪声环境下算法参数估计性能仿真

本小节对上述算法在噪声环境下的参数估计性能进行仿真对比。仿真设置与第 3.4.1 节一致。本小节对所提 2DMFANM 算法, SBL 算法, ANM-ISSM 算法, 所提 2DMFDANM 算法和所提 2DMFANM_SizeRedu 的性能进行仿真验证。此处当一次估计的空间角频率的 RSE 不超过 0.2 时认为估计成功。在计算 RMSE 时, 仅考虑成功估计的轮次以使得结果更合理。将成功估计次数、空间角频率的 RMSE 和俯仰角-方位角的 RMSE 随信噪比 (signal-to-noise ratio, SNR) 从 -2 到 40 dB 变化的图分别绘制于图 3-5a、图 3-5b 和图 3-5c 中。

从图 3-5a 可以看出, 所有方法的成功次数都随 SNR 增加而增加。与 ANM-ISSM 相比, 所提算法 2DMFANM 在低信噪比下成功率更高, 表明通过运用多频的信息, 所提算法可以提升性能的同时抑制混叠。虽然所提快速算法显著降低了运算时间, 但也影响了它们在噪声环境下的鲁棒性。当信噪比低于 24 dB 时, 快速算法在提供正确估计结果方面存在局限性。然而, 当信噪比超过 30 dB 后, 所提快速算法的成功率显著高于 ANM-ISSM 算法, 达到了可接受的估计成功率。

从图 3-5b 和图 3-5c 可以看出, 随着信噪比的增大, 所有方法的性能都有提升, 但本文所提算法的提升最显著。

值得一提的是，图 3-5b 和图 3-5c 的结果并不完全匹配。从图 3-5b 中可以看出，所提 2DMFANM 算法在低信噪比时对空间角频率估计的性能并不显著优于 SBL 方法。而从图 3-5c 中可以看出，2DMFANM 算法在对俯仰角和方位角的估计性能上显著优于 SBL 方法。从图 3-5b 中可以看出，所提快速算法在空间角频率的估计性能上并不优于 SBL 算法，甚至当 SNR 高于 30 dB 时也是如此。然而，从图 3-5c 中可以看出，当信噪比足够高时，2DMFANM_SizeRedu 在估计俯仰角和方位角上显著优于 SBL 算法，同时 2DMFDANM 算法的性能与 SBL 算法接近。这主要是因为空间角频率 (f_1, f_2) 和俯仰角与方位角 (θ, ϕ) 的对应是非线性的。由于 SBL 方法是有网格的，因此估计结果均落在固定的网格上。而所提的无网格方法使得估计结果连续的聚集在真值附近，因此当空间角频率被转换为俯仰角和方位角时，所提算法会取得更好的估计效果。无网格的优势也可从高信噪比时的 RMSE 体现。当 SNR 超过 10 dB 时，所提 2DMFANM 算法显著优于 SBL 算法，特别是在无噪声的场景下。当噪声不存在时，所提 2DMFDANM 和 2DMFANM_SizeRedu 均优于 SBL 算法。

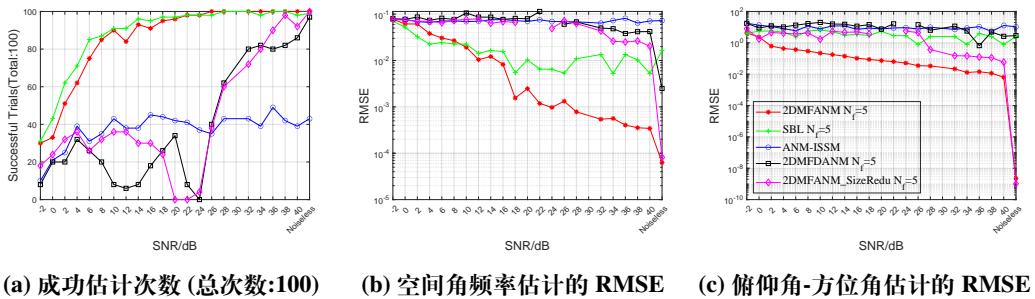


图 3-5 RMSE 和成功估计次数随信噪比的变化

Figure 3-5 RMSE and the number of successful trials versus SNR

3.4.4 目标俯仰角和方位角由于阵列移动而改变时的算法性能仿真

为了评估所提出算法在俯仰角和方位角随阵列移动而变化时的性能，本文选择了 100 组连续的目标角度数据以模拟阵列移动时目标角度的变化，并使用所提算法对其进行估计。目标的空间角频率以及俯仰角和方位角如图 3-6 所示。

由于 2DMFDANM_SizeRedu1 和 2DMFDANM_SizeRedu2 会导致伪峰，此处仅对其余算法进行测试。在无噪声情况下的估计结果如图 3-7 所示。从图 3-7 可以看出，当阵列移动时，本章提出的所有算法都能实现准确的估计。

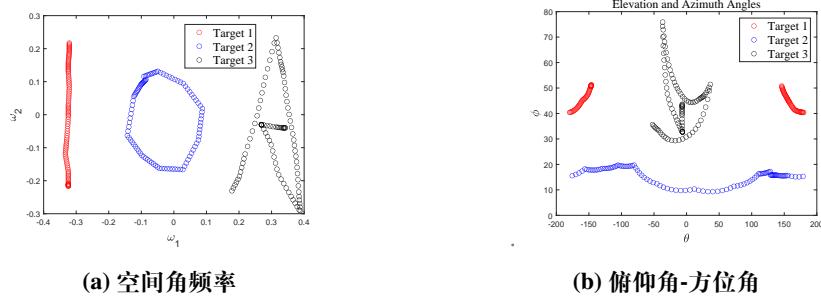


图 3-6 阵列移动时目标的俯仰角、方位角和空间角频率

Figure 3-6 Spatial angular frequencies and elevation and azimuth angles of targets when the array is moving

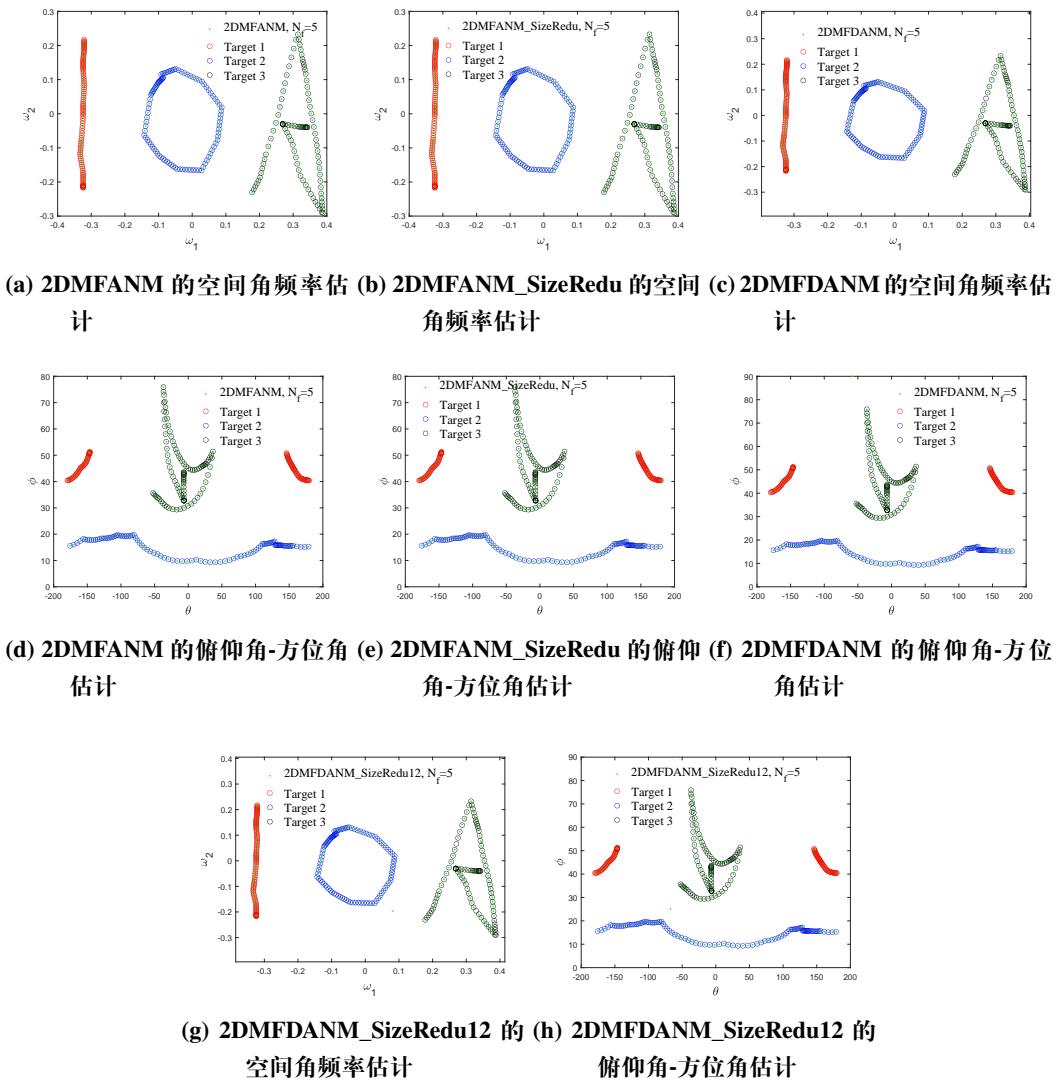


图 3-7 阵列移动时空间角频率和俯仰角-方位角的估计结果

Figure 3-7 Estimations of spatial angular frequencies and elevation and azimuth angles when the array is moving

3.5 本章小结

为了实现无网格的宽度信号俯仰角-方位角联合估计，本章提出了一种基于多频率模型和原子范数最小化方法的二维宽带信号参数估计算法 2DMFANM。该方法通过应用 ANM 方法解决了有网格算法中网格失配的问题，同时通过多频率模型使得宽带信号的信息得到充分利用。与基于 SBL 和 ISSM 的方法相比，数值仿真结果展现了所提算法的优越性。

由于初始的 2DMFANM 算法规模较大，本章进一步提出了两种快速算法。具体的，2DMFDANM 将二维空间频率信息解耦，而 2DMFANM_SizeRedu 则去除了冗余信息。理论和仿真分析证明了所提快速算法可以在稍微牺牲精度的代价下大幅降低算法规模。具体的，当频带数目较多时，所提 2DMFANM 算法估计结果的 RMSE 可达 6×10^{-5} ，但其所需运算时间却较长，约为 860 s；相比之下，降规模算法 2DMFANM_SizeRedu 和解耦算法 2DMFDANM 的运算时间则分别约为 30 s 和 70 s，相比原始算法大幅降低。但两种快速算法的精度却相较更低，其 RMSE 分别约为 0.0025 和 8×10^{-5} 。综上所述，当对参数估计的精度要求更高时，2DMFANM 算法更适合使用；但当阵列规模过大时，此时使用 2DMFDANM 算法和 2DMFANM_SizeRedu 算法则更合理。

最后，本章所提映射算子虽然为处理基于多频率模型的宽带信号提供了便利，但这同时增大了算法规模。当信号带宽满足窄带假设时，本章所提算法相比于窄带算法并无明显的精度优势，但算法规模却更大。因此，本章所提算法更适合在信号带宽较大的场景中使用。

第4章 基于ANM的宽带主动声呐角度-距离联合估计

4.1 前言

除了实现角度的估计外，对目标的速度和距离等参数进行估计也具有重要意义。为了实现宽带主动声呐的二维定位，本章对角度-距离联合估计问题展开研究。

声呐通过对目标主动发射信号并对回波信号的波达角度、多普勒频移和时延进行估计以获得角度、速度和距离等参数的信息^[117]。相比其它信号，线性调频(Linear Frequency Modulation)脉冲信号可以用解线频调的方法进行处理^[118]，这种方法运算更简单，从而可以简化设备，因此在声呐系统中应用广泛^[119-122]。通过对回波信号进行解线频调和去斜等处理，接收信号可被视为多个多维复正弦信号的线性叠加^[17]，其频率由目标回波的角度，目标的速度和距离决定。因此，对运动目标的参数估计问题可以被转换为和第3章研究问题类似的多维谱估计问题。

近年来，为了满足日益增长的高精度距离分辨率的需求，宽带信号的使用愈加普遍^[7]。和被动场景中类似，信号带宽的增加使得窄带假设不再满足，导致经典的窄带参数估计算法难以直接使用。另外，随着带宽的增大，高速目标在一个相干处理间隔(coherent processing interval, CPI)中运动的距离可能会超出距离单元，即距离徙动，使得快时间和慢时间的耦合项无法被忽视^[17]。

从数学模型的角度看，上述问题在信号模型中的体现与第3章中的情况类似，因此上一章中提出的2DMFANM等算法理论上说也可应用于本章所考虑的问题中。然而，第3章中提出的算法均是基于低频信号的模型设计的，而主动声呐信号通常为带通信号，这使得2DMFANM等算法在直接应用于本章所考虑的问题时会出现运算量过大等问题，导致算法无法部署，因而需要设计新的算法。

为了避免有网格算法带来的网格失配的问题，与第3章一样，本章仍主要基于原子范数最小化理论设计无网格参数估计方法。在本章所考虑问题中应用原子范数最小化方法的主要难点为：1) 基于宽带信号单脉冲角度-距离联合估计问题中的信号模型构造的原子集所对应的对偶原子范数约束不满足三角多项式不等式约束的形式，导致有界引理无法被直接应用；2) 在宽带信号多脉冲角度-距离联合估计问题中，由于距离徙动的影响，使得多脉冲的相干积累难以实现。针对第一个问题，本章通过提出一种全新的映射算子，将相应的对偶原子范数约束转化为了二元三角多项式不等式约束，并利用有界引理将对偶问题转化为了可规划求解的SDP问题，并通过Lagrange对偶分析得到了原问题的SDP形式；针对第二个问题，在传统的距离-速度联合估计理论中，由距离徙动带来的耦合项可以通过Keystone变换消除^[123]，然而，在本章所考虑问题中，由于存在速度模糊，导致直接使用Keystone变换会产生伪峰。在之前提出的映射算子的基础上，本章提出了一种新的变换策略，成功实现了多脉冲的相干积累。

本章内容组织如下：第4.2节通过对宽带LFM脉冲声呐的接收信号进行详细推导，得到了宽带接收信号的信号模型；基于得到的信号模型，第4.3节基于原子范数最小化方法推导了单脉冲情况下的无网格角度-距离联合估计算法；第4.4节介绍了能够消除距离徙动影响的变换策略，并推导了多脉冲情况下的距离-角度联合估计算法；第4.5节通过仿真实验将所提算法与已有算法进行了对比，展现了所提算法的优越性；最后第4.6节基于仿真结果对本章所提算法进行了总结。

4.2 信号模型

假设共有 N_{Tar} 个待测目标，其中第 i 个目标距离声呐的径向距离、径向速度和方位角分别为 $R_i + R_{\text{ref}}$, v_i 和 θ_i , $i \in \{1, 2, 3, \dots, N_{\text{Tar}}\}$ ，其中 R_{ref} 为参考距离，如图 4-1 所示。发射阵元在一个相干处理间隔中发射一串 Chirp 信号，其带宽为 B ，起始频率为 f_c ，脉冲持续时间为 T_c ，脉冲重复间隔为 T_p ，脉冲数为 N_p ，CPI 为 $T_{\text{CPI}} = T_p N_p$ 。发射信号 $s(t) = s(\hat{t}, t_m)$ 可表示为

$$s(\hat{t}, t_m) = \begin{cases} \exp(j2\pi(f_c\hat{t} + \frac{1}{2}\mu\hat{t}^2)), & \hat{t} \in [0, T_c] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad (4-1)$$

其中 $t = t_m + \hat{t}$, $t_m = mT_p$, $m \in \{0, 1, \dots, N_p - 1\}$ 。

发射信号经目标反射后由接收阵接收，接收阵为包含 N_m 个阵元，阵元间距为 d 的均匀线阵，其中 $d = \frac{\lambda_c}{2} = \frac{c}{2f_c}$, c 为声速。为了描述接收信号，首先对接收信号的时延做简要分析。令 t 时刻发射的信号经第 i 个目标反射到达接收阵的时延为 $\tau_i(t)$ ，其满足

$$\tau_i(t) = \frac{2(R_i + R_{\text{ref}} - v_i t)}{v_i + c} \approx \frac{2(R_i + R_{\text{ref}} - v_i t)}{c} = \tau_i^0(t) + \tau_{\text{ref}}, \quad (4-2)$$

其中 $\tau_i^0(t) \triangleq \frac{2(R_i - v_i t)}{c}$, $\tau_{\text{ref}} \triangleq \frac{2R_{\text{ref}}}{c}$ 。接收阵接收到的对应的反射信号可以表示为

$$r_i(t) = \alpha_i s(t - \tau_i(t)), \quad (4-3)$$

其中 $\alpha_i \in \mathbb{C}$ 为发射信号经传播和反射后的损失系数。以 $t = \tau_{\text{ref}}$ 时刻为起始，定义新的时间为 $\tilde{t} = t - \tau_{\text{ref}} = \hat{t} + t_m$ ，其中 \hat{t} 和 t_m 与(4-1)中的定义一致。定义 $s_{\text{ref}}(t) \triangleq s(t - \tau_{\text{ref}})$ 。此时有

$$r_i(\hat{t}, t_m) = \alpha_i s\left(\tilde{t} - \tau_i^0(\tilde{t}) + \frac{2v_i}{c}\tau_{\text{ref}}\right) = \alpha_i s\left(\hat{t} - \tau_i^0(\hat{t}, t_m) + \frac{2v_i}{c}\tau_{\text{ref}}, t_m\right). \quad (4-4)$$

将(4-1)代入(4-4)，可得

$$r_i(\hat{t}, t_m) = \alpha_i \exp(j2\pi\phi_i(\hat{t}, t_m)), \quad (4-5)$$

其中

$$\phi_i(\hat{t}, t_m) = f_c(\tilde{t} - \tau_i^0(t)) + \frac{1}{2}\mu(\hat{t} - \tau_i^0(t))^2. \quad (4-6)$$

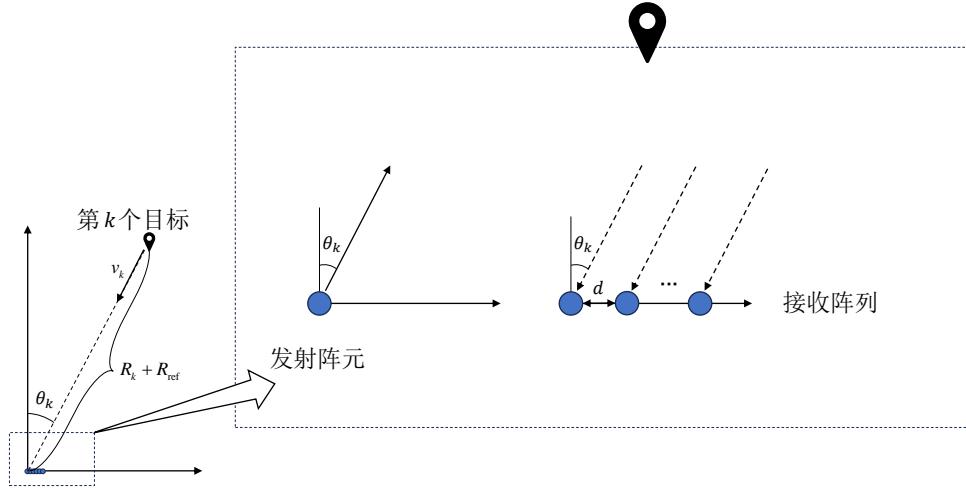


图 4-1 主动声呐示意图

Figure 4-1 Diagram of Active Sonar

由此可得 r_i 的瞬时频率 f_i 为

$$f_i(\hat{t}, t_m) = \frac{d\phi_i}{dt} \approx f_c + \mu\hat{t}. \quad (4-7)$$

令第 l 个阵元接收到的来自第 i 个目标的反射信号为 $r_{i,l}(\tilde{t}) = r_{i,l}(\hat{t}, t_m)$ 。由于第 i 个目标反射的信号到达第 l 个阵元相对于参考阵元的时延为 $-\frac{dl}{c} \sin(\theta_i)$ ，因此有

$$r_{i,l}(\hat{t}, t_m) = \alpha_i \exp(j2\pi\phi_i(\hat{t}, t_m)) \cdot \exp\left(j2\pi(f_c + \mu\hat{t}) \frac{dl}{c} \sin(\theta_i)\right). \quad (4-8)$$

为了实现解线频调脉压，将 $r_{i,l}$ 与参考信号 s_{ref} 做相关得到差频输出为

$$\begin{aligned} s_{\text{IF}}^{i,l}(\hat{t}, t_m) &= r_{i,l}(\hat{t}, t_m) \cdot s_{\text{ref}}^*(t) = r_{i,l}(\hat{t}, t_m) \cdot s^*(\hat{t}, t_m) \\ &\approx \tilde{\alpha}_i \exp\left(j2\pi(f_c + \mu\hat{t}) \frac{dl}{c} \sin(\theta_i)\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(-j2\pi\left(\mu \frac{2(R_i - v_i\tau_{\text{ref}})}{c}\hat{t} + \frac{2v_i f_c}{c} t_m + \mu \frac{2v_i}{c} t_m \hat{t}\right)\right), \end{aligned} \quad (4-9)$$

其中 $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i \exp\left(-j2\pi f_c \frac{2(R_i - v_i\tau_{\text{ref}})}{c}\right)$ 。当 $\mu T_c d N_m / c \ll 1$ 即 $\frac{BN_m}{2f_c} \ll 1$ 时，(4-9) 中的 $\mu\hat{t}$ 可以忽略不计，信号可以由窄带模型近似。当 $\mu \frac{2v_i}{c} N_p T_p T_c \ll 1$ 即 $v_i T_{\text{CPI}} \ll \frac{c}{2B}$ 时，目标在一个 CPI 中运动的距离不超过一个距离单元，此时(4-9)中的 $\mu \frac{2v_i}{c} t_m \hat{t}$ 也可以忽略不计。然而，为了获取更高的距离分辨率，发射信号的带宽 B 也需要取得更宽，使得上述的两项无法被忽略，导致经典的窄带处理方法无法被直接应用。从(4-9)中可以看出，当目标速度未知时，实际估出的距离是 $R_i - v_i\tau_{\text{ref}}$ ，与真实的距离 R_i 存在 $v_i\tau_{\text{ref}}$ 的误差。这是因为本章定义的目标的距离 $R_{\text{ref}} + R_i$ 是信号发出时目标相对于接收阵列的径向距离，当目标运动时，在发射信号到达参考距离 R_{ref} 时目标位置会发生改变，造成距离估计的误差。当目标速度较小时， $v_i\tau_{\text{ref}}$ 不超过一个距离单元，此时可以忽略不计；当目标速度较大时，可以通过

估计目标的速度对距离进行校正。由于上述误差不会对后续处理带来实质的影响，因此在算法设计中一般将此误差忽略不计^[17]，后续将不考虑此误差。

令第 l 个阵元接收到的信号经解线频调脉压后得到的输出为 $y_{\text{IF}}^l(\hat{t}, t_m)$ ，有

$$y_{\text{IF}}^l(\hat{t}, t_m) = \sum_{i=1}^{N_{\text{Tar}}} s_{\text{IF}}^{i,l}(\hat{t}, t_m) + n_l(\hat{t}, t_m), \quad (4-10)$$

其中 n_l 为噪声。对上述信号以 f_s 的采样率进行时域采样，并且代入 $t_m = mT_p$ ，采样后的信号 $Y_{\text{IF}}^l(k, m)$ 为

$$\begin{aligned} Y_{\text{IF}}^l(k, m) &= y_{\text{IF}}^l\left(\frac{k}{f_s}, mT_p\right) = \sum_{i=1}^{N_{\text{Tar}}} \tilde{\alpha}_i \exp\left(-j2\pi\mu\frac{2R_i}{cf_s}k\right) \cdot \\ &\exp\left(j2\pi\left(f_c + \frac{\mu}{f_s}k\right)\frac{d \sin \theta_i}{c}l\right) \cdot \exp\left(-j2\pi\left(f_c + \frac{\mu}{f_s}k\right)\frac{2v_i T_p}{c}m\right) \\ &+ n_l\left(\frac{k}{f_s}, mT_p\right). \end{aligned} \quad (4-11)$$

后续将直接对 $Y_{\text{IF}}^l(k, m)$ 进行处理以估计待估参数。

本章考虑利用原子范数最小化方法实现目标的距离-角度无网格联合估计。事实上，仅需单脉冲即可实现距离-角度联合估计。因此，下面首先考虑单脉冲的情况（即 $N_p = 1$ ），之后在此基础上给出利用多脉冲实现相干积累并提升参数估计性能的方法。

4.3 单脉冲角度-距离联合估计

令(4-11)中的脉冲采样指标 $m = 0$ ，将单脉冲情况下的接收信号写成矩阵的形式 \mathbf{Y}_{IF} 如下

$$\begin{aligned} [\mathbf{Y}_{\text{IF}}]_{l,k} &\triangleq Y_{\text{IF}}^l(k, 0) = \sum_{i=1}^{N_{\text{Tar}}} \tilde{\alpha}_i \exp\left(-j2\pi\mu\frac{2R_i}{cf_s}k\right) \cdot \\ &\exp\left(j2\pi\left(f_c + \frac{\mu}{f_s}k\right)\frac{d \sin \theta_i}{c}l\right) + n_l\left(\frac{k}{f_s}, 0\right). \end{aligned} \quad (4-12)$$

定义距离频率 $f_R \triangleq -\frac{1}{f_s}\mu\frac{2R}{c}$ 。容易看出，为了不出现距离模糊，时域采样频率 f_s 需要满足 $f_s \geq \mu\frac{2R_{\max}}{c}$ 。此处取 $f_s = \mu\frac{2R_{\max}}{c}$ ，容易看出 $f_R \in [-1, 0]$ 。和被动的情况类似，从(4-12)可以看出，此时时间采样指标和阵元指标耦合，构成类似第3章中的多频模型的形式。与第3章一样，为了避免阵元过密，此处令阵元间距为最小频率 f_c 对应的半波长，即 $d = \frac{c}{2f_c}$ 。可以看出，此时频率高于 f_c 的部分会出现角度混叠。定义空间频率为 $f_\theta \triangleq f_c \frac{d \sin \theta}{c} = \frac{\sin \theta}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 。显然，距离 R 和角度 θ 分别可以通过估计 f_R 和 f_θ 求得。

令 $\tilde{f}_k \triangleq 1 + \mu \frac{k}{f_s f_c}$, $k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 。定义空域导向向量 $\mathbf{a}_\theta(\tilde{f}_k, f_\theta)$ 和时域导向向量 $\mathbf{a}_R(f_R)$ 分别为

$$\mathbf{a}_\theta(\tilde{f}_k, f_\theta) = [\exp(j2\pi f_\theta \tilde{f}_k l)]_{l=0}^{N_m-1}, \mathbf{a}_R(f_R) = [\exp(j2\pi f_R k)]_{k=0}^{K_t-1}。 \quad (4-13)$$

将(4-13)代入(4-12)可得

$$\mathbf{Y}_{IF} = \sum_{i=1}^{N_{tar}} \tilde{\alpha}_i \mathbf{A}_\theta(f_{\theta_i}) \odot \mathbf{a}_R^T(f_{R_i}) + \mathbf{N}, \quad (4-14)$$

其中 $\mathbf{A}_\theta(f_\theta) \triangleq [\mathbf{a}_\theta(\tilde{f}_0, f_\theta), \mathbf{a}_\theta(\tilde{f}_1, f_\theta), \dots, \mathbf{a}_\theta(\tilde{f}_{K_t-1}, f_\theta)]$, \odot 表示 Khatri-Rao 积, \mathbf{N} 为噪声。这里对 $\mathbf{A}_\theta(f_\theta)$ 做一些说明。 $\mathbf{A}_\theta(f_\theta)$ 可被视为构成第2.5节中的多原子集 \mathbb{A}_{multi} 的原子。根据定理 2.5, 由于 $\tilde{f}_0 = 1$, 因此即使在高频部分会出现角度混叠, 基于原子范数最小化的方法仍可准确进行角度估计。

为了使用原子范数最小化方法实现角度和距离的估计, 基于(4-14)的结构, 构造原子集如下

$$\mathbb{A} = \left\{ \mathbf{A}_\theta(f_\theta) \odot \mathbf{a}_R^T(f_R) \cdot e^{j\phi} \middle| f_\theta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], f_R \in [-1, 0], \phi \in [0, 2\pi) \right\}。 \quad (4-15)$$

基于(4-15), 可以通过求解以下原子范数最小化问题实现对角度和距离的估计

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}}, \quad s.t. \|\mathbf{Y}_{IF} - \mathbf{X}\|_2^2 \leq \epsilon, \quad (4-16)$$

其中 ϵ 为噪声容限。当噪声不存在时, 上述问题转换为

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}}, \quad s.t. \quad \mathbf{Y}_{IF} = \mathbf{X}。 \quad (4-17)$$

若将(4-15)中的原子集离散化, 即将连续参数转为事先划分的离散网格, 上述问题转换为有网格的 l_1 优化问题, 可以直接求解。然而, 对于连续情况原子范数最小化问题, 由于涉及到对无穷连续个参数的优化, 因此无法直接求解。为此, 本节以无噪声情况为例对原问题的对偶问题进行分析, 有噪声情况可以用类似方法分析。

(4-17)的对偶问题为

$$\max_{\mathbf{Q}} \langle \mathbf{Q}, \mathbf{Y}_{IF} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad s.t. \quad \|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}}^* \leq 1, \quad (4-18)$$

其中 \mathbf{Q} 为对偶变量, $\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}}^*$ 表示 \mathbf{Q} 的对偶原子范数, 定义为 $\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}}^* \triangleq \sup_{\|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}} \leq 1} \langle \mathbf{Q}, \mathbf{X} \rangle_{\mathbb{R}}$ 。可以将 $\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}}^*$ 计算如下

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}}^* &= \sup_{\|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}} \leq 1} \langle \mathbf{Q}, \mathbf{X} \rangle_{\mathbb{R}} = \max_{\|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}} \leq 1} \langle \mathbf{Q}, \mathbf{X} \rangle_{\mathbb{R}} = \max_{\mathbf{X} \in \mathbb{A}} \langle \mathbf{Q}, \mathbf{X} \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \max_{\substack{f_R \in [-1, 0] \\ f_\theta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}} |\langle \mathbf{Q}, \mathbf{A}_\theta(f_\theta) \odot \mathbf{a}_R^T(f_R) \rangle| \\ &= \max_{\substack{f_R \in [-1, 0] \\ f_\theta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}} \left| \sum_{k=0}^{K_t-1} \exp(-j2\pi f_R k) \cdot \mathbf{a}_\theta^H(\tilde{f}_k, f_\theta) \mathbf{q}_k \right|, \end{aligned} \quad (4-19)$$

其中 $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{K_t-1}]$ 。由于(4-19)不是三角多项式的形式，因此无法直接使用有界引理将对偶原子范数的约束转换为半正定约束。令

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{Q}, f_\theta) \triangleq \left[\mathbf{a}_\theta^H(\tilde{f}_0, f_\theta)\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_\theta^H(\tilde{f}_1, f_\theta)\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{a}_\theta^H(\tilde{f}_{K_t-1}, f_\theta)\mathbf{q}_{K_t-1} \right]^T,$$

容易看出，若 $\boldsymbol{\Psi}$ 的每个元素均为阶数相同的一元三角多项式，则(4-19)中的 $\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}}^*$ 可以写成二元三角多项式的形式。当 $\tilde{f}_k, k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 均为正整数时，文献 [106] 中给出了一种与第3章中 2DMFANM 算法中类似的映射算子，使得 $\boldsymbol{\Psi}$ 中的每一个元素均为同阶的一元三角多项式。当 \tilde{f}_k 不为正整数时，文献 [108] 以 $\Delta\tilde{f} = \tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k$ 为基频，将 \tilde{f}_k 四舍五入为 $\Delta\tilde{f}$ 的正整数倍，使用和文献 [106] 中相同的映射算子将 $\boldsymbol{\Psi}$ 中的元素转换为同阶的三角多项式。具体的，在本章所考虑的问题中， $\Delta\tilde{f} = \frac{\mu}{f_s f_c}$ 。令 $F_k = \lceil \tilde{f}_k / \Delta\tilde{f} \rceil$ ，其中 $\lceil \cdot \rceil$ 表示向上取整。将 \tilde{f}_k 近似为 $\hat{f}_k \triangleq F_k \Delta\tilde{f}$ 。此时可以按照文献 [106] 中的方法定义映射算子 $\mathcal{R}_k : \mathbb{C}^{N_m} \rightarrow \mathbb{C}^{F_{K_t-1}(N_m-1)}$ ，使得 $\mathbf{a}_\theta^H(\hat{f}_k, f_\theta)\mathbf{q}_k = \mathbf{a}_\theta^H(f_\theta)\hat{\mathbf{q}}_k$ ，其中 $\hat{\mathbf{q}}_k = \mathcal{R}_k(\mathbf{q}_k)$ ， $\mathbf{a}_\theta(f_\theta) = \left[1, \exp(j2\pi f_\theta \Delta\tilde{f}), \dots, \exp(j2\pi f_\theta \Delta\tilde{f}(F_{K_t-1}(N_m-1)-1)) \right]^T$ 。可以看出，此时 \mathbf{q}_k 经过映射算子后得到的向量的维数将约为 $N_m \cdot (K_t + \lceil \frac{f_s f_c}{\mu} \rceil)$ 。对于本章所考虑的主动声呐发射的带通信号， $\Delta\tilde{f}$ 通常小于一，甚至会出现 $\lceil \frac{f_s f_c}{\mu} \rceil > K_t$ 的情况，因此相比于 \mathbf{q}_k 的维数 N_m ，映射后得到的向量的维数将大幅升高，造成极大的运算负担。事实上，这样的映射通常是不必要的。从直观上看，由于 $f_\theta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ，因此 $\mathbf{a}_\theta(f_\theta)$ 中的 $f_\theta \Delta\tilde{f} \in \left[-\frac{\Delta\tilde{f}}{2}, \frac{\Delta\tilde{f}}{2}\right] \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ，形式上和第2.4节中限定区域的情况类似，因此可以通过类似第2.4节中的方法降低规模。

基于上述讨论，可以看出文献 [106] 中的方法无法被直接应用于本章所考虑的问题中。为了解决这一问题，本节提出了一种新的映射算子。具体的，注意到 $\mathbf{a}_\theta^H(\tilde{f}_k, f_\theta)\mathbf{q}_k = \sum_{n=0}^{N_m-1} q_{k,n} \exp(-j2\pi f_\theta \tilde{f}_k n)$ ，其中 $q_{k,n}$ 为 \mathbf{q}_k 的第 n 个元素。容易看出， $\mathbf{a}_\theta^H(\tilde{f}_k, f_\theta)\mathbf{q}_k$ 可以被视为 $q_k(t) \triangleq \sum_{n=0}^{N_m-1} q_{k,n} \delta(t - \tilde{f}_k n)$ 的连续时间 Fourier 变换。由于仅需 $q_k(t)$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 中的频谱，因此可以对其做理想低通滤波。令通带为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 的理想低通滤波器为 $h(t)$ ， $q_k(t)$ 滤波后得到 $\tilde{q}_k(t) = q_k(t) * h(t) = \sum_{n=0}^{N_m-1} q_{k,n} h(t - \tilde{f}_k n)$ 。由于 $\tilde{q}_k(t)$ 为理想低通信号，因此以 Nyquist 采样率 1 对其进行采样得到离散时间信号 $\tilde{q}_k[n] = \tilde{q}_k(n) = \sum_{l=0}^{N_m-1} q_{k,l} h(n - \tilde{f}_k l)$ 。显然，此时 $\tilde{q}_k[n]$ 的离散时间 Fourier 变换等于 $\mathbf{a}_\theta^H(\tilde{f}_k, f_\theta)\mathbf{q}_k$ 。由于 $\tilde{q}_k[n]$ 为无限长的序列，因此为了将其离散时间 Fourier 变换转换为有限阶的三角多项式以使用有界引理，需要对其进行截断。与第2.4节中的讨论类似，将 $\tilde{q}_k[n]$ 左侧截断至 $h(n)$ 左侧的第四或第五旁瓣，右侧截断至 $h(n - \tilde{f}_k(N_m - 1))$ 右侧的第四或第五旁瓣即可。为了使得对于所有的 $k \in \{0, 1, \dots, K_t - 1\}$ ，截断后的 $\tilde{q}_k[n]$ 阶数相同，此处将所有 $\tilde{q}_k[n]$ 的右侧截断至 $h(n - \tilde{f}_{K_t-1}(N_m - 1))$ 右侧的第四或第五旁瓣处。以截断至第五旁瓣处为例，此时的阶数为 $11 + \lceil \tilde{f}_{K_t-1}(N_m - 1) \rceil \ll F_{K_t-1}(N_m - 1)$ 。至此可

以给出相应的映射算子 $\mathcal{R}_k : \mathbb{C}^{N_m} \rightarrow \mathbb{C}^{11 + \lceil \tilde{f}_{K_t-1}(N_m - 1) \rceil}$, 使得

$$\tilde{\mathbf{q}}_k = \mathcal{R}_k^{\text{ang}}(\mathbf{q}_k) = \mathbf{H}_k^{\text{ang}H} \mathbf{q}_k, \quad (4-20)$$

其中 $[\mathbf{H}_k^{\text{ang}}]_{i,j} = h(j - i \cdot \tilde{f}_k)$, $i = 0, 1, \dots, N_m - 1$, $j = -5, -4, \dots, 0, \dots, 5 + \lceil \tilde{f}_{K_t-1}(N_m - 1) \rceil$ 。容易看出, 当 \tilde{f}_k 为正整数时, $[\mathbf{H}_k^{\text{ang}}]_{i,j} = \begin{cases} 1, & j \text{ 为 } \tilde{f}_k \text{ 的整数倍}, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

此时的映射算子 \mathcal{R}_k 与文献 [106] 中一致, 因此本节所提的映射算子可被视作文献 [106] 中的映射算子的一种推广。

基于上述讨论, 利用映射算子 $\mathcal{R}_k^{\text{ang}}$, 可以得出

$$\mathbf{a}_\theta^H(\hat{f}_k, f_\theta) \mathbf{q}_k \approx \mathbf{a}_\theta^H(f_\theta) \tilde{\mathbf{q}}_k, \quad (4-21)$$

其中 $\mathbf{a}_\theta(f_\theta) \triangleq \left[1, \dots, \exp\left(j2\pi f_\theta (\tilde{N}_m - 1)\right) \right]^T$, $\tilde{N}_m \triangleq 11 + \lceil \tilde{f}_{K_t-1}(N_m - 1) \rceil$, $\tilde{\mathbf{q}}_k = \mathcal{R}_k^{\text{ang}}(\mathbf{q}_k) = \mathbf{H}_k^{\text{ang}H} \mathbf{q}_k$ 。

将(4-21)代入(4-19), 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}}^* &= \max_{\substack{f_R \in [-1, 0] \\ f_\theta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}} \left| \sum_{k=0}^{K_t-1} \exp(-j2\pi f_R k) \cdot \mathbf{a}_\theta^H(\tilde{f}_k, f_\theta) \mathbf{q}_k \right| \\ &\approx \max_{\substack{f_R \in [-1, 0] \\ f_\theta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}} \left| \sum_{k=0}^{K_t-1} \exp(-j2\pi f_R k) \cdot \mathbf{a}_\theta^H(f_\theta) \mathbf{H}_k^{\text{ang}H} \mathbf{q}_k \right| \\ &= \max_{\substack{f_R \in [-1, 0] \\ f_\theta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}} \left| \mathbf{a}_\theta^H(f_\theta) \left[\mathbf{H}_0^{\text{ang}H} \mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{H}_{K_t-1}^{\text{ang}H} \mathbf{q}_{K_t-1} \right] \mathbf{a}_R^*(f_R) \right| \\ &= \max_{\substack{f_R \in [-1, 0] \\ f_\theta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}} \left| (\mathbf{a}_R(f_R) \otimes \mathbf{a}_\theta(f_\theta))^H \text{vec} \left(\left[\mathbf{H}_0^{\text{ang}H} \mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{H}_{K_t-1}^{\text{ang}H} \mathbf{q}_{K_t-1} \right] \right) \right| \\ &= \max_{\substack{f_R \in [-1, 0] \\ f_\theta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}} \left| (\mathbf{a}_R(f_R) \otimes \mathbf{a}_\theta(f_\theta))^H \mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}} \mathbf{q}_{\text{vec}} \right| \\ &= \max_{\substack{f_R \in [-1, 0] \\ f_\theta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}} \left| (\mathbf{a}_R(f_R) \otimes \mathbf{a}_\theta(f_\theta))^H \tilde{\mathbf{q}}_{\text{vec}} \right|, \end{aligned} \quad (4-22)$$

其中 $\text{vec}(\cdot)$ 表示对矩阵做向量化, $\mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0^{\text{ang}} & & & \\ & \mathbf{H}_1^{\text{ang}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{H}_{K_t-1}^{\text{ang}} \end{bmatrix}$, $\mathbf{q}_{\text{vec}} \triangleq \text{vec}(\mathbf{Q})$, $\tilde{\mathbf{q}}_{\text{vec}} \triangleq \mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}} \mathbf{q}_{\text{vec}}$ 。

将(4-22)代入(4-18), $\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}}^* \leq 1$ 等价于

$$\left| (\mathbf{a}_R(f_R) \otimes \mathbf{a}_\theta(f_\theta))^H \tilde{\mathbf{q}}_{\text{vec}} \right|^2 \leq 1, \forall f_R \in [-1, 0], f_\theta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad (4-23)$$

此时对偶原子范数约束被转化为了二元三角多项式不等式约束。利用有界引理^[84]并进行合适的平方和松弛，上述约束可转换为如下半正定约束

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \tilde{\mathbf{q}}_{\text{vec}} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{\text{vec}}^H & 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \delta_k = \text{Tr}(\Theta_k \mathbf{P}), k \in \mathcal{H}, \quad (4-24)$$

其中 \mathcal{H} 为半空间， $\Theta_k = \Theta_{k_R} \otimes \Theta_{k_\theta}$, $k = [k_R, k_\theta]$, Θ_{k_R} 为 $K_t \times K_t$ 的除第 k_R 个对角线为 1 其余均为 0 的 Toeplitz 矩阵， Θ_{k_θ} 为 $\tilde{N}_m \times \tilde{N}_m$ 的除第 k_θ 个对角线为 1 其余均为 0 的 Toeplitz 矩阵。

将(4-24)代入(4-18)可以得到对偶 SDP 问题为

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{q}_{\text{vec}}} & \langle \mathbf{q}_{\text{vec}}, \mathbf{y}_{\text{vec}} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \tilde{\mathbf{q}}_{\text{vec}} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{\text{vec}}^H & 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \delta_k = \text{Tr}(\Theta_k \mathbf{P}), k \in \mathcal{H}, \tilde{\mathbf{q}}_{\text{vec}} = \mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}H} \mathbf{q}_{\text{vec}}, \end{aligned} \quad (4-25)$$

其中 $\mathbf{y}_{\text{vec}} \triangleq \text{vec}(\mathbf{Y}_{\text{IF}})$ 。对(4-25)做 Lagrange 对偶分析，可以得到原问题(4-17)的 SDP 形式，即

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{x}}, t} & \frac{1}{2K_t \tilde{N}_m} (\text{Tr}(\text{Toep}_{2D}(\mathbf{u})) + t), \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}) & \tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{x}}^H & t \end{bmatrix} \succeq 0, \mathbf{y}_{\text{vec}} = \mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}} \tilde{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (4-26)$$

其中 $\text{Toep}_{2D}(\mathbf{u})$ 为双层 Toeplitz 矩阵， $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{K_t \times \tilde{N}_m}$ 。当噪声存在时，(4-26)转换为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{x}}, t} & \frac{1}{2K_t \tilde{N}_m} (\text{Tr}(\text{Toep}_{2D}(\mathbf{u})) + t), \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}) & \tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{x}}^H & t \end{bmatrix} \succeq 0, \|\mathbf{y}_{\text{vec}} - \mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}} \tilde{\mathbf{x}}\|_2^2 \leq \epsilon, \end{aligned} \quad (4-27)$$

其中 ϵ 为噪声容限。通过求解(4-26)和(4-27)，可以利用 MaPP 算法^[103]从 $\text{Toep}_{2D}(\mathbf{u})$ 中提取距离频率 f_R 和空间频率 f_θ ，从而实现对距离 R 和角度 θ 的联合估计。上述算法总结于算法 9 中

基于(4-26)和(4-27)，本节最后对矩阵 $\mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}}$ 的物理意义做一些分析。容易看出，相比窄带情况，本节所研究问题的主要难点在于时间采样指标和阵元指标的耦合。从(4-12)和(4-11)可以看出，这和距离-速度联合估计中常见的距离徙动问题本质上是相同的。Keystone 变换可以有效的补偿距离徙动带来的影响^[17]。基于(4-12)对阵元指标（即空间采样点）做 Keystone 变换，得到新的采样指标 $l' \triangleq \left(\frac{f_c + \frac{\mu}{f_s} k}{f_c}\right) l$ 。若在信号的整个频带中均不会出现空间频率的混叠，则此 Keystone 变换可以通过带限信号的 sinc 函数内插实现。然而，在本章所考虑的问题中，频率高于 f_c 的部分均会出现空间频率的混叠，此时高频部分以 l 为采样指标进行采样时不满足 Nyquist 采样频率，因此无法基于其进行内插以实现 Keystone 变换。

算法9 基于原子范数最小化的宽带单脉冲角度-距离联合估计

```

1: 输入:  $\mathbf{Y}_{\text{IF}}, N_{\text{m}}, K_{\text{t}}, \mu, f_s, f_c, \epsilon$ 
2: 输出:  $\{\theta_i, R_i\}_{i=1}^K$ 
3:  $\tilde{f}_k \leftarrow 1 + \mu \frac{k}{f_s f_c}, k = 0, 1, \dots, K_{\text{t}} - 1$ 
4: 根据(4-20)构造映射矩阵  $\mathbf{H}_k^{\text{ang}}, k = 0, 1, \dots, K_{\text{t}} - 1$ 
5:  $\mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}} \leftarrow \text{diag}(\mathbf{H}_0^{\text{ang}}, \dots, \mathbf{H}_{K_{\text{t}}-1}^{\text{ang}})$ 
6:  $\mathbf{y}_{\text{vec}} \leftarrow \text{vec}(\mathbf{Y}_{\text{IF}})$ 
7: if 无噪声 then
8:   求解 (4-26)
9: else
10:  求解 (4-27)
11: end if
12:  $\left\{f_{\theta_i}, f_{R_i}\right\}_{i=1}^K \leftarrow \text{Toep}_{2D}$  的 Vandermonde 分解
13:  $R_i \leftarrow -\frac{f_{R_i} f_s c}{2\mu}, \theta_i \leftarrow \arcsin\left(\frac{f_{\theta_i} c}{f_c d}\right), i = 1, 2, \dots, K$ 

```

若要强行基于其进行内插，需假设对所有频率均不存在混叠，此时需要对目标角度的范围进行限制，当目标角度超出限定范围时混叠不可避免，导致会出现伪峰。注意到当使用新的采样指标 l' 进行采样时，对所有频率均满足 Nyquist 采样频率。基于这一现象，一种合理的 Keystone 变换实现思路为，对以新的采样指标 l' 采得的数据进行限制，使得基于其进行的带限信号的 sinc 函数内插在原指标 l 对应的点处的值与观测值一致。这实际上正是 $\mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}}$ 中的 $\mathbf{H}_k^{\text{ang}}, k = 0, 1, \dots, K_{\text{t}} - 1$ 所实现的，即(4-26)和(4-27)中的 $\tilde{\mathbf{x}}$ 可以视作对观测信号 \mathbf{y}_{vec} 做 Keystone 变换的结果。事实上，当信号在整个频带中均不会出现空间频率的混叠时，本节中所定义的空间频率 f_θ 将被限制在 $\left[-\frac{f_c + B}{2f_c}, \frac{f_c + B}{2f_c}\right]$ 中，此时可用第2.4节中的方法做进一步处理，处理后得到的 $\tilde{\mathbf{x}}$ 将于传统的基于带限信号的 sinc 函数内插得到的 Keystone 变换一致，本文受限于篇幅原因不再详述。

4.4 基于多脉冲相干积累的角度-距离联合估计

相比单脉冲的情况，多脉冲声呐的每个脉冲回波都可被视作一个“快拍”，多个脉冲回波通常可被视作“多快拍”，通过一串回波的相干积累获得更高的信噪比，取得更好的参数估计性能。具体的，此时的接收信号 \mathbf{Y}_{IF} 可被视为三阶张量，其中第三个指标表示快拍数，有

$$\mathbf{Y}_{\text{IF}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{Tar}}} \tilde{\alpha}_i \mathbf{A}_\theta(f_{\theta_i}) \odot \mathbf{a}_R^T(f_{R_i}) \diamond \mathbf{p}_i + \mathbf{N}, \quad (4-28)$$

其中 \diamond 表示张量积，定义为 $[\mathbf{A} \diamond \mathbf{p}]_{:, :, k} \triangleq \mathbf{A} [\mathbf{p}]_k$ ， $\mathbf{p}_i \in \mathbb{C}^{N_p}$ 为各个快拍的归一化功率， $\|\mathbf{p}_i\|_2 = 1$ ， N_p 为快拍数， $\tilde{\alpha}_i > 0$ 。基于(4-28)的形式，可以给出相应的原

子集 \mathbb{A}_{MMV} 为

$$\mathbb{A}_{\text{MMV}} \triangleq \left\{ \mathbf{A}_\theta(f_\theta) \odot \mathbf{a}_R^T(f_R) \diamond \mathbf{p} \mid f_\theta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], f_R \in [-1, 0], \|\mathbf{p}\|_2 = 1 \right\}.$$

相应的原子范数最小化问题为

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}_{\text{MMV}}}, \quad s.t. \|\mathbf{Y}_{\text{IF}} - \mathbf{X}\|_2^2 \leq \epsilon, \quad (4-29)$$

其中 ϵ 为噪声容限。当噪声不存在时，上述问题转换为

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}_{\text{MMV}}}, \quad s.t. \quad \mathbf{Y}_{\text{IF}} = \mathbf{X}. \quad (4-30)$$

上述优化问题的 SDP 可以从单快拍的情况直接推广得到，此处由于篇幅限制不再详述，下面直接给出结果，详细的推导过程见附录三.1。(4-30)等价于

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{W}} \frac{1}{2\sqrt{K_t \tilde{N}_m}} (\text{Tr}(\text{Toep}_{2D}(\mathbf{u})) + \text{Tr}(\mathbf{W})), \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}) & \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\mathbf{X}}^H & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq 0, \mathbf{Y}_{\text{vec}} = \mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}} \tilde{\mathbf{X}}, \end{aligned} \quad (4-31)$$

其中 $[\mathbf{Y}_{\text{vec}}]_{:,k} = \text{vec}([\mathbf{Y}_{\text{IF}}]_{::,k})$, $k = 1, 2, \dots, N_p$ 。

然而，对于宽带声呐，由于距离徙动的影响，导致目标的距离单元被错开，使得各个脉冲回波的信号形式不同，无法被视作多快拍的情况，导致相干积累难以实现。为了充分利用多脉冲的优势，一种思路是将原角度-距离联合估计问题扩展为角度-距离-速度联合估计问题。事实上，这一思路能够最充分的利用信号的结构和信息，实现最佳的估计性能。

基于(4-11)可以仿照第4.3节的方法给出基于原子范数最小化的角度-距离-速度联合估计算法。具体的，首先将(4-11)中的 \mathbf{Y}_{IF} 写成三阶张量的形式，定义为

$$[\mathbf{Y}_{\text{IF}}]_{l,k,m} \triangleq Y_{\text{IF}}^l(k, m). \quad (4-32)$$

对于给定的最大速度 v_{\max} ，定义虚拟起始频率 $f_c^{\text{pseu}} \triangleq \frac{c}{4v_{\max}T_p}$ 。定义速度频率 $f_v \triangleq -\frac{2vT_p}{c}f_c^{\text{pseu}}$ ，此时 $f_v \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 。类似(4-13)，定义速度导向向量为

$$\mathbf{a}_v(\tilde{f}_k^{\text{vel}}, f_v) \triangleq [1, \exp(j2\pi\tilde{f}_k^{\text{vel}}f_v), \dots, \exp(j2\pi\tilde{f}_k^{\text{vel}}f_v(N_p - 1))]^T, \quad (4-33)$$

$k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ ，其中 $\tilde{f}_k^{\text{vel}} \triangleq \tilde{f}_k \cdot \frac{f_c}{f_c^{\text{pseu}}}$ 。 \mathbf{Y}_{IF} 可写为

$$\mathbf{Y}_{\text{IF}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{Tar}}} \tilde{\alpha}_i \mathbf{A}_\theta(f_{\theta_i}) \odot \mathbf{a}_R^T(f_{R_i}) * \mathbf{A}_v(f_{v_i}) + \mathbf{N}, \quad (4-34)$$

其中 $\mathbf{A}_v(f_v) \triangleq [\mathbf{a}_v(\tilde{f}_0^{\text{vel}}, f_v), \dots, \mathbf{a}_v(\tilde{f}_{K_t-1}^{\text{vel}}, f_v)]$ ， $*$ 为一种重新排列的张量积，定义为 $[\mathbf{A} * \mathbf{A}_v]_{:,k,:} \triangleq [\mathbf{A}]_{:,k} [\mathbf{A}_v]_{:,k}^T$ 。值得注意的是 $\mathbf{A}_v(f_v)$ 可被视为第2.5节中的多原

子集 $\mathbb{A}_{\text{multi}}$ 中的一种原子。按照定理2.5的分析，基于多原子集的原子范数最小化方法，速度频率 f_v 可被准确估计的必要条件为 $\Delta \tilde{f}^{\text{vel}} = \tilde{f}_{k+1}^{\text{vel}} - \tilde{f}_k^{\text{vel}} = \frac{\mu}{f_s f_c^{\text{pseu}}} = \frac{4\mu T_p v_{\max}}{f_s c} < 1$ 。因此，此时可估计的最大速度 $v_{\max}^{\text{new}} = \frac{f_s c}{4\mu T_p}$ 。相比之下，若要求慢时间采样间隔 T_p 对所有频段均满足Nyquist采样率以避免速度模糊，则得到的最大可测速度为 $v_{\max} = \frac{c}{4(f_c + B)T_p} \ll v_{\max}^{\text{new}}$ 。由此可见，发射信号带宽的增加极大提升了可测速度的范围，改善了速度模糊。

基于(4-34)，定义原子集 \mathbb{A}'_{new} 为

$$\mathbb{A}'_{\text{new}} \triangleq \left\{ \mathbf{A}_\theta(f_\theta) \odot \mathbf{a}_R^T(f_R) * \mathbf{A}_v(f_v) e^{j\phi} : \phi \in [0, 2\pi), [f_\theta, f_R, f_v] \in \mathcal{K} \right\}, \quad (4-35)$$

其中 $\mathcal{K} \triangleq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times [-1, 0] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ 。当不考虑噪声时，基于原子范数最小化方法，相应的优化问题为

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}'_{\text{new}}}, \quad s.t. \mathbf{Y}_{\text{IF}} = \mathbf{X}. \quad (4-36)$$

仿照第4.3节中的推导过程，不难给出上述优化问题的SDP形式。受限于篇幅问题，此处直接给出结果，详细过程见附录三.2。

令 $[\mathbf{H}_k^{\text{vel}}]_{i,j} \triangleq h(j - i\tilde{f}_k^{\text{vel}})$, $i = 0, 1, \dots, N_p - 1, j = -5, -4, \dots, 0, \dots, 5 + \left\lceil \tilde{f}_{K_t-1}^{\text{vel}}(N_p - 1) \right\rceil$, $\mathbf{H}_k^{\text{vel}} \in \mathbb{C}^{N_p \times \tilde{N}_p}$, $\tilde{N}_p = 11 + \left\lceil \tilde{f}_{K_t-1}^{\text{vel}}(N_p - 1) \right\rceil$ 。 $\mathbf{H}_k^{\text{AngVel}} \triangleq \mathbf{H}_k^{\text{vel}} \otimes \mathbf{H}_k^{\text{ang}}$, \mathbf{H}_{diag} 为对角线为 $\mathbf{H}_k^{\text{AngVel}}$, $k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 的分块对角矩阵，记为 $\mathbf{H}_{\text{diag}} = \text{diag}(\mathbf{H}_0^{\text{AngVel}}, \mathbf{H}_1^{\text{AngVel}}, \dots, \mathbf{H}_{K_t-1}^{\text{AngVel}})$ 。

不考虑噪声时，目标的角度、距离和速度可以通过求解以下SDP问题求得：

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}, t, \hat{\mathbf{x}}} \text{Tr}(\mathbf{Toep}_{3D}(\mathbf{u})) + t, \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{Toep}_{3D}(\mathbf{u}) & \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{x}}^H & t \end{bmatrix} \geq 0, \mathbf{y}_{\text{vec}}^{\text{3D}} = \mathbf{H}_{\text{diag}} \hat{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (4-37)$$

其中 \mathbf{Toep}_{3D} 为三阶Toeplitz矩阵， $\mathbf{y}_{\text{vec}}^{\text{3D}}$ 为将(4-34)中的 \mathbf{Y}_{IF} 向量化得到的向量，定义为 $\mathbf{y}_{\text{vec}}^{\text{3D}} \triangleq \text{vec} \left(\left[\text{vec} \left([\mathbf{Y}_{\text{IF}}]_{:,0,:} \right), \dots, \text{vec} \left([\mathbf{Y}_{\text{IF}}]_{:,K_t-1,:} \right) \right] \right)$ 。噪声存在时，上式转换为

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}, t, \hat{\mathbf{x}}} \text{Tr}(\mathbf{Toep}_{3D}(\mathbf{u})) + t, \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{Toep}_{3D}(\mathbf{u}) & \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{x}}^H & t \end{bmatrix} \geq 0, \|\mathbf{y}_{\text{vec}}^{\text{3D}} - \mathbf{H}_{\text{diag}} \hat{\mathbf{x}}\|_2^2 \leq \epsilon, \end{aligned} \quad (4-38)$$

其中 ϵ 为噪声阈值。

需要注意的是，上述算法将距离、角度和速度三个参数完全耦合在了一起，使得得到的向量 $\mathbf{y}_{\text{vec}}^{\text{3D}}$ 的维数为 $\tilde{N}_p \cdot \tilde{N}_m \cdot K_t$ 。这使得(4-37)和(4-38)中的半正定矩阵的规模过大，导致算法无法使用。为此，本节给出一种规模更小的相干积累方法。

首先考虑没有距离徙动的情况。此时可将(4-11)写为

$$\begin{aligned} Y_{\text{IF}}^l(k, m) &= y_{\text{IF}}^l \left(\frac{k}{f_s}, mT_p \right) = \sum_{i=1}^{N_{\text{Tar}}} \tilde{\alpha}_i \exp \left(-j2\pi\mu \frac{2R_i}{c f_s} k \right) \cdot \\ &\exp \left(j2\pi \left(f_c + \frac{\mu}{f_s} k \right) \frac{d \sin \theta_i}{c} l \right) \cdot \exp \left(-j2\pi f_c \frac{2v_i T_p}{c} m \right) \\ &+ n_l \left(\frac{k}{f_s}, mT_p \right). \end{aligned} \quad (4-39)$$

此时(4-34)中的 \mathbf{Y}_{IF} 变为

$$\mathbf{Y}_{\text{IF}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{Tar}}} \tilde{\alpha}_i \mathbf{A}_\theta(f_{\theta_i}) \odot \mathbf{a}_R^T(f_{R_i}) \diamond \mathbf{a}_v(f_{v_i}) + \mathbf{N}, \quad (4-40)$$

其中 \mathbf{N} 为噪声矩阵。

基于(4-40)的结构，定义如下原子集

$$\mathbb{A}_{\text{new}} = \left\{ \mathbf{A}_\theta(f_\theta) \odot \mathbf{a}_R^T(f_R) \diamond \mathbf{a}_v(f_v) e^{j\phi} : [f_\theta, f_R, f_v] \in \mathcal{K}, \phi \in [0, 2\pi) \right\}, \quad (4-41)$$

其中 $\mathcal{K} \triangleq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times [-1, 0] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ 。与之相应的原子范数最小化问题为

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}}, \quad s.t. \mathbf{Y}_{\text{IF}} = \mathbf{X}, \quad (4-42)$$

当噪声存在时，上式转换为

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}}, \quad s.t. \|\mathbf{Y}_{\text{IF}} - \mathbf{X}\|_2^2 \leq \epsilon, \quad (4-43)$$

其中 ϵ 为噪声阈值。

类似第4.3节中的分析，上述问题可以分别写成以下 SDP 形式：

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{u}, t, \hat{\mathbf{x}}} \text{Tr}(\mathbf{Toep}_{3D}(\mathbf{u})) + t, \quad s.t. \\ &\begin{bmatrix} \mathbf{Toep}_{3D}(\mathbf{u}) & \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{x}}^H & t \end{bmatrix} \succeq 0, \mathbf{I}_{N_p} \otimes \mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{y}_{\text{vec}}^{\text{3D}'} \end{aligned} \quad (4-44)$$

和

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{u}, t, \hat{\mathbf{x}}} \text{Tr}(\mathbf{Toep}_{3D}(\mathbf{u})) + t, \quad s.t. \\ &\begin{bmatrix} \mathbf{Toep}_{3D}(\mathbf{u}) & \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{x}}^H & t \end{bmatrix} \succeq 0, \left\| \mathbf{I}_{N_p} \otimes \mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}_{\text{vec}}^{\text{3D}'} \right\|_2^2 \leq \epsilon, \end{aligned} \quad (4-45)$$

其中 $\mathbf{y}_{\text{vec}}^{\text{3D}'}$ 表示将(4-40)中 \mathbf{Y}_{IF} 向量化后得到的向量。详细推导过程见附录三.3。与(4-37)和(4-38)一样，(4-44)和(4-45)中的 SDP 问题也将三个参数完全耦合在了一起，使得问题规模仍然较大。但是，下述引理说明，当(4-31)能准确估计目标距离和角度时，上述 SDP 问题可以被解耦。

引理4.1. 当(4-31)能准确估计目标距离和角度时, (4-44)等价于以下解耦形式

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}_{2D}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{X}}} \frac{1}{2\sqrt{\tilde{N}_m N_p K_t}} (\text{Tr}(\mathbf{Toep}_{2D}(\mathbf{u}_{2D})) + \text{Tr}(\mathbf{Toep}(\mathbf{u}))), \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{Toep}_{2D}(\mathbf{u}_{2D}) & \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\mathbf{X}}^H & \mathbf{Toep}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \geq 0, \mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}} \tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{Y}}, \end{aligned} \quad (4-46)$$

其中 $\tilde{\mathbf{Y}} \triangleq [\text{vec}([\mathbf{Y}_{\text{IF}}]_{:, :, 0}), \dots, \text{vec}([\mathbf{Y}_{\text{IF}}]_{:, :, N_p-1})]$ 。

引理4.1证明于附录三.4中。相比(4-44), (附3-11)中的SDP问题的规模大大下降, 显著降低了运算复杂度。

接下来考虑存在距离徙动时的情况。为了消除(4-34)中由于距离徙动导致的快、慢时间的耦合, 此处对 \mathbf{Y}_{IF} 使用第4.3节最后提到的类Keystone变换。具体的, 将 \mathbf{Y}_{IF} 变换为 $\tilde{\mathbf{Y}}_{\text{IF}}$, 使得

$$[\tilde{\mathbf{Y}}_{\text{IF}}]_{:, k, :} \cdot \mathbf{H}_k^{\text{vel}H} = [\mathbf{Y}_{\text{IF}}]_{:, k, :}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1, \quad (4-47)$$

其中 $\mathbf{H}_k^{\text{vel}}$ 与本节开头的定义一致。容易发现此时(4-47)是欠定的, 这与一般的Keystone变换不同。此时 $\tilde{\mathbf{Y}}_{\text{IF}}$ 可被写成

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{\text{IF}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{tar}}} \tilde{a}_i \mathbf{A}_\theta(f_{\theta_i}) \odot \mathbf{a}_R^T(f_{R_i}) \diamond \tilde{\mathbf{a}}_v(f_{v_i}) + \tilde{\mathbf{N}} \quad (4-48)$$

的形式, 其中 $\tilde{\mathbf{a}}_v(f_v) \triangleq [1, \exp(j2\pi f_v), \dots, \exp(j2\pi f_v(\tilde{N}_p - 1))]^T$ 。对比(4-48)和(4-40), 可以发现二者从形式上看是一致的。事实上, 基于(4-48), 定义原子集 $\tilde{\mathbb{A}}_{\text{new}}$ 为

$$\tilde{\mathbb{A}}_{\text{new}} = \left\{ \mathbf{A}_\theta(f_\theta) \odot \mathbf{a}_R^T(f_R) \diamond \tilde{\mathbf{a}}_v(f_v) e^{j\phi} : [f_\theta, f_R, f_v] \in \mathcal{K}, \phi \in [0, 2\pi) \right\}. \quad (4-49)$$

根据(4-47), 有

$$[\tilde{\mathbb{A}}_{\text{new}}]_{:, k, :} \cdot \mathbf{H}_k^{\text{vel}H} = [\mathbb{A}'_{\text{new}}]_{:, k, :}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1. \quad (4-50)$$

根据定理2.3, 有

$$\|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}'_{\text{new}}} = \min_{\tilde{\mathbf{X}}} \|\tilde{\mathbf{X}}\|_{\tilde{\mathbb{A}}_{\text{new}}}, s.t. [\tilde{\mathbf{X}}]_{:, k, :} \cdot \mathbf{H}_k^{\text{vel}H} = [\mathbf{X}]_{:, k, :}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1. \quad (4-51)$$

将(4-51)代入(4-36), (4-36)等价于

$$\min_{\tilde{\mathbf{X}}} \|\tilde{\mathbf{X}}\|_{\tilde{\mathbb{A}}_{\text{new}}}, \quad s.t. [\tilde{\mathbf{X}}]_{:, k, :} \cdot \mathbf{H}_k^{\text{vel}H} = [\mathbf{Y}_{\text{IF}}]_{:, k, :}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1. \quad (4-52)$$

当(4-31)可以准确估计目标的距离和角度时, 根据引理 4.1, (4-52)可以被进一步写为

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}_{2D}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{X}}} \text{Tr}(\text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}_{2D})) + \text{Tr}(\text{Toep}(\mathbf{u})), \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}_{2D}) & \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{X}}^H & \text{Toep}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \succeq 0, \\ & \mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}} \hat{\mathbf{X}}_{:,k} = \text{vec}\left(\left[\tilde{\mathbf{X}}\right]_{:,:,k}\right), k = 0, 1, 2, \dots, \tilde{N}_p - 1, \\ & \left[\tilde{\mathbf{X}}\right]_{:,k,:} \mathbf{H}_k^{\text{vel}H} = [\mathbf{Y}_{\text{IF}}]_{:,k,:}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1. \end{aligned} \quad (4-53)$$

将(4-53)写成更紧凑的形式, 有

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}_{2D}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{X}}} \text{Tr}(\text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}_{2D})) + \text{Tr}(\text{Toep}(\mathbf{u})), \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}_{2D}) & \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{X}}^H & \text{Toep}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \succeq 0, \hat{\mathbf{x}} = \text{vec}(\hat{\mathbf{X}}), \mathbf{y}_{\text{vec}}^{\text{3D}} = \mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{new}} \hat{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (4-54)$$

其中 $\mathbf{y}_{\text{vec}}^{\text{3D}}$ 与(4-37)中定义一致, $\mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{new}} = \mathbf{H}_{\text{diag}} \cdot \Gamma$, Γ 为重排矩阵, 定义为

$$[\Gamma]_{m,n} \triangleq \begin{cases} 1, & m = (j-1)\tilde{N}_m\tilde{N}_p + (k-1)\tilde{N}_m + i, n = (k-1)\tilde{N}_mK_t + (j-1)\tilde{N}_m + i, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, \tilde{N}_m$, $j = 1, 2, \dots, K_t$, $k = 1, 2, \dots, \tilde{N}_p$ 。当噪声存在时, (4-54)转换为

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}_{2D}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{X}}} \text{Tr}(\text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}_{2D})) + \text{Tr}(\text{Toep}(\mathbf{u})), \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}_{2D}) & \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{X}}^H & \text{Toep}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \succeq 0, \hat{\mathbf{x}} = \text{vec}(\hat{\mathbf{X}}), \|\mathbf{y}_{\text{vec}}^{\text{3D}} - \mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{new}} \hat{\mathbf{x}}\|_2^2 \leq \epsilon, \end{aligned} \quad (4-55)$$

其中 ϵ 为噪声容限。

对比(4-54)、(4-55)和(4-37)、(4-38), 可以看出前两者可被视作后两者的一种解耦形式。特别的, (4-37)和(4-38)中半正定矩阵的规模为 $O(\tilde{N}_m\tilde{N}_pK_t)$, 而(4-54)和(4-55)中的半正定矩阵的规模仅为 $O(\tilde{N}_mK_t + \tilde{N}_p)$, 大幅降低了运算复杂度。

上述算法总结于算法 10 中。

算法10 基于原子范数最小化的宽带多脉冲角度-距离联合估计

```

1: 输入:  $\mathbf{Y}_{\text{IF}}, N_p, T_p, N_m, K_t, \mu, f_s, f_c, \epsilon$ 
2: 输出:  $\{\theta_i, R_i\}_{i=1}^K$ 
3:  $\tilde{f}_k \leftarrow 1 + \mu \frac{k}{f_s f_c}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 
4:  $\tilde{f}_k^{\text{vel}} \leftarrow \tilde{f}_k \cdot \frac{f_c}{f_c^{\text{pseu}}}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 
5: 构造映射矩阵  $\mathbf{H}_k^{\text{ang}}$  和  $\mathbf{H}_k^{\text{vel}}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 
6:  $\mathbf{H}_k^{\text{AngVel}} \leftarrow \mathbf{H}_k^{\text{vel}} \otimes \mathbf{H}_k^{\text{ang}}$ 
7:  $\mathbf{H}_{\text{diag}} \leftarrow \text{diag}(\mathbf{H}_0^{\text{AngVel}}, \dots, \mathbf{H}_{K_t-1}^{\text{AngVel}})$ 
8: 构造重排矩阵  $\mathbf{\Gamma}$ ,  $\mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{new}} \leftarrow \mathbf{H}_{\text{diag}} \cdot \mathbf{\Gamma}$ 
9:  $\mathbf{y}_{\text{vec}}^{\text{3D}} \leftarrow \text{vec}\left(\left[\text{vec}\left([\mathbf{Y}_{\text{IF}}]_{:,0,:}\right), \dots, \text{vec}\left([\mathbf{Y}_{\text{IF}}]_{:,K_t-1,:}\right)\right]\right)$ 
10: if 无噪声 then
    11: 求解 (4-54)
12: else
    13: 求解 (4-55)
14: end if
15:  $\left\{f_{\theta_i}, f_{R_i}\right\}_{i=1}^K \leftarrow \text{Toep}_{2\text{D}} \text{的 Vandermonde 分解}$ 
16:  $R_i \leftarrow -\frac{f_{R_i} f_s c}{2\mu}, \theta_i \leftarrow \arcsin\left(\frac{f_{\theta_i} c}{f_c d}\right), i = 1, 2, \dots, K$ 

```

4.5 数值仿真

为了验证本章所提算法的有效性, 本节通过数值仿真对所提算法的性能进行验证, 并将其与已有算法进行对比以说明所提算法的优越性。本节的仿真均基于 MATLAB R2021b 进行, 其中涉及到优化问题求解的部分均利用 CVX^[93] 包进行求解, 求解器选用 Mosek。

在实际工程中, 宽带 LFM 声呐的频率范围通常在 1500 Hz 至 2500 Hz 之间^[119]。虽然信号时宽的增加可以增加声呐的频率分辨力, 除了本文所讨论的速度模糊的影响以外, 发射脉冲的持续时间还受到信号盲区范围、混响干扰强度、信道起伏和设备量等因素的限制^[117], 因此不可取得过大。综上所述, 本节假设发射信号 $s(t)$ 如(4-1)所定义, 其中起始频率 $f_c = 1500$ Hz, 带宽 $B = 1000$ Hz, 脉冲持续时间 $T_c = 0.01$ s, 脉冲重复间隔 $T_p = 0.015$ s, 脉冲数 $N_p = 5$ 。接收阵列为一个 5 元均匀线阵, 即 $N_m = 5$, 其中阵元间隔 d 为最低频率对应的波长的一半, 即 $d = \frac{c}{2f_c}$, 其中声速取 $c = 1500$ m/s。

假设共有三个目标, 其方位角 θ 分别为 59.8° , 51.2° 和 -20.3° 。此处不将方位角设置为整数主要是为了突出有网格算法中网格失配的影响。具体的, 有网格方法中将角度空间划分为间隔为 1° 的网格, 此时所设置的方位角均不落在网格上, 能够更明显的看出网格失配的影响。将目标的径向距离 R 分别设置为 2 m, 4 m 和 3 m。相应的, 有网格方法中将距离划分为间隔为 0.5 m 的网格, 此时不存在网格失配。需要指出的是, 此处的径向距离 R 为相对于参考距离 R_{ref} 的距离,

本章所提算法均在已对参考距离 R_{ref} 进行了补偿的假设下提出。取 $f_s = 667 \text{ Hz}$, 此时一个脉冲内快时间采样点数 $K_t = 7$ 。最后, 假设目标的径向速度 v 分别为 10 m/s , -10 m/s 和 9 m/s 。

首先考虑单脉冲的情况。在传统声呐信号处理方法中, 通常先对接收信号进行波束形成以获得目标的角度估计, 并对各波束数据进行匹配滤波/脉冲压缩进一步得到目标距离的估计^[3,117]。由于本章所考虑的发射信号为 LFM 信号, 因此上述脉冲压缩可通过第4.2节中的解线频调实现^[119–122]。为了展现传统方法的性能, 本章利用常规波束形成方法对接收信号进行波束形成, 并对得到的信号直接做 DFT 以估计目标距离。正如第4.3节最后所讨论的, 时间采样指标和阵元指标的耦合与距离徙动问题本质上一致。虽然 Keystone 变换可以补偿距离徙动带来的影响, 但在本章所考虑的问题中, 频率高于 f_c 的部分会出现空间频率的混叠, 导致 Keystone 变换后出现伪峰。值得一提的是, 当接收阵元个数 N_m 较大时, 这一现象在本章的设定下(即 $d = \frac{c}{2f_c}$)几乎可以忽略不计。这是因为此时低频部分不存在混叠, 仅高频部分会出现混叠, 且高频部分的混叠数也不同。当阵元个数够大时, 混叠的部分会被平均分散到频谱中, 而未混叠的部分(即目标参数所对应的部分)则会由于相干积累而加强, 使得混叠的影响可被忽略。为了说明这一点, 将阵元 N_m 设置为 100, 信噪比取 30 dB , 将传统方法(对接收信号直接做 DFT)和 Keystone 变换后做 DFT 得到的归一化功率谱分别绘制于图 4-2a 和图 4-2b 中, 其中 Keystone 变换通过三次样条插值实现。

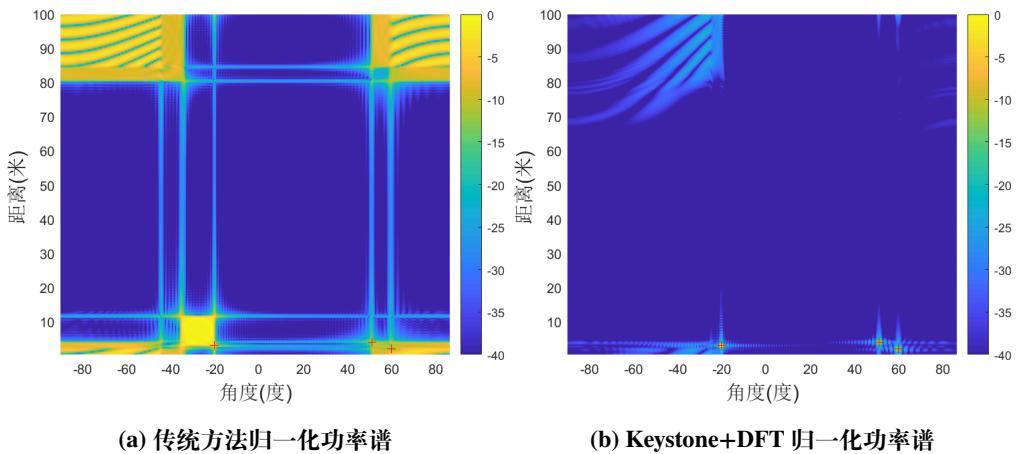


图 4-2 大孔径 ($N_m = 100$) 下的归一化功率谱

Figure 4-2 Normalized Power Spectrum When the Array Aperture is Large ($N_m = 100$)

图中的红色 + 号表示目标参数位置。从图 4-2a 中可以看出, 此时由于阵元指标和快时间采样指标耦合, 导致频谱扩散, 因此传统方法无法准确估计目标参数。从图 4-2b 中可以看出, 经过 Keystone 变换后, 频谱被聚焦到目标参数处, 然而由于高频部分的混叠导致仍存在伪影, 但其功率相对于目标而言足够小, 因此不影响对目标的参数估计。

然而, 当阵列孔径较小时, 混叠的部分无法被充分平均到频谱中, 此时会出

现功率较大的伪峰，极大的影响目标参数估计的性能。为了说明这一点，将 N_m 设置回5，信噪比同样取30 dB，将传统方法和Keystone变换后做DFT得到的归一化功率谱分别绘制于图4-3a和图4-3b中，其中Keystone变换通过三次样条插值实现。图中的红色+号表示目标参数位置。从图4-3可以看出，虽然相比于传

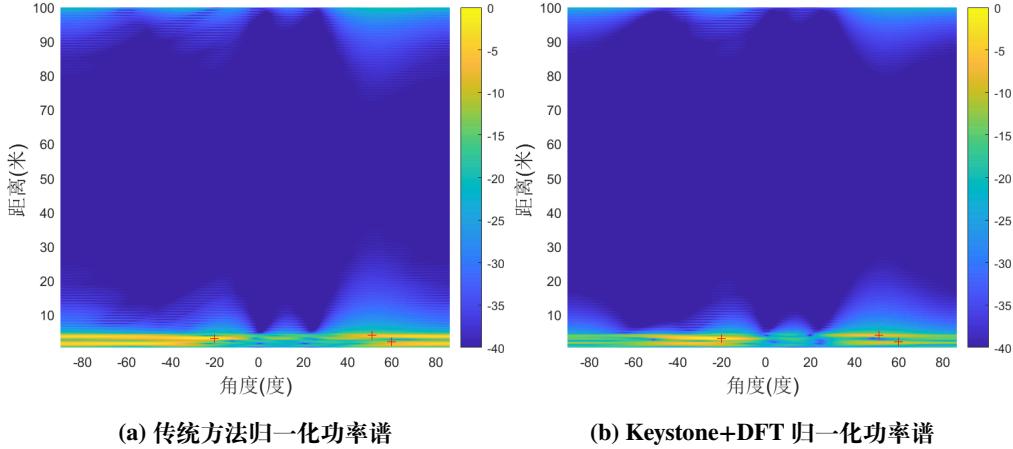


图4-3 小孔径($N_m = 5$)下的归一化功率谱

Figure 4-3 Normalized Power Spectrum When the Array Aperture is Small ($N_m = 5$)

统方法，经过Keystone变换后频谱相对更集中，但在图4-3b的左下角处仍存在功率较高的伪峰，因此难以从中辨别目标。另外，从图4-3中还可看出传统DFT方法的分辨率严重受限于阵列孔径，当孔径较小时主瓣宽度较大，分辨率较低。

相比于传统算法，本章所提的基于稀疏恢复的算法可以有效抑制混叠的影响，且能实现高分辨估计。将信噪比设置为30 dB（即不考虑噪声影响），分别将基于SBL的单脉冲有网格算法、基于ANM的单脉冲无网格算法和基于ANM的多脉冲无网格算法在100次Monte Carlo仿真后对距离-角度的估计结果绘制于图4-4a、图4-4b和图4-4c中，其中SBL方法中以 1° 为间隔对角度进行划分，以0.1 m为间隔对距离进行划分。值得一提的是，文献[108]中的方法也可用于本章所研究的问题中。但正如第4.3节中所讨论的，此时其算法的规模过大，导致其难以在实际应用中进行部署，因此此处不再对其性能进行仿真。对于多脉冲ANM方法，为了实现多个脉冲间的相干积累，需要先对速度的范围进行限制。一般而言，水中目标的速度在40节以内，约为20 m/s，因此可以设置最大速度 $v_{\max} = 20$ m/s。注意到按照仿真的参数设置，若采用常规的Keystone变化来消除距离徙动的影响，则为避免速度模糊，最大可估计的速度 $v_{\max}^0 = \frac{c}{4(f_c + B)T_p} = 10$ m/s $< v_{\max}$ 。然而，根据第4.4节和第4.2节最后的讨论，基于(4-11)的信号模型，算法能处理的目标的最大速度实际上为 $v_{\max}^{\text{new}} = \frac{f_s c}{4\mu T_p} = 250$ m/s $\gg v_{\max}^0$ 。在本章提出的多脉冲ANM方法中，此最大速度可通过构造相应的 $\mathbf{H}_k^{\text{vel}}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 实现。然而，算法10中的 \tilde{N}_p 与设置的最大速度 v_{\max} 密切相关， v_{\max} 越大，相应的 \tilde{N}_p 也就越大，算法规模也随之上升。考虑到实际的应用场景，此处仍设置 $v_{\max} = 20$ m/s。

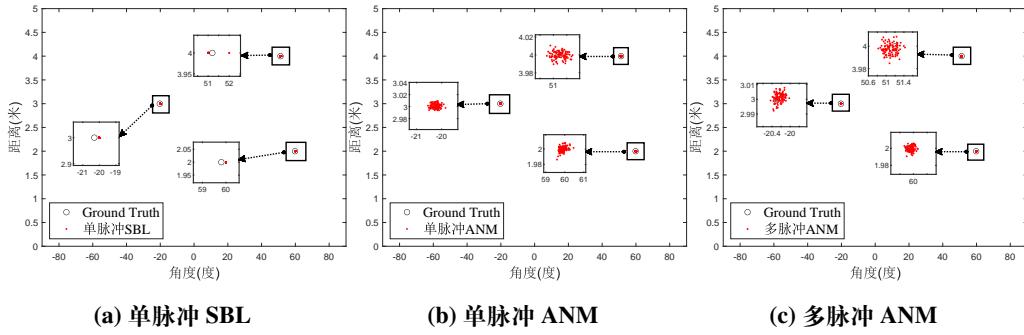


图 4-4 距离-角度估计结果

Figure 4-4 Joint Range-Angle Estimation Results

从图 4-4 中可以看出，此时三种基于稀疏恢复的算法均可抑制混叠，实现准确的距离-角度联合估计。从图 4-4a 中可以看出，SBL 方法的估计结果集中于真值附近的有限个网格上。其中，由于目标的距离均落在事先划分的网格上，因此 SBL 方法能够实现无偏的距离估计。然而，由于目标的角度不落在划分的网格上，因此此时 SBL 方法对角度的估计均落在真值附近的网格上，无法实现精确的估计。与之相反，从图 4-4b 中可以看出，无网格的单脉冲 ANM 方法的估计结果连续聚集在真值附近，相比 SBL 方法有更高的精确性。从图 4-4c 中可以看出，多脉冲 ANM 算法通过利用多个脉冲的相干积累，相比单脉冲方法估计结果更加聚焦于真值处，实现了更精确的估计。

为了进一步验证所提算法在噪声环境下的性能，将上述算法在不同信噪比下进行测试，设置信噪比范围为 $-2 \sim 40$ dB。与第3章相同，仍用估计的根方误差 (RSE, root square error) 来判定估计是否成功。分别定义角度 θ 和距离 R 的估计的归一化 RSE，即 RSE_{θ} 和 RSE_R 为

$$\text{RSE}_\theta = \frac{1}{180} \sqrt{\left[\frac{1}{N_{\text{Tar}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} (\hat{\theta}_k - \theta_k)^2 \right]},$$

$$\text{RSE}_R = \frac{1}{R_{\max}} \sqrt{\left[\frac{1}{N_{\text{Tar}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} (\hat{R}_k - R_k)^2 \right]}, \quad (4-56)$$

其中 $N_{\text{Tar}} = 3$ 为目標个数, R_{\max} 为最大距离, θ_k 和 R_k 分别为目標的真实方位角和径向距离, $k = 1, 2, \dots, N_{\text{Tar}}$, $\hat{\theta}_k$ 和 \hat{R}_k 分别为对第 k 个目標的角度和距离的估计。令距离和角度估计的 RSE 均小于 0.1 时认为估计成功。算法的性能可以通过估计结果的根均方误差 (RMSE, root mean square error) 来描述, 分别定义对

角度 θ 和距离 R 的估计的归一化 RMSE，即 RMSE_θ 和 RMSE_R 为

$$\begin{aligned}\text{RMSE}_\theta &= \frac{1}{180} \sqrt{\frac{1}{N_{\text{Trial}}^{\text{succ}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{Trial}}^{\text{succ}}} \left[\frac{1}{N_{\text{Tar}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} (\hat{\theta}_{k,n} - \theta_k)^2 \right]}, \\ \text{RMSE}_R &= \frac{1}{R_{\max}} \sqrt{\frac{1}{N_{\text{Trial}}^{\text{succ}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{Trial}}^{\text{succ}}} \left[\frac{1}{N_{\text{Tar}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} (\hat{R}_{k,n} - R_k)^2 \right]},\end{aligned}\quad (4-57)$$

其中 $N_{\text{Trial}}^{\text{succ}}$ 为 Monte Carlo 仿真中的成功次数， $\hat{\theta}_{k,n}$ 和 $\hat{R}_{k,n}$ 分别为第 n 次仿真中算法对第 k 个目标的角度和距离的估计。距离-角度联合估计的目的之一是实现目标的定位。对于第 n 次仿真中对第 k 个目标的估计，位置的估计误差为 $\text{pos}_{\text{err}} = \sqrt{\hat{R}_{k,n}^2 + R_k^2 - 2\hat{R}_{k,n}R_k \cos(\hat{\theta}_{k,n} - \theta_k)}$ 。基于此，可以定义位置估计的归一化 RMSE 为

$$\text{RMSE}_{\text{pos}} = \frac{1}{R_{\max}} \sqrt{\frac{1}{N_{\text{Trial}}^{\text{succ}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{Trial}}^{\text{succ}}} \left[\frac{1}{N_{\text{Tar}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} (\hat{R}_{k,n}^2 + R_k^2 - 2\hat{R}_{k,n}R_k \cos(\hat{\theta}_{k,n} - \theta_k))^2 \right]}.$$

分别将各算法的成功估计次数、 RMSE_θ 、 RMSE_R 和 RMSE_{pos} 随 SNR 的变化曲线绘制于图 4-5a、图 4-5b、图 4-5c 和图 4-5d 中。从图 4-5 中可以看出，随着信噪比的增加，所有算法的精度均展现出提升的趋势。其中，从图 4-5a 可以看出，当信噪比较低时，两种单脉冲算法的估计成功率均较低，而多脉冲算法由于实现了相干积累在低信噪比时仍可实现成功估计。当信噪比高于 5 dB 时，两种单脉冲算法也可实现成功估计。从图 4-5b 可以看出，在低信噪比时，此时噪声对算法的性能占主导地位，单脉冲 SBL 方法的精度与单脉冲 ANM 方法相当，表明二者均有较好的鲁棒性。但当信噪比足够高时（超过 25 dB），网格失配的影响开始占据主导地位，此时单脉冲 ANM 方法的精度开始显著优于单脉冲 SBL 方法，展现了无网格方法的优势。这一现象在图 4-5d 中也有体现，当信噪比超过 24 dB 时，无网格方法由于不受到网格失配的影响，从而能取得更高的位置估计精度。图 4-5c 展现了网格失配不存在时有网格算法的优势。从图 4-5c 可以看出，由于此时距离不存在网格失配，有网格的 SBL 方法在信噪比足够高（ $\text{SNR} > 15$ dB）时能够实现精确估计（此时 $\text{RMSE}_R = 0$ ）。

对于多脉冲的情况，由于实现了相干积累，当信噪比不超过 30 dB 时，从图 4-5 中可以看出多脉冲 ANM 方法在所有参数的估计性能上均优于单脉冲方法。然而，当信噪比超过 30 dB 时，此时单脉冲 ANM 方法在距离上性能超过多脉冲 ANM 方法；当信噪比超过 35 dB 时，单脉冲 ANM 在角度估计和位置估计的性能上也超过了多脉冲方法。这主要是因为多脉冲 ANM 方法中为实现多脉冲相干积累而设计的 $\mathbf{H}_k^{\text{vel}}$ 是非理想的，即(4-47)中的等号并不严格成立，导致这一操作实际上引入了噪声，此处称其为算法噪声。当信噪比不够高时（在此处为小于 30 dB），此时环境噪声占主导因素，由于多脉冲 ANM 方法通过相干积累抑制了环境噪声，因此能取得比单脉冲情况更好的估计性能。当信噪比足够高时

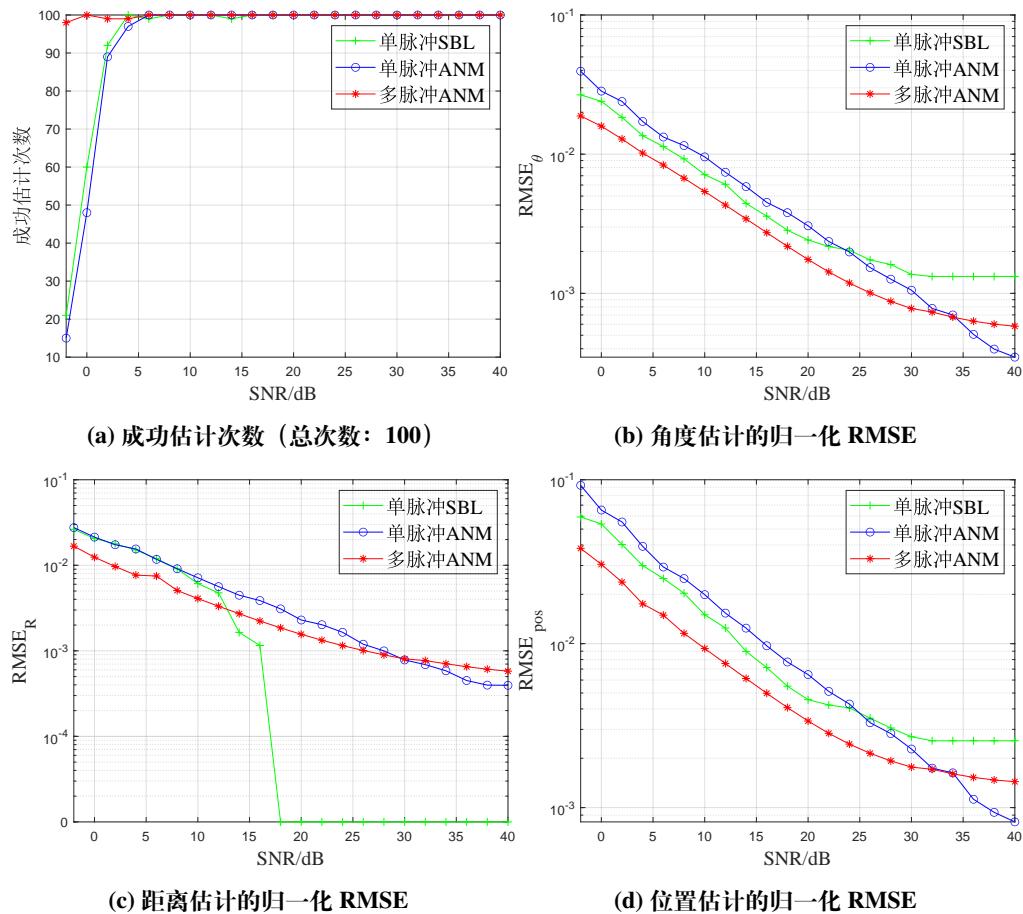


图 4-5 不同信噪比下的成功估计次数和归一化 RMSE

Figure 4-5 Number of successful trials and normalized RMSEs under various SNRs

(在此处表现为高于30 dB), 此时算法噪声占主导, 多脉冲ANM算法通过抑制环境噪声带来的好处不足以抵消其引入的算法噪声的影响, 因此此时单脉冲ANM算法展现出更好的参数估计性能。最后, 需要指出的是, 当网格失配存在时, 从图4-5b和图4-5d中可以看出, 有网格方法在信噪比高于30 dB后性能不再得到提升, 而两种无网格方法的RMSE却持续展现出下降趋势, 这体现了无网格方法的优越性。

当信噪比较低时, 可以通过使用更多的阵元个数以提升抗噪性能。此外, 实际场景中目标参数常不落在事先划定的网格上, 网格失配的现象更加普遍。为了对实际应用中的情况进行仿真, 在上述仿真设置的基础上, 设置阵元数 $N_m=20$, 设置目标相对距离 R 分别为2.2 m, 4.3 m和3.2 m。相应的, 有网格方法仍将距离划分为间隔0.5 m的网格, 此时距离维也存在网格失配。其它参数设置与之前一致。将信噪比设置为-10 dB, 分别将基于SBL的单脉冲有网格算法、基于ANM的单脉冲无网格算法和基于ANM的多脉冲无网格算法在100次Monte Carlo仿真后对距离-角度的估计结果绘制于图4-6a、图4-6b和图4-6c中。从图4-6可以看

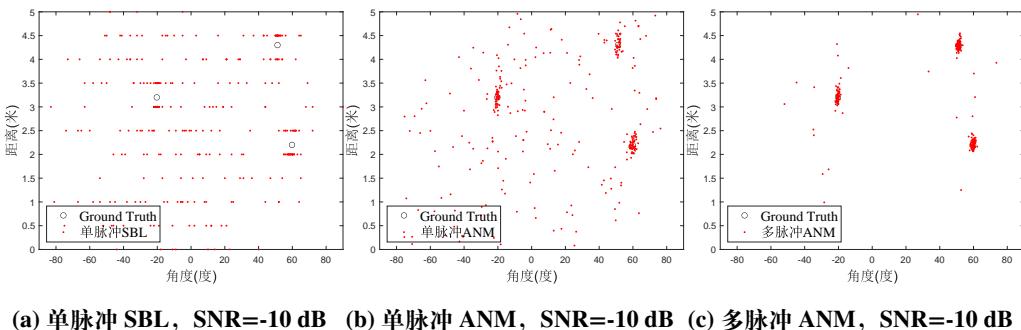


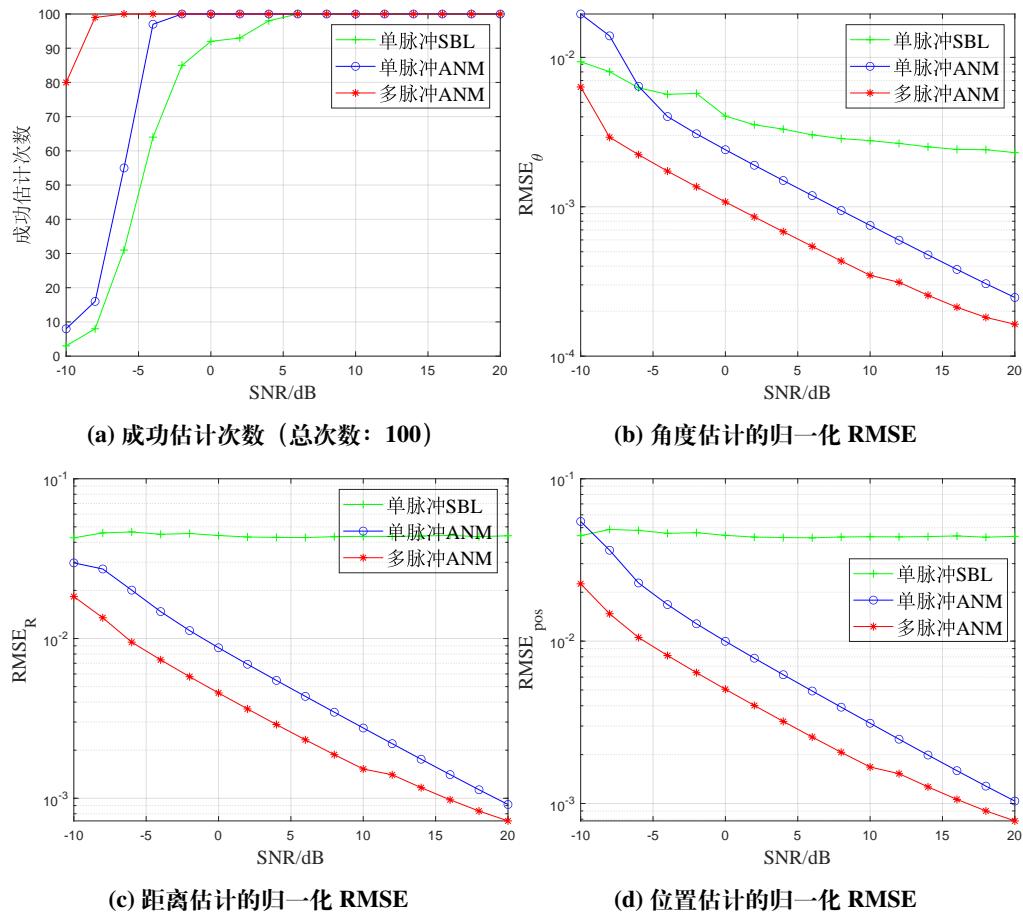
图4-6 SNR=-10 dB时距离-角度估计结果

Figure 4-6 Joint Range-Angle Estimation Results when SNR=-10 dB

出, 由于信噪比较低, 此时三种算法均会产生错误的距离-角度估计。从图4-6a中可以看出, 由于此时在距离和角度维上均出现网格失配, 因此有网格的SBL算法难以实现准确的估计。与之相反, 所提两种无网格算法的大部分估计结果均聚焦于真值处, 精确性更高。对比图4-6b和图4-6c, 可以看出由于实现了多脉冲积累, 多脉冲ANM算法产生错误估计的次数更少, 估计结果更加聚焦于真值处, 实现了更精确的估计。

接下来将上述算法在不同信噪比下进行测试, 设置信噪比范围为-10 dB至20 dB, 分别将各算法的成功估计次数、 RMSE_θ 、 RMSE_R 和 RMSE_{pos} 随SNR的变化曲线绘制于图4-7a、图4-7b、图4-7c和图4-7d中。

从图4-7中可以看出, 随着信噪比的增加, 所有算法的精度均展现出上升的趋势, 这与图4-5中 $N_m=5$ 的情况一致。与图4-5相比, $N_m=20$ 时各算法的抗噪能力更强, 可以在更低信噪比下实现期望的估计精度。值得注意的是, 从图4-7a中可以看出, 由于此时网格失配情况更严重, 有网格的SBL算法在低信

图 4-7 不同信噪比下的成功估计次数和归一化 RMSE, $N_m = 20$ Figure 4-7 Number of successful trials and normalized RMSEs under various SNRs, $N_m = 20$

噪比下的成功率显著低于无网格算法。具体的，单脉冲ANM算法在信噪比达到-2 dB后即可实现成功估计，而单脉冲SBL算法却需要5 dB以上的信噪比才可实现准确估计。从图4-7中可看出，在均实现成功估计的情况下，无网格算法由于不受到网格失配的影响，RMSE更低，估计更精确。特别的，由于实现了多脉冲相干积累，所提多脉冲ANM算法在常见的-10 dB到10 dB范围内均有较高的估计成功率，且精度优于两种单脉冲算法，展现了所提算法在实际应用中的可行性。

4.6 本章小结

本章对宽带LFM脉冲声呐的角度-距离联合估计问题进行了研究。基于原子范数最小化方法，本章分别对单脉冲和多脉冲的情况提出了无网格的角度-距离联合估计算法。仿真结果表明，所提无网格算法均能有效抑制混叠的影响，且由于不受到网格失配的影响，在高信噪比时性能优于有网格算法。所提多脉冲算法成功消除了距离徙动的影响，实现了多脉冲相干积累。与单脉冲算法相比，多脉冲算法由于实现了多脉冲相干积累在低信噪比时性能更佳。但当信噪比足够高时，由于未引入额外的算法噪声，此时单脉冲算法的性能优于多脉冲算法。

综上所述，当信噪比足够高时，本章所提的单脉冲无网格算法可实现更准确的距离-角度联合估计，因此可利用单脉冲算法获得更准确的目标轨迹；然而，当探测距离较远时，由于此时信噪比较低，所提多脉冲无网格算法则因相比单脉冲算法可获得更高的抗噪能力更具优势。

另外，为了抑制信号带宽增加带来的角度混叠和距离徙动的问题，本章分别提出了一种映射算子和一种抑制距离徙动的变换策略。上述操作导致算法规模上升。当信号满足窄带假设且或不存在距离徙动时，本章所提算法相比窄带算法优势并不明显，但算法规模却更大。因此，本章所提算法更适合在信号带宽较大的场景中使用。

第5章 基于压缩感知的宽带主动声呐角度-速度联合估计

5.1 前言

水下混响是声呐探测中面临的主要问题。速度/多普勒信息的提取是混响抑制的主要手段。针对运动目标，角度-速度联合估计可以将目标和混响以及干扰分辨开。第4章已对宽带主动声呐的角度-距离联合估计问题进行了研究，在此基础上，为了利用信号的多维信息，为混响抑制提供基础，本章进一步对角度-速度联合估计问题展开研究。

为了在有限快拍数的条件下实现参数估计，本章主要基于压缩感知方法，分别从有网格和无网格的角度对宽带信号角度-速度联合估计问题进行研究。和前文一样，本章仍基于原子范数最小化理论进行无网格算法的设计。在本章所考虑问题中应用原子范数最小化方法的主要难点为：1) 基于宽带信号角度-速度联合估计问题中的信号模型构造的原子集所对应的对偶原子范数约束不满足三角多项式不等式约束的形式，导致有界引理无法被直接应用；2) 在宽带信号角度-速度联合估计问题中，为了利用距离信息带来的特殊结构，通常需要进行三维参数估计，导致算法规模异常巨大，使得算法难以在实际应用中部署。针对第一个问题，本章提出了一种全新的映射算子，将相应的对偶原子范数约束转化为了二元三角多项式不等式约束，并利用有界引理将对偶问题转化为了可规划求解的SDP问题，并通过Lagrange对偶分析得到了原问题的SDP形式；针对第二个问题，通过将距离信息与角度-速度信息解耦，本章提出了一种解耦的三维参数估计方法，使得算法规模相对降低以便于部署。

本章内容组织如下：基于第4.2节得到的信号模型，第5.2节首先基于多字典SBL方法推导了一种有网格的角度-速度联合估计算法；接下来，第5.3节基于原子范数最小化方法分别推导了忽略距离信息和考虑距离信息的无网格角度-速度联合估计算法；第5.4节通过仿真实验将所提算法与已有算法进行了对比，展现了所提算法的优越性；最后第5.5节基于仿真结果对本章所提算法进行了总结。

5.2 基于多字典SBL的有网格压缩感知宽带角度-速度联合估计

从(4-11)中可以看出，由于此时仅关注角度 θ 和速度 v ，因此与距离相关的 $\exp(-j2\pi\mu\frac{2R}{c}k)$ 可被视作常数吸收进 $\tilde{\alpha}$ 中。基于上述观察，将(4-11)重写为

$$\begin{aligned} Y_k(l, m) \triangleq Y_{\text{IF}}^l(k, m) &= \sum_{i=1}^{N_{\text{Tar}}} \beta_{i,k} \cdot \exp \left(j2\pi \left(f_c + \frac{\mu}{f_s} k \right) \frac{d \sin \theta_i}{c} l \right) \cdot \\ &\quad \exp \left(-j2\pi \left(f_c + \frac{\mu}{f_s} k \right) \frac{2v_i T_p}{c} m \right) + n_l \left(\frac{k}{f_s}, m T_p \right), \end{aligned} \quad (5-1)$$

其中 $\beta_{i,k} = \tilde{\alpha}_i \exp\left(-j2\pi\mu \frac{2R_i}{cf_s} k\right)$ 。令 $[\mathbf{Y}_k]_{l,m} = Y_k(l, m)$, 有

$$\mathbf{Y}_k = \sum_{i=1}^{N_{\text{Tar}}} \beta_{i,k} \mathbf{a}_\theta(\tilde{f}_k, f_{\theta_i}) \mathbf{a}_v^T(\tilde{f}_k^{\text{vel}}, f_{v_i}) + \mathbf{N}_k. \quad (5-2)$$

对 \mathbf{Y}_k 向量化, 可以得到

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_k &= \text{vec}(\mathbf{Y}_k) = \sum_{i=1}^{N_{\text{Tar}}} \beta_{i,k} \tilde{\mathbf{a}}(\tilde{f}_k, (v_i, \theta_i)) + \tilde{\mathbf{n}}_k \\ &= \mathbf{A}_k \boldsymbol{\beta}_k + \tilde{\mathbf{n}}_k, \end{aligned} \quad (5-3)$$

其中 $\tilde{\mathbf{n}}_k = \text{vec}(\mathbf{N}_k)$, $\boldsymbol{\beta}_k = [\beta_{1,k}, \dots, \beta_{N_{\text{Tar}},k}]^T$, $\tilde{\mathbf{a}}(\tilde{f}_k, (v_i, \theta_i)) = \mathbf{a}_v(\tilde{f}_k^{\text{vel}}, f_{v_i}) \otimes \mathbf{a}_\theta(\tilde{f}_k, f_{\theta_i})$, $\mathbf{A}_k = [\tilde{\mathbf{a}}(\tilde{f}_k, (v_1, \theta_1)), \dots, \tilde{\mathbf{a}}(\tilde{f}_k, (v_{N_{\text{Tar}}}, \theta_{N_{\text{Tar}}}))]$ 。

从(5-3)的最后一个等式可以看出, 通过将 \mathbf{A}_k 扩展为超完备字典, 待估参数可由压缩感知算法求得。具体的, 首先将 v 和 θ 的取值范围划分为细密的网格, 分别构成集合 \mathbb{V} 和集合 Θ 。令 $\bar{\mathbf{A}}_v^k \triangleq [\mathbf{a}_v(\tilde{f}_k^{\text{vel}}, f_{v_1}), \mathbf{a}_v(\tilde{f}_k^{\text{vel}}, f_{v_2}), \dots, \mathbf{a}_v(\tilde{f}_k^{\text{vel}}, f_{v_{|\mathbb{V}|}})]$, $\bar{\mathbf{A}}_\theta^k \triangleq [\mathbf{a}_\theta(\tilde{f}_k, f_{\theta_1}), \mathbf{a}_\theta(\tilde{f}_k, f_{\theta_2}), \dots, \mathbf{a}_\theta(\tilde{f}_k, f_{\theta_{|\Theta|}})]$, 其中 $\theta_{i_\theta} \in \Theta, i_\theta = 1, 2, \dots, |\Theta|, v_{i_v} \in \mathbb{V}, i_v = 1, 2, \dots, |\mathbb{V}|$, $|\cdot|$ 表示集合的势。将对 \mathbf{A}_k 扩展得到的超完备字典用 $\tilde{\mathbf{A}}_k$ 表示, 有

$$\tilde{\mathbf{A}}_k = \bar{\mathbf{A}}_v^k \otimes \bar{\mathbf{A}}_\theta^k. \quad (5-4)$$

当网格足够细密时, $\exists \tilde{\boldsymbol{\beta}}_k \in \mathbb{C}^{|\mathbb{V}| \cdot |\Theta|}$, 使得

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \tilde{\mathbf{A}}_k \tilde{\boldsymbol{\beta}}_k + \tilde{\mathbf{n}}_k. \quad (5-5)$$

此时 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_k$ 为一稀疏向量, 其支撑集可由压缩感知算法求得, 并由此得到待估参数 v 和 θ 的估计。令 $\tilde{\mathbf{B}} \triangleq [\tilde{\boldsymbol{\beta}}_0, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_{K_t-1}]$ 。可以看出 $\tilde{\mathbf{B}}$ 具有组稀疏性, 因此可以构造如下优化问题求解

$$\min_{\tilde{\mathbf{B}}} \left\| \tilde{\mathbf{B}} \right\|_{2,1}, \quad s.t. \quad \left\| \tilde{\mathbf{y}}_k - \tilde{\mathbf{A}}_k \tilde{\boldsymbol{\beta}}_k \right\|_2^2 \leq \epsilon_k, k = 0, 1, \dots, K_t - 1, \quad (5-6)$$

其中 ϵ_k 表示噪声阈值。

上述优化问题虽然可解, 但由于问题规模较大而求解复杂。为了满足实时性的需要, 下文使用多字典 SBL 方法^[71] 实现对参数的估计。

假设 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_k, \tilde{\mathbf{n}}_k, k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 相互独立且均符合 0 均值圆对称高斯分布。由于 $\tilde{\mathbf{B}}$ 具有组稀疏性, 因此可假设 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_k, k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 满足共协方差矩阵先验, 即所有的 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_k$ 的协方差矩阵相同, 均为 $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda)$, 其中 $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_{|\mathbb{V}| \cdot |\Theta|}]^T \in \mathbb{R}^{|\mathbb{V}| \cdot |\Theta|}$ 。因此有

$$p(\tilde{\mathbf{B}}) = \prod_{k=0}^{K_t-1} p(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_k) = \prod_{k=0}^{K_t-1} \mathcal{CN}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_k; \mathbf{0}, \boldsymbol{\Lambda}). \quad (5-7)$$

假设 $\tilde{\mathbf{n}}_k \sim \mathcal{CN}\left(0, \sigma_k^2 \mathbf{I}_{N_p N_m}\right)$, 可求得后验概率为

$$p\left(\tilde{\mathbf{y}}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{K_t-1} \mid \widetilde{\mathbf{B}}\right) = \prod_{k=0}^{K_t-1} p\left(\tilde{\mathbf{y}}_k \mid \tilde{\boldsymbol{\beta}}_k\right) = \prod_{k=0}^{K_t-1} \mathcal{CN}\left(\tilde{\mathbf{y}}_k; \widetilde{\mathbf{A}}_k \tilde{\boldsymbol{\beta}}_k, \sigma_k^2 \mathbf{I}_{N_p N_m}\right). \quad (5-8)$$

结合(5-7)和(5-8)可得

$$\begin{aligned} p\left(\tilde{\mathbf{y}}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{K_t-1}\right) &= \prod_{k=0}^{K_t-1} p\left(\tilde{\mathbf{y}}_k\right) = \prod_{k=0}^{K_t-1} \int p\left(\tilde{\mathbf{y}}_k \mid \tilde{\boldsymbol{\beta}}_k\right) p\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_k\right) d\tilde{\boldsymbol{\beta}}_k \\ &= \prod_{k=0}^{K_t-1} \mathcal{CN}\left(\tilde{\mathbf{y}}_k; 0, \widetilde{\mathbf{A}}_k \Lambda \widetilde{\mathbf{A}}_k^H + \sigma_k^2 \mathbf{I}_{N_p N_m}\right). \end{aligned} \quad (5-9)$$

对(5-9)取对数可得

$$\begin{aligned} &\log p\left(\tilde{\mathbf{y}}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{K_t-1}\right) \\ &= - \sum_{k=0}^{K_t-1} \left(\log \left(\det \left(\widetilde{\mathbf{A}}_k \Lambda \widetilde{\mathbf{A}}_k^H \right) \right) + \tilde{\mathbf{y}}_k^H \left(\widetilde{\mathbf{A}}_k \Lambda \widetilde{\mathbf{A}}_k^H \right)^{-1} \tilde{\mathbf{y}}_k \right) + \text{常数}. \end{aligned} \quad (5-10)$$

通过最大化上述对数概率密度即可获得对 λ 的估计 $\hat{\lambda}$, 即

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \arg \max_{\lambda} \log p\left(\tilde{\mathbf{y}}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{K_t-1}\right) \\ &= \arg \min_{\lambda} \sum_{k=0}^{K_t-1} \left(\log \left(\det \left(\widetilde{\mathbf{A}}_k \Lambda \widetilde{\mathbf{A}}_k^H \right) \right) + \tilde{\mathbf{y}}_k^H \left(\widetilde{\mathbf{A}}_k \Lambda \widetilde{\mathbf{A}}_k^H \right)^{-1} \tilde{\mathbf{y}}_k \right). \end{aligned} \quad (5-11)$$

(5-11)可以通过 Nanuuru 等人^[71] 提出的迭代算法求解, 具体的,

$$\lambda_i^{\text{new}} = \lambda_i^{\text{old}} \left(\frac{\sum_{k=0}^{K_t-1} \text{Tr} \left(\Sigma_{\tilde{\mathbf{y}}_k}^{-1} \left[\widetilde{\mathbf{A}}_k \right]_{:,i} \left[\widetilde{\mathbf{A}}_k \right]_{:,i}^H \Sigma_{\tilde{\mathbf{y}}_k}^{-1} \mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{y}}_k} \right)}{\sum_{k=0}^{K_t-1} \text{Tr} \left(\Sigma_{\tilde{\mathbf{y}}_k}^{-1} \left[\widetilde{\mathbf{A}}_k \right]_{:,i} \left[\widetilde{\mathbf{A}}_k \right]_{:,i}^H \right)} \right)^b, \quad (5-12)$$

其中 $\Sigma_{\tilde{\mathbf{y}}_k} \triangleq \widetilde{\mathbf{A}}_k \Lambda \widetilde{\mathbf{A}}_k^H + \sigma_k^2 \mathbf{I}_{N_p N_m}$, $\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{y}}_k} \triangleq \tilde{\mathbf{y}}_k \tilde{\mathbf{y}}_k^H$, b 为控制收敛速率的可调参数。
(5-12)中需要用到噪声功率 σ_k^2 , 当其未知时, 可以对其做如下估计

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{N_m N_p - N_{\text{Tar}}} \text{Tr} \left(\left(\mathbf{I}_{N_p N_m} - \left[\widetilde{\mathbf{A}}_k \right]_{:, \mathcal{T}} \left[\widetilde{\mathbf{A}}_k \right]_{:, \mathcal{T}}^H \right) \mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{y}}_k} \right), \quad (5-13)$$

其中 \mathcal{T} 为 λ 的支撑集, 即 λ 中最大的 N_{Tar} 个元素对应的索引, $(\cdot)^{\dagger}$ 表示伪逆。

最后, 角度 θ 和速度 v 的联合谱 **Spec** 可由估计得到的 $\hat{\lambda}$ 重新排列为 $|\Theta| \times |\mathbb{V}|$ 的矩阵得到, 即

$$\mathbf{Spec} = \text{reshape} (\hat{\lambda}, |\Theta|, |\mathbb{V}|). \quad (5-14)$$

上述算法总结于算法 11 中。

算法 11 基于多字典 SBL 的宽带声呐角度-速度联合估计算法

- 1: 输入: $\mathbf{Y}_k, k = 0, 1, \dots, K_t - 1, N_p, T_p, N_m, K_t, \mu, f_s, f_c$
- 2: 输出: $\{\theta_i, v_i\}_{i=1}^K$
- 3: $\tilde{f}_k \leftarrow 1 + \mu \frac{k}{f_s f_c}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1$
- 4: $\tilde{\mathbf{y}}_k \leftarrow \text{vec}(\mathbf{Y}_k), k = 0, 1, \dots, K_t - 1$
- 5: 根据(5-4)构造超完备字典 $\tilde{\mathbf{A}}_k, k = 0, 1, \dots, K_t - 1$
- 6: 根据(5-12)和(5-13)迭代求解(5-11), 得到 $\hat{\lambda}$
- 7: 根据(5-14)得到角度 θ 和速度 v 的联合谱 Spec

5.3 基于原子范数最小化的无网格压缩感知宽带角度-速度联合估计

算法 11 为有网格算法, 当目标的角度和速度没有落在事先划定的网格上时会出现网格失配的问题。基于原子范数最小化的无网格方法可以解决这一问题。

将 $\tilde{\mathbf{y}}_k, k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 排列为矩阵 $\tilde{\mathbf{Y}} \triangleq [\tilde{\mathbf{y}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{K_t-1}]$, 有

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{tar}}} \tilde{\beta}_i \tilde{\mathbf{A}}_{\theta, v} \left(f_{v_i}, f_{\theta_i} \right) \odot \mathbf{b}_i^T + \tilde{\mathbf{N}}, \quad (5-15)$$

其中 $\tilde{\beta}_i \triangleq \sqrt{\sum_{k=0}^{K_t-1} \beta_{i,k}^2}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{\theta, v}(f_v, f_\theta) \triangleq [\tilde{\mathbf{a}}(\tilde{f}_0, (v, \theta)), \dots, \tilde{\mathbf{a}}(\tilde{f}_{K_t-1}, (v, \theta))]$, $\mathbf{b}_i \triangleq \frac{1}{\tilde{\beta}_i} [\beta_{i,0}, \beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,K_t-1}]^T$ 。基于(5-15)的形式, 可以构造原子集 $\mathbb{A}_{v,\theta}$ 为

$$\mathbb{A}_{v,\theta} \triangleq \left\{ \tilde{\mathbf{A}}_{\theta, v}(f_v, f_\theta) \odot \mathbf{b}^T : [f_v, f_\theta]^T \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^2, \|\mathbf{b}\|_2^2 = 1 \right\}. \quad (5-16)$$

可以通过如下原子范数最小化问题来实现对角度 θ 和速度 v 的联合估计

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}_{v,\theta}}, \quad s.t. \|\tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{X}\|_2^2 \leq \epsilon, \quad (5-17)$$

其中 ϵ 为噪声阈值。不考虑噪声时, 上式转换为

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}_{v,\theta}}, \quad s.t. \tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}. \quad (5-18)$$

类似第4.3节中的分析方法, (5-17)和(5-18)可被分别转换为如下 SDP 形式

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{W}} \frac{1}{2\tilde{N}_m \tilde{N}_p} (\text{Tr}(\text{Toep}_{2D}(\mathbf{u})) + \text{Tr}(\mathbf{W})), \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}) & \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\mathbf{X}}^H & \mathbf{W} \end{bmatrix} \succeq 0, \sum_{k=0}^{K_t-1} \left\| \tilde{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}_k^{\text{AngVel}} [\tilde{\mathbf{X}}]_{:,k} \right\|_2^2 \leq \epsilon \end{aligned} \quad (5-19)$$

和

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{W}} \frac{1}{2\sqrt{\tilde{N}_m \tilde{N}_p}} (\text{Tr}(\text{Toep}_{2D}(\mathbf{u})) + \text{Tr}(\mathbf{W})), \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}) & \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\mathbf{X}}^H & \mathbf{W} \end{bmatrix} \succeq 0, \tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{H}_k^{\text{AngVel}} [\tilde{\mathbf{X}}]_{:,k}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1. \end{aligned} \quad (5-20)$$

具体的，以无噪声的情况为例，考虑(5-18)的对偶问题

$$\max_{\mathbf{Q}} \langle \mathbf{Q}, \tilde{\mathbf{Y}} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad s.t. \|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}_{v,\theta}}^* \leq 1. \quad (5-21)$$

基于(5-16)中原子集 $\mathbb{A}_{v,\theta}$ 的定义，可以证明对偶原子范数 $\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}_{v,\theta}}^*$ 可以计算如下

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}_{v,\theta}}^* = \max_{[f_v, f_\theta]^T \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2} \left\| \left[\langle \mathbf{q}_0, \tilde{\mathbf{a}}(\tilde{f}_0, (v, \theta)) \rangle, \dots, \langle \mathbf{q}_{K_t-1}, \tilde{\mathbf{a}}(\tilde{f}_{K_t-1}, (v, \theta)) \rangle \right]^T \right\|_2, \quad (5-22)$$

$k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 。类似第4.3节的分析，有

$$\langle \mathbf{q}_k, \tilde{\mathbf{a}}(\tilde{f}_k, (v, \theta)) \rangle \approx \langle \mathbf{H}_k^{\text{AngVel}H} \mathbf{q}_k, \mathbf{a}(f_v) \otimes \mathbf{a}(f_\theta) \rangle, k = 0, 1, \dots, K_t - 1. \quad (5-23)$$

结合(5-22)和(5-23)，(5-21)中的对偶原子范数约束可以写成如下二维三角多项式不等式约束

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}_{v,\theta}}^* \leq 1 \iff \left\| (\mathbf{a}_v(f_v) \otimes \mathbf{a}_\theta(f_\theta))^H \tilde{\mathbf{Q}} \right\|_2^2, \quad (5-24)$$

其中 $\tilde{\mathbf{Q}} = [\tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{q}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{q}}_{K_t-1}]$ ， $\tilde{\mathbf{q}}_k \triangleq \mathbf{H}_k^{\text{AngVel}H} \mathbf{q}_k$ 。利用有界引理和适当的平方和松弛，(5-24)可以被进一步写为如下半正定约束

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \tilde{\mathbf{Q}} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^H & \mathbf{I}_{K_t} \end{bmatrix} \succeq 0, \delta_k = \text{Tr}(\Theta_k \mathbf{P}), k \in \mathcal{H}, \tilde{\mathbf{q}}_k = \mathbf{H}_k^{\text{AngVel}H} \mathbf{q}_k, \quad (5-25)$$

其中 \mathcal{H} 为半空间， $\mathbf{k} = [k_v, k_\theta]$ ， $\Theta_k = \Theta_{k_v} \otimes \Theta_{k_\theta}$ 。将(5-25)代入(5-21)，可以得到对偶问题的 SDP 形式为

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{Q}} \langle \mathbf{Q}, \tilde{\mathbf{Y}} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \tilde{\mathbf{Q}} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^H & \mathbf{I}_{K_t} \end{bmatrix} \succeq 0, \delta_k = \text{Tr}(\Theta_k \mathbf{P}), k \in \mathcal{H}, \\ & \tilde{\mathbf{q}}_k = \mathbf{H}_k^{\text{AngVel}H} \mathbf{q}_k, k = 0, 1, \dots, K_t - 1. \end{aligned} \quad (5-26)$$

对(5-26)做 Lagrange 对偶分析，可以得到原问题(5-18)的 SDP 形式(5-20)。

上述无网格算法总结于算法 12 中。

上述算法(算法 11 和算法 12)均基于(5-1)推导，其将有关距离的变量视作常数，丢弃了距离的信息。虽然在角度-速度联合估计问题中并不需要对目标的距离进行估计，但由目标的距离产生的项会在信号模型中引入特殊结构。直觉上，这样的结构实际上提供了更多有关信号的先验信息，因此若能充分利用此信息，可以有效提升算法性能。利用这一信息和结构的最直接的方法就是将距离同时纳入待估计的参数中。事实上，第4.4节中的角度-距离-速度联合估计算法(4-37)和(4-38)也能实现角度-速度联合估计，且最充分的利用了信号的结构和信息，能实现最佳的估计性能。然而，如同之前所讨论的，这一方法求解规模过大，实际上无法使用。下面的定理 5.1 说明，当(5-20)能准确估计目标的角度和速度时，(4-37)可以被解耦。

算法 12 基于原子范数最小化的宽带信号角度-速度联合估计算法

```

1: 输入:  $\mathbf{Y}_k, k = 0, 1, \dots, K_t - 1, N_p, T_p, N_m, K_t, \mu, f_s, f_c, \epsilon$ 
2: 输出:  $\{\theta_i, v_i\}_{i=1}^K$ 
3:  $\tilde{f}_k \leftarrow 1 + \mu \frac{k}{f_s f_c}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 
4:  $\tilde{f}_k^{\text{vel}} \leftarrow \tilde{f}_k \cdot \frac{f_c}{f_c^{\text{vel}}}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 
5:  $\tilde{\mathbf{y}}_k \leftarrow \text{vec}(\mathbf{Y}_k), k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 
6: 构造映射矩阵  $\mathbf{H}_k^{\text{ang}}$  和  $\mathbf{H}_k^{\text{vel}}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 
7:  $\mathbf{H}_k^{\text{AngVel}} \leftarrow \mathbf{H}_k^{\text{vel}} \otimes \mathbf{H}_k^{\text{ang}}$ 
8: if 无噪声 then
9:   求解 (5-20)
10: else
11:   求解 (5-19)
12: end if
13:  $\left\{f_{\theta_i}, f_{v_i}\right\}_{i=1}^K \leftarrow \mathbf{Toep}_{2D}$  的 Vandermonde 分解
14:  $v_i \leftarrow -\frac{f_{v_i} c}{2T_p f_c^{\text{pseu}}}, \theta_i \leftarrow \arcsin\left(\frac{f_{\theta_i} c}{f_c d}\right), i = 1, 2, \dots, K$ 

```

定理 5.1. 若(5-20)能实现目标的角度-速度联合估计，则(4-37)等价于以下半正定规划问题

$$\begin{aligned} & \min_{u_{2D}, \tilde{\mathbf{X}}, u} \frac{1}{2\sqrt{\tilde{N}_m \tilde{N}_p K_t}} (\text{Tr}(\mathbf{Toep}_{2D}(u_{2D})) + \text{Tr}(\mathbf{Toep}(u))), \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{Toep}_{2D}(u) & \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\mathbf{X}}^H & \mathbf{Toep}(u) \end{bmatrix} \succeq 0, \tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{H}_k^{\text{AngVel}} [\tilde{\mathbf{X}}]_{:,k}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1. \end{aligned} \quad (5-27)$$

证明. 此处假设映射算子是理想的，即(附 3-8)中取严格等号。令(5-27)的解为 \tilde{p} 。

定理 5.1 等价于 $\tilde{p} = \|\mathbf{Y}_{IF}\|_{\mathbb{A}'_{\text{new}}}$ 。

首先证明 $\tilde{p} \leq \|\mathbf{Y}_{IF}\|_{\mathbb{A}'_{\text{new}}}$ 。令 \mathbf{Y}_{IF} 基于 \mathbb{A}'_{new} 的原子分解为

$$\mathbf{Y}_{IF} = \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} c_k \mathbf{A}_\theta(f_{\theta_k}) \odot \mathbf{a}_R^T(f_{R_k}) * \mathbf{A}_v(f_{v_k}), \quad (5-28)$$

此时 $\|\mathbf{Y}_{IF}\|_{\mathbb{A}'_{\text{new}}} = \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} |c_k|$ 。

可以构造(5-27)的一个可行解 $\{\mathbf{Toep}_{2D}(u_{2D}^0), \mathbf{Toep}(u_0), \tilde{\mathbf{X}}_0\}$ 为

$$\begin{aligned}\mathbf{Toep}_{2D}(u_{2D}^0) &= \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} \sqrt{\frac{K_t}{\tilde{N}_m \tilde{N}_p}} |c_k| \left(\mathbf{a}_v(f_{v_k}) \otimes \mathbf{a}_\theta(f_{\theta_k}) \right) \left(\mathbf{a}_v(f_{v_k}) \otimes \mathbf{a}_\theta(f_{\theta_k}) \right)^H, \\ \mathbf{Toep}(u_0) &= \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} \sqrt{\frac{\tilde{N}_m \tilde{N}_p}{K_t}} |c_k| \mathbf{a}_R^*(f_{R_k}) \mathbf{a}_R^T(f_{R_k}), \\ \tilde{\mathbf{X}}_0 &= \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} c_k \left(\mathbf{a}_v(f_{v_k}) \otimes \mathbf{a}_\theta(f_{\theta_k}) \right) \mathbf{a}_R^T(f_{R_k}).\end{aligned}\tag{5-29}$$

此时有

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} \mathbf{Toep}_{2D}(u_{2D}^0) & \tilde{\mathbf{X}}_0 \\ \tilde{\mathbf{X}}_0^H & \mathbf{Toep}(u_0) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} \sqrt{\frac{1}{\tilde{N}_p \tilde{N}_m K_t}} |c_k| \begin{bmatrix} \text{sign}(c_k) \sqrt{K_t} \mathbf{a}_v(f_{v_k}) \otimes \mathbf{a}_\theta(f_{\theta_k}) \\ \sqrt{\tilde{N}_m \tilde{N}_p} \mathbf{a}_R^*(f_{R_k}) \end{bmatrix}. \\ &\begin{bmatrix} \text{sign}(c_k) \sqrt{K_t} \mathbf{a}_v(f_{v_k}) \otimes \mathbf{a}_\theta(f_{\theta_k}) \\ \sqrt{\tilde{N}_m \tilde{N}_p} \mathbf{a}_R^*(f_{R_k}) \end{bmatrix}^H \geq 0.\end{aligned}\tag{5-30}$$

由于映射算子是理想的，此时 $\mathbf{H}_k^{\text{AngVel}} [\tilde{\mathbf{X}}]_{:,k} = \tilde{\mathbf{y}}_k$ ，其中 $\tilde{\mathbf{y}}_k$ 如(5-3)定义。因此 $\{\mathbf{Toep}_{2D}(u_{2D}^0), \mathbf{Toep}(u_0), \tilde{\mathbf{X}}_0\}$ 为(5-27)的一个可行解。此时

$$\begin{aligned}\tilde{p}_0 &= \frac{1}{2\sqrt{\tilde{N}_m \tilde{N}_p K_t}} (\text{Tr}(\mathbf{Toep}_{2D}(u_{2D}^0)) + \text{Tr}(\mathbf{Toep}(u_0))) \\ &= \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} |c_k| = \|\mathbf{Y}_{\text{IF}}\|_{\mathbb{A}'_{\text{new}}}.\end{aligned}\tag{5-31}$$

又 $\tilde{p}_0 \geq \tilde{p}$ ，因此有 $\tilde{p} \leq \|\mathbf{Y}_{\text{IF}}\|_{\mathbb{A}'_{\text{new}}}$ 。

接下来证明 $\tilde{p} \geq \|\mathbf{Y}_{\text{IF}}\|_{\mathbb{A}'_{\text{new}}}$ 。(5-28)可以被进一步写为

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{\text{IF}} &= \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} c_k \mathbf{A}_\theta(f_{\theta_k}) \odot \left(\mathbf{a}_R^T(f_{R_k}) / \|\mathbf{a}_R(f_{R_k})\| \cdot \|\mathbf{a}_R(f_{R_k})\| \right) * \mathbf{A}_v(f_{v_k}) \\ &= \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} |c_k| \sqrt{K_t} \mathbf{A}_\theta(f_{\theta_k}) \odot \left(\mathbf{a}_R^T(f_{R_k}) / \|\mathbf{a}_R(f_{R_k})\| \right) * \mathbf{A}_v(f_{v_k}).\end{aligned}\tag{5-32}$$

由于(5-20)能准确的估计目标的角度和距离，基于(5-32)，可以得出 $\|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}_{v,\theta}} = \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} |c_k| \sqrt{K_t}$ ，其中 $\tilde{\mathbf{Y}}$ 如(5-15)所定义。对比(5-20)和(5-27)，容易看出任意(5-27)的可行解都为(5-20)的可行解。因此有 $\|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}_{v,\theta}} \leq \sqrt{K_t} \tilde{p}$ 。又 $\|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}_{v,\theta}} = \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} |c_k| \sqrt{K_t}$ ，因此 $\tilde{p} \geq \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} |c_k| = \|\mathbf{Y}_{\text{IF}}\|_{\mathbb{A}'_{\text{new}}}$ 。

综上所述, $\tilde{p} = \|\mathbf{Y}_{\text{IF}}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}'}$ 。

□

需要说明的是, 第4.4节中的(4-54)和定理 5.1 中的(5-27)都可被视为三维算法(4-37)的解耦算法, 它们的不同之处在于: (4-54)中保持了角度和距离的耦合关系, 但将速度与之解耦; 而(5-27)则保持了角度和速度的耦合关系, 但将距离与之解耦。这其实是有意为之的。首先, 若将待估参数进行了解耦, 则在进行联合估计时需要额外的配对步骤, 这常常使得估计的准确性下降。保持待估参数的耦合性避免了配对带来的误差。其次, 解耦算法的性能通常相比全耦合算法会有降低, 这主要是因为解耦后破坏了参数间的耦合结构, 导致信息损失。以角度-速度联合估计问题为例, 此时主要关注的参数为目标的角度和速度, 将目标的距离纳入待估参数的目的是利用信号的特有结构提升算法性能。若将角度和速度解耦, 此时会损失角度与速度间的联合关系, 导致算法性能可能弱于初始的算法 12, 与提升算法性能的初衷相悖。因此, 在设计解耦算法时, 需要保持主要参数的耦合(即角度和速度), 同时将辅助参数(即距离)与之解耦。

(5-27)可被容易的推广至存在噪声的情况下, 即

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}_{2D}, \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{u}} \frac{1}{2\tilde{N}_m \tilde{N}_p} (\text{Tr}(\mathbf{Toep}_{2D}(\mathbf{u}_{2D})) + \text{Tr}(\mathbf{Toep}(\mathbf{u}))), \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{Toep}_{2D}(\mathbf{u}) & \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\mathbf{X}}^H & \mathbf{Toep}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \geq 0, \sum_{k=0}^{K_t-1} \left\| \tilde{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}_k^{\text{AngVel}} [\tilde{\mathbf{X}}]_{:,k} \right\|_2^2 \leq \epsilon, \end{aligned} \quad (5-33)$$

其中 ϵ 为噪声容限。上述算法总结于算法 13 中。

算法13 基于原子范数最小化和三维解耦的宽带信号角度-速度联合估计算法

```

1: 输入:  $\mathbf{Y}_k, k = 0, 1, \dots, K_t - 1, N_p, T_p, N_m, K_t, \mu, f_s, f_c, \epsilon$ 
2: 输出:  $\{\theta_i, v_i\}_{i=1}^K$ 
3:  $\tilde{f}_k \leftarrow 1 + \mu \frac{k}{f_s f_c}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 
4:  $\tilde{f}_k^{\text{vel}} \leftarrow \tilde{f}_k \cdot \frac{f_c}{f_c^{\text{vel}}}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 
5:  $\tilde{\mathbf{y}}_k \leftarrow \text{vec}(\mathbf{Y}_k), k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 
6: 构造映射矩阵  $\mathbf{H}_k^{\text{ang}}$  和  $\mathbf{H}_k^{\text{vel}}, k = 0, 1, \dots, K_t - 1$ 
7:  $\mathbf{H}_k^{\text{AngVel}} \leftarrow \mathbf{H}_k^{\text{vel}} \otimes \mathbf{H}_k^{\text{ang}}$ 
8: if 无噪声 then
9:   求解 (5-27)
10: else
11:   求解 (5-33)
12: end if
13:  $\left\{f_{\theta_i}, f_{v_i}\right\}_{i=1}^K \leftarrow \text{Toep}_{2D}$  的 Vandermonde 分解
14:  $v_i \leftarrow -\frac{f_{v_i} c}{2T_p f_c^{\text{pseu}}}, \theta_i \leftarrow \arcsin\left(\frac{f_{\theta_i} c}{f_c d}\right), i = 1, 2, \dots, K$ 

```

5.4 数值仿真

为了验证本章所提算法的有效性，本节通过数值仿真对所提算法的性能进行验证，并将其与已有算法进行对比以说明所提算法的优越性。本节的仿真均基于 MATLAB R2021b 进行，其中涉及到优化问题求解的部分均利用 CVX^[93] 包进行求解，求解器选用 Mosek。

本章的仿真参数设置与第4章一致。具体的，发射信号 $s(t)$ 如(4-1)所定义，其中起始频率 $f_c = 1500$ Hz，带宽 $B = 1000$ Hz，脉冲持续时间 $T_c = 0.01$ s，脉冲重复间隔 $T_p = 0.015$ s，脉冲数 $N_p = 5$ 。接收阵列作为一个 5 元均匀线阵，即 $N_m = 5$ ，其中阵元间隔 d 为最低频率对应的波长的一半，即 $d = \frac{c}{2f_c}$ ，其中声速取 $c = 1500$ m/s。共设置三个目标，其方位角 θ 分别为 59.8° , 51.2° 和 -20.3° 。目标的径向距离 R 分别设置为 2 m, 4 m 和 3 m，此处的径向距离指相对于参考距离 R_{ref} 的距离。取快时间采样频率 $f_s = 667$ Hz，此时一个脉冲内快时间采样点数 $K_t = 7$ 。最后，目标的径向速度 v 分别设置为 10 m/s, -10 m/s 和 9 m/s。

在仿真本章所提算法之前，首先对传统的窄带 MUSIC 算法和宽带 ISSM 算法在本节的仿真设置下的性能进行测试。第4章中对本节的仿真参数设置导致的问题进行了分析，现就本章所考虑的角度-速度联合估计问题将相关影响性能的因素总结如下：1) 对于高频部分，阵元间距 d 不满足 Nyquist 采样率，导致高频部分存在角度模糊；2) 为了使得所有频段均不出现速度模糊，要求目标的最大速度为 $v_{\max} = 10$ m/s，此时 $v = -10$ m/s 和 $v = 10$ m/s 会混叠在一起。从第4章中的讨论可以看出，基于压缩感知的参数估计方法在上述问题存在的情况下仍可实现准确的参数估计。相比之下，上述问题的出现会极大的影响传统算法的

性能。取信噪比为 100 dB，分别将窄带 MUSIC 算法和宽带 ISSM 算法得到的角度-速度联合估计结果绘制于图 5-1a 和图 5-1b 中。

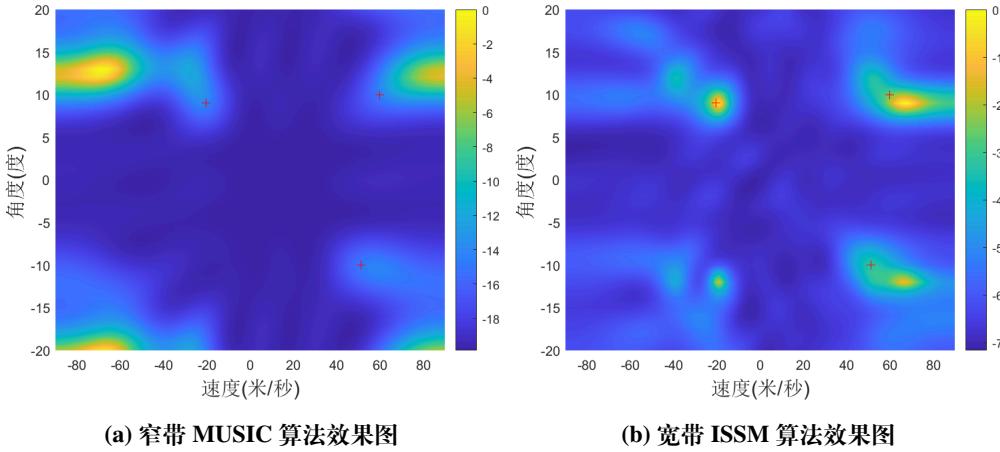


图 5-1 传统算法角度-速度联合估计结果

Figure 5-1 Joint Angle-Velocity Estimation Results of Conventional Methods

图中红色 + 号表示目标参数位置。从图 5-1a 中可以看出，窄带 MUSIC 算法完全无法分辨信号，由此可看出(4-11)中的耦合项不能被忽略。图 5-1b 中宽带 ISSM 算法由于高频部分存在速度模糊和角度混叠，导致目标参数对应的峰值产生偏移，且造成了伪峰，使得无法实现准确的参数估计。相比于传统算法，本章所提的基于压缩感知的方法可以有效抑制速度模糊和角度混叠的影响，并实现高分辨估计。将信噪比设置为 40 dB，分别将基于 SBL 的有网格算法（算法 11）、忽略距离信息的 ANM 算法（算法 12）和考虑距离信息的 ANM 算法（算法 13）在 100 次 Monte Carlo 仿真后对角度-速度的估计结果绘制于图 5-2a、图 5-2b 和图 5-2c 中，其中 SBL 方法以 1m/s 为间隔对速度进行划分，以 1° 为间隔对角度进行划分。从图 5-2 中可以看出，此时三种基于稀疏恢复的算法均可抑制速度模

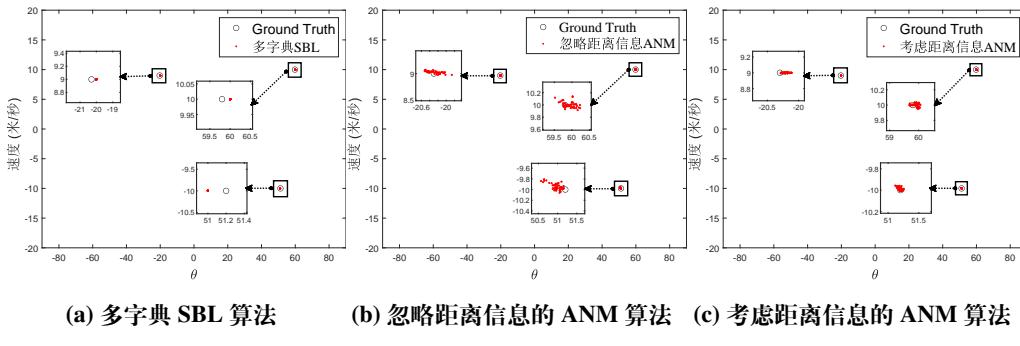


图 5-2 角度-速度估计结果

Figure 5-2 Joint Angle-Velocity Estimation Results

糊，实现准确的角度-速度联合估计。从图 5-2a 中可以看出，此时 SBL 方法的估计结果集中于真值附近的网格上。由于目标的速度均落在实现划分的网格上，因

此 SBL 方法可以实现无偏的速度估计。然而，由于目标的角度没有落在划分的网格上，因此此时 SBL 方法对角度的估计只能落在真值附近的网格上，无法实现精确的估计。相比之下，图 5-2b 和图 5-2c 中的无网格方法的估计结果连续聚集在真值附近，相比之下有更高的精确性。同时，由于利用了距离对应的结构信息，考虑距离信息的 ANM 方法相比忽略距离信息的 ANM 方法估计结果更集中，估计更精确。

为了进一步验证所提算法在噪声环境下的性能，将上述算法在不同信噪比下进行测试，设置信噪比范围为 -2 到 40 dB。与第 4 章一样，仍使用估计结果的 RSE 来判断估计是否正确，使用 RMSE 来描述算法的性能。角度 θ 的归一化 RSE 和 RMSE 与第 4.5 节中定义一致，此处将速度 v 的归一化 RSE 和 RMSE 分别定义为

$$\begin{aligned} \text{RSE}_{\text{vel}} &= \frac{1}{2v_{\max}} \sqrt{\left[\frac{1}{N_{\text{Tar}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} (\hat{v}_k - v_k)^2 \right]}, \\ \text{RMSE}_{\text{vel}} &= \frac{1}{2v_{\max}} \sqrt{\frac{1}{N_{\text{Trial}}^{\text{succ}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{Trial}}^{\text{succ}}} \left[\frac{1}{N_{\text{Tar}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} (\hat{v}_{k,n} - v_k)^2 \right]}, \end{aligned} \quad (5-34)$$

其中 v_{\max} 为最大速度， v_k 为真实速度， $k = 1, 2, \dots, N_{\text{Tar}}$ ， \hat{v}_k 为对第 k 个目标的速度的估计， $\hat{v}_{k,n}$ 为第 n 次仿真中对第 k 个目标的速度的估计。同样当角度和速度的 RSE 均小于 0.1 时认为估计成功， $N_{\text{Trial}}^{\text{succ}}$ 为成功估计次数。归一化系数取 $2v_{\max}$ 的原因是速度的范围为 $(-v_{\max}, v_{\max}]$ 。分别将各算法的成功估计次数、 RMSE_{θ} 和 RMSE_{vel} 随 SNR 变化的曲线绘制于图 5-3a、图 5-3b 和图 5-3c 中。

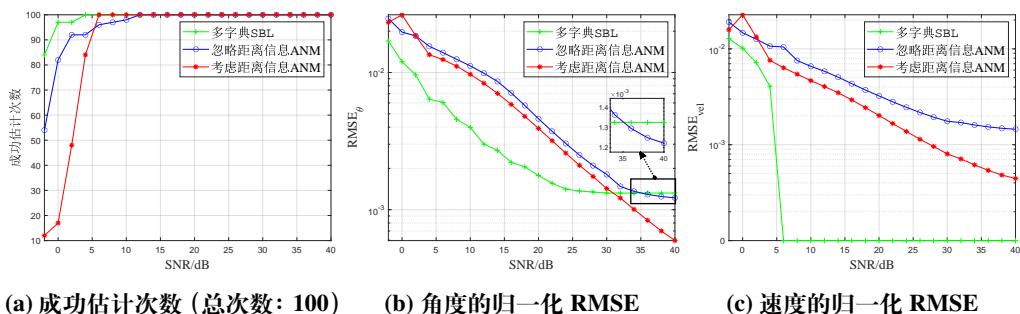


图 5-3 不同信噪比下的成功估计次数和归一化 RMSE

Figure 5-3 Number of successful trials and normalized RMSEs under various SNRs

从图 5-3 中可以看出，随着信噪比的增加，所有算法的精度均呈现上升趋势。其中，从图 5-3a 中可以看出，在低信噪比时，此时噪声对算法的性能的影响占主要因素，有网格算法的成功率高于无网格算法，表明有网格算法在低信噪比下有更好的鲁棒性。在无网格算法中，考虑距离信息的 ANM 算法在信噪比低于 5 dB 时估计成功率最低，但在信噪比达到 5 dB 后成功率迅速升高并达到峰值，高于忽略距离信息的 ANM 算法。相比之下，忽略距离信息的 ANM 算法则在信噪比

达到 10 dB 后才实现高成功率的估计，由此看看出在中等信噪比水平下考虑距离信息的 ANM 算法鲁棒性更好。从图 5-3b 中可以看出，在低信噪比时，有网格算法的精度高于无网格算法，进一步表明有网格算法在低信噪比下有更好的鲁棒性。然而，当信噪比足够高时（超过 30 dB），网格失配的影响开始显现，此时无网格算法中的考虑距离信息的 ANM 算法的精度开始超过有网格算法，当信噪比高于 35 dB 时，忽略距离信息的 ANM 算法的精度也超过了有网格算法。然而，当网格失配不存在时，从图 5-3c 中可以看出，当信噪比足够高时 ($\text{SNR} > 5 \text{ dB}$)，此时有网格的 SBL 算法能够实现精确估计（此时 $\text{RMSE}_{\text{vel}} = 0$ ）。

结合图 5-3b 和图 5-3c，可以发现当信噪比高于 5 dB 时，考虑距离信息的 ANM 方法的精度持续高于忽略距离信息的 ANM 方法。当信噪比达到 30 dB 时，忽略距离信息的 ANM 算法的精度的提升开始放缓，而考虑距离信息的 ANM 算法的精度则持续升高。综上所述，通过利用距离信息可以带来以下两点好处：首先，这提升了算法的鲁棒性。具体的，通过利用距离信息带来的结构，算法可以以更低的信噪比（本例中为 5 dB）实现期望的估计精度；另外，这提升了算法的精度。具体的，利用这一信息，当信噪比足够高后（本例中为 5 dB），算法在角度和速度两个参数的估计上均实现了更小的 RMSE，获得了更精确的估计。

当信噪比较低时，可以通过增加阵元个数来提升阵列的抗噪性能。为了对这种情况进行仿真，在上述仿真的基础上，设置阵元数为 20，其它参数维持不变。当信噪比为 0 dB 时，所提三种算法的角度-速度联合估计结果如图 5-4 所示。

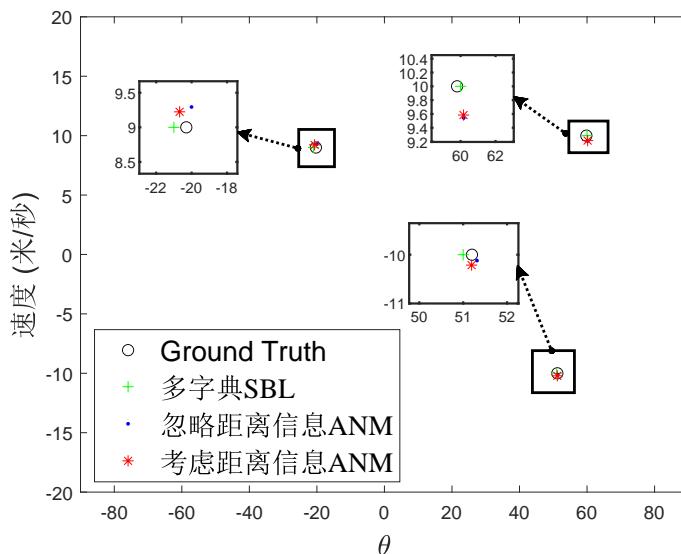


图 5-4 角度-速度联合估计结果， $\text{SNR} = 0 \text{ dB}$

Figure 5-4 Joint angle-velocity estimation results, $\text{SNR} = 0 \text{ dB}$

从图 5-4 中可看出，此时三种所提算法均能实现准确的角度-速度联合估计，展现了所提算法在实际应用中的可行性。具体的，在速度估计上，由于此时不存在网格失配的影响，因此所提有网格算法具有最高的估计精度。在角度估计上，由于存在网格失配，此时所提两种无网格算法的精度高于有网格算法。特别的，

由于利用了距离带来的结构信息，考虑距离信息的 ANM 算法在估计精度上优于忽略距离信息的 ANM 算法，与理论分析和从图 5-3 中得到的结论一致。

5.5 本章小结

本章对宽带 LFM 脉冲声呐的角度-速度联合估计进行了研究。具体的，本章分别基于多字典 SBL 方法和原子范数最小化方法提出了有网格和无网格的角度-速度联合估计方法，并通过引入距离信息带来的特殊结构提出了考虑距离信息的 ANM 方法。仿真结果表明，相比于传统算法，所提算法均能抑制角度混叠和速度模糊的影响。由于不受到网格失配的影响，所提两种无网格在信噪比足够高时均有比有网格方法更好的性能。特别的，由于利用了距离信息带来的结构，考虑距离信息的 ANM 方法在鲁棒性和精确性上均优于忽略距离信息的 ANM 方法。

为了对宽带信号进行处理，本章引入了一种映射算子，这增大了算法的规模。当信号带宽满足窄带假设时，本章所提算法相比窄带算法不会取得明显的精度提升，且算法规模更大。因此，本章所提算法仅适用于信号带宽较大时的场景。

第6章 总结与展望

6.1 本文工作总结

基于压缩感知的参数估计方法由于能够在有限快拍数和高度相干的信号源等场景下实现高分辨参数估计越来越受到研究人员的关注。近年来，由于不受到网格失配的影响，基于无网格压缩感知理论的参数估计方法被广泛研究，但其在非理想采样、多维和宽带等特殊场景下的应用仍面临挑战。本文主要致力于将基于原子范数最小化理论的无网格方法推广至宽带信号和多维参数提取等特殊场景。在这些场景下，信号通常不具备可以直接应用经典原子范数最小化方法的标准结构。本文通过提出一系列处理方法将对应的非标准原子范数最小化问题转换为标准的可规划求解的 SDP 问题，拓宽了无网格方法的适用范围。本文的创新点和相关结论总结如下：

(1) 为了充分利用目标 DOA 范围的先验以降低运算复杂度，对限定区域的 DOA 估计问题进行了研究，并基于原子范数最小化理论设计了无网格 DOA 估计算法以避免网格失配的影响。通过对偶变量进行带通滤波和降采样，解决了所构造原子集对应的对偶原子范数约束不满足全频带的三角多项式不等式约束的形式的问题，将 ANM 问题转换为了可规划求解的 SDP 问题，提出了一种限定区域的 ANM 算法 (CA-ANM)。为了提升运算效率，提出了一种可用于求解 CA-ANM 问题的快速算法 (FCA-ANM)，通过原对偶内点法提升了运算速度。理论分析和仿真结果表明，相比与原始 ANM 算法，所提 CA-ANM 算法的运算复杂度更低，运算时间更短；所提快速求解算法 FCA-ANM 在估计精度与基于 CVX 工具包求解的 CA-ANM 算法一致的条件下运算速度进一步提升。

(2) 为了实现宽带被动声呐的二维定位，基于多频率模型对宽带信号实现了建模并提出了对应的宽带二维原子范数最小化问题以估计目标的俯仰角和方位角。通过利用映射算子，将宽带二维原子范数最小化问题中的对偶原子范数约束转换为了可以应用有界引理的二元三角多项式不等式约束，并将宽带二维原子范数最小化问题转换为可求解的 SDP 问题，提出了一种二维多频原子范数最小化方法 (2DMFANM)。针对 2DMFANM 方法规模过大的问题，分别提出了基于解耦的 2DMFDANM 和基于去除冗余信息的 2DMFANM_SizeRedu 算法。上述算法被应用于宽带俯仰角-方位角联合估计问题，并通过仿真实验和实验数据进行了验证。结果表明，相比传统算法，当阵元间隔不满足 Nyquist 采样频率时，所提算法均可抑制混叠，实现准确的参数估计。特别的，2DMFANM 算法由于不受到网格失配的影响，因此在高信噪比下性能优于有网格的 SBL 算法。2DMFDANM 和 2DMFANM_SizeRedu 则在稍微牺牲估计精度的代价下显著降低了算法复杂度，提升了运算速度。

(3) 为了实现宽带主动声呐的二维定位，对基于宽带 LFM 脉冲发射信号的接收信号进行推导，得到了体现了快-慢时间耦合和阵元指标-快时间指标耦合的

信号模型。针对单脉冲距离-角度联合估计问题，基于推导的信号模型给出了相应的原子范数最小化问题。针对主动发射信号的带通特性，给出了一种映射算子并通过其将此时的对偶原子范数约束近似转换为了可应用有界引理的二元三角多项式不等式约束，并将上述原子范数最小化问题转换为可求解的 SDP 问题。通过将上述提出的映射算子与 Keystone 变换进行比较，分析了 Keystone 变换无法抑制混叠和速度模糊的原因，并基于提出的映射算子的结构提出了一种新的变换策略。通过将上述变换方法应用于多脉冲的情况，提出了一种基于多脉冲和 ANM 算法的距离-角度联合估计算法，该算法可以在存在距离徙动和速度模糊的情况下实现多脉冲间的相干积累。上述算法通过仿真实验进行了验证。结果表明，传统的 Keystone 变换由于无法抑制混叠和速度模糊，当阵元间隔不满足 Nyquist 采样频率时会出现伪峰，无法实现准确的参数估计，而所提算法均可对混叠进行抑制，同时实现高分辨参数估计。特别的，相比有网格方法，所提算法由于不受到网格失配的影响，在信噪比较高时能实现更精准的估计。相比单脉冲算法，多脉冲算法由于成功实现了相干积累，因此在低信噪比下性能更优异。

(4) 为了提取多普勒/速度信息并充分利用信号的多维信息以抑制混响，分别基于多字典 SBL 方法和原子范数最小化方法提出了角度-速度联合估计算法。具体的，通过构造多字典稀疏恢复问题，提出了一种有网格的宽带 LFM 脉冲声呐的角度-速度联合估计算法。通过构造相应的映射算子，进一步提出了一种基于原子范数最小化的无网格角度-速度联合估计算法。为了利用距离信息带来的特殊结构，通过对三维的角度-速度-距离联合估计算法进行解耦，提出了一种考虑距离信息的角度-速度联合估计算法。上述算法均通过仿真实验进行了验证。结果表明，当阵元间隔和相干处理间隔均不满足 Nyquist 采样率时，经典的 ISSM 方法由于受到混叠和速度模糊的影响会产生大量伪峰，无法实现准确的参数估计。相比之下，所提算法均能有效抑制混叠和速度模糊的影响，并实现准确的参数估计。特别的，相比有网格的多字典 SBL 算法，所提无网格算法由于不受到网格失配的影响在高信噪比下精度更高。另外，由于利用了距离的结构信息，考虑距离信息的角度-速度联合估计算法的性能优于忽略距离信息的算法。

最后需要指出的是，为了对宽带信号进行处理，本文所提宽带算法均引入了更高的算法复杂度。当目标信号带宽满足窄带假设时，本文所提宽带算法无法在精度上较窄带算法获得提升，却引入了更大的算法规模。因此，本文所提宽带算法更适合在目标信号带宽较大的场景中使用。

6.2 未来工作展望

本文对基于原子范数最小化的无网格高分辨参数估计方法进行了研究，并针对不同应用场景提出了一系列算法。然而，本文的工作仍存在许多不足之处。结合现有的结果，未来还需在以下几个方面进行进一步研究：

(1) 本文所研究问题的主要难点在于将特殊形式的对偶原子范数约束转换为三角多项式不等式约束。从本文所提的算法来看，这一转换过程与经典信号处

理理论中的带限滤波和多采样率处理等问题密切相关。因此，未来的研究将阐明原子范数最小化方法与经典信号处理方法的联系与不同，将为进一步理解原子范数最小化方法并最终提出新的理论框架提供思路。

(2) 为了获取有限的映射算子，本文中大部分算法均通过直接截断进行实现，这会导致产生误差。虽然仿真实验证明这一误差并不显著影响算法性能，但降低这一误差有望进一步提升算法性能。未来的研究将进一步减小截断误差对估计精度带来的影响。

(3) 本文主要使用原子范数最小化方法进行参数估计，这一方法是基于目标参数在参数空间中稀疏的先验进行的。然而，由于原子范数本身为一种 l_1 -凸松弛后得到的范数，因此针对各具体的应用场景，上述稀疏性的量化刻画是分析所提算法性能界的前提。未来的研究将对所提算法的理论性能做更进一步的分析。

(4) 本文中提出的部分算法仍处于理论分析阶段，尚未在实测数据中进行测试。未来的研究将开展相关实验，对所提算法在实际应用中的性能进行进一步验证。

参考文献

- [1] 贾宇, 张小奕. 毛泽东、邓小平和习近平的海洋战略思想初探 [J]. 边界与海洋研究, 2018, 3(03): 5-17+2.
- [2] Firat U, Akgül T. Compressive beamforming for direction-of-arrival estimation of cyclo-stationary propeller noise [J/OL]. Signal Processing, 2024, 214: 109221. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168423002955>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2023.109221>.
- [3] 李启虎. 声呐信号处理引论 [M]. 科学出版社, 1985.
- [4] 肖心敏. 船舶辐射噪声主动模拟技术研究 [J]. 舰船科学技术, 2002, 24(2): 7.
- [5] 张晓勇, 罗来源. 参数未知的舰船辐射噪声检测方法 [J]. 声学学报, 2015, 40(4): 8.
- [6] 向辉平, 罗建, 傅瑞锦. 舰船宽带连续谱噪声的模拟 [J]. 声学技术, 2005, 24(3): 140-143.
- [7] Xu S, Kooij B J, Yarovoy A. Joint doppler and DOA estimation using (Ultra-)wideband FMCW signals [J/OL]. Signal Processing, 2020, 168: 107259. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168419303111>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.107259>.
- [8] Li L, Chen Y, Zang B, et al. A high-precision two-dimensional DOA estimation algorithm with parallel coprime array [J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2022, 41(12): 6960-6974.
- [9] Liu F, Wang X, Huang M, et al. Joint angle and range estimation for bistatic FDA-MIMO radar via real-valued subspace decomposition [J/OL]. Signal Processing, 2021, 185: 108065. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168421001031>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2021.108065>.
- [10] Wan L, Kong X, Xia F. Joint range-doppler-angle estimation for intelligent tracking of moving aerial targets [J/OL]. IEEE Internet of Things Journal, 2018, 5(3): 1625-1636. DOI: [10.1109/JIOT.2017.2787785](https://doi.org/10.1109/JIOT.2017.2787785).
- [11] Lee J, Park J, Chun J. Weighted two-dimensional root MUSIC for joint angle-doppler estimation with MIMO radar [J/OL]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2019, 55(3): 1474-1482. DOI: [10.1109/TAES.2018.2871890](https://doi.org/10.1109/TAES.2018.2871890).
- [12] Xiong J, Wang W Q, Gao K. FDA-MIMO radar range-angle estimation: CRLB, MSE, and resolution analysis [J/OL]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2018, 54(1): 284-294. DOI: [10.1109/TAES.2017.2756498](https://doi.org/10.1109/TAES.2017.2756498).
- [13] Pal P, Vaidyanathan P P. Coprime sampling and the MUSIC algorithm [C/OL]//2011 Digital Signal Processing and Signal Processing Education Meeting (DSP/SPE). 2011: 289-294. DOI: [10.1109/DSP-SPE.2011.5739227](https://doi.org/10.1109/DSP-SPE.2011.5739227).
- [14] Yang Z, Li J, Stoica P, et al. Chapter 11 - sparse methods for direction-of-arrival estimation [M/OL]//Chellappa R, Theodoridis S. Academic Press Library in Signal Processing, Volume 7. Academic Press, 2018: 509-581. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128118870000110>. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-811887-0.00011-0>.
- [15] Elbir A M, Mishra K V, Vorobyov S A, et al. Twenty-five years of advances in beamforming: From convex and nonconvex optimization to learning techniques [J/OL]. IEEE Signal Processing Magazine, 2023, 40(4): 118-131. DOI: [10.1109/MSP.2023.3262366](https://doi.org/10.1109/MSP.2023.3262366).

- [16] Liu W, Haardt M, Greco M S, et al. Twenty-five years of sensor array and multichannel signal processing: A review of progress to date and potential research directions [J/OL]. IEEE Signal Processing Magazine, 2023, 40(4): 80-91. DOI: [10.1109/MSP.2023.3258060](https://doi.org/10.1109/MSP.2023.3258060).
- [17] 保铮, 邢孟道, 王彤. 雷达成像技术 [M]. 电子工业出版社, 2005.
- [18] 鄭社鋒. 优化阵列信号处理. 上册, 波束优化理论与方法 [M]. 科学出版社, 2018.
- [19] Chi Y, Ferreira Da Costa M. Harnessing sparsity over the continuum: Atomic norm minimization for superresolution [J/OL]. IEEE Signal Processing Magazine, 2020, 37(2): 39-57. DOI: [10.1109/MSP.2019.2962209](https://doi.org/10.1109/MSP.2019.2962209).
- [20] Optimum array processing [M/OL]. John Wiley & Sons, Ltd, 2002. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/0471221104.ch1>. DOI: <https://doi.org/10.1002/0471221104.ch1>.
- [21] Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis [J/OL]. Proceedings of the IEEE, 1969, 57(8): 1408-1418. DOI: [10.1109/PROC.1969.7278](https://doi.org/10.1109/PROC.1969.7278).
- [22] Vorobyov S, Gershman A, Luo Z Q. Robust adaptive beamforming using worst-case performance optimization: a solution to the signal mismatch problem [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(2): 313-324. DOI: [10.1109/TSP.2002.806865](https://doi.org/10.1109/TSP.2002.806865).
- [23] Yardibi T, Li J, Stoica P, et al. Source localization and sensing: A nonparametric iterative adaptive approach based on weighted least squares [J/OL]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2010, 46(1): 425-443. DOI: [10.1109/TAES.2010.5417172](https://doi.org/10.1109/TAES.2010.5417172).
- [24] Gu Y, Leshem A. Robust adaptive beamforming based on interference covariance matrix reconstruction and steering vector estimation [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(7): 3881-3885. DOI: [10.1109/TSP.2012.2194289](https://doi.org/10.1109/TSP.2012.2194289).
- [25] Liu W, Weiss S. Design of frequency invariant beamformers for broadband arrays [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(2): 855-860. DOI: [10.1109/TSP.2007.907872](https://doi.org/10.1109/TSP.2007.907872).
- [26] Liu W, Weiss S. Wideband beamforming: concepts and techniques [J]. Wiley Publishing, 2010.
- [27] Schmidt R. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J/OL]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, 34(3): 276-280. DOI: [10.1109/TAP.1986.1143830](https://doi.org/10.1109/TAP.1986.1143830).
- [28] Schmidt R O. A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation [C/OL]//1981. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:109004066>.
- [29] Paulraj A, Roy R, Kailath T. A subspace rotation approach to signal parameter estimation [J/OL]. Proceedings of the IEEE, 1986, 74(7): 1044-1046. DOI: [10.1109/PROC.1986.13583](https://doi.org/10.1109/PROC.1986.13583).
- [30] Barabell A. Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithms [C/OL]//ICASSP '83. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing: volume 8. 1983: 336-339. DOI: [10.1109/ICASSP.1983.1172124](https://doi.org/10.1109/ICASSP.1983.1172124).
- [31] Roy R, Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques [J/OL]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, 37(7): 984-995. DOI: [10.1109/29.32276](https://doi.org/10.1109/29.32276).
- [32] Shan T J, Wax M, Kailath T. On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals [J/OL]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1985, 33(4): 806-811. DOI: [10.1109/TASSP.1985.1164649](https://doi.org/10.1109/TASSP.1985.1164649).
- [33] Krim H, Viberg M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach [J/OL]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(4): 67-94. DOI: [10.1109/79.526899](https://doi.org/10.1109/79.526899).

- [34] Viberg M, Ottersten B, Kailath T. Detection and estimation in sensor arrays using weighted subspace fitting [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(11): 2436-2449. DOI: [10.1109/78.97999](https://doi.org/10.1109/78.97999).
- [35] Hua Y. Estimating two-dimensional frequencies by matrix enhancement and matrix pencil [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(9): 2267-2280. DOI: [10.1109/78.157226](https://doi.org/10.1109/78.157226).
- [36] Hua Y. A pencil-MUSIC algorithm for finding two-dimensional angles and polarizations using crossed dipoles [J/OL]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1993, 41(3): 370-376. DOI: [10.1109/8.233122](https://doi.org/10.1109/8.233122).
- [37] Haardt M, Zoltowski M, Mathews C, et al. 2D unitary ESPRIT for efficient 2D parameter estimation [C/OL]//1995 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing: volume 3. 1995: 2096-2099 vol.3. DOI: [10.1109/ICASSP.1995.478488](https://doi.org/10.1109/ICASSP.1995.478488).
- [38] Li Y, Razavilar J, Liu K R. A high-resolution technique for multidimensional NMR spectroscopy [J/OL]. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 1998, 45(1): 78-86. DOI: [10.1109/10.650355](https://doi.org/10.1109/10.650355).
- [39] Pesavento M, Mecklenbräuker C F, Böhme J F. Multidimensional rank reduction estimator for parametric MIMO channel models [J/OL]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2004, 2004(9): 839148. <https://doi.org/10.1155/S1110865704401036>.
- [40] Liu J, Liu X. An eigenvector-based approach for multidimensional frequency estimation with improved identifiability [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(12): 4543-4556. DOI: [10.1109/TSP.2006.882077](https://doi.org/10.1109/TSP.2006.882077).
- [41] Liu J, Liu X. Statistical identifiability of multidimensional frequency estimation with finite snapshots [C/OL]//Fourth IEEE Workshop on Sensor Array and Multichannel Processing, 2006. 2006: 491-495. DOI: [10.1109/SAM.2006.1706182](https://doi.org/10.1109/SAM.2006.1706182).
- [42] Wax M, Shan T J, Kailath T. Spatio-temporal spectral analysis by eigenstructure methods [J/OL]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1984, 32(4): 817-827. DOI: [10.1109/TASSP.1984.1164400](https://doi.org/10.1109/TASSP.1984.1164400).
- [43] Wang H, Kaveh M. Coherent signal-subspace processing for the detection and estimation of angles of arrival of multiple wide-band sources [J/OL]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1985, 33(4): 823-831. DOI: [10.1109/TASSP.1985.1164667](https://doi.org/10.1109/TASSP.1985.1164667).
- [44] Hung H, Kaveh M. Focussing matrices for coherent signal-subspace processing [J/OL]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1988, 36(8): 1272-1281. DOI: [10.1109/29.1655](https://doi.org/10.1109/29.1655).
- [45] Doron M, Weiss A. On focusing matrices for wide-band array processing [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(6): 1295-1302. DOI: [10.1109/78.139236](https://doi.org/10.1109/78.139236).
- [46] Valaee S, Kabal P. Wideband array processing using a two-sided correlation transformation [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(1): 160-172. DOI: [10.1109/78.365295](https://doi.org/10.1109/78.365295).
- [47] di Claudio E, Parisi R. WAVES: weighted average of signal subspaces for robust wideband direction finding [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(10): 2179-2191. DOI: [10.1109/78.950774](https://doi.org/10.1109/78.950774).
- [48] Doron M, Doron E. Wavefield modeling and array processing .I. spatial sampling [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(10): 2549-2559. DOI: [10.1109/78.324722](https://doi.org/10.1109/78.324722).

- [49] Doron M, Doron E. Wavefield modeling and array processing .II. algorithms [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(10): 2560-2570. DOI: [10.1109/78.324723](https://doi.org/10.1109/78.324723).
- [50] Doron M, Doron E. Wavefield modeling and array processing. III. resolution capacity [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(10): 2571-2580. DOI: [10.1109/78.324724](https://doi.org/10.1109/78.324724).
- [51] Belloni F, Richter A, Koivunen V. DoA estimation via manifold separation for arbitrary array structures [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(10): 4800-4810. DOI: [10.1109/TSP.2007.896115](https://doi.org/10.1109/TSP.2007.896115).
- [52] Pal P, Vaidyanathan P P. Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(8): 4167-4181. DOI: [10.1109/TSP.2010.2049264](https://doi.org/10.1109/TSP.2010.2049264).
- [53] Vaidyanathan P P, Pal P. Sparse sensing with co-prime samplers and arrays [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(2): 573-586. DOI: [10.1109/TSP.2010.2089682](https://doi.org/10.1109/TSP.2010.2089682).
- [54] Xu S, Yarovoy A. Joint parameters estimation using 3d tensor music in the presence of phase residual [C]//2018 International Conference on Radar (RADAR). IEEE, 2018: 1-4.
- [55] Belfiori F, van Rossum W, Hoogeboom P. Application of 2D MUSIC algorithm to range-azimuth FMCW radar data [C]//2012 9th European Radar Conference. IEEE, 2012: 242-245.
- [56] Kim S, Oh D, Lee J. Joint DFT-ESPRIT estimation for TOA and DOA in vehicle FMCW radars [J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2015, 14: 1710-1713.
- [57] Candes E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J/OL]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509. DOI: [10.1109/TIT.2005.862083](https://doi.org/10.1109/TIT.2005.862083).
- [58] Donoho D. Compressed sensing [J/OL]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306. DOI: [10.1109/TIT.2006.871582](https://doi.org/10.1109/TIT.2006.871582).
- [59] Chen J, Huo X. Theoretical results on sparse representations of multiple-measurement vectors [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(12): 4634-4643. DOI: [10.1109/TSP.2006.881263](https://doi.org/10.1109/TSP.2006.881263).
- [60] Lai C K, Li S, Mondo D. Spark-level sparsity and the l_1 tail minimization [J/OL]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2018, 45(1): 206-215. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1063520317300726>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.acha.2017.07.001>.
- [61] Candès E J, Romberg J K, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements [J/OL]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(8): 1207-1223. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.20124>. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.20124>.
- [62] Zheng B, Zeng C, Li S, et al. The MMV tail null space property and DOA estimations by tail- $l_{2,1}$ minimization [J/OL]. Signal Processing, 2022, 194: 108450. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168421004874>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2021.108450>.
- [63] Mallat S, Zhang Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(12): 3397-3415. DOI: [10.1109/78.258082](https://doi.org/10.1109/78.258082).
- [64] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J/OL]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666. DOI: [10.1109/TIT.2007.909108](https://doi.org/10.1109/TIT.2007.909108).
- [65] Li L, Chen Y, Zang B, et al. A high-precision two-dimensional DOA estimation algorithm

- with parallel coprime array [J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2022, 41(12): 6960-6974.
- [66] Han L, Liu X, Zhang N, et al. Two-dimensional multi-snapshot Newtonized orthogonal matching pursuit for DOA estimation [J/OL]. Digital Signal Processing, 2022, 121: 103313. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1051200421003523>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103313>.
- [67] Wipf D, Rao B. Sparse Bayesian learning for basis selection [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(8): 2153-2164. DOI: [10.1109/TSP.2004.831016](https://doi.org/10.1109/TSP.2004.831016).
- [68] Tang Z, Blacquiere G, Leus G. Aliasing-free wideband beamforming using sparse signal representation [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(7): 3464-3469. DOI: [10.1109/TSP.2011.2140108](https://doi.org/10.1109/TSP.2011.2140108).
- [69] Gemba K L, Nannuru S, Gerstoft P, et al. Multi-frequency sparse Bayesian learning for robust matched field processing [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2017, 141(5): 3411-3420.
- [70] Gemba K L, Nannuru S, Gerstoft P. Robust ocean acoustic localization with sparse Bayesian learning [J/OL]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2019, 13(1): 49-60. DOI: [10.1109/JSTSP.2019.2900912](https://doi.org/10.1109/JSTSP.2019.2900912).
- [71] Nannuru S, Gemba K L, Gerstoft P, et al. Sparse Bayesian learning with multiple dictionaries [J/OL]. Signal Processing, 2019, 159: 159-170. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168419300520>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.02.003>.
- [72] Chi Y, Pezeshki A, Scharf L, et al. Sensitivity to basis mismatch in compressed sensing [C/OL]//2010 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. 2010: 3930-3933. DOI: [10.1109/ICASSP.2010.5495800](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2010.5495800).
- [73] Zhang G, Liu H, Dai W, et al. Passive joint emitter localization with sensor self-calibration [J/OL]. Remote Sensing, 2023, 15(3). <https://www.mdpi.com/2072-4292/15/3/671>. DOI: [10.3390/rs15030671](https://doi.org/10.3390/rs15030671).
- [74] Fannjiang A, Tseng H C. Compressive radar with off-grid targets: a perturbation approach [J/OL]. Inverse Problems, 2013, 29(5): 054008. <https://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/29/5/054008>.
- [75] Guo Q, Xin Z, Zhou T, et al. Off-grid space alternating sparse Bayesian learning [J/OL]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2023, 72: 1-10. DOI: [10.1109/TIM.2023.3243677](https://doi.org/10.1109/TIM.2023.3243677).
- [76] Fu H, Dai F, Hong L. Two-dimensional off-grid DOA estimation with metasurface aperture based on MMV sparse Bayesian learning [J/OL]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2023, 72: 1-18. DOI: [10.1109/TIM.2023.3318716](https://doi.org/10.1109/TIM.2023.3318716).
- [77] Huang H, So H C, Zoubir A M. Off-grid direction-of-arrival estimation using second-order Taylor approximation [J/OL]. Signal Processing, 2022, 196: 108513. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168422000603>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2022.108513>.
- [78] Chandrasekaran V, Recht B, Parrilo P A, et al. The convex algebraic geometry of linear inverse problems [C/OL]//2010 48th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton). 2010: 699-703. DOI: [10.1109/ALLERTON.2010.5706975](https://doi.org/10.1109/ALLERTON.2010.5706975).
- [79] Chandrasekaran V, Recht B, Parrilo P A, et al. The convex geometry of linear inverse problems [J/OL]. Foundations of Computational Mathematics, 2012, 12(6): 805-849. <https://doi.org/10.1007/s10208-012-9135-7>.

- [80] Candès E J, Fernandez-Granda C. Towards a mathematical theory of super-resolution [J/OL]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2014, 67(6): 906-956. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.21455>. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.21455>.
- [81] Candès E J, Fernandez-Granda C. Super-resolution from noisy data [J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2013, 19: 1229-1254.
- [82] Yang Z, Mo Y L, Xu Z. Separation-free spectral super-resolution via convex optimization [J/OL]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2024, 71: 101650. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1063520324000277>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.acha.2024.101650>.
- [83] Bhaskar B N, Tang G, Recht B. Atomic norm denoising with applications to line spectral estimation [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(23): 5987-5999. DOI: [10.1109/TSP.2013.2273443](https://doi.org/10.1109/TSP.2013.2273443).
- [84] Dumitrescu B. Positive trigonometric polynomials and signal processing applications [M]. Springer Publishing Company, Incorporated, 2007.
- [85] Teke O, Vaidyanathan P P. On the role of the bounded lemma in the SDP formulation of atomic norm problems [J/OL]. IEEE Signal Processing Letters, 2017, 24(7): 972-976. DOI: [10.1109/LSP.2017.2700442](https://doi.org/10.1109/LSP.2017.2700442).
- [86] Tang G, Bhaskar B N, Shah P, et al. Compressed sensing off the grid [J/OL]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 59(11): 7465-7490. DOI: [10.1109/TIT.2013.2277451](https://doi.org/10.1109/TIT.2013.2277451).
- [87] Carathéodory C. Über den variabilitätsbereich der fourier'schen konstanten von positiven harmonischen funktionen [J]. Rendiconti Del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940), 1911, 32(1): 193-217.
- [88] Carathéodory C, Fejér L. Über den zusammenhang der extremen von harmonischen funktionen mit ihren koeffizienten und über den picard-landau'schen satz [J]. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940), 1911, 32(1): 218-239.
- [89] Toeplitz O. Zur theorie der quadratischen und bilinearen formen von unendlichvielen veränderlichen: I. teil: Theorie der l-formen [J]. Mathematische Annalen, 1911, 70: 351-376.
- [90] Yang Z, Xie L. Exact joint sparse frequency recovery via optimization methods [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(19): 5145-5157. DOI: [10.1109/TSP.2016.2576422](https://doi.org/10.1109/TSP.2016.2576422).
- [91] Yang Z, Xie L. Enhancing sparsity and resolution via reweighted atomic norm minimization [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(4): 995-1006. DOI: [10.1109/TSP.2015.2493987](https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2493987).
- [92] Li W, Li S, Xian J. Effectiveness of the tail-atomic norm in gridless spectrum estimation [J/OL]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2024, 72: 101658. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1063520324000356>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.acha.2024.101658>.
- [93] Grant M, Boyd S. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.1 [EB/OL]. 2014. <https://cvxr.com/cvx>.
- [94] Li Y, Chi Y. Off-the-grid line spectrum denoising and estimation with multiple measurement vectors [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(5): 1257-1269. DOI: [10.1109/TSP.2015.2496294](https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2496294).

- [95] Wang Y, Tian Z. Ivdst: A fast algorithm for atomic norm minimization in line spectral estimation [J/OL]. IEEE Signal Processing Letters, 2018, 25(11): 1715-1719. DOI: [10.1109/LSP.2018.2870539](https://doi.org/10.1109/LSP.2018.2870539).
- [96] Chen T, Meng Y, Zhou G, et al. An improved imaging method for highly-squinted SAR based on hyper-optimized ADMM [C/OL]//IGARSS 2023 - 2023 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium. 2023: 4548-4551. DOI: [10.1109/IGARSS52108.2023.10281842](https://doi.org/10.1109/IGARSS52108.2023.10281842).
- [97] Chandra K, Xie A, Ragan-Kelley J, et al. Gradient descent: The ultimate optimizer [J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2022, 35: 8214-8225.
- [98] Boyd S, Vandenberghe L. Convex optimization [M]. Cambridge university press, 2004.
- [99] Hansen T L, Jensen T L. A fast interior-point method for atomic norm soft thresholding [J]. Signal Processing, 2019, 165: 7-19.
- [100] Nocedal J, Wright S J. Numerical optimization [M]. Springer, 1999.
- [101] Gao Y, Wu M, Li Z, et al. Fast gridless DOA estimation algorithm for MA-ANS scenarios using a modified fastIPM [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2024.
- [102] Chi Y, Chen Y. Compressive two-dimensional harmonic retrieval via atomic norm minimization [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(4): 1030-1042. DOI: [10.1109/TSP.2014.2386283](https://doi.org/10.1109/TSP.2014.2386283).
- [103] Yang Z, Xie L, Stoica P. Vandermonde decomposition of multilevel Toeplitz matrices with application to multidimensional super-resolution [J/OL]. IEEE Transactions on Information Theory, 2016, 62(6): 3685-3701. DOI: [10.1109/TIT.2016.2553041](https://doi.org/10.1109/TIT.2016.2553041).
- [104] Zhang Z, Wang Y, Tian Z. Efficient two-dimensional line spectrum estimation based on decoupled atomic norm minimization [J]. Signal Processing, 2019, 163: 95-106.
- [105] Gao S, Wang M, Zhang Z, et al. Efficient gridless DOA estimation for non-uniformly spaced linear arrays in automotive radar sensors [J]. IEEE Sensors Journal, 2024.
- [106] Wu Y, Wakin M B, Gerstoft P. Gridless DOA estimation with multiple frequencies [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2023, 71: 417-432. DOI: [10.1109/TSP.2023.3244091](https://doi.org/10.1109/TSP.2023.3244091).
- [107] Wu Y, Wakin M B, Gerstoft P. Non-uniform array and frequency spacing for regularization-free gridless DOA [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2024, 72: 2006-2020. DOI: [10.1109/TSP.2024.3386018](https://doi.org/10.1109/TSP.2024.3386018).
- [108] Park Y, Gerstoft P, Wu Y, et al. Atomic norm denoising for multi-frequency-snapshot DOA estimation [C/OL]//2024 IEEE 13rd Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM). 2024: 1-5. DOI: [10.1109/SAM60225.2024.10636678](https://doi.org/10.1109/SAM60225.2024.10636678).
- [109] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit [J/OL]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1998, 20(1): 33-61. <https://doi.org/10.1137/S1064827596304010>.
- [110] Ji S, Xue Y, Carin L. Bayesian compressive sensing [J/OL]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(6): 2346-2356. DOI: [10.1109/TSP.2007.914345](https://doi.org/10.1109/TSP.2007.914345).
- [111] Le Gall J F. Measure theory, probability, and stochastic processes [M]. Springer, 2022.
- [112] Brandwood D H. A complex gradient operator and its application in adaptive array theory [C]//IEE Proceedings H (Microwaves, Optics and Antennas): volume 130. IET Digital Library, 1983: 11-16.
- [113] Kase Y, Nishimura T, Ohgane T, et al. Accuracy improvement in DOA estimation with deep

- learning [J/OL]. IEICE Transactions on Communications, 2022, E105.B(5): 588-599. DOI: [10.1587/transcom.2021EBT0001](https://doi.org/10.1587/transcom.2021EBT0001).
- [114] Jiang Y, Li D, Wu X, et al. A gridless wideband DOA estimation based on atomic norm minimization [C/OL]//2020 IEEE 11th Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM). 2020: 1-5. DOI: [10.1109/SAM48682.2020.9104308](https://doi.org/10.1109/SAM48682.2020.9104308).
- [115] Jirhandeh M J, Hezaveh H, Kahaei M H. Super-resolution DOA estimation for wideband signals using non-uniform linear arrays with no focusing matrix [J/OL]. IEEE Wireless Communications Letters, 2022, 11(3): 641-644. DOI: [10.1109/LWC.2021.3139568](https://doi.org/10.1109/LWC.2021.3139568).
- [116] 蒋国健, 林建恒, 马杰, 等. 舰船螺旋桨空泡噪声的数理模型 [J/OL]. 声学学报, 1998, 23(5): 401-408. <https://www.jac.ac.cn/cn/article/doi/10.15949/j.cnki.0371-0025.1998.05.003>.
- [117] 田坦. 声呐技术. 第2版 [M]. 哈尔滨工程大学出版社, 2010.
- [118] Li Y, Long Q, Wu Z, et al. Low-complexity joint 3D super-resolution estimation of range velocity and angle of multi-targets based on FMCW radar [J/OL]. Sensors, 2022, 22(17). <https://www.mdpi.com/1424-8220/22/17/6474>. DOI: [10.3390/s22176474](https://doi.org/10.3390/s22176474).
- [119] Cuprak T, Van Lieshout N. Adaptive beamformer sample support for LFM high duty cycle sonar using dechirp [C/OL]//OCEANS 2022, Hampton Roads. 2022: 1-6. DOI: [10.1109/OCEANS47191.2022.9977191](https://doi.org/10.1109/OCEANS47191.2022.9977191).
- [120] Kim G, Lee K, Lee S. Linear frequency modulated reverberation suppression using non-negative matrix factorization methods, dechirping transformation and modulo operation [J/OL]. IEEE Access, 2020, 8: 110720-110737. DOI: [10.1109/ACCESS.2020.3001865](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3001865).
- [121] Yang H, Yang Z, Li Y, et al. High-resolution imaging using synthetic bandwidth and small array [C/OL]//Global Oceans 2020: Singapore –U.S. Gulf Coast. 2020: 1-5. DOI: [10.1109/IEEECONF38699.2020.9389445](https://doi.org/10.1109/IEEECONF38699.2020.9389445).
- [122] Yang L, Yuan F, Gao C, et al. Ship noise simulation and detection based on dechirp processing [C/OL]//2018 OCEANS - MTS/IEEE Kobe Techno-Oceans (OTO). 2018: 1-5. DOI: [10.1109/OCEANSKOBE.2018.8559095](https://doi.org/10.1109/OCEANSKOBE.2018.8559095).
- [123] Zhu D, Li Y, Zhu Z. A keystone transform without interpolation for SAR ground moving-target imaging [J/OL]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2007, 4(1): 18-22. DOI: [10.1109/LGRS.2006.882147](https://doi.org/10.1109/LGRS.2006.882147).

附录一 定理 2.2 证明

定理 2.2. 若对任意 $s \in \mathbb{C}^K, |s_k| = 1$, 都存在对偶三角多项式

$$q(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} q_n \exp(j2\pi f_c \frac{d \sin \theta}{c} n) = \sum_{n=0}^{N-1} q_n \exp(j\pi \sin \theta n) \quad (\text{附 1-1})$$

满足 $\begin{cases} q(\theta_k) = s_k, & \theta_k \in \Theta \\ |q(\theta)| < 1, & \text{其它} \end{cases}$, 则全变分范数最小化算法(2-10) 可以实现准确的无网格 DOA 估计。

定理 2.2 的证明与文献 [80] 中类似, 唯一的不同点在于估计变量的取值范围和对偶三角多项式的形式。此处仿照文献 [80] 中的思路对定理 2.2 进行证明。

证明. 为了证明定理 2.2, 只需要说明此时(2-10)的解唯一, 且解得的 $s_{\text{sparse}} = s_{\text{obj}}$ 即可。首先, 根据(2-8), 容易验证 s_{obj} 为(2-10)的一个可行解。使用反证法进行证明: 假设存在 $h \neq 0$, 使得 $s_{\text{sparse}} = s_{\text{obj}} + h$, 显然有

$$\int a(\theta)h(d\theta) = 0. \quad (\text{附 1-2})$$

基于 Radon-Nikodym 定理^[11], 可以对 h 做关于正测度 $|s_{\text{obj}}|$ 的 Lebesgue 分解, 有

$$h = h_\Theta + h_{\Theta^C}, \quad (\text{附 1-3})$$

其中 $h_\Theta \ll |s_{\text{obj}}|$, 即 h_Θ 关于 $|s_{\text{obj}}|$ 绝对连续, h_Θ 集中于 Θ , h_{Θ^C} 集中于 $\mathbb{T} \setminus \Theta$ 。进一步可以构造 h_Θ 的极分解

$$h_\Theta = \exp(-j2\pi\phi(\theta)) \cdot |h_\Theta|, \quad (\text{附 1-4})$$

其中 $\phi(\theta)$ 为定义在 \mathbb{T} 上的实函数。根据定理 2.2 的条件, 存在

$$q(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} q_n \exp(j\pi \sin \theta n) \quad (\text{附 1-5})$$

使得

$$\begin{cases} q(\theta_k) = \exp(j2\pi\phi(\theta_k)), & \theta_k \in \Theta \\ |q(\theta)| < 1, & \text{其它} \end{cases}. \quad (\text{附 1-6})$$

由此可得

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{(附 1-2)}}{=} \int_{\mathbb{T}} q(\theta)h(d\theta) = \int_{\mathbb{T}} q(\theta)h_\Theta(d\theta) + \int_{\mathbb{T}} q(\theta)h_{\Theta^C}(d\theta) \\ &= \|h_\Theta\|_{\text{TV}} + \int_{\mathbb{T}} q(\theta)h_{\Theta^C}(d\theta). \end{aligned} \quad (\text{附 1-7})$$

$|\int_{\mathbb{T}} q(\theta) h_{\boldsymbol{\Theta}^C}(d\theta)| < \|h_{\boldsymbol{\Theta}^C}\|_{\text{TV}}$, 因此 $\|h_{\boldsymbol{\Theta}}\|_{\text{TV}} < \|h_{\boldsymbol{\Theta}^C}\|_{\text{TV}}$ 。由于 s_{sparse} 为(2-10)的解, 因此有

$$\begin{aligned}\|s_{\text{obj}}\|_{\text{TV}} &\geq \|s_{\text{obj}} + h\|_{\text{TV}} = \|s_{\text{obj}} + h_{\boldsymbol{\Theta}}\|_{\text{TV}} + \|h_{\boldsymbol{\Theta}^C}\|_{\text{TV}} \\ &\geq \|s_{\text{obj}}\|_{\text{TV}} - \|h_{\boldsymbol{\Theta}}\|_{\text{TV}} + \|h_{\boldsymbol{\Theta}^C}\|_{\text{TV}} > \|s_{\text{obj}}\|_{\text{TV}},\end{aligned}\quad (\text{附 1-8})$$

产生矛盾, 因此有 $h = 0$ 。

综上所述, s_{obj} 为(2-10)的唯一解。

□

附录二 定理 3.1 证明

定理 3.1. 若正确的空间角频率 $\{\omega_{2i}\}_{i=1}^{K_2}$ 可以通过文献 [107] 中的一维 MMV-MFANM 算法从 \mathbf{Y}_2 中估计，则 $\|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}}$ 可以通过求解以下优化问题计算：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{T}_2, \tilde{\mathbf{T}}_1, \bar{\mathbf{X}}} \quad & \frac{1}{2\sqrt{\tilde{N}_1 \tilde{N}_2}} [\text{Tr}(\mathbf{T}_2) + \text{Tr}(\tilde{\mathbf{T}}_1)] \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 & \bar{\mathbf{X}} \\ \bar{\mathbf{X}}^H & \tilde{\mathbf{T}}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \mathbf{Y} = \mathcal{R}_d(\bar{\mathbf{X}}), \end{aligned} \quad (\text{附 2-1})$$

其中 $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}^1, \dots, \mathbf{Y}^{N_f}]$, \mathbf{T}_2 为 $\tilde{N}_2 \times \tilde{N}_2$ 的 Toeplitz 矩阵, $\tilde{\mathbf{T}}_1$ 为 $N_f \times N_f$ 的分块矩阵, 其中每一块都是 $\tilde{N}_1 \times \tilde{N}_1$ 的 Toeplitz 矩阵。

证明. 令(附 2-1)的最优解为 \tilde{p} 。首先证明 $\|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}} \geq \tilde{p}$ 。令原子分解为 $\tilde{\mathbf{Y}} = \sum_{i=1}^r c_i \tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\omega}_i) \odot \mathbf{p}_{\boldsymbol{\omega}_i}^T$ 。

可以构造(附 2-1)的一个可行解为

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 &= \sum_{i=1}^K |c_{2i}|^2 \mathbf{z}_2(\omega_{2i}) \mathbf{z}_2(\omega_{2i})^H, \\ \tilde{\mathbf{T}}_1 &= \sum_{i=1}^K |c_{1i}|^2 (\mathbf{p}_{\boldsymbol{\omega}_i}^* \otimes \mathbf{z}_1(-\omega_{1i})) (\mathbf{p}_{\boldsymbol{\omega}_i}^* \otimes \mathbf{z}_1(-\omega_{1i}))^H, \\ \bar{\mathbf{X}} &= \sum_{i=1}^K c_{2i} c_{1i}^* \mathbf{z}_2(\omega_{2i}) \mathbf{p}_{\boldsymbol{\omega}_i}^T \otimes \mathbf{z}_1(-\omega_{1i})^H, \end{aligned} \quad (\text{附 2-2})$$

其中 $c_{1i} = \sqrt{|c_i|} \cdot (\frac{\tilde{N}_2}{\tilde{N}_1})^{1/4}$, $c_{2i} = \sqrt{|c_i|} \cdot \text{sign}(c_i) \cdot (\frac{\tilde{N}_1}{\tilde{N}_2})^{1/4}$. 容易验证 $\mathbf{Y} = \mathcal{R}_d(\bar{\mathbf{X}})$ 且

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 & \bar{\mathbf{X}} \\ \bar{\mathbf{X}}^H & \tilde{\mathbf{T}}_1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^K \begin{bmatrix} c_{2i} \mathbf{z}_2(\omega_{2i}) \\ c_{1i} \mathbf{p}_{\boldsymbol{\omega}_i}^* \otimes \mathbf{z}_1(-\omega_{1i}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{2i} \mathbf{z}_2(\omega_{2i}) \\ c_{1i} \mathbf{p}_{\boldsymbol{\omega}_i}^* \otimes \mathbf{z}_1(-\omega_{1i}) \end{bmatrix}^H \geq 0. \quad (\text{附 2-3})$$

容易看出 $\text{Tr}(\mathbf{T}_2) = \sum_{i=1}^K |c_{2i}|^2 \tilde{N}_2 = \sum_{i=1}^K |c_i| \sqrt{\tilde{N}_1 \tilde{N}_2}$, 且

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\tilde{\mathbf{T}}_1) &= \sum_{i=1}^K |c_i| \sqrt{\tilde{N}_2 / \tilde{N}_1} \text{Tr}((\mathbf{p}_{\boldsymbol{\omega}_i}^* \otimes \mathbf{z}_1)(\mathbf{p}_{\boldsymbol{\omega}_i}^* \otimes \mathbf{z}_1^H)) \\ &= \sum_{i=1}^K |c_i| \sqrt{\tilde{N}_1 \tilde{N}_2}. \end{aligned} \quad (\text{附 2-4})$$

由此可得 $\frac{1}{2\sqrt{\tilde{N}_1 \tilde{N}_2}} [\text{Tr}(\mathbf{T}_2) + \text{Tr}(\tilde{\mathbf{T}}_1)] = \sum_{i=1}^K |c_i| = \|\bar{\mathbf{X}}\|_{\mathbb{A}}$ 。由于 $\{\mathbf{T}_2, \bar{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{T}}_1\}$ 是(附 2-1)的一组可行解, 因此有 $\|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}} \geq \tilde{p}$ 。

接下来证明 $\|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}} \leq \tilde{p}$ 。为了便于后续证明，首先考虑一个辅助问题。令 $\hat{\mathbf{X}}^f = \sum_{i=1}^r c_i p_{\omega_i}^f \mathbf{z}_2(\omega_{2i}) \mathbf{a}_1(f, -\omega_{1i})^H$ 以及 $\hat{\mathbf{X}} = [\hat{\mathbf{X}}^1, \dots, \hat{\mathbf{X}}^{N_f}]$ 。相应的映射算子 $\hat{\mathcal{R}}_d : \mathbb{C}^{\tilde{N}_2 \times N_1 N_f} \rightarrow \mathbb{C}^{N_2 \times N_1 N_f}$ 构造如下

$$[\hat{\mathcal{R}}_d(\hat{\mathbf{X}})]_{i,j} = \hat{\mathbf{X}}_{(i-1)j+1,j}, \quad (\text{附 2-5})$$

使得 $\mathbf{Y} = \hat{\mathcal{R}}_d(\hat{\mathbf{X}})$ 。同时构造一个索引选择矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{N_1 N_f, \tilde{N}_1 N_f}$ 如下

$$\mathbf{P}_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = (f-1) \cdot N_1 + k, j = (f-1) \cdot \tilde{N}_1 + (f-1)k + 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (\text{附 2-6})$$

使得

$$\mathbf{P} \cdot (p_{\omega_i} \otimes \mathbf{z}_1(\omega_{1i})) = [p_{\omega_i}^1 \mathbf{a}_1(1, \omega_{1i})^T, \dots, p_{\omega_i}^{N_f} \mathbf{a}_1(N_f, \omega_{1i})^T]^T. \quad (\text{附 2-7})$$

构造辅助问题如下：

$$\begin{aligned} \hat{p} = \min_{\mathbf{T}_2, \hat{\mathbf{T}}_1, \hat{\mathbf{X}}} \quad & \frac{1}{2\sqrt{N_1 \tilde{N}_2}} [\text{Tr}(\mathbf{T}_2) + \text{Tr}(\hat{\mathbf{T}}_1)] \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 & \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{X}}^H & \hat{\mathbf{T}}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \mathbf{Y} = \hat{\mathcal{R}}_d(\hat{\mathbf{X}}), \end{aligned} \quad (\text{附 2-8})$$

其中 \mathbf{T}_2 为 Toeplitz 矩阵， $\hat{\mathbf{T}}_1$ 为 $N_f \times N_f$ 的分块矩阵，其中每一块为 $\tilde{N}_1 \times \tilde{N}_1$ 的 Toeplitz 矩阵， $\hat{\mathbf{T}}_1 = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{T}}_1 \mathbf{P}^H$ 。以下引理说明 $\hat{p} = \|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}}$ 。

引理 附录二.1. 在定理 3.1 的假设下， $\hat{p} = \|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}}$ 。

证明. 首先证明 $\hat{p} \leq \|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}}$ 。可以构造(附 2-8)的一个可行解如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 &= \sum_{i=1}^K |c_{2i}|^2 \mathbf{z}_2(\omega_{2i}) \mathbf{z}_2(\omega_{2i})^H, \\ \hat{\mathbf{T}}_1 &= \sum_{i=1}^K |c_{1i}|^2 (\mathbf{P} \cdot p_{\omega_i}^* \otimes \mathbf{z}_1(-\omega_{1i})) (\mathbf{P} \cdot p_{\omega_i}^* \otimes \mathbf{z}_1(-\omega_{1i}))^H, \\ \hat{\mathbf{X}} &= \sum_{i=1}^K c_{2i} c_{1i}^* \mathbf{z}_2(\omega_{2i}) \mathbf{P} \cdot p_{\omega_i}^T \otimes \mathbf{z}_1(-\omega_{1i})^H, \end{aligned} \quad (\text{附 2-9})$$

其中 $c_{1i} = \sqrt{|c_i|} \cdot (\frac{\tilde{N}_2}{N_1})^{1/4}$, $c_{2i} = \sqrt{|c_i|} \cdot \text{sign}(c_i) \cdot (\frac{N_1}{\tilde{N}_2})^{1/4}$ 。容易验证 $\mathbf{Y} = \hat{\mathcal{R}}_d(\hat{\mathbf{X}})$ 且

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 & \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{X}}^H & \hat{\mathbf{T}}_1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^K \begin{bmatrix} c_{2i} \mathbf{z}_2(\omega_{2i}) \\ c_{1i} \mathbf{P} \cdot p_{\omega_i}^* \otimes \mathbf{z}_1(-\omega_{1i}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{2i} \mathbf{z}_2(\omega_{2i}) \\ c_{1i} \mathbf{P} \cdot p_{\omega_i}^* \otimes \mathbf{z}_1(-\omega_{1i}) \end{bmatrix}^H \geq 0. \quad (\text{附 2-10})$$

可以得出 $\text{Tr}(\mathbf{T}_2) = \sum |c_i| \sqrt{N_1 \tilde{N}_2}$ 以及

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\hat{\mathbf{T}}_1) &= \text{Tr}(\mathbf{P}\tilde{\mathbf{T}}_1\mathbf{P}^H) \\
&= \sum |c_i| \sqrt{\frac{\tilde{N}_2}{N_1}} \text{Tr}([p_{\omega_i}^1 \mathbf{a}_1(1, \omega_{i1})^T, \dots, p_{\omega_i}^{N_f} \mathbf{a}_1(N_f, \omega_{i1})^T]^T \cdot \\
&\quad [p_{\omega_i}^1 \mathbf{a}_1(1, \omega_{i1})^T, \dots, p_{\omega_i}^{N_f} \mathbf{a}_1(N_f, \omega_{i1})^T]^*) \\
&= \sum |c_i| \sqrt{\frac{\tilde{N}_2}{N_1}} \sum |p_{\omega_i}^f|^2 \cdot N_1 = \sum |c_i| \sqrt{N_1 \tilde{N}_2}.
\end{aligned} \tag{附 2-11}$$

由此有 $(\text{Tr}(\mathbf{T}_2) + \text{Tr}(\hat{\mathbf{T}}_1))/2\sqrt{N_1 \tilde{N}_2} = \sum |c_i| = \|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}}$, 即 $\hat{p} \leq \|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}}$ 。

接下来证明 $\hat{p} \geq \|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}}$ 。定义一维原子集 \mathbb{A}_2 为

$$\mathbb{A}_2 = \{[\mathbf{a}_2(1, \omega_2), \mathbf{a}_2(2, \omega_2), \dots, \mathbf{a}_2(N_f, \omega_2)] * \mathbf{S}^T | \omega_2 \in [0, 1], \|\mathbf{S}\|_F = 1\}. \tag{附 2-12}$$

由于空间角频率 $\{\omega_{2i}\}_{i=1}^{K_2}$ 可以通过一维 MMV-MFANM^[107] 从 \mathbf{Y}_2 中正确估计, 因此根据 \mathbb{A}_2 的原子分解为

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_2 &= \sum_{i=1}^K c_i [\mathbf{a}_2(1, \omega_{2i}) \mathbf{a}_1(1, \omega_{1i})^T p_{\omega_i}^1 | \dots | \mathbf{a}_2(N_f, \omega_{2i}) \mathbf{a}_1(N_f, \omega_{1i})^T p_{\omega_i}^{N_f}] \\
&= \sum_{i=1}^K c_i \sqrt{N_1} [\mathbf{a}_2(1, \omega_{2i}) \frac{\mathbf{a}_1(1, \omega_{1i})^T}{\|\mathbf{a}_1(1, \omega_{1i})\|} p_{\omega_i}^1 | \dots | \mathbf{a}_2(N_f, \omega_{2i}) \frac{\mathbf{a}_1(N_f, \omega_{1i})^T}{\|\mathbf{a}_1(N_f, \omega_{1i})\|} p_{\omega_i}^{N_f}].
\end{aligned} \tag{附 2-13}$$

因此 $\|\mathbf{Y}_2\|_{\mathbb{A}_2} = \sum_{i=1}^K c_i \sqrt{N_1} = \sqrt{N_1} \|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}}$ 。根据文献 [107],

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{Y}_2\|_{\mathbb{A}_2} &= \min_{\mathbf{T}_2, \mathbf{W}, \hat{\mathbf{X}}} \frac{1}{2\sqrt{\tilde{N}_2}} [\text{Tr}(\mathbf{T}_2) + \text{Tr}(\mathbf{W})] \quad s.t. \\
&\quad \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 & \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{X}}^H & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq 0, \mathbf{Y} = \hat{\mathcal{R}}_d(\hat{\mathbf{X}}),
\end{aligned} \tag{附 2-14}$$

其中 \mathbf{T}_2 为 Toeplitz 矩阵。对比 (附 2-14) 和 (附 2-8), 有 $\hat{p} \geq \sqrt{N_1} \|\mathbf{Y}_2\|_{\mathbb{A}_2}$ 。又 $\|\mathbf{Y}_2\|_{\mathbb{A}_2} = \sqrt{N_1} \|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}}$, 因此 $\hat{p} \geq \|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}}$ 。

综上, $\hat{p} = \|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}}$ 。 \square

令 $\{\tilde{\mathbf{X}}_0, \mathbf{T}_{2\bar{0}}, \tilde{\mathbf{T}}_{10}\}$ 为 (附 2-1) 的一组可行解。令

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{X}}_0 &= \tilde{\mathbf{X}}_0 \mathbf{P}^H \\
\mathbf{T}_{2\bar{0}} &= \mathbf{T}_{2\bar{0}} \cdot \sqrt{N_1/\tilde{N}_1} \\
\hat{\mathbf{T}}_{10} &= \mathbf{P}\tilde{\mathbf{T}}_{10}\mathbf{P}^H \sqrt{\tilde{N}_1/N_1}.
\end{aligned} \tag{附 2-15}$$

显然有 $\mathbf{Y} = \hat{\mathcal{R}}_d(\hat{\mathbf{X}}_0)$, 且

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{2\hat{0}} & \hat{\mathbf{X}}_0 \\ \hat{\mathbf{X}}_0^H & \hat{\mathbf{T}}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{2\tilde{0}} \cdot \sqrt{N_1/\tilde{N}_1} & \tilde{\mathbf{X}}_0 \mathbf{P}^H \\ \mathbf{P} \tilde{\mathbf{X}}_0^H & \mathbf{P} \tilde{\mathbf{T}}_{10} \mathbf{P}^H \sqrt{\tilde{N}_1/N_1} \end{bmatrix}. \quad (\text{附 2-16})$$

对 $\forall [x_1^H, x_2^H]^H$, 有

$$\begin{aligned} & [x_1^H, x_2^H] \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{2\hat{0}} & \hat{\mathbf{X}}_0 \\ \hat{\mathbf{X}}_0^H & \hat{\mathbf{T}}_{10} \end{bmatrix} [x_1^H, x_2^H]^H \\ &= \left[\frac{N_1}{\tilde{N}_1} x_1^H, \frac{\tilde{N}_1}{N_1} x_2^H \right] \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{2\tilde{0}} & \tilde{\mathbf{X}}_0 \\ \tilde{\mathbf{X}}_0^H & \tilde{\mathbf{T}}_{10} \end{bmatrix} \left[\frac{N_1}{\tilde{N}_1} x_1^H, \frac{\tilde{N}_1}{N_1} x_2^H \right]^H \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (\text{附 2-17})$$

因此 $\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{2\hat{0}} & \hat{\mathbf{X}}_0 \\ \hat{\mathbf{X}}_0^H & \hat{\mathbf{T}}_{10} \end{bmatrix} \geq 0$, 即 $\{\hat{\mathbf{X}}_0, \mathbf{T}_{2\hat{0}}, \hat{\mathbf{T}}_{10}\}$ 为(附 2-8)的一组可行解。换句话说, 所有(附 2-1)的可行解都对应了(附 2-8)的一组可行解。可以验证 $\tilde{p}_0 = (\text{Tr}(\mathbf{T}_{2\tilde{0}}) + \text{Tr}(\tilde{\mathbf{T}}_{10}))/2\sqrt{N_1\tilde{N}_2} = (\text{Tr}(\mathbf{T}_{2\hat{0}}) + \text{Tr}(\hat{\mathbf{T}}_{10}))/2\sqrt{N_1\tilde{N}_2} = \hat{p}_0$ 。因此有 $\tilde{p} \geq \|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}}$ 。结合 $\hat{p} = \|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}}$, 有 $\tilde{p} = \|\tilde{\mathbf{Y}}\|_{\mathbb{A}}$ 。 \square

附录三 第4章相关结论和引理证明

附录三.1 多快拍情况下基于原子范数最小化的距离-角度联合估计

对(4-30)进行 Lagrange 对偶分析，可以得到对偶问题为

$$\max_{\mathbf{Q}} \langle \mathbf{Q}, \mathbf{Y}_{\text{IF}} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad s.t. \|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}_{\text{MMV}}}^* \leq 1, \quad (\text{附 3-1})$$

其中 $\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}_{\text{MMV}}}^*$ 表示 \mathbf{Q} 的对偶原子范数，定义为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}_{\text{MMV}}}^* &\triangleq \sup_{\|\mathbf{X}\|_{\mathbb{A}_{\text{MMV}}} \leq 1} \langle \mathbf{Q}, \mathbf{X} \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \max_{\substack{\|\mathbf{p}\|_2^2 = 1, f_R \in [-1, 0] \\ f_\theta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}} \langle \mathbf{Q}, \mathbf{A}_\theta(f_\theta) \odot \mathbf{a}_R^T(f_R) \diamond \mathbf{p} \rangle_{\mathbb{R}} \\ &\approx \max_{\substack{f_R \in [-1, 0] \\ f_\theta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}} \left\| (\mathbf{a}_R(f_R) \otimes \mathbf{a}_\theta(f_\theta))^H \tilde{\mathbf{Q}} \right\|_2, \end{aligned} \quad (\text{附 3-2})$$

其中 $\tilde{\mathbf{Q}} \triangleq \mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}H} \left[\text{vec}([\mathbf{Q}]_{:, :, 0}), \dots, \text{vec}([\mathbf{Q}]_{:, :, N_p-1}) \right]$, $\mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}}$ 与第4.3中定义一致。将(附 3-2)代入(附 3-1)，有

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}_{\text{MMV}}}^* \leq 1 \iff \left\| (\mathbf{a}_R(f_R) \otimes \mathbf{a}_\theta(f_\theta))^H \tilde{\mathbf{Q}} \right\|_2^2 \leq 1, \forall f_R \in [-1, 0], f_\theta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \quad (\text{附 3-3})$$

利用有界引理^[84] 并进行合适的平方和松弛，上述约束可转换为如下半正定约束

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \tilde{\mathbf{Q}} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^H & \mathbf{I}_{N_p} \end{bmatrix} \succeq 0, \delta_k = \text{Tr}(\boldsymbol{\Theta}_k \mathbf{P}), k \in \mathcal{K}, \quad (\text{附 3-4})$$

其中 \mathcal{K} , $\boldsymbol{\Theta}_k$ 与第4.3节中定义一致。将(附 3-4)代入(附 3-1)可以得到对偶 SDP 问题为

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{Q}} \langle \mathbf{Q}, \mathbf{Y}_{\text{IF}} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad s.t. \\ \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \tilde{\mathbf{Q}} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^H & \mathbf{I}_{N_p} \end{bmatrix} \succeq 0, \delta_k = \text{Tr}(\boldsymbol{\Theta}_k \mathbf{P}), k \in \mathcal{K}. \end{aligned} \quad (\text{附 3-5})$$

对(附 3-5)做 Lagrange 对偶分析，可以得到原问题(4-30)的 SDP 形式(4-31)。

附录三.2 基于原子范数最小化的角度-距离-速度联合估计算法

考虑(4-36)的对偶问题

$$\max_{\mathbf{Q}} \langle \mathbf{Q}, \mathbf{Y}_{\text{IF}} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad s.t. \|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}}^* \leq 1. \quad (\text{附 3-6})$$

基于(4-35)中原子集 \mathbb{A}'_{new} 的定义, 可以将 $\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}}^*$ 计算为

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}}^* = \max_{[f_\theta, f_R, f_v] \in \mathcal{K}} |\langle \mathbf{Q}, \mathbf{A}_\theta(f_\theta) \odot \mathbf{a}_R^T(f_R) * \mathbf{A}_v(f_v) \rangle|. \quad (\text{附 3-7})$$

定义 $\mathbf{q}_{\text{vec}}^{3D} \triangleq \text{vec} \left(\left[\text{vec} ([\mathbf{Q}]_{:,0,:}), \dots, \text{vec} ([\mathbf{Q}]_{:,K_t-1,:}) \right] \right)$, 类比第4.3中的分析, 容易得到

$$\langle \mathbf{Q}, \mathbf{A}_\theta(f_\theta) \odot \mathbf{a}_R^T(f_R) * \mathbf{A}_v(f_v) \rangle \approx \langle \mathbf{H}_{\text{diag}}^H \mathbf{q}_{\text{vec}}^{3D}, \mathbf{a}_R(f_R) \otimes \mathbf{a}_v(f_v) \otimes \mathbf{a}_\theta(f_\theta) \rangle. \quad (\text{附 3-8})$$

结合(附 3-6)和(附 3-8), 此时对偶原子范数约束 $\|\mathbf{Q}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}}^* \leq 1$ 转换为三维多项式不等式约束, 通过有界引理和适当的平方和松弛, 上述约束可以转换为如下半正定约束

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{3D} & \tilde{\mathbf{q}}_{\text{vec}}^{3D} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{\text{vec}}^{3DH} & 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \delta_k = \text{Tr} (\Theta_k \mathbf{P}_{3D}), k \in \mathcal{K}^{3D}, \tilde{\mathbf{q}}_{\text{vec}}^{3D} = \mathbf{H}_{\text{diag}}^H \mathbf{q}_{\text{vec}}^{3D}, \quad (\text{附 3-9})$$

其中 \mathcal{K}^{3D} 为三维半空间, $k = [k_R, k_v, k_\theta]$, $\Theta_k = \Theta_{K_R} \otimes \Theta_{K_v} \otimes \Theta_{K_\theta}$, 其中 Θ_{K_R} 为 $K_t \times K_t$ 的除第 k_R 个对角线为 1 其余均为 0 的 Toeplitz 矩阵, Θ_{K_v} 为 $\tilde{N}_p \times \tilde{N}_p$ 的除第 k_v 个对角线为 1 其余均为 0 的 Toeplitz 矩阵, Θ_{K_θ} 为 $\tilde{N}_m \times \tilde{N}_m$ 的除第 k_θ 个对角线为 1 其余均为 0 的 Toeplitz 矩阵。将(附 3-9)代入(附 3-6), 可以得到对偶 SDP 问题为

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{q}_{\text{vec}}^{3D}} & \langle \mathbf{q}_{\text{vec}}^{3D}, \mathbf{y}_{\text{vec}}^{3D} \rangle_{\mathbb{R}}, \quad s.t. \\ \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{3D} & \tilde{\mathbf{q}}_{\text{vec}}^{3D} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{\text{vec}}^{3DH} & 1 \end{bmatrix} & \succeq 0, \delta_k = \text{Tr} (\Theta_k \mathbf{P}_{3D}), k \in \mathcal{K}^{3D}, \tilde{\mathbf{q}}_{\text{vec}}^{3D} = \mathbf{H}_{\text{diag}}^H \mathbf{q}_{\text{vec}}^{3D}. \end{aligned} \quad (\text{附 3-10})$$

对(附 3-10)做 Lagrange 对偶分析, 可以得到原问题(4-36)的 SDP 形式(4-37)。

附录三.3 无距离徙动情况下的角度-距离-速度联合估计算法

当不存在距离徙动时, 信号模型(4-40)可被视作考虑距离徙动时(4-34)的一种特例, 此时(4-34) 中的 $\mathbf{A}_v(f_v) = \mathbf{a}_v(f_v) \cdot \mathbf{1}^T$ 。基于这一观察, 式(4-44)可以通过对附录三.2中的相关步骤进行修改得到。具体的, 此时的 $\mathbf{H}_k^{\text{vel}} = \mathbf{I}_{N_p}$ 。为了避免引入新的记号, 此处对 $\mathbf{y}_{\text{vec}}^{3D}$ 进行重新排列为 $\mathbf{y}_{\text{vec}}^{3D'}$, 定义为

$$\mathbf{y}_{\text{vec}}^{3D'} \triangleq \text{vec} \left(\left[\text{vec} ([\mathbf{Y}_{\text{IF}}]_{:,:,0}), \dots, \text{vec} ([\mathbf{Y}_{\text{IF}}]_{:,:,N_p-1}) \right] \right).$$

将 $\mathbf{H}_k^{\text{vel}} = \mathbf{I}_{N_p}$ 代入附录三.2中的相关公式即可得到无距离徙动时的 SDP 形式(4-44)。

附录三.4 引理 4.1 证明

引理 4.1. 当(4-31)能准确估计目标距离和角度时, (4-44)等价于以下解耦形式

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}_{2D}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{X}}} \frac{1}{2\sqrt{\tilde{N}_m N_p K_t}} (\text{Tr}(\text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}_{2D})) + \text{Tr}(\text{Toep}(\mathbf{u}))), \quad s.t. \\ & \begin{bmatrix} \text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}_{2D}) & \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\mathbf{X}}^H & \text{Toep}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \geq 0, \mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}} \tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{Y}}, \end{aligned} \quad (\text{附 3-11})$$

其中 $\tilde{\mathbf{Y}} \triangleq [\text{vec}([\mathbf{Y}_{IF}]_{:, :, 0}), \dots, \text{vec}([\mathbf{Y}_{IF}]_{:, :, N_p-1})]$ 。

此处假设映射算子 $\mathcal{R}_k^{\text{ang}}$ 理想, 即(4-21)中取严格等号。

证明. 令(附 3-11)的解为 \hat{p} 。引理 4.1 等价于 $\hat{p} = \|\mathbf{Y}_{IF}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}}$ 。

首先证明 $\hat{p} \leq \|\mathbf{Y}_{IF}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}}$ 。令 \mathbf{Y}_{IF} 基于 \mathbb{A}_{new} 的原子分解为

$$\mathbf{Y}_{IF} = \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} c_k \mathbf{A}_{\theta}(f_{\theta_k}) \odot \mathbf{a}_R^T(f_{R_k}) \diamond \mathbf{a}_v(f_{v_k}) \circ \quad (\text{附 3-12})$$

依据原子范数的定义, 有 $\|\mathbf{Y}_{IF}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}} = \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} |c_k|$ 。

可以构造(附 3-11)的一个可行解 $\{\text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}_{2D}^0), \text{Toep}(\mathbf{u}_0), \tilde{\mathbf{X}}_0\}$ 为

$$\begin{aligned} \text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}_{2D}^0) &= \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} \sqrt{\frac{N_p}{\tilde{N}_m K_t}} |c_k| \left(\mathbf{a}_R(f_{R_k}) \otimes \mathbf{a}_{\theta}(f_{\theta_k}) \right) \left(\mathbf{a}_R(f_{R_k}) \otimes \mathbf{a}_{\theta}(f_{\theta_k}) \right)^H, \\ \text{Toep}(\mathbf{u}_0) &= \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} \sqrt{\frac{\tilde{N}_m K_t}{N_p}} |c_k| \mathbf{a}_v(-f_{v_k}) \mathbf{a}_v^H(-f_{v_k}), \\ \tilde{\mathbf{X}}_0 &= \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} c_k \left(\mathbf{a}_R(f_{R_k}) \otimes \mathbf{a}_{\theta}(f_{\theta_k}) \right) \mathbf{a}_v^T(f_{v_k}). \end{aligned} \quad (\text{附 3-13})$$

此时有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}_{2D}^0) & \tilde{\mathbf{X}}_0 \\ \tilde{\mathbf{X}}_0^H & \text{Toep}(\mathbf{u}_0) \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} \sqrt{\frac{1}{N_p \tilde{N}_m K_t}} |c_k| \begin{bmatrix} \text{sign}(c_k) \sqrt{N_p} \mathbf{a}_R(f_{R_k}) \otimes \mathbf{a}_{\theta}(f_{\theta_k}) \\ \sqrt{\tilde{N}_m K_t} \mathbf{a}_v(-f_{v_k}) \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} \text{sign}(c_k) \sqrt{N_p} \mathbf{a}_R(f_{R_k}) \otimes \mathbf{a}_{\theta}(f_{\theta_k}) \\ \sqrt{\tilde{N}_m K_t} \mathbf{a}_v(-f_{v_k}) \end{bmatrix}^H \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{附 3-14})$$

由于映射算子是理想的, 此时 $\mathbf{H}_{\text{diag}}^{\text{ang}} \tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{Y}}$ 。因此 $\{\text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}_{2D}^0), \text{Toep}(\mathbf{u}_0), \tilde{\mathbf{X}}_0\}$ 为(附 3-11)的一个可行解。此时

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{N}_m N_p K_t}} (\text{Tr}(\text{Toep}_{2D}(\mathbf{u}_{2D}^0)) + \text{Tr}(\text{Toep}(\mathbf{u}_0))) = \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} |c_k| = \|\mathbf{Y}_{IF}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}} \circ \quad (\text{附 3-15})$$

又 $\hat{p}_0 \geq \hat{p}$, 因此有 $\hat{p} \leq \|\mathbf{Y}_{\text{IF}}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}}$ 。

接下来证明 $\hat{p} \geq \|\mathbf{Y}_{\text{IF}}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}}$ 。 (附 3-12) 可以被进一步写为

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{\text{IF}} &= \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} c_k \mathbf{A}_\theta(f_{\theta_k}) \odot \mathbf{a}_R^T(f_{R_k}) \diamond \left(\mathbf{a}_v(f_{v_k}) / \|\mathbf{a}_v(f_{v_k})\| \right) \cdot \|\mathbf{a}_v(f_{v_k})\| \\ &= \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} |c_k| \sqrt{N_p} \mathbf{A}_\theta(f_{\theta_k}) \odot \mathbf{a}_R^T(f_{R_k}) \diamond \left(\mathbf{a}_v(f_{v_k}) / \|\mathbf{a}_v(f_{v_k})\| \right).\end{aligned}\quad (\text{附 3-16})$$

由于(4-31)能准确的估计目标的角度和距离, 基于(附 3-16), 可以得出 $\|\mathbf{Y}_{\text{IF}}\|_{\mathbb{A}_{\text{MMV}}} = \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} |c_k| \sqrt{N_p}$ 。对比(4-31)和(附 3-11), 容易看出任意(附 3-11)的可行解都为(4-31)的可行解。因此有 $\|\mathbf{Y}_{\text{IF}}\|_{\mathbb{A}_{\text{MMV}}} \leq \sqrt{N_p} \hat{p}$ 。又 $\|\mathbf{Y}_{\text{IF}}\|_{\mathbb{A}_{\text{MMV}}} = \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} |c_k| \sqrt{N_p}$, 因此 $\hat{p} \geq \sum_{k=1}^{N_{\text{Tar}}} |c_k| = \|\mathbf{Y}_{\text{IF}}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}}$ 。

综上所述, $\hat{p} = \|\mathbf{Y}_{\text{IF}}\|_{\mathbb{A}_{\text{new}}}$ 。

□

致 谢

感谢我的导师侯朝焕院士，侯院士是水声行业的专家，带领实验室开展多项前沿技术攻关，以极富创新性的思维和开阔的视野为团队发展把握方向，以身作则，亲力亲为，几十年如一日的坚持战斗在科研一线，为国家战略需求做出了重大贡献。他非常重视学生的教育，常常教导我们要立足国家在科研领域的重大需求，以创新的思想开展科研工作，同时要求我们不仅要重视理论创新，也要在技术上进行创新性研究。从他的身上我感受到作为一个科研工作者的坚持和担当，是我终身学习的榜样。郝程鹏研究员是我的第二导师，他治学严谨，工作认真负责，对我的学习和科研给予了很多悉心指导，带领我走进了科研的大门，也是我学习和工作的榜样。

感谢吴敏老师对我科研上的指导，吴老师学识渊博、科研经验丰富、为人和睦，与吴老师交流常让我有如沐春风，茅塞顿开之感。

感谢实验室的徐达老师，李璇老师、王东辉老师、吴永清老师、洪纓老师、李娟老师、代国良老师、李楠老师、魏晓俊老师，感谢各位老师在学习和生活中对我的指导和帮助，他们的科研精神和工作态度是我学习的榜样。

感谢实验室的叶子豪、马婷、谭钢、杨基睿、王微、王天琪、陈世进、扶钰斌、赵唯、金禹希、庞舟岐、黄思佳、王逸伦、高一丁、邹佳运、孙嘉瑞、耿士程、薛勤、李朋卓等师兄师姐们给我的热情帮助，使我能够快速的适应硕士研究生的身份和环境，使我在自己的科研道路上不再迷茫，更加努力奋发向前拼搏。感谢王锐、江首德、江春瑾、于佳平、庄世正、邓世龙、胡羽博、冀天航、张晓宇、王泽欣、刘晨涛等同窗，我们在学习上相互交流和帮助，在生活上相互关心，在精神上相互支持，从始至终陪伴我整个研究生学习生涯，是我这段宝贵的人生经历的重要宝藏。感谢胡展豪、刘澎涛、陈晨等师弟师妹们，在我求学期间给与的帮助，与你们在一起的时间总是让我感觉特别的轻松和温暖，在大家的互相帮助下我们共同进步，共同在实验室和谐的环境中一起学习。

感谢中国科学院大学和中国科学院声学研究所的老师们为我提供的学习条件和学业辅导。

2025 年 6 月

作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与其他相关学术成果

作者简历：

2018 年 09 月——2022 年 07 月，在河海大学物联网工程学院获得学士学位。

2022 年 09 月——2025 年 07 月，在中国科学院声学研究所攻读硕士学位。

已发表（或正式接受）的学术论文：

- [1] **Zhang J**, Wu M, Hao C, et al. Wideband joint elevation–azimuth angle estimation based on multiple frequency model and atomic norm minimization [J/OL]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2025, 74: 1-18. DOI: 10.1109/TIM.2025.3556225.
- [2] 张景铭, 吴敏, 郝程鹏, 等. 基于原子范数最小化的限定区域 DOA 快速估计方法, 投稿至《声学学报》(已录用)
- [3] **Zhang J**, Wu M, Hao C, et al. Wideband joint elevation-azimuth angle estimation based on multiple frequency model and atomic norm minimization [C/OL]//2024 IEEE-APS Topical Conference on Antennas and Propagation in Wireless Communications (APWC). 2024: 24- 29. DOI: 10.1109/APWC61918.2024.10701980.
- [4] 张景铭, 吴敏, 郝程鹏, 等. 基于多字典 SBL 算法的宽带声呐角度-速度联合估计 [C]// 中国高科技产业化研究会智能信息处理产业化分会. 第十八届全国信号和智能信息处理与应用学术会议论文集. 北京: 《计算机工程与应用》编辑部, 2024: 157-162. DOI:10.26914/c.cnkihy.2024.050370.

申请或已获得的专利：

- [1] 郝程鹏, 吴敏, **张景铭**. 一种适用于宽带系统的俯仰角-方位角联合估计方法及装置 [P]. 北京市:CN202411049175.1,2024-11-26.
- [2] 郝程鹏, 吴敏, **张景铭**. 一种基于低复杂度的原子范数最小化方法的宽带俯仰角-方位角联合估计方法及装置 [P]. 北京市:CN202411049174.7,2024-11-29.
- [3] 郝程鹏, 吴敏, **张景铭**, 等. 一种宽带系统角度-速度联合估计方法及装置 [P]. 北京市:CN202411409986.8,2025-02-07.
- [4] 郝程鹏, 吴敏, **张景铭**. 一种基于原子范数最小化方法的宽带俯仰角-方位角联合估计方法及装置: 北京市, CN118503574A[P]. 2024-08-16.
- [5] 郝程鹏, 吴敏, **张景铭**. 一种基于原子范数最小化的限定区域 DOA 估计算法及系统, 2025-4-7, 2025104265334.

参加的研究项目及获奖情况：

- (1) 多基地逆合成孔径声纳波形设计和成像研究（国家自然科学基金青年基金项目，24万）
- (2) 声纳探测与跟踪一体化弱目标检测技术（声学所自主部署项目，100万）