

● 非线性科学丛书 ●

孤波和湍流

刘式达 刘式适 编著

上海科技教育出版社

本书出版由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助

(沪)新登字 116 号

内 容 提 要

孤立波和湍流都是物理中的非线性现象,混沌理论使它们联系起来了。本书首先以混沌和分形的观点来介绍对湍流的一些新的思想,接着介绍混沌和分形,以及对湍流有很大意义的子波变换、自组织临界性和数学中的几个序列,最后论述了同(异)宿轨道和孤立波及湍流涡旋的关系。本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读,也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

本书由郭柏灵、倪皖荪审阅。

非线性科学丛书

孤波和湍流

刘式达 刘式适 编著

郭柏灵 倪皖荪 审阅

上海科技教育出版社出版发行

(上海市冠生园路393号)

各地新华书店经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 4.5 字数 110,000

1994年10月第1版 1994年10月第1次印刷

印数 1-3200本

ISBN 7-5428-0907-5/O·50

定价: 4.20元

PDG

非线性科学丛书编辑委员会

主 编：郝柏林

副主编：郑伟谋 吴智仁

编 委：(按姓氏笔画为序)

丁 鄂 江	文 志 英	朱 照 宣
刘 式 达	刘 寄 星	孙 义 燧
杨 清 建	李 邦 河	张 洪 钧
张 景 中	陈 式 刚	周 作 领
赵 凯 华	胡 岗	顾 雁
倪 皖 荪	徐 京 华	郭 柏 灵
陶 瑞 宝	谢 惠 民	蒲 富 恪
霍 裕 平	魏 荣 爵	

出版说明

现代自然科学和技术的发展,正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法。“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科,与日新月异的新技术相结合,使用数值、解析和图形并举的计算机方法,推出了横跨多种学科门类的新兴领域。这种发展的一个重要特征,可以概括为“非”字当头,即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域。其中,非线性科学占有极其重要的位置。这决非人们“想入非非”,而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升。

曾几何时,非线性还被人们当作个性极强,无从逾越的难题。每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法,运用新颖的技巧。诚然,力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程,物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型。不过,这些都曾是稀如凤毛麟角的“手工艺”珍品,人们还没有悟出它们的普遍启示,也没有看到它们之间的内在联系。

20世纪60年代中期,事情从非线性现象的两个极端同时发生变化。一方面,描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算,揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质。这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径,即所谓“反散射”方法。反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念,反映了这类方程内秉的对称和保守性质。到了80年代,反散射方法推广到量子问题,发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系。

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理。于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域。虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统,但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的。

另一方面,在“不可积”的极端,对KAM定理条件的“反面文章”,揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性,而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例。这些研究迅速地融成一片,一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识。原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测。然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构。

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象。从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律。如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为,则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程。标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用。

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中,许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散,同时也提出了新的深刻的数学问题。物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想,也在日益增多的新领域中找到应用。“非线性”一词曾经是数学中用以区别于“线性”问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿。各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和。非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普适方法。

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步。于是,有了动员在前沿工作的教学和研究人員,以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法。在上海科技教育出版社的大力支持下,这一计划得以付诸实现。

这套“非线性科学丛书”不是高级科普,也不是大块专著。它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展,帮助大学高年级学生、研究生、博士后人員和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域,同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人員更新知识提供自学教材。非线性科学的全貌将由整套丛书刻划,每册努力讲清一个主题,一个侧面,而不求面面俱到,以免失之过泛。在写作风格上,作者們将努力深入浅出,图文并茂,文献丰富;力求有实质内容,无空洞议论,以真刀真枪脚踏实地武装读者。从读者方面,自然要求具备理工科大学本科的数学基础,和读书时自己主动思索与推导的习惯。

“非线性科学丛书”的成功,取决于读者和作者的支持。我们衷心欢迎批评和建议。

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

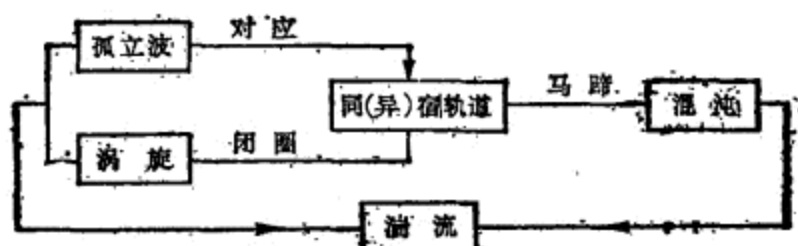
前 言

将不规则的湍流现象与很规则的孤立波联系在一起作为本书的题目,也许读者不易理解。其实,研究湍流正是要将不规则的随机性和规则的确定性联系起来。这种联系早有实验证实:60年代就发现湍流中有相干结构(coherent structure);更早些时候,40年代苏联著名科学家柯尔莫戈洛夫(A. Н. Колмогоров)就从理论上论证了湍流是杂乱的,由大小涡旋组成;但大涡不断分成小涡的串级过程求到的功率谱却是有规律的幂函数,即具有自相似的结构。促使将随机性和确定性联系在一起的还是应该说是发现了混沌(chaos)。因为“混沌”的含义就是确定性中的随机,即确定的非线性动力系统中可以存在内在随机性。之后,分形(fractal)的发现又从反面告诉我们,像湍流这种含有大小涡旋的无特征尺度现象,却包含有自相似的结构,即尺度变化后还具有不变性,而湍流满足的纳维-斯托克斯方程就具有这种不变性。

在我们的工作中将湍流和孤立波联系起来的是,我们求非线性偏微分方程行波解时,原来孤立波就对应于常微分方程的同(异)宿轨道。同宿(homoclinic)轨道和异宿(heteroclinic)轨道是动力系统中的一个概念,孤立波是物理中保守系统中的现象。因此,孤立波和同(异)宿轨道相联系,体现了数学和物理两者的结合。数学家知道同(异)宿轨道,物理学家知道孤立波,但两者的联系却很少人知道。

湍流中有涡旋,这是很早大家就知道的。但是,很少有人发现涡旋和同(异)宿轨道有联系。像绕圆柱流后面出现的涡街是一个一个的螺旋涡,它们实际上就是一种鞍(点)-焦(点)异宿轨道。很多对称涡旋的出现必然伴随着同宿或异宿轨道构成的闭圈。这些都说明同(异)宿轨道和规则的孤立波及涡旋相联系,这只是问题

的一面。另一面是，数学家已为我们说明，同(异)宿轨道受到扰动很易横截相交形成马蹄和混沌，因此同(异)宿轨道又和随机的一面相联系。下图将同(异)宿轨道和确定性及随机性联系的线索绘出来：



从这图上看，同(异)宿轨道是联系规则性的和随机性的桥梁和关键点，是研究湍流的核心。这样，本书把湍流和孤立波联系作为书名，主要就是这个用意。

湍流是一个复杂的问题，不可能通过本书就解决。有关湍流和孤立波的专著都很多，本书不是专门湍流及孤立波的论述。本书只是围绕着确定性和随机性联系的线索去论述湍流和孤立波。

本书共分四章。第1章介绍对湍流的一些看法和观点，以混沌和分形的非线性动力学的观点来论述。多数是近几年的最新看法，因此过去的有关湍流专著中是不易看到的。

第2章和第3章分别是确定性的随机和随机中的确定性。似乎看起来就是混沌和分形，内容上还是和湍流紧密相关的。特别叙述了几个数学上的序列：菲波那契(L. Fibonacci)序列，TM序列，法里(J. Farey)序列，它们在物理中已有很多应用，对湍流的应用有重要前景。这两章中还介绍了最新的对湍流有很大意义的子波变换和自组织临界性。

最后一章主要论述同(异)宿轨道和孤立波及湍流涡旋的关系。虽然一些重要的孤立波方程例如 KdV 方程、薛定谔方程已在很多书中讲到，但本书是着重从同(异)宿轨道和孤立波的对上说的。这章中还着重介绍耗散系统中的 KdV-Burgers 方程、Fisher 方程中的同(异)宿轨道，并用它们来论述湍流的串级过程。

最后部分是论述二维、三维欧拉方程的定常解所显示的实际物理场的同(异)宿轨道及其涡旋。

通过全书的论述, 我们想使读者对湍流有个全面的认识, 对今后研究湍流作为一个引子。限于我们水平, 论述的观点及方法不免有不少错误。本书得到郭柏灵教授和倪皖荪教授的审核和指点, 在此向他们表示感谢。

刘式达 刘式适

1993年2月28日于北京大学



目 录

非线性科学丛书出版说明

前 言

第 1 章	湍流是什么?	1
§ 1	湍流中含有涡旋	1
§ 2	确定性的随机	3
§ 3	非线性的作用	7
§ 4	串级过程	9
§ 5	标度律	10
§ 6	f^{-1} 噪声	13
§ 7	列维游动	17
§ 8	波动和湍流	19
§ 9	湍流涡旋	21
§ 10	反串级(负粘性)	24
第 2 章	确定性的随机	27
§ 11	保守系统和耗散系统	27
§ 12	定常状态的基本类型	29
§ 13	分岔	31
§ 14	彭加莱截面和映射	34
§ 15	稳定和不稳定流形, 同宿和异宿点	36
§ 16	迭代, 菲波那契数	38
§ 17	TM 序列和自相似性	39
§ 18	洛吉斯蒂映射	41
§ 19	费根鲍姆常数, 符号动力学	45
§ 20	圆映射, 同步和法里序列	49
§ 21	巴克尔变换——湍流混合处方	54

第 3 章 随机中的自相似律	56
§ 22 齐夫定律和布朗运动	56
§ 23 相似变换	58
§ 24 康托集合和映射	60
§ 25 随机运动和谢尔宾斯基海绵	63
§ 26 外尔斯特拉斯函数	64
§ 27 无特征尺度	66
§ 28 螺旋结构	68
§ 29 分数维布朗运动	70
§ 30 自组织临界性	74
§ 31 重整化群方法	77
§ 32 子波变换	85
第 4 章 同(异)宿轨道和孤立波、涡旋	90
§ 33 同宿轨道	90
§ 34 异宿轨道	93
§ 35 非线性薛定谔方程的同(异)宿轨道	95
§ 36 球面上的异宿轨道	97
§ 37 耗散系统中的同(异)宿轨道	100
§ 38 鞍-结、鞍-焦异宿轨道	102
§ 39 反应扩散和等离子体耗散系统中的同(异)宿轨道	107
§ 40 湍流和同(异)宿轨道	109
§ 41 二维涡旋	112
§ 42 三维涡旋和螺极分解	118
科学家中外译名对照表	124
参考文献	125

第 1 章

湍流是什么?

1883 年雷诺(O.Reynolds)在圆管中的流体实验中发现湍流,至今已有 110 年了. 湍流是什么? 至今仍没有共识. 但是,随着科学技术的发展,人们对湍流的认识已经丰富多了. 尽管如此,还有许多问题仍在引起科学家们的思考:

湍流是随机的现象,但有无规律性可找?

湍流是确定性的? 还是随机性的?

湍流和涡旋是什么关系?

湍流和波是什么关系?

湍流用什么模型和方法来描述?

本章力图从不同角度说明对湍流必须将确定性和随机性联系起来考虑; 综述目前对湍流的一些主要论点和思想,以便使读者对湍流的认识有一个全貌,引发对湍流的深入讨论和研究。

§ 1 湍流中含有涡旋

到处都可见到,湍流中伴随着涡旋运动. 一支燃着的香烟,在平稳的气流中缓缓升起一缕烟气,突然卷曲成一团团剧烈扰动的烟雾,四处飘散. 烟囱中喷发出滚滚的浓烟,划船时桨后面一串串的旋涡,在湍流场中前进. 说明涡旋在湍流形成的作用的最典型的例子是粘性绕球问题. 一个半径为 L 的球,放在一个流速为 v 的粘性流体中,若流体的粘性系数为 ν ,则流动的雷诺数定义为

$$R_e = \frac{vL}{\nu}. \quad (1.1)$$

当 R_e 较小时, 球后部的运动可以看成是定常的。当 R_e 超过一临界值时, 运动就变成周期的。当 R_e 再高时, 运动成为周期运动的卡曼(Karman)涡街。最后, R_e 再高, 就变成湍流运动。绕球湍流场中的涡旋见图 1-1。

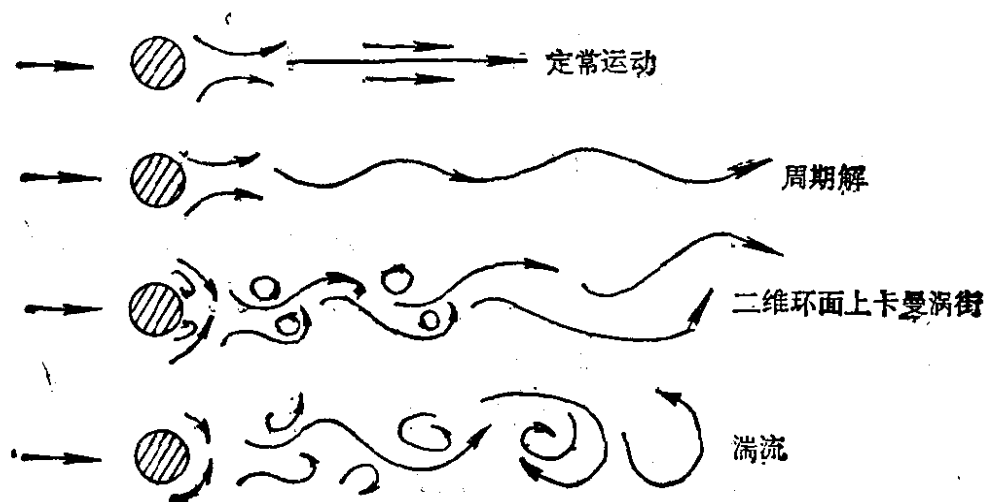


图 1-1

尽管由实验可确信湍流运动中有涡旋, 但实际中我们常常测到湍流速度(或其他物理量)随时间变化的资料, 怎么知道其中含有涡旋呢? 图 1-2 是一个测量的湍流垂直速度 w' 资料的一段放大图。图上看其曲线非常杂乱无章, 且有大大小小的涨落或毛刺。何以造成这种不同程度的毛刺呢? 我们可以想象成它们是由大大小小不同的湍流涡旋所组成, 大的旋转的涡旋可以造成强度较大的 w' 的涨落, 小的涡旋可以造成强度较小的 w' 的涨落。显然, 若是大小都一样的涡旋, 绝不会造成这种杂乱无章的信号。仔细分析还说明, 大涡旋中还含有小涡旋。

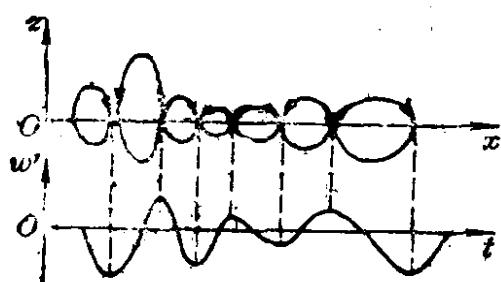


图 1-2

因为相对大的涨落中还含有小的涨落。

近几年来已经创立了一种子波变换 (wavelet transform) 方法, 它将一个时间序列变换成含有位置 t_0 和尺度因子 a 的函数

$T(\alpha, t_0)$, 其中尺度参数 α 的倒数 $\frac{1}{\alpha}$ 代表放大倍数. 图 1-3(i) 就是一个湍流信号变换后的振幅 $T(\alpha, t_0)$ 图, 图中黑色表示振幅是负的或 0, 白色代表振幅是正的或大的. 放大倍数由底部向上是增加的. 从图上可以看出: 底部放大倍数较小时, 信号粗略地可以分成三个黑色区域(相当于三个大涡旋), 但在到达顶部时, 黑色区域被白色区域分隔成较多的块, 显示出放大倍数增加后可以看见较小的涡旋. 对图 1-3(i) 中箭头所指的一段, 若放大参数再加大 20 倍, 就成了图 1-3(ii) 上的图, 据此可见图 1-3(i) 中的小涡旋还含有更小的涡旋. 图 1-3 也充分说明湍流中的大涡变小涡, 小涡再分裂成更小涡的串级(cascade)过程.

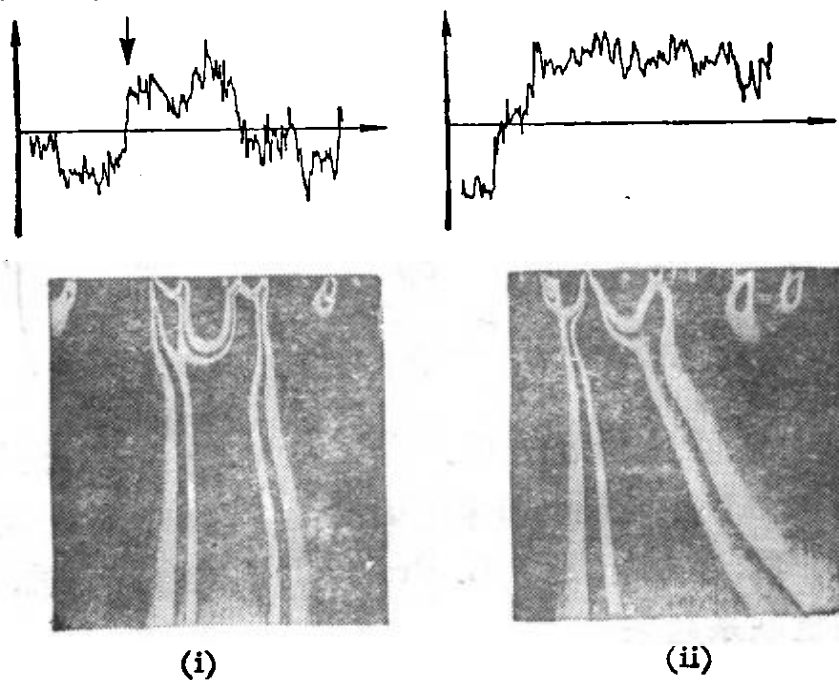


图 1-3

§ 2 确定性的随机

湍流既然是随机的, 如何描述它呢?

描述湍流的无因次的纳维-斯托克斯(O. Navier-G. G. Stokes)方程

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{1}{R_s} \Delta \mathbf{v} \quad (2.1)$$

是由质点动力学的牛顿定律用于流场的结果。

由于确定论在一些人头脑中占统治地位，总认为一个确定的微分方程只要给出初始条件(称为初值问题)就可以有唯一确定的解，正如著名科学家拉普拉斯(P. S. M. de Laplace)所说：“只要给出初条件，我就可以决定未来的一切。”既然如此，确定性的方程(2.1)怎么能给出湍流这种不确定性的解呢？雷诺认为，湍流可以借助于速度场的平均量来描述。于是，他把(2.1)式作平均运算后，导得所谓平均运动方程，其形式仍基本同于(2.1)式(当然，速度要改成平均速度)，但(2.1)式右端却多出了湍流扰动量对平均量的反馈项——雷诺应力项：

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial(-\overline{u'u'})}{\partial x} & \frac{\partial(-\overline{u'v'})}{\partial y} & \frac{\partial(-\overline{u'w'})}{\partial z} \\ \frac{\partial(-\overline{v'u'})}{\partial x} & \frac{\partial(-\overline{v'v'})}{\partial y} & \frac{\partial(-\overline{v'w'})}{\partial z} \\ \frac{\partial(-\overline{w'u'})}{\partial x} & \frac{\partial(-\overline{w'v'})}{\partial y} & \frac{\partial(-\overline{w'w'})}{\partial z} \end{array} \right), \quad (2.2)$$

其中 $\mathbf{v}'(u', v', w')$ 是湍流速度。由于像 $-\overline{u'w'}$ 这种形式的雷诺应力在平均运动方程中是多出来的因变量，因而造成平均运动方程不封闭。为此，借用普朗特(L. Prandtl)的混合长假说，将 $-\overline{u'w'}$ 项和平均量联系起来

$$-\overline{u'w'} = K \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad (2.3)$$

其中 K 称为涡旋粘性(eddy viscosity)系数，它类似于分子粘性系数 ν 。虽然方程似乎封闭了，但是 K 实质上并不知道，因为 ν 是介质的性质，而 K 是湍流的属性。用(2.3)式使雷诺平均运动方程封闭，就是所谓“闭合问题”。

由速度平均量来描述湍流的观点，是一种统计描述方法。这种方法认为，湍流的随机来自外部的边界条件的强迫或热噪声等。

但是, 1963 年美国麻省理工学院的气象学家洛伦兹(E. N. Lorenz)用一台由大堆电线和真空管组成的皇家麦克比(Royal McBee)型计算机去解一个由三个天气变量组成的确定性的非线性一阶微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{x} = -P_r x + P_r y, \\ \dot{y} = R_a x - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (2.4)$$

其中 P_r 是普朗特数, $b > 0$ 是另一参数,

$$R_a = -P_r R_e^2 R_i \quad (2.5)$$

是莱雷(O. M. Rayleigh)数,

$$R_i = \frac{\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2} = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2}$$

是里查逊(L. F. Richardson)数, N 叫 Brunt 频率, 它是描述位温 $\bar{\theta}$ 分层, 速度 \bar{u} 分层的分层流体(例如大气)湍流的重要参数。白天大气温度实际递减率超过绝热递减率(0.98 K/100 m), 使

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} < 0, \quad (R_i < 0)$$

晚上大气温度实际递减率小于绝热递减率, 使

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} > 0. \quad (R_i > 0)$$

有意思的是, 计算结果表明: 当 $R_a > 24.74$ 时, 确定的方程组(2.4)确出现了随机的输出。洛伦兹当时文章的题目为“确定性的非周期流”, 就是今天所谓混沌的含义。同时洛伦兹也观测到, 两个几乎相同的初始条件出发, 却得到完全不同的天气结果, 这种性质称为“敏感初条件”, 或称为“蝴蝶效应”。他以夸张口吻说: 南美洲亚马逊河流域热带雨林中一只蝴蝶, 只要拍动翅膀所引起的扰动气流, 随着时间的增长, 两周后可能在美国得克萨斯州引起一场龙卷风。

洛伦兹的结果和其他研究混沌的结果表明,像(2.4)式这样的确定性的系统可以有随机的结果.也就是说,随机的原因是来自于内部的非线性机制,而不是来自外部.混沌的发现,大大冲击了“确定论”,竟然确定的系统并非是确定性的结果.同时,混沌的发现也在“确定论”和“随机论”之间架起了桥梁.使我们确信,确定性的纳维-斯托克斯方程(2.1)可以用来描述湍流.

实际上,我们只要分析一下非线性系统(2.4),从物理上论证出现随机的结果就是必然的了.首先,若每个方程只有自己变数,即 $\dot{x} = -P_r x$, $\dot{y} = -y$, $\dot{z} = -bz$,显然 x, y, z 都是衰减的,即是个耗散系统.一般地,若把 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 看成是相空间速度 $\mathbf{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 的三个分量,则速度散度为

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial(\dot{x})}{\partial x} + \frac{\partial(\dot{y})}{\partial y} + \frac{\partial(\dot{z})}{\partial z} = -1 - 1 - b < 0. \quad (2.6)$$

(2.6)式说明相空间体积是收缩的,因而是耗散系统.其次,在(2.4)式中只取 $\dot{x} = P_r y$ 和 $\dot{y} = R_a x$,那么就得到

$$\ddot{x} - P_r R_a x = 0. \quad (2.7)$$

方程(2.7)和单摆方程 $\ddot{x} + x = 0$ 类似.由于 $R_a > 0$ (即 $R_i < 0$), (2.7)式的恢复力是负的,而不是像单摆方程恢复力是正的.恢复力是负的,说明解要偏离平衡位置 $x = 0$.若再加上第一个方程中的耗散(阻尼)项 $-P_r x$,则(2.7)式变成

$$\ddot{x} + P_r \dot{x} - P_r R_a x = 0. \quad (2.8)$$

(2.8)式是带有阻尼的负恢复力的系统.虽然我们这种分析并未考虑(2.4)式中的非线性因子,但是系统(2.4)的整体稳定性(耗散)和处处局部不稳定性(负的恢复力)在三维相空间中必然导致轨道的随机性(即混沌).

纳维-斯托克斯方程(2.1)由于有粘性力,因而整体上也是耗散的.同时,系统(2.1)有偏离定常解 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ 的局部不稳定因素,再加上非线性项 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$,和洛伦兹方程(2.4)类似,出现湍流这种随机的结果也是必然的.

§ 3 非线性的作用

湍流运动形态为什么要求有非线性的因子呢？雷诺数(1.1)的物理意义就是非线性的惯性力（量纲为 $\frac{v^2}{L}$ ）和粘性力（量纲为 $\frac{\nu v}{L^2}$ ）之比。粘性力的作用是总体上使流动稳定，而非线性惯性力的作用是使原有流动不稳定的因素。

还是以洛伦兹方程所反映的物理——热对流来说吧！导得洛伦兹方程(2.4)的纳维-斯托克斯方程和热力学方程可简写成

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \theta - \frac{1}{R_0} w, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -w R_i - \frac{1}{P_r R_0} \theta.\end{aligned}\quad (3.1)$$

方程(3.1)右端最后一项分别代表分子粘性和分子热传导的耗散因素。(3.1)的物理过程是：浮力(由温差 θ 引起)引起垂直运动 w ，由垂直运动 w 又引起温差 θ 的变化。在(3.1)式中若无非线性温度平流项 $w \frac{\partial \theta}{\partial z}$ ，那么只能是温差 θ 大引起 w 大， w 大又引起温差 θ 进一步加大，此时 w 或 θ 的方程为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + R_i w = 0, \quad (R_i < 0) \quad (3.2)$$

这和负恢复力的方程(2.7)的物理实质相似，线性结果运动形态只能是单调的上升直至无穷。

若有非线性平流项 $w \frac{\partial \theta}{\partial z}$ ，那么温差 θ 所引起的上下对流，温度高的空气向上，温度低的空气向下，结果反而使上下层空气温差减小。即非线性的作用使引起运动的因素在运动起来后反而使其因素减少。这样， R_0 增加(由(2.5)式负的 R_i 的数值愈大)时流动形态就由静止变成对流状态(w 或 θ 绝不会像线性那样变到无穷)。 R_0 再增加，上下交换更剧烈，对流状态又会转变成湍流状态。

热对流的例子说明, 非线性的作用一方面使形态多样, 同时驱动湍流的因素(R_e 不断增加)又使所有定常态、对流态(周期态)都成为不稳定, 那么流场中处处不稳定, 耗散因素又要流场整体上稳定, 这时流动只能以“伸长”和“折叠”的方式进行, 就好像一只苍蝇在一个房间里被赶得来回乱跑一样。

层流如何转变为湍流? 从非线性动力学角度上第一个回答这个问题的是苏联科学家朗道(L.D.Landau), 他于1944年提出了大胆的设想, 在线性理论的基础上猜想湍流发生是由多次非线性分岔(bifurcation)而造成。

当雷诺数 R_e 接近临界值 $(R_e)_c$ 时, 按线性理论, 扰动的振幅 $|A|$ 以指数形式增长, 即满足如下微分方程

$$\frac{d|A|}{dt} = \sigma |A|, \quad (3.3)$$

但是, 由于非线性的相互作用, 振幅 $|A|$ 的指数增长受到抑制, 即

$$\frac{d|A|}{dt} = \sigma |A| - \frac{l}{2} |A|^3. \quad (3.4)$$

(3.4)式右边高阶非线性项的负号, 就反映了这种抑制。

(3.4)式也可以写成

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\sigma |A|^2 - l |A|^4. \quad (3.5)$$

(3.4)式或(3.5)式叫做朗道方程, 它是黎卡提(J. F. Riccati)方程的一种。

若把(3.4)式中的 $|A|$ 看成是平面极坐标的向径 r , 那么(3.4)式有两个定常解(即 $\frac{d|A|}{dt} = 0$): 一个是 $r=0$ (极坐标原点), 一是 $r = \sqrt{\frac{2\sigma}{l}}$ (它们代表半径为 $\sqrt{\frac{2\sigma}{l}}$ 的极限环)。很易说明, 当参数 $\sigma \approx R_e - (R_e)_c < 0$ 即 $R_e < (R_e)_c$ 时, 定常解 $|A|=0$ 是稳定的。但是, 当参数 σ 由 <0 变成 $\sigma > 0$ 即 $R_e > (R_e)_c$ 时, 定常解 $|A|=0$ 就变成不稳定, 而分岔出稳定的极限环 $|A| = \sqrt{\frac{2\sigma}{l}}$ 。这

种周期的极限环表示有一个频率为 ω_1 的运动, 若 R_e 再增加, 类似又一次分岔出含有两个频率 ω_1, ω_2 的二维环面的运动. 朗道认为, 经过数目很大的 n 次分岔, 由 n 个频率 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ 组成的 n 维环面上的运动就是湍流.

尽管 n 个频率组成的拟周期运动并不是湍流, 但是, 朗道猜想对寻找湍流的动力学机制起着非常重要的作用; 而且, 这种猜想将不规则的湍流同规则的周期运动联系了起来.

§ 4 串级过程

湍流中不但有大量的涡旋, 而且大涡可以分裂成小涡. 里查逊提出了湍流的分层(hierarchical)模式: 驱动流体流动的力产生最大的涡旋; 大涡旋不稳定而产生较小尺度的涡旋; 它又不稳定, 便产生更小的涡旋. 当雷诺数 R_e 较高时, 这种大涡(尺度 L 大)逐步串级成小涡(尺度 L 小)的过程可以进行好多级, 直到分子粘性抑制进一步这种串级过程为止.

假如我们把湍流大涡旋看成是一个单位正方形的话, 那么, 湍流串级过程可能有两种: 一种是一个大涡旋分成四个边长为 0.5 的小涡旋, 如图 4-1

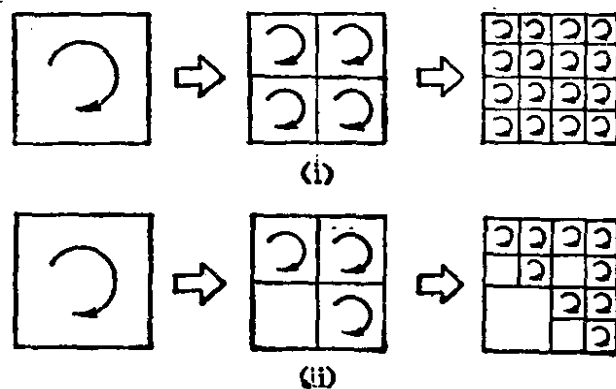


图 4-1

(i). 另一种是一个大涡旋分成三个(或二个, 或一个)小涡旋, 也就是说涡旋并不充满空间, 如图 4-1(ii). 这两种过程一直自相似的串级下去. 一般把前者叫作均匀各向同性湍流的串级过程, 后者叫间歇(intermittency)湍流串级过程.

现在我们来寻找涡旋面积 S 和涡旋尺度 r 之间的关系. 设为

$$S(r) = r^\mu. \quad (4.1)$$

将 $S(r) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ 、 $r = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 代入, 有

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n\mu}.$$

从而导得

$$\mu = 2 - \frac{\log 3}{\log 2} = 2 - D. \quad (4.2)$$

于是, (4.1)式即为

$$S(r) = r^{d-D}, \quad (4.3)$$

其中 $d=2$, $D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.58\ldots$.

(4.3)式中的 d 是涡旋的空间维数, D 是分数维(fractal). 显然, 对于图 4-1(i)的均匀各向同性湍流, 涡旋充满空间, 因而 $D=2$, 因而 $S(r) = r^0 = 1$.

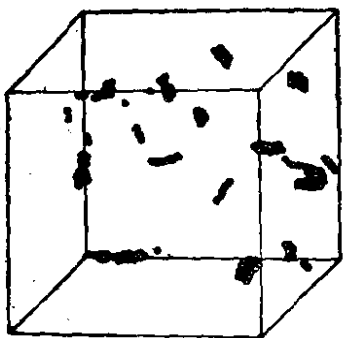


图 4-2

湍流涡旋是三维的($d=3$), 但是串级过程的分析表明, 湍流是间歇的, 间歇湍流的特征可以用分数维来描述. 从图 4-1(ii)的串级过程可以看出, 由于间歇性, 最终小涡旋只集中在空间很小的区域中. 因此, 大涡旋的能量串级到小涡旋后, 小涡旋

的能量由于分子的粘性耗散的湍流能量耗散率 $\varepsilon(r)$ (量纲为单位时间耗散的湍流能量, 即 $\frac{v^2}{t^3}$) 也只集中在空间中的很小区域, 这就是湍流的奇异性(singularity). 图 4-2 是用纳维-斯托克斯方程模拟的湍流能量耗散率 $\varepsilon(r)$ 的分布, 95% 的湍流能量耗散集中在图中小点串的区域. 这些事实说明湍流不但是间歇的, 而且是奇异的.

§ 5 标 度 律

从前面分析看出, 湍流由大大小小不同尺度的湍流涡旋组成.

大气中最大的涡旋的尺度可达几千千米, 而最小的涡旋尺度仅几毫米, 最大最小涡旋的尺度跨 9 个量级之多. 因而, 湍流是无特征尺度的现象. 但从串级过程看出, 虽无特征尺度, 却存在自相似结构的标度(scaling)律. (4.3)式就是湍流涡旋面积标度律的反映. 若将涡旋尺度 r 放大 λ 倍(例如 $\lambda=2$), 则涡旋面积放大 λ^{d-D} 倍(例如 $\lambda=2$ 时为 $\frac{4}{3}$ 倍), 即

$$S(\lambda r) = \lambda^{d-D} S(r). \quad (5.1)$$

显然, $\lambda=2$ 时, $2^{d-\frac{\log 3}{\log 2}} = \frac{4}{3}$. 事实上, $\left(\frac{3}{4}\right) / \left(\frac{3}{4}\right)^2$ 就是 $\frac{4}{3}$. 这和 (5.1) 的结论一致.

早在 1941 年, 苏联著名科学家柯尔莫戈洛夫就发现了串级过程的标度律. 在高 R_e 数的串级过程中(例如大气 R_e 高达 10^6), 由于级数相当多, 串级到惯性区时, 涡旋既失去了大涡旋的非各向同性性质, 成为局部各向同性的, 空间相距 r 的两点的结构函数 $\overline{(\Delta v)^2} = \overline{(v(x+r) - v(x))^2}$, 仅是 r 的函数, 同时涡旋的尺度也没有达到分子粘性重要的尺度, 即惯性区结构函数仅是 r 和能量输送率(它假设等于耗散率) $\bar{\varepsilon}$ 的函数, 即

$$\overline{[\Delta v(r)]^2} = (\bar{\varepsilon} \cdot r)^{2H}. \quad (5.2)$$

(5.2) 式中左边的量纲为 $\frac{\text{米}^2}{\text{秒}^2}$, 右边括号中的量纲为 $\frac{\text{米}^2}{\text{秒}^3} \cdot \text{米} = \frac{\text{米}^3}{\text{秒}^3}$, 要求两边量纲相等, 则

$$2H = \frac{2}{3} \quad \text{或} \quad H = \frac{1}{3}. \quad (5.3)$$

这就是著名的柯尔莫戈洛夫惯性区“结构函数的 $\frac{2}{3}$ 方定律”:

$$\overline{(\Delta v)^2} \propto r^{\frac{2}{3}}. \quad (5.4)$$

因为(5.4)式是 r 的幂函数, 所以和(5.1)式类似, 存在自相似的标度律. (5.2)式中的 $H = \frac{1}{3}$ 叫做速度(差) Δv 的标度指数, 数 $\frac{2}{3}$ 叫做结构函数的标度指数.

设惯性区的功率谱 $S(k)$ 也可以写成波数 k 的幂函数形式:

$$S(k) \propto k^{-\beta}, \quad (5.5)$$

其中 β 叫功率谱指数. 将(5.5)式两边乘上 k , 得

$$kS(k) \propto k^{-\beta+1}.$$

上式左边是能量的量纲, 即 $(\Delta v)^2$ 量纲, 由(5.2)式, 它和 r^{2H} 成正比. 右边的量纲可以写成 $r^{\beta-1}$ (因为 k 的量纲是 $\frac{1}{r}$). 这样, 就求到功率谱指数 β 和 H 的关系为

$$\beta = 2H + 1 = \text{二阶结构函数标度指数} + 1. \quad (5.6)$$

由于 $2H = \frac{2}{3}$, 故 $\beta = \frac{5}{3}$, 这就导得了著名的柯尔莫戈洛夫“惯性区能谱的 $-\frac{5}{3}$ 方定律”:

$$S(k) \propto k^{-\frac{5}{3}}. \quad (5.7)$$

(5.7)式是波数的幂函数, 所以它也反映波数空间的标度律.

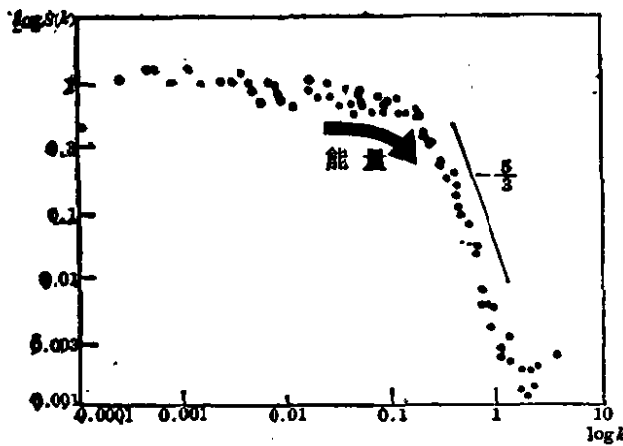


图 5-1

图 5-1 是在双对数坐标 $(\log k, \log S(k))$ 上绘制的惯性区能谱 $S(k)$ 图象.

由(5.2)式还可以求出串级过程的能量输送率(或耗散率) $\bar{\varepsilon}$ 的标度律

$$\bar{\varepsilon} = \frac{(\overline{\Delta v})^3}{r} = r^{3H-1}. \quad (5.8)$$

因为 $H = \frac{1}{3}$, 所以 $\bar{\varepsilon} = \text{常数}$, 即在均匀各向同性的串级过程中 $\bar{\varepsilon}$ 保持不变.

湍流的这种标度不变性也反映在纳维-斯托克斯方程(2.1)式中. 在如下的标度变换下:

$$r \rightarrow \lambda r, \quad v \rightarrow \lambda^H v, \quad t \rightarrow \lambda^{1-H} t, \quad \nu \rightarrow \lambda^{1+H} \nu, \quad (5.9)$$

其形式不变.

对于间歇湍流, 也有类似的标度律. 由(5.1)求出 $S(r) = r^{3-D}$, 它表示“活动”涡旋所占据的概率. 因为小涡旋并未充满空间, 所以能量传输率只是“活动”涡旋的那部分, 即(5.8)式改为

$$\bar{\varepsilon} \propto r^{3-D} \frac{(\Delta v)^3}{r}. \quad (5.10)$$

由此求得

$$(\Delta v) \propto r^{\frac{1}{3}} \cdot r^{\frac{D-3}{3}} = r^{\frac{D-2}{3}}. \quad (5.11)$$

(5.11)式说明, 间歇湍流的标度指数 H 为

$$H = \frac{D-2}{3}. \quad (5.12)$$

(5.12)式中, 若 $D=3$, 就化为均匀各向同性时的 $H = \frac{1}{3}$.

类似间歇湍流时, 均匀湍流的结构函数表达式(5.2)式也要改成“活动”涡旋的那部分

$$\overline{(\Delta v)^2} \propto r^{3-D} \cdot r^{2 \cdot \frac{D-2}{3}} \propto r^{\frac{2}{3} + \frac{3-D}{3}}. \quad (5.13)$$

再由(5.6)式求得间歇湍流功率谱指数

$$\beta = \left(\frac{2}{3} + \frac{3-D}{3} \right) + 1 = \frac{5}{3} + \frac{3-D}{3},$$

或

$$S(k) \propto k^{-\frac{5}{3} - \frac{3-D}{3}}. \quad (5.14)$$

(5.6)式和(5.14)式是著名的 U. Frisch 间歇湍流的 β 模型的结构函数和功率谱标度律. 若其中 $D=3$, 就化为均匀各向同性的柯尔莫戈洛夫标度律.

§ 6 f^{-1} 噪声

湍流在波数谱空间具有标度律(5.7)或(5.14)式. 但是, 无论是均匀各向湍流还是间歇湍流, 其功率谱指数 β 处在 1 和 2 之间.

说来也巧,自然界中还有许多杂乱无章的信号,物理学家称之为噪声(noise). 图 6-1 是三种不同的噪声信号及它们相应的功率谱 $S(f)$ 在双对数坐标($\log f, \log S(f)$)纸上的图象. 图 6-1(i) 是白噪声信号, 它的功率谱在双对数坐标纸上是一水平直线, 即

$$S(f) = \frac{1}{f^0},$$

其中 f 是频率. 图 6-1(iii) 是褐色噪声信号(布朗噪声), 它的功率谱 $S(f)$ 在双对数坐标纸上斜率为 -2 的一直线, 即

$$S(f) = \frac{1}{f^2},$$

即功率谱指数 $\beta=2$. 而图 6-1(ii) 的信号称为 $\frac{1}{f}$ 噪声, 因为它的功率谱为 $S(f) = f^{-\beta}$, 其中 β 介于 0 和 2 之间. 在自然界中, $\frac{1}{f}$ 噪声相当普遍. 美妙的音乐、地震序列、湍流的信号等都是. 这是什么物理机理呢?

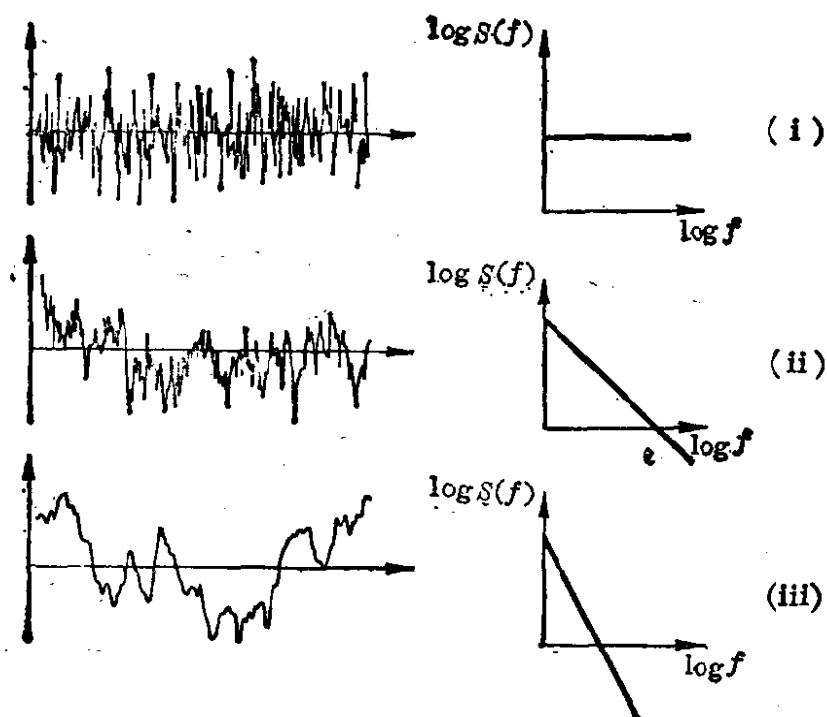


图 6-1

我们设想噪声信号是一种粒子游动的随机性. 粒子在时刻 $t=0$ 时处在 $x=0$, 那么 t 时刻后的位移 $x(t)$ 是

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt', \quad (6.1)$$

其中 v 是粒子速度. 那么, 均方位移 $\overline{x^2}$ 随时间的变化为

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{x^2}}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} = 2\overline{xv} = 2 \int_0^t \overline{v(t)v(t')} dt' \\ &= 2\overline{v^2} \int_0^t \frac{\overline{v(t)v(t+\tau)}}{\overline{v^2}} d\tau \quad (t' = t + \tau) \\ &= 2\overline{v^2} \int_0^t R(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (6.2)$$

其中

$$R(\tau) = \frac{\overline{v(t)v(t+\tau)}}{\overline{v^2}} \quad (6.3)$$

是速度自相关函数 $\overline{v(t)v(t+\tau)}$ 的相关系数.

由(6.2)式求得均方位移 $\overline{x^2}$ 和自相关系数的关系为

$$\overline{x^2} = 2\overline{v^2} \int_0^t \left(\int_0^t R(\tau) d\tau \right) dt. \quad (6.4)$$

同时, 自相关函数和功率谱互为傅里叶余弦变换, 即

$$S(f) = \int_0^\infty R(\tau) \cos f\tau d\tau. \quad (6.5)$$

(6.4)和(6.5)式说明, 一个噪声或湍流信号的自相关函数若给定的话, 那么该噪声或湍流的均方位移和功率谱也就决定了.

对于白噪声, $S(f) = (\text{积分}) \text{常数}$. 由(6.5)式说明白噪声的相关系数 $R(\tau) = 0$, 即 t 时刻的粒子速度和它前面时刻 $t - \tau$ 的粒子速度毫不相关. 且由(6.4)式, 粒子的均方位移 $\overline{x^2} = 0$. 对于褐色噪声, 由(6.5)式知, 只有相关系数为指数衰减形式

$$R(\tau) = e^{-\frac{\tau}{T}}, \quad (6.6)$$

它的傅里叶变换为 $\frac{T}{1+f^2T^2}$, 即 $S(f) \approx f^{-2}$.

而(6.6)式所反映的粒子游动是短程相关而长程不相关的关系. 1905年爱因斯坦(A. Einstein)认为布朗运动质点的半径约

10^{-4}cm , 而特征的张弛 (relaxation) 时间 T 约为 10^{-8} 秒, 布朗质点碰撞的粘性阻尼采用正比于质点速度 v 的斯托克斯定律 $-\frac{1}{T}v$, 这样才导得(6.6)式的相关系数. 也就是说, 当两个布朗质点相离的时间 τ 比 T 小时, 这两个质点相互有较强的影响. 但若两个质点相距的时间 τ 比 T 大时, 这两个质点之间就几乎毫无影响.

用(6.6)式代入(6.4)式, 求得均方位移为

$$\overline{x^2(t)} = 2v^2 T^2 \left(\frac{t}{T} - 1 + e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (6.7)$$

当 t 很大时, (6.7)式右边括号中后两项可以略去, 就导得

$$\overline{x^2(t)} \propto t. \quad (6.8)$$

由以上分析看来, 指数形式(6.6)的相关函数不适合描述包括湍流能谱在内的 $\frac{1}{f}$ 噪声. 指数衰减形式的相关函数的缺陷是假设系统有一个特征时间尺度 T (或特征空间尺度 L). 而在湍流中含有大大小小的涡旋, 是一种无特征尺度却有自相似结构的分形现象. 尽管无特征尺度, 但是不同尺度的湍流涡旋的个数是不同的. 由图 4-1 看出, 显然小涡旋的个数多, 大涡旋的个数少. 为此, 设尺寸为 r 的涡旋个数为 $N(r)$, 则(4.3)式中涡旋的面积 $S(r)$ 也可以表示为 $N(r)$ 个面积为 r^2 的小涡旋, 即

$$S(r) = r^{2-D} = N(r) \cdot r^2. \quad (6.9)$$

由(6.9)式得

$$N(r) = r^{-D}. \quad (6.10)$$

由(6.10)看出, 尺寸 r 愈小, 涡旋的个数 $N(r)$ 愈多. 同时, 由(6.6)式看出, 特征时间 T 小时, 相关系数小; 特征时间 T 大时, 相关系数大. 也就是说, 尺度小的次数多但相关系数小, 尺度大的次数少但相关系数大. 这样就有可能改变图 6-1(iii)的褐色噪声功率谱斜率过大 ($\beta = -2$) 的状况, 在高频端(个数多)的功率抬高, 在低频端(个数少)的功率降低, 有可能使功率谱斜率 $\beta < 2$. 而像

图 6-1(ii)的情况。

1988 年, 巴克(P. Bak)、汤超(O. Tang)和维森弗尔德(K. Wiesenfeld)三人(简称 BTW)提出“自组织临界性”(self-organized criticality, 简称 SOC)的概念。他们认为像地震、沙堆、湍流这种由许多单元组成的复杂系统, 单元之间的关系非常密切, 它们自然组织成一种稳固的临界状态。该系统受到扰动后, 大大小小的事件均可能发生(像大小地震, 沙堆的大小坍方), 事件发生后系统又自发演化成临界状态。因此, 他们认为大事件和小事件可能出于同一原因。而且, 在自组织临界现象中, 大的事件(例如大地震)发生少, 小的事件(例如小地震)发生多。以 T 为尺度的事件发生的概率为

$$P(T) \approx T^{-\alpha}. \quad (6.11)$$

因此, 我们将指数形式相关系数(6.6)代入(6.5)式, 求出功率谱, 再用(6.11)式的概率进行加权, 即

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{T}} \cdot \cos f\tau d\tau \right) T^{-\alpha} dT \\ &= \int_0^\infty \frac{T}{1+f^2 T^2} T^{-\alpha} dT \approx f^{-(2-\alpha)}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

这就是说, 功率谱指数 β 为

$$\beta = 2 - \alpha. \quad (6.13)$$

只要 $0 < \alpha < 2$, 那么 $0 < \beta < 2$ 就符合 $\frac{1}{f}$ 噪声功率谱的要求。只要 $0 < \alpha < 1$, 那么 $1 < \beta < 2$ 就符合湍流功率谱的要求。

§ 7 列维游动

前面已经看到, 对布朗运动来说, 它是有特征尺度的, 因此其自相关函数是指数衰减形式(6.6)式, 而导得的功率谱是 $S(f) = f^{-2}$, 它并不是湍流的功率谱, 那么湍流究竟应该是什么形式的自相关函数呢? 应该有什么形式的概率分布呢?

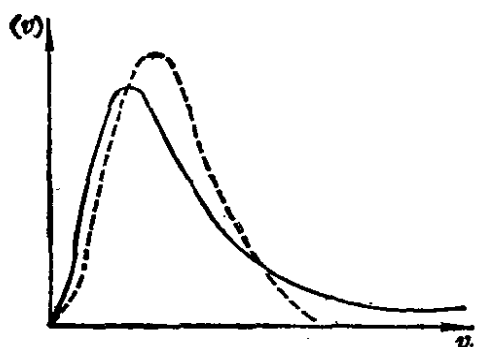


图 7-1

由于湍流的间歇性，小涡旋并不充满空间而只占领空间的一些点上。在这些点上湍流的能量耗散率很大，涡度场和速度场形成奇异性结构。这就说明极端大的速度场仍有一定的概率，即概率分布有比较胖的尾巴。而不像正态分布，极端大的速度场的概率很小。图 7-1 显示正态分布(图中用虚线表示)和

间歇湍流分布(图中用实线表示)的差别。

湍流含有大大小小不同尺度的涡旋，并无特征尺度，此时随机游动可以允许各种尺度的跃迁。从理论上已经说明这种胖尾巴部分服从列维稳定分布

$$p(x) \approx x^{-\alpha-1}, \quad (7.1)$$

其中 x 是随机变量， $0 < \alpha < 2$ 称为列维稳定分布的特征指数。

由(7.1)式得出，游动位移 x' 大于 x 的累计概率就为

$$P(x' > x) = \int_x^\infty p(x') dx' \approx x^{-\alpha}. \quad (7.2)$$

(7.1)式和(7.2)式说明概率密度分布是幂函数。图 7-2 是布朗随机游动(i)和列维随机游动(ii)的区别。

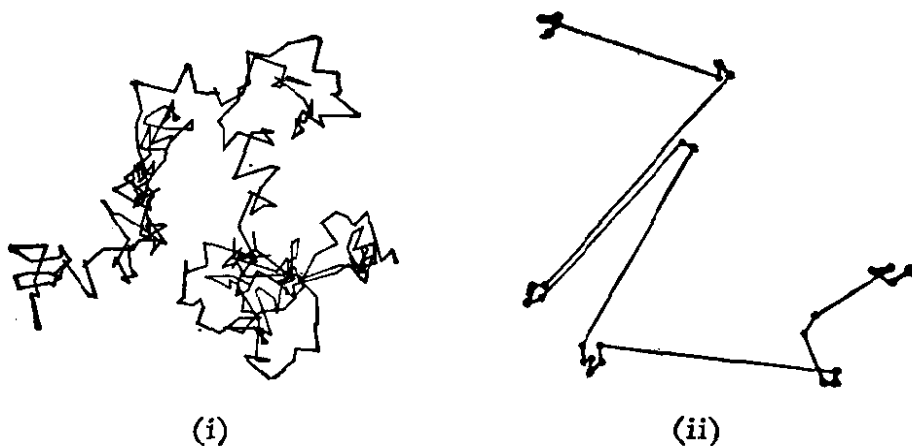


图 7-2

若分布是幂型(7.2)式，那么自相关函数也是幂型。由于 $p(x)$

在 $\alpha \rightarrow 0$ 是发散的, 一种方法是不妨假定 α 的下限使 $p(0) = 1$, 因此自相关函数有

$$C(r) = \overline{p(x)p(x+r)} = \overline{p(0)p(r)} \propto r^{-\alpha}. \quad (7.3)$$

因此, 由(7.3)看出, 若两个湍流的涡旋距离加大 2 倍, 则相关减小为原来的 $2^{-\alpha}$ 倍.

由于有(7.2)式的分布, 随机游动的方差必然有

$$\overline{x^2} \rightarrow \infty. \quad (\alpha < 2) \quad (7.4)$$

大气中很多现象都符合列维分布.

§ 8 波动和湍流

所谓波动现象, 是振荡在空间中的传播. 要振荡, 首先要有正恢复力(像单摆那样). 在流体力学中引起正恢复力的原因主要是密度 $\bar{\rho}$ 随高度减小的稳定层结, 即 $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} < 0$. 在大气中引起正恢复力的原因是位温(或称相当密度) $\bar{\theta}$ 随高度增加的稳定层结, 即 $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} > 0$ (或 $N^2 = -\frac{g^2}{c_s^2} - \frac{g}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} > 0$), 其中 c_s 是绝热声速.

波动的能量来自基本的密度场 $\bar{\rho}$ 或温度场 $\bar{\theta}$, 这种波动的扰动怎么会变成湍流呢?

一种看法是引起振荡的正恢复力变成负恢复力. 最典型的例子是大气由晚上的稳定层结($N^2 > 0$, $R_i > 0$)变成白天边界层内的不稳定层结($N^2 < 0$, $R_i < 0$). 这就是洛伦兹方程研究的 $R_0 > 0$ ($R_i < 0$) 时由对流转变成混沌和湍流的过程.

另一种看法是无论是圆管流还是边界层流都有风速剪切(风速切变). 图 8-1(i) 是稳定层结流体($\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} < 0$) 中的常见密度分布 $\bar{\rho}(z)$ 和速度分布 $\bar{u}(z)$. 图中阴影层是密度较大层, 无阴影部分是密度较小层. 如果速度切变 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ 太小, 流动是稳定的, 不会有任何

扰动发展,如图 8-1(ii). 但是,当切变超过某一临界数值,则在切变层内很快产生波动,如图 8-1(iii). 若速度切变再大,那么波动又发生不稳定,波发生扭曲,见图 8-1(iv). 并逐渐变成滚轴状,见图 8-1(v). 此时,速度切变和密度梯度都出现在其中的细微尺度上. 这些密度梯度进一步引起不稳定,结果滚轴内的流体就分解成小尺度的湍流,如图 8-1(vi), 这种波的不稳定称为开尔文-亥姆霍尔兹不稳定(Kelvin-Helmholtz). 在图 8-1(iii)到 8-1(vi)的过程中,波动首先耗散流体的平均运动动能,使波得到发展,然后波分裂,将能量串级转移到小尺度的湍流运动.

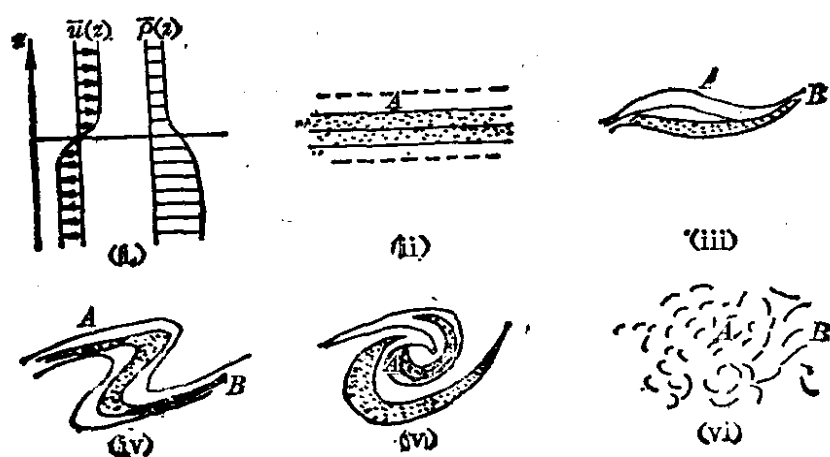


图 8-1

大气中也有类似的情况. 白天边界层以上的对流层内以及晚上整个对流层都是稳定层结($\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} > 0$, $N^2 > 0$, $R_i > 0$), 存在着正恢复力的重力内波, 参看(2.7)式和(2.5)式. 米尔斯(J.W.Miles) 1962 年论证重力内波稳定的充分条件是

$$R_i > \frac{1}{4}, \quad (8.1)$$

即 $R_i = \frac{1}{4}$ 是临界里查逊数. 关于这个数是否合适, 我们还是可以讨论, 但一般把 $R_i = \frac{1}{4}$ 看成是湍流发生的临界里查逊数.

当 R_i 稍稍大于 $\frac{1}{4}$ 后, 形成了重力内波, 这种扰动的内波形成

后, 扰动的热量向下输送, 类似(2.3)式,

$$\overline{W'\theta'} = -K_T \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} < 0,$$

因而扰动热量输送的结果使上下层的温差加大, 造成平均内能增加, 即有可能使 $R_i < \frac{1}{4}$ 而形成湍流. 这个事实说明重力内波的能量来自基本温度场和速度场, 但是一旦扰动的波形成后又对基本温度场反馈, 而改变基本温度场, 形成湍流. 晚间边界层内和白天边界层以上的对流层内常观测到 R_i 在 $\frac{1}{4}$ 附近, 因而经常观测到层流和湍流之间的间歇或间隙现象.

由此看来, 规则的波动是不规则湍流产生的一个重要环节.

§ 9 湍流涡旋

湍流和涡旋联系在一起, 这是一个公认的事实. 涡旋又是相干结构(coherent structure)的主要成员. 从形式上看, 涡旋的四周速度方向是相对(相反)的, 这表明流体层内有相当大的速度切变. 大涡是从基本(平均场)中获得能量, 是湍流能量的主要含能涡旋, 然后再通过粘性和色散因素串级分裂小涡旋并将能量传递给小涡, 直到粘性耗散为止.

很多年来, 科学家们渴望知道流体力学方程涡旋运动的解. 近几年来有关螺度(helicity)的研究, 促进了这个问题的了解.

大家知道纳维-斯托克斯方程的无因次形式(2.1)在 R_i 较高时产生湍流, 因而其近似就是欧拉方程

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P. \quad (9.1)$$

(9.1)的等价形式为

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right). \quad (9.2)$$

所谓螺度 h , 是速度向量 \mathbf{v} 和旋度向量 $\text{rot} \mathbf{v}$ 的点积

$$h = \mathbf{v} \cdot \text{rot} \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (9.3)$$

若速度 \mathbf{v} 和旋度 $\boldsymbol{\omega}$ 平行, 即螺度有最大值时, 则(9.2)式中 $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = 0$, (9.2)式可以化成线性方程

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right). \quad (9.4)$$

因此(9.4)式的定常解满足

$$\nabla \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = 0. \quad (9.5)$$

满足螺度最大或 $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = 0$ 及(9.5)的定常解, 叫做贝切美流(Beltrami flow). 更一般地, 由(9.2)式定常解满足

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = \nabla \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right), \quad (9.6)$$

这叫欧拉流(Euler flow).

因为定常速度场 $\mathbf{v}(u, v, w)$ 可以写成

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} = v(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = w(x, y, z), \end{cases} \quad (9.7)$$

其中 (x, y, z) 是流体质点的位置, 而 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 是真实的质点的轨迹或流场的流线(因为是定常场, 轨线和流线相重合).

例如 $u = \sin x \sin y$, $v = \cos x \cos y$, $w = -\sin x \cos y$ 时的方程(9.7)为

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x \sin y, \\ \dot{y} = \cos x \cos y, \\ \dot{z} = -\sin x \cos y. \end{cases} \quad (9.8)$$

很易证明

$$\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

因此速度场(9.8)是贝切美流.

(9.8)是非线性动力系统, 它的定常解(即使其右端为 0)满足

$$(x = \pm m\pi, y = \pm n\frac{\pi}{2}), \quad (9.10)$$

其中 $m=0, 1, 2, \dots$; $n=1, 2, \dots$. 在平面 (x, y) 上我们绘出部分(9.8)式的定常解(奇点)的位置及其相应的轨线, 见图 9-1. 很易说明, 这些奇点(图中黑点)是鞍点(saddle point), 而由四个鞍点组成的闭合圈内是闭合涡旋流线. 因为轨线是不能通过奇点的, 所以由一个鞍点出发($t \rightarrow -\infty$)到另一个鞍点($t \rightarrow +\infty$)的轨线叫做异宿(heteroclinic)轨道. 湍流涡旋是由异宿闭圈的轨道所形成的.

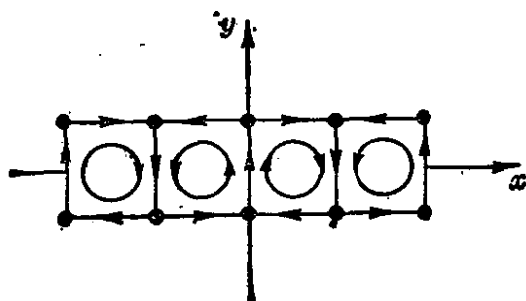


图 9-1

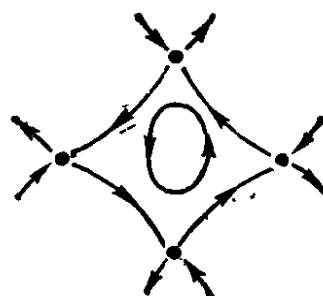


图 9-2

由于(9.7)式是三维非线性自治动力系统, 一般质点的轨线可以出现混沌状态. 这种混沌状态叫拉格伦日(J. L. Lagrangian)湍流.

又例如著名的 ABO(Arnold-Beltrami-Childress)流, 其速度场可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = A \sin z + C \cos y, \\ \dot{y} = B \sin x + A \cos z, \\ \dot{z} = C \sin y + B \cos x. \end{cases} \quad (9.11)$$

也很易证明速度场 $\mathbf{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \text{rot } \mathbf{v}$, 因而也是贝切美流. 类似地, (9.11) 的定常解是一些鞍点, 鞍点之间异宿轨道构成的异宿闭圈是涡旋流场. 图 9-2 是 $A=0$ 时 (x, y) 平面上的部分流线.

因为贝切美流将引起湍流的纳维-斯托克斯方程中的非线性项吸收到贝切美流的涡旋中去了, 所以贝切美流的涡旋含有湍流的主要信息, 是涡旋和湍流相联系的渠道.

顺便指出, 由 Karhunen-Loeve 提出的 K-L 展开, 正是寻找一种基(特征)函数, 使湍流脉动量在其上的投影最大. 这种基函数就称为相干结构. 流体力学中, 不可压缩流体 $\text{div } \mathbf{v} = 0$ 条件下的速度场 \mathbf{v} 可以有 T-P (Toroidal-Poloidal) 分解

$$\mathbf{v} = \text{rot}(-\psi \mathbf{k}) - \text{rot}(\text{rot } \chi \mathbf{k}), \quad (9.12)$$

其中 \mathbf{k} 是垂直方向的单位向量, ψ 类似于二维中的流函数, $\frac{\partial \chi}{\partial z}$ 类似于二维中的速度势. 对于贝切美流, 有

$$\text{rot } \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}. \quad (9.13)$$

很易证明 \mathbf{v} 有类似于(9.12)的表达式

$$\mathbf{v} = \text{rot}(\lambda q \mathbf{k}) + \text{rot}(\text{rot } q \mathbf{k}). \quad (9.14)$$

其中 q 正满足亥姆霍兹方程

$$\Delta q + \lambda^2 q = 0, \quad (9.15)$$

因此 q 是一种满足齐次边界条件的基函数. 由此可见, 将贝切美流所反映的涡旋看作是一种相干结构是有道理的, 而且, 它和湍流的关系正在深入研究中.

§ 10 反串级(负粘性)

从(5.8)式看出, 在柯尔莫戈洛夫惯性区能量串级过程中湍流能量 $E = \frac{1}{2} \overline{|\mathbf{v}|^2}$ 的输送率是常数, 且等于湍流能量耗散率 $\bar{\varepsilon}$, 即

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{dE}{dt} = 2\nu Q. \quad (10.1)$$

但是, 在二维(x, y)湍流中, 惯性区多了一个拟能(enstrophy)

$$Q = \frac{1}{2} |\boldsymbol{\omega}|^2,$$

输送率是常数, 且等于湍流拟能耗散率 $\bar{\eta}$, 即

$$\bar{\eta} = -\frac{dQ}{d\tau} = 2\nu P. \quad (10.2)$$

其中 $P = \frac{1}{2} |\text{rot} \boldsymbol{\omega}|^2$ 叫做 palinstrophy, $\boldsymbol{\omega}$ 是旋度.

由(10.1)式看出, 对三维湍流高 $R_e = \frac{vL}{\nu}$ 串级过程中, $\nu \rightarrow 0$, 因而拟能 Q 发散, 即 $Q \rightarrow \infty$. 这叫做无粘拟能突变 (inviscid enstrophy catastrophe), 是一种湍流奇异性的象征. 但是, 对二维湍流 Q 是有限的, 因此 $\nu \rightarrow 0$ 时 $\varepsilon \rightarrow 0$, 这时柯尔莫哥洛夫湍流串级过程失效. 但由(10.2)式看出, 在二维湍流中, $\nu \rightarrow 0$ 导致 polinstrophy 发散, 即 $P \rightarrow \infty$, 这称为无粘 polinstrophy 突变.

柯尔莫戈洛夫惯性区的能谱 $S(k)$ 只和 $\bar{\varepsilon}$ 和 k 有关, 用量纲分析法导得(5.7)式. 同样, 二维湍流能谱 $S(k)$ 只和 $\bar{\eta}$ 和 k 有关, 用量纲分析法导得功率谱为

$$S(k) \propto \bar{\eta}^{2/3} k^{-3}. \quad (10.3)$$

因此, 在二维湍流的惯性区中分成两部分: 一部分主要以能量传输为主, 一部分以拟能传输为主, 即

$$\begin{aligned} S(k) &\propto k^{-5/3}, & \text{当 } k < k_e \text{ 时;} \\ S(k) &\propto k^{-3} & \text{当 } k > k_e \text{ 时.} \end{aligned} \quad (10.4)$$

见图 10-1. 因为在 $k > k_e$ 区无能量输送, 因此在 $k < k_e$ 的能量输送只能从高波数(小尺度)到低波数(大尺度)的能量反串级过程. 而在 $k > k_e$ 区, 拟能由低波数(大尺度)到高波数(小尺度)的正串级过程.

图 10-2(i)是二维流函数场, 图 10-2(ii)是二维涡度场. 可以看出, 大尺度的流函数结构是能量反串级的结果, 而小尺度涡度场的较为混乱的结构是拟能正串级的结果.

从这里看出,所谓“相对有序”还是“无序”,这要看所要观察的物理量. 图中流函数场就相对有序,而涡度场就相对无序.

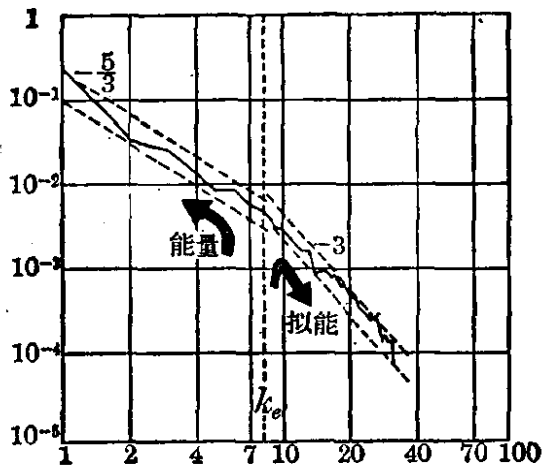
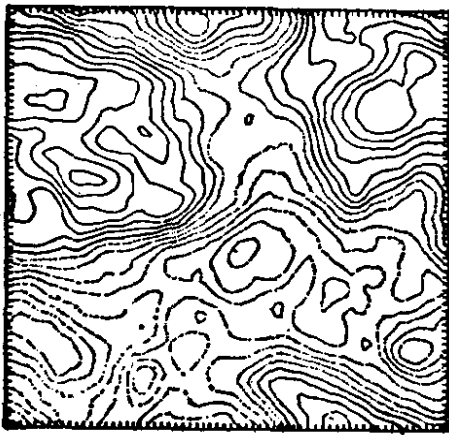


图 10-1

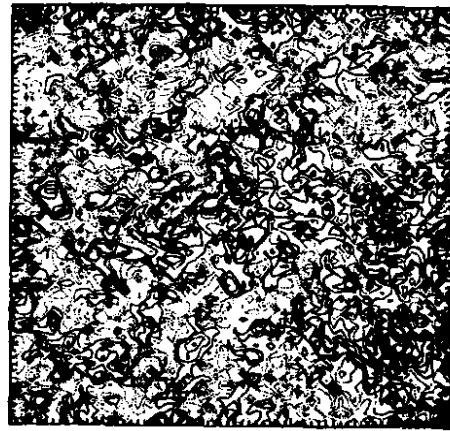
实际问题中确定存在反串级过程,更为普遍的是存在负粘性现象或逆梯度输送现象,即动量(或热量等)是由 \bar{u} (或 $\bar{\theta}$) 小的向 \bar{u} (或 $\bar{\theta}$) 大的方向输送.

以(2.3)式来讲,若 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} > 0$, 则

动量通量向下输送(即 $\overline{u'w'} < 0$), 因而涡旋粘性系数 $K > 0$, 这是通常的认识. 而对于动量的逆梯度输送, 即向上输送(即 $\overline{u'w'} > 0$), 那么涡旋粘性系数 K 只能为负, 即 $K < 0$.



(i)



(ii)

图 10-2

第 2 章

确定性的随机

第 1 章介绍了对湍流的各种看法, 基本想法是要将随机性和确定性联系起来研究湍流, 不能将湍流只看成是随机性的一面. 混沌的发现正好说明确定性的系统中可以有随机性的结果, 所以混沌的研究大大促进了湍流的研究. 本章介绍湍流和混沌有关的若干基本概念.

§ 11 保守系统和耗散系统

物理学的描述分为质点和场, 是以质点动力学为先导和基础的. 如果质点所受的力是有势的, 那么该系统的机械能保持守恒, 这样的系统称为保守系统.

最典型的保守系统是哈密顿系统. 对有势 $V(x)$ 、力场 $F(x)$ 的牛顿定律为

$$\ddot{x} = F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}. \quad (11.1)$$

(11.1)式可以化为

$$\begin{cases} \dot{x} = y = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = F(x) = -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{cases} \quad (11.2)$$

其中 $H(x, y)$ 为哈密顿函数, 是动能和位能之和:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x). \quad (11.3)$$

(11.2)式是一个自由度用质点位置 x 和速度 $\dot{x} = y$ 描述的二维系统. 若把 \dot{x} 和 \dot{y} 看成是相平面 (x, y) 上的相速度 $v(\dot{x}, \dot{y})$ 的两个

分量, 那么其速度散度为

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = \frac{\partial(y)}{\partial x} + \frac{\partial(F(x))}{\partial y} = 0. \quad (11.4)$$

(11.4)式说明, 在保守系统中相空间的体积是守恒的. 这是著名的刘维尔(J. Liouville)定理. 图 11-1 表示稳定(i)和不稳定(ii)情况下相体积的变化.

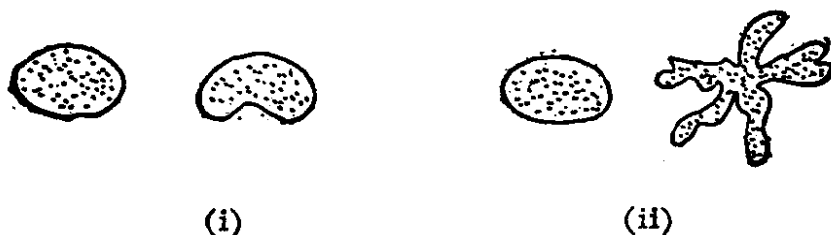


图 11-1

无阻尼单摆方程

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (11.5)$$

是保守系统的典型例子.

若系统有摩擦力, 例如单摆方程 (11.5) 加上摩擦力 $\alpha \dot{x}$, 则 (11.5) 式变成

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + x = 0. \quad (11.6)$$

(11.6) 式可化为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\alpha y - x. \quad (11.7)$$

这就和保守系统不同. 这样的系统称为耗散系统. 耗散系统中相空间体积是收缩的. 由 (11.7) 式得

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = -\alpha < 0. \quad (11.8)$$

一般, 它要通过伸长和折叠而使体积收缩(见图 11-2). 普遍认为, 湍流是耗散系统中的现象.



图 11-2

§ 12 定常状态的基本类型

对于一般的非线性动力系统,是很难找到它的解析解的.但是解的长时间演化后的归宿还是容易分析的.对平面自治动力系统

$$\dot{x}=f(x, y), \quad \dot{y}=g(x, y), \quad (12.1)$$

定常状态就是指长时间演化后 x 和 y 都不随时间变化的状态,即 $\dot{x}=0, \dot{y}=0$, 故定常状态满足代数方程组

$$f(x, y)=0, \quad g(x, y)=0. \quad (12.2)$$

以非线性单摆方程

$$\ddot{x} + \sin x = 0 \quad (12.3)$$

为例. (12.3)化为

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-\sin x. \quad (12.4)$$

故定常状态满足

$$y=0, \quad \sin x=0. \quad (12.5)$$

显然,它有三个定常状态 (x, y) :

$$(0, 0), \quad (\pi, 0) \quad \text{和} \quad (-\pi, 0). \quad (12.6)$$

$(0, 0)$ 代表单摆最下方位能最小的点, $(\pm\pi, 0)$ 代表最上方位能最大的点,它们分别对应于稳定的中心点和不稳定的鞍点(见图 12-1).

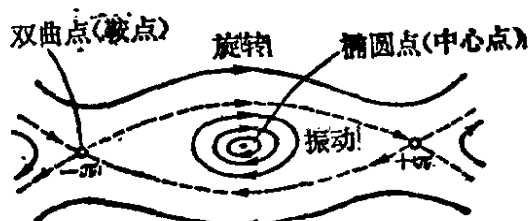


图 12-1

如何说明该定常状态的稳定性呢? 从李雅普诺夫(A. M.

Ляпунов)意义上讲,给定常状态 (x_0, y_0) 以扰动 δx 和 δy , 看 $(\delta x, \delta y)$ 是否发展. 将 $x_0 + \delta x, y_0 + \delta y$ 代入方程(12.1), 得线性方程

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{x_0, y_0} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{x_0, y_0} \delta y, \\ \delta \dot{y} &= \frac{\partial g}{\partial x} \bigg|_{x_0, y_0} \delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \bigg|_{x_0, y_0} \delta y. \end{aligned} \quad (12.7)$$

由于线性方程(12.7)有 $e^{\lambda t}$ 形式的解, 其中 λ 是雅可比矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{x_0, y_0} \quad (12.8)$$

的特征值, 它满足特征方程

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad (12.9)$$

那么, 在参数平面 (p, q) 上, 根 λ 的分布情况如图 12-2.

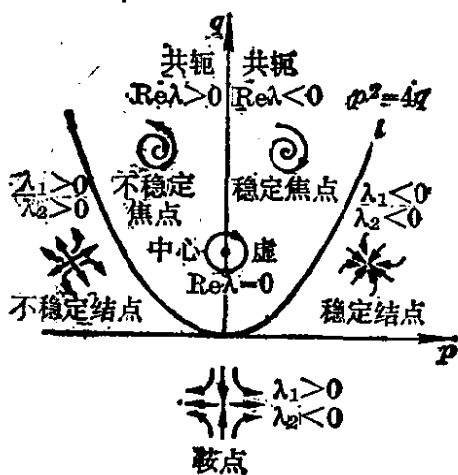


图 12-2

从图上看, 在 λ 为实根不为 0 的情况, 此时方程(12.7)的解不是指数增长就是指数衰减, 前者包括不稳定结点和鞍点, 后者是稳定结点. λ 为共轭复根 ($\text{Re } \lambda \neq 0$) 时, 解为增长振荡或衰减振荡 (前者叫不稳定焦点, 后者叫稳定焦点). 以上情况都有 $\text{Re } \lambda \neq 0$, 这叫双曲情况.

此时, 线性方程(12.7)和非线性方程(12.1)在定常状态附近解的拓扑结构是等价的. 唯一的例外是 $\text{Re } \lambda = 0$ 的情况, 此时线性方程(12.7)的定常状态是中心点, 解围绕中心点振荡. 但此时非线性方程(12.1)的定常解也可能是中心点, 也可能是焦点. 图 12-2 中用箭头指向的是在相平面 (x, y) 上解的轨线, 箭头的方向表示时间增加方向.

对单摆方程(12.4), 雅可比矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{pmatrix}$, 因而定常状态 $(0, 0)$ 的特征值为 $\lambda = \pm i$, 故为中心点, 定常状态 $(\pm\pi, 0)$ 的特征值为 $\lambda = \pm 1$, 故为鞍点, 参看图 12-1.

应该指出, 在保守系统中只有中心点和鞍点, 而且两个鞍点之间的连线 (图 12-1 中的虚线) 叫分型线 (separatrix), 构成的闭曲线是形成周期运动所必要的. 在耗散系统中没有中心点, 除鞍点外还有结点和焦点.

从图 12-2 还看出, 只要参数稍稍变化, 中心点就变成焦点. 一般说, 若给系统以扰动, 并不改变相空间的拓扑结构, 则叫结构稳定的系统. 显然, 中心点是结构不稳定的系统, 见图 12-3(i). 两个鞍点之间的连线系统也是结构不稳定的, 见图 12-3(ii).

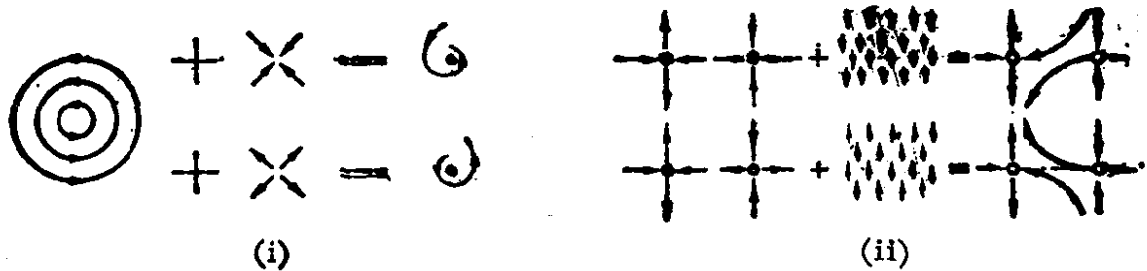


图 12-3

在耗散系统中, 稳定的定常状态就叫定常吸引子. 所谓吸引子, 就是耗散系统中长时间状态演化的归宿. 除定常吸引子外, 在耗散系统中还有周期吸引子、拟周期吸引子和混沌吸引子. 混沌对研究湍流有很大意义.

§ 13 分 岔

自然界的形态不断在变化. 一个动力系统当参数 μ 变化时, 雅可比矩阵的特征值发生双曲性破坏 (即有的 $\text{Re}\lambda = 0$), 则系统的结构稳定性发生变化, 系统就发生了分岔. 也就是说, 分岔发生在结构不稳定的地方.

从雅可比矩阵特征值 λ 到达 $\text{Re}\lambda = 0$ 的方式看, 分岔分为三种类型: 叉型分岔, 霍普夫 (Hopf) 分岔, 鞍-结分岔 (或叫切分岔),

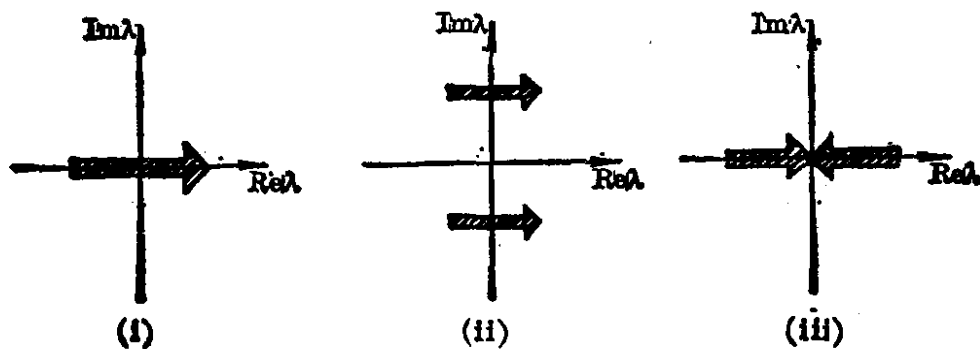


图 13-1

分别见图 13-1(i)、(ii)、(iii).

$$[\text{例 1}] \quad \dot{x} = \mu x - x^3 = f(x, \mu). \quad (13.1)$$

该系统有三个定常状态:

$$x=0 \quad \text{和} \quad x = \pm \sqrt{\mu}. \quad (13.2)$$

对定常状态 $x=0$ 来说, 其雅可比矩阵的特征值 $\lambda = \mu - 3x^2|_{x=0} = \mu$, 因此参数 $\mu < 0$ 是稳定的(见§ 12), 而 $\mu > 0$ 是不稳定的. 参数 μ 由小于 0 变到 μ 大于 0 时, 定常状态 $x=0$ 要发生结构变化. 果然, 在 $\mu > 0$ 时出现了另一定常状态 $x = \pm \sqrt{\mu}$, 且它的雅可比矩阵特征值 $\lambda = \mu - 3x^2|_{x=\pm\sqrt{\mu}} = -2\mu < 0$, 因而 $x = \pm \sqrt{\mu}$ 这个定常状态是稳定的. 因此, 参数 μ 变化时, λ 是以图 13-1(i)的方式, 即沿实轴穿过虚轴, 故是叉型分岔. 图 13-2(i)是定常态随参数 μ 的变化, 其形状像一把叉子, 叉型分岔的名称由此而来.

$$[\text{例 2}] \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -y + x[\mu - (x^2 + y^2)] = f(\mu, x, y), \\ \dot{y} &= x + y[\mu - (x^2 + y^2)] = g(\mu, x, y). \end{aligned} \quad (13.3)$$

该系统显然有一定常状态 $(0, 0)$, 且雅可比矩阵 $\begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda = \mu \pm i$. 故 $\mu < 0$ 时定常状态 $(0, 0)$ 是稳定焦点, 而 $\mu > 0$ 时为不稳定焦点. 那么, $\mu > 0$ 后会出现什么新的状态呢? 将 (13.3) 化成极坐标形式. 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 得

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = r(\mu - r^2), \\ \dot{\theta} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = 1. \end{aligned} \quad (13.4)$$

我们看出, (13.4) 第一式和 (13.1) 式相同, 因此可以断定 $\mu > 0$ 时有一个稳定的解 $r = \sqrt{\mu}$, 即其轨道是半径等于 $\sqrt{\mu}$ 的圆, 且以角速度 $\dot{\theta} = 1$ 旋转, 这叫“极限环”(limit cycle). 因此, 参数 μ 由小于 0 变成大于 0, 形态就由定常态 $x=0$ 变成周期态的极限环. 此时, λ 为共轭复根, 它们穿过虚轴的方式如图 13-1(ii), 即在实轴的上方和下方穿过虚轴, 因此是霍普夫分岔. 形态随参数 μ 的变化

图见图 13-2(ii).

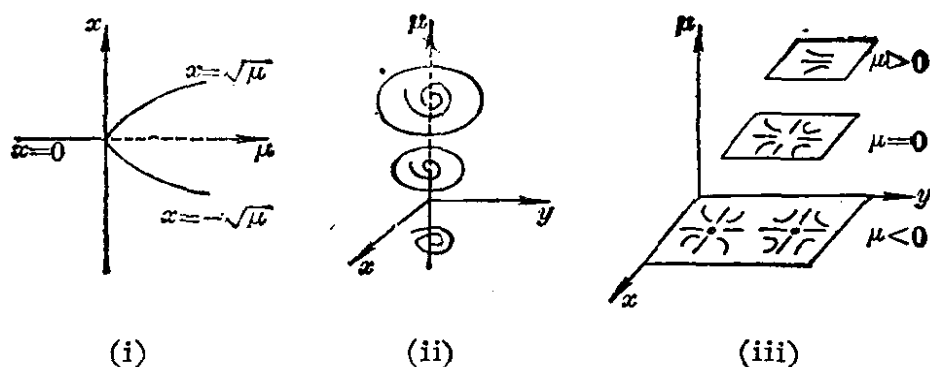


图 13-2 形态随参数 μ 的变化(图中虚线代表不稳定状态,实线代表稳定状态)

[例 3]

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu + x^2, \\ \dot{y} = -y. \end{cases} \quad (13.5)$$

该系统有两个定常状态: $(\sqrt{-\mu}, 0)$ 和 $(-\sqrt{-\mu}, 0)$, 它们只在 $\mu < 0$ 时存在. 且雅可比矩阵 $\begin{pmatrix} \pm\sqrt{-\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值对定常态 $(\sqrt{-\mu}, 0)$ 是一正一负, 对定常态 $(-\sqrt{-\mu}, 0)$ 是两个负值. 即定常态一个是鞍点, 另一个是稳定结点. 参数 $\mu = 0$ 时, 这两个点合并, 且有一特征值为 0. 由于鞍点有一特征值为正, 稳定结点有一特征值为负, 到 $\mu = 0$ 时它们沿图 13-1(iii) 的实轴两边趋向虚轴, 故是鞍-结分岔. 这种分岔一般由定常态变为较为复杂的形态, 参看图 13-2(iii).

对湍流而言, 有一种库特(M. M. Couette)流(例如两同轴圆柱间的流, 仅仅内柱旋转), 当参数雷诺数 R_0 增加时要经过多次分岔才进入充分发展的湍流. 而另有一种柏叶索(poiseuille)流(如边界层流), 它们常常是由层流突然变成湍流的. 为此, 分岔又分为超临界(supercritical)分岔、亚临界(subcritical)分岔和跨临界(transcritical)分岔.

若参数 $\mu < \mu_c$ (临界参数)时, (定常)状态的一分支是稳定的; 但到了 $\mu = \mu_c$, 就变成不稳定的状态, 且新的(定常)解分支在

$\mu > \mu_0$ 是稳定的(这叫“超临界分岔”)。图 13-2(i)、(ii)均是超临界分岔。一般,超临界分岔要经过多次才能进入湍流。若新的解分支在 $\mu < \mu_0$ 时是不稳定的,则叫“亚临界分岔”,见图 13-3(i)。问题是会出现什么新的解?实际问题中常有如下模型

$$\dot{x} = \mu x + 2\alpha x^3 - x^5. \quad (13.6)$$

若无 x^5 项,则就是图 13-3(i)的情况;现在多了一项后,解的分岔图如图 13-3(ii),因此在参数 $\mu = -\alpha^2$ 处,只有扰动振幅足够大,就会突然跳到一个新的解分支,这叫“滞后现象”。

还有跨临界分岔的例子:

$$\dot{x} = \mu x - x^2. \quad (13.7)$$

此时,定常解 $x=0$ 和 $x=\mu$ 以 $\mu=0$ 为界稳定性发生交换。但是,若(13.7)右端多一个三次项

$$\dot{x} = \mu x + 2\alpha x^2 - x^3, \quad (13.8)$$

那么也会发生滞后突跳现象,见图 13-3(iii)、(iv)。

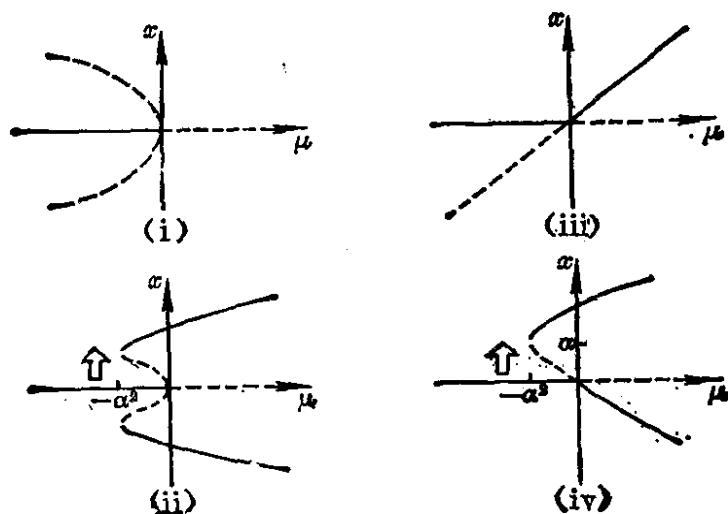


图 13-3

§ 14 彭加莱截面和映射

§ 12 讨论的是平面动力系统。对于三维或三维以上的动力系统,其相空间轨迹很复杂,很难描绘。此时我们可以在轨道的横截

方向找一个平面 Σ (叫彭加莱截面), 那么轨道上一点 x_1 下一次在截面上交于 x_2 , 因此就说 x_1 映射成 x_2 , 同样 x_2 就映射成 x_3 , ……这样就建立起离散点 x_n 之间的映射关系

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (14.1)$$

见图 14-1. 彭加莱截面使比较复杂的运动通过映射 (14.1) 来观测, 这就把问题大大简化了. 特别是当运动是周期轨道时, 在彭加莱截面上就是一个点 P , 见图 14-1. 也就是说, P 是映射迭代 (14.1) 的不动点. 于是, 就把周期轨道化为 (14.1) 的不动点来研究.

所谓映射 (14.1) 的不动点, 即满足方程

$$x^* = f(x^*) \quad (14.2)$$

的点 x^* . 对连续动力系统的定常状态, 在 § 12 我们研究了其稳定性. 现在对映射 (14.1) 的不动点, 也要研究其稳定性. 方法仍是看偏离不动点后的演化.

将 (14.1) 和 (14.2) 相减, 便得线性方程

$$(x_{n+1} - x^*) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{x^*} (x_n - x^*). \quad (14.3)$$

(14.3) 式是一个线性差分方程, 它一般有 λ^n 形式的解, 其中 λ 还是 (14.1) 右边雅可比矩阵的特征值 (此时常叫 λ 为夫洛凯特 (Floquet) 乘子). 因此, 若所有乘子在单位圆内 (即 $|\lambda| < 1$), 不动点是稳定的; 只要有一个乘子在单位圆外 (即 $|\lambda| > 1$), 不动点是不稳定的. 和定常状态的特征值 $\text{Re } \lambda = 0$ 相似, 若 $|\lambda| = 1$ (即在单位圆上), 则一般是结构不稳定的情况, 也就是发生分岔的地方.

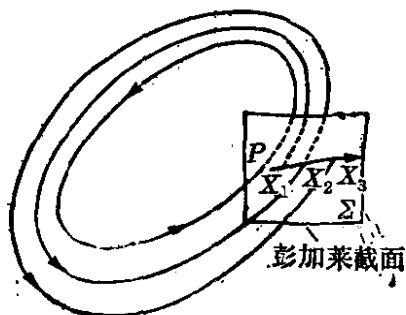


图 14-1

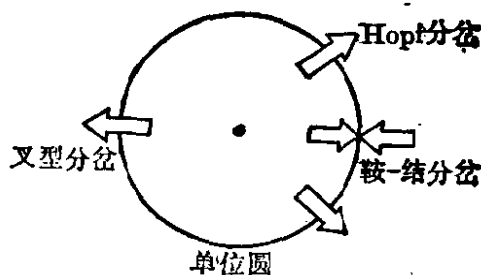


图 14-2

根据雅可比矩阵的特征值(即夫洛凯特乘子) $|\lambda|$ 穿过单位圆的情况,一般也分为三种分岔类型:叉型分岔,霍普夫分岔和鞍-结分岔,见图 14-2.

§ 15 稳定和不稳定流形,同宿和异宿点

对连续动力系统的双曲点鞍点,和离散动力系统的双曲不动点(即一个乘子 $|\lambda|>1$,另一个 $|\lambda|<1$),有一个不变子空间与它们相配合,这就是稳定流形和不稳定流形.

与双曲点 P 配合的稳定流形 W^s 是相应于雅可比矩阵特征值 $\operatorname{Re} \lambda < 0$ 的特征向量所张成的子空间,即 $t \rightarrow \infty$ 时,轨道 $\rightarrow P$.

与双曲点 P 配合的不稳定流形 W^u 是相应于雅可比矩阵特征值 $\operatorname{Re} \lambda > 0$ 的特征向量所张成的子空间,即 $t \rightarrow -\infty$ 时,轨道 $\rightarrow P$.

W^s 和 W^u 都是不变集,初条件保持被该集捕捉.例如图 12-1 中的分形线(虚线)分别就是鞍点 $(\pi, 0)$ 和 $(-\pi, 0)$ 的稳定和不稳定流形.流体运动中,正是靠稳定流形 W^s 和不稳定流形 W^u 使流线不断伸长和折叠,而成为复杂的形态的.

对离散映射双曲鞍点 P 的稳定流形 W^s 和不稳定流形 W^u ,它们分别相应于乘子 $|\lambda| < 1$ 和 $|\lambda| > 1$ 的特征向量所张成的子空间,即 $n \rightarrow \infty$ 时和 $n \rightarrow -\infty$ 时映射 (14.1) 趋于该双曲点 P ,见图 15-1.

类似地,对连续和离散动力系统,分别相应于雅可比矩阵特征值 $\operatorname{Re} \lambda = 0$ 和乘子 $|\lambda| = 1$ 的特征向量所张成的子空间 W^c 叫中心流形.中心流形对系统消去快变量有很大意义.

双曲点邻近流形上的点如何演化呢?一种可能性是两个双曲点 a 和 b 共享它们的稳定流形 W^s 和不稳定流形 W^u .当然,对一点是稳定流形,那么对另一点就是不稳定流形,见图 15-2(i),图 12-1 正是如此.另一种可能性是同一双曲点的稳定流形和不稳定流

形相等(即 $W^s = W^u$), 见图 15-2(ii). 两个双曲点的情况, 由于 $t \rightarrow +\infty$ 和 $t \rightarrow -\infty$ 时轨道趋于不同的点, 所以这种流形叫异宿轨道(heteroclinic orbit). 而一个双曲点情况, $t \rightarrow \pm\infty$ 时, 轨道同趋向于一个点, 所以这种流形叫同宿轨道(homoclinic orbit). 同宿和异宿轨道在研究孤立波时起着重要的作用.

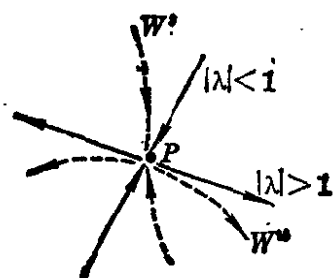


图 15-1

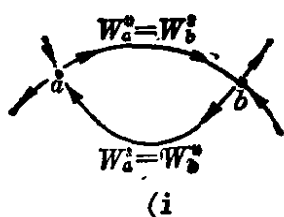
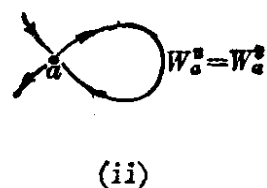


图 15-2



更为普遍的情况是不稳定流形 W^u 和稳定流形 W^s 相交. 如果同一双曲点 b 的稳定流形 W_b^s 和不稳定流形 W_b^u 相交, 其交点叫同宿点. 如果双曲点 a 的稳定流形 W_a^s 和双曲点 b 的不稳定流形 W_b^u 相交, 其交点叫异宿点, 见图 15-3(i). 彭加莱认为, 如果有一个同宿点或异宿点, 那么就有无穷多个同宿或异宿点, 这是因为这个点的映射仍在稳定流形和不稳定流形上, 因而也在交点上, 见图 15-3(ii).

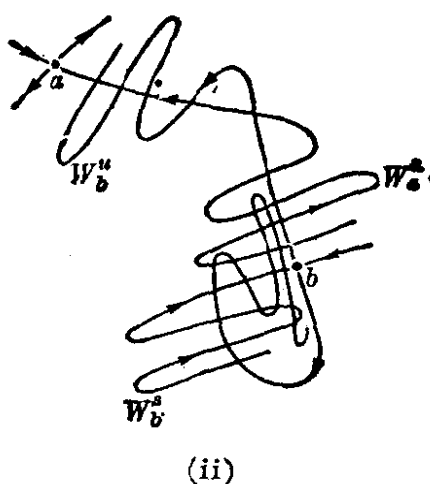
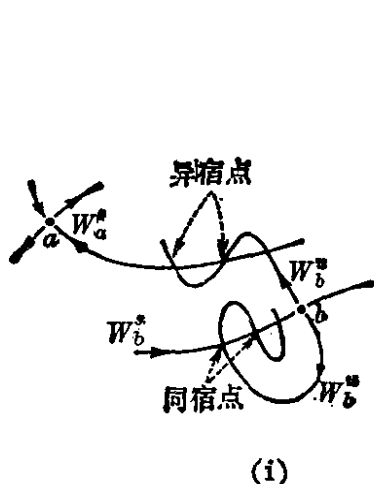


图 15-3

正是由图 12-3(ii)反映的鞍点间连线的结构不稳定性, 双曲

点附近稳定流形和不稳定流形的演化正反映了映射的伸长折叠性质. 斯梅尔(S. Smale)已经证明有无穷多个同(异)宿点有马蹄(horseshoe), 因而就有混沌.

§ 16 迭代, 菲波那契数

(14.1)是一种迭代. 由于它是重复运用同样的运算, 它是自相似(self-similarity)的丰富源泉. 湍流的串级过程和功率谱在第1章已论述有自相似标度律. 故迭代是很重要的. 下面举一个著名的菲波那契数问题. 在时刻 $t=1$ 有一对小兔, 一个月以后它们成熟, 再一个月后它们生下一对小兔, 如此不断下去, 兔的数目是如何演化的呢? 我们用 J_n 和 F_n 表示第 n 个月以后小兔和成熟的兔子对数. 因此 $n=1$ 时仅有一对小兔, 即 $J_0=1, F_0=0$. 一个月以后这对小兔成熟了, 故 $J_1=0, F_1=1$. 二个月以后, 成熟的兔子生了一对小兔, 即 $J_2=1, F_2=1$. 再一个月后小兔又成熟了, 而成熟的兔子又生了一对, 故 $J_3=1, F_3=2$. 一般的规则是新出生的兔子对数 J_{n+1} 等于上个月的成熟兔子对数 F_n , 且成熟兔子对数 F_{n+1} 是上个月的成熟兔子对数加上未成熟兔子对数. 即

$$\begin{cases} J_{n+1} = F_n, \\ F_{n+1} = F_n + J_n. \end{cases} \quad (16.1)$$

兔子数目 F_n 可以递归地表示成:

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}. \end{cases} \quad (16.2)$$

从 $n=1$ 开始, 依次写出菲波那契数如下:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots \quad (16.3)$$

这串数中有什么自相似呢? 数学知识告诉我们,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398\ldots \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}) \quad (16.4)$$

据此, 映射(16.2)的自相似性在代数上表现为 F_n 为 γ^n 的常数倍.

下面将看到, 菲波那契数像许多自相似物体一样, 包含有混沌的种子.

§ 17 TM 序列和自相似性

对于上节所介绍的菲波那契数列, 若用两符号来表示该数列, 我们就能更清楚看出自相似的规律性. 菲波那契数列(16.3)的两符号表示为:

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, \\ S_1 &= 1, \\ S_2 &= 10, \\ S_3 &= 101, \\ S_4 &= 10110, \\ S_5 &= \underbrace{10110}_{S_4} \underbrace{101}_{S_1} \end{aligned} \quad (17.1)$$

.....

其中符号 0 表示小兔对, 1 表示成熟的兔对.

(17.1)是如何演化的呢? 仔细观察, 发现每一次相当于作如下迭代映射(这称为短程定律):

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 1 \quad (\text{小兔变成熟}) \\ 1 &\rightarrow 10 \quad (\text{成熟兔子继续成熟, 并生出新的小兔}) \end{aligned} \quad (17.2)$$

就变成下一步的符号. 最后产生一无穷符号组成的序列:

$$\underline{1} \, 0 \, \underline{1} \, \underline{1} \, 0 \, \underline{1} \, 0 \, \underline{1} \, \underline{1} \, 0 \, \underline{1} \, \underline{1} \, 0 \, \ldots \quad (17.3)$$

因此菲波那契序列是通过短程定律(17.2)和膨胀规律

$$S_{L+1} = S_L S_{L-1} \quad (17.4)$$

而形成长程很有规律的无穷序列(17.3), 这里(17.4)的意义请参见(17.1)式. 很有意思的是, 序列(17.3)中划线的部分占据的位置 a_k 和未划线部分占据的位置 b_k 分别为

$$\begin{aligned} a_k &= 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, \dots, \\ b_k &= 2, 5, 7, 10, 13, \dots, \end{aligned} \quad (17.5)$$

其中 $b_k = a_k + k$ 且 a_k 是在 a_n, b_n 中未用的最小的正整数 ($n < k$). (17.5)序列叫做 Beatty 序列对.

除了菲波那契序列外, 还有一个叫 TM (Thue-Morse) 序列, 它是按如下方法构造的: 把非负整数 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ 以二进制表示

$$0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, \dots; \quad (17.6)$$

把每个二进制的数的“数字和”以模 2 表示, 有

$$0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \dots. \quad (17.7)$$

(17.7)就是 TM 序列. 为了产生 TM 序列, 我们类似于映射(17.2), 用如下映射(即短程定律):

$$0 \rightarrow 01, \quad 1 \rightarrow 10, \quad (17.8)$$

从 0 开始, 产生出

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, \\ S_1 &= 01, \\ S_2 &= 0110, \\ S_3 &= 01101001, \\ S_4 &= \underbrace{01101001}_{S_3} \underbrace{10010110}_{\bar{S}_3}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (17.9)$$

此时的膨胀规则为

$$S_L = S_{L-1} \bar{S}_{L-1}, \quad (17.10)$$

其中 \bar{S}_{L-1} 是 S_{L-1} 的补集.

TM 序列的自相似性是很明显的. 在原有序列上每次跳过一个数字, 产生如下的划线序列:

$$x_n = \mu^n x_0. \quad (18.5)$$

因此, 当 $\mu < 1$ 时 $x_n \rightarrow 0$; 当 $\mu > 1$ 时 $x_n \rightarrow \infty$. 也就是说, 状态 x_n 不是趋向 0, 就是趋向无穷, 形态比较单调. 但是, 由于有非线性项, 形态就多种多样了.

首先, 我们注意到映射(18.1)有两个不动点:

$$x^* = 0 \quad \text{和} \quad x^* = 1 - \frac{1}{\mu}, \quad (18.6)$$

它们分别是直线 $y=x$ 和抛物线 $y=\mu x(1-x)$ 的交点, 参看图 18-1.

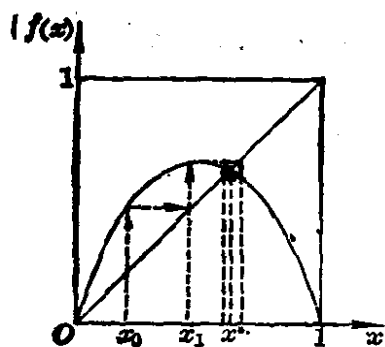


图 18-1

在图 18-1 上, 映射(18.1)的迭代过程是: 从任一初值 x_0 出发, 向上作垂直线, 交抛物线于一点(这垂线高度就表示映射(18.1)右端的值); 然后, 由该点作 x 轴平行线, 交直线 $y=x$ 于一点(该点的高度等于上述垂直高度, 也即映射(18.1)左边算出的 x_1), 由于 $y=x$ 线使

y 和 x 相等, 因而横坐标上也有一点 x_1 . 由 x_1 求 x_2 的过程类似. 总之, 迭代过程是作垂线交抛物线, 再作平行线交直线 $y=x$; 这种过程继续不断下去.

显然, 当 $0 < \mu < 1$ 时只有一个不动点 $x^* = 0$, 请注意抛物线的高度为 $\frac{\mu}{4}$. 且按(14.3)式, (18.1)式的雅可比矩阵的特征值(也即夫洛凯特乘子) λ 为

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial x} = \mu - 2\mu x \Big|_{x^*=0} = \mu. \quad (18.7)$$

因此, 当 $0 < \mu < 1$ 时 $\lambda < 1$ (在单位圆内), 故 $x^* = 0$ 是稳定的; 但是, 当 $\mu > 1$ 时, $\lambda > 1$ (在单位圆外), $x^* = 0$ 是不稳定的. 当 $\mu \rightarrow 1$ 时, λ 由单位圆内外两边趋向单位圆, 故属于图 14-2 中的在 $\mu = 1$ 处发生鞍-结分岔.

当 $1 < \mu < 3$ 时, 不动点 $x_* = 1 - \frac{1}{\mu}$ 的夫洛凯特乘子

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial x} = \mu - 2\mu x \Big|_{x_* = 1 - \frac{1}{\mu}} = 2 - \mu, \quad (18.8)$$

在单位圆内, 因而是稳定的. 但 $\mu > 3$ 时, λ 在单位圆外, 不动点 $x_* = 1 - \frac{1}{\mu}$ 变成不稳定. 当 μ 由 < 3 变成 > 3 时, λ 即由单位圆内穿过单位圆到单位圆外, 在 $\mu_1 = 3$ 处发生属于图 14-2 中的叉型分岔.

在 $\mu = 2$ 处, 按 (18.8) 式, 不动点 $x_* = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 的夫洛凯特乘子 $\lambda = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$, 此时这个不动点叫超稳定的 (superstable), 这是因为收敛到该点是非常迅速的, 而且当 $x_* = \frac{1}{2}$ 是迭代轨道的成员时, 就出现超稳定轨道.

问题是当参数 $\mu > 3$ 时会出现什么形态呢? 此时不动点 $x_* = 0$ 和不动点 $x_* = 1 - \frac{1}{\mu}$ 都已经不稳定了, 但是, 如图 18-2 所示, 由 x_0 出发迭代求出 x_1 , 再由 x_1 求出的又是 x_0 , 即

$$x_1 = f(x_0), \quad x_0 = f(x_1). \quad (18.9)$$

即由映射 (18.1) 迭代得出的轨道序列为

$$\dots, x_0, x_1, x_0, x_1, \dots. \quad (18.10)$$

因此, 满足 (18.9) 式的解称为周期 2, 它们满足

$$x = f(f(x)) = f^2. \quad (18.11)$$

即周期 2 是映射 (18.11) 的不动点. (18.11) 式是四次方程

$$x = \mu [\mu x(1-x)] [1 - \mu x(1-x)]. \quad (18.12)$$

因为 $x = f(f(x)) = f(x)$, 所以四次方程 (18.12) 含有 $x = f(x)$ 的两个不动点, 参看图 18-2. 因此, 从四次方程 (18.12) 中去掉 $x = f(x)$ 的两个不动点的因子 $(x-0)\left(x - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\right)$, 剩下的二次方程为

$$\mu^2 x^2 - \mu(\mu+1)x + (\mu+1) = 0. \quad (18.13)$$

它的两个根

$$x_{0,1} = \frac{1+\mu \pm \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}. \quad (18.14)$$

这个周期 2 的稳定性由映射(18.11)的乘子

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(f(x)) \Big|_{x=x_0} &= f'(f(x)) \cdot f'(x) \Big|_{x=x_0} \\ &= f'(x_1) f'(x_0) \\ &= \mu^2 (1-2x_0)(1-2x_1) \end{aligned} \quad (18.15)$$

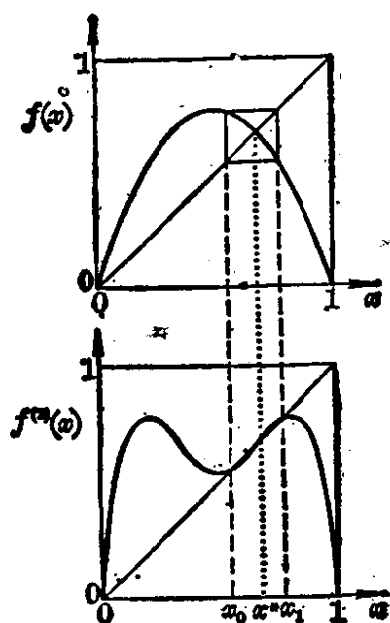


图 18-2

是否在单位圆内决定. 图 18-2 中 f^2 在 x_0, x_1 处的斜率显然小于 1, 即是稳定的.

这个周期 2 又到何处变成不稳定呢? 在(18.15)中令斜率为 -1, 得

$$\mu^2 (1-x_0)(1-x_1) = -1. \quad (18.16)$$

将(18.14)代入(18.16), 求得

$$\mu_2 = 1 \pm \sqrt{6}. \quad (18.17)$$

在(18.17)式中取“+”号, 就是周期 2 变成不稳定而又变成新的形态的分岔点.

在 $\mu = R_1$ 处有一个超稳定的周期 2 轨道: $0.5 \rightarrow 0.809 \dots \rightarrow 0.5$, R_1 值由 $0.5 = f(f(0.5))$ 决定, 它们满足三次方程

$$R_1^3 - 4R_1^2 + 8 = 0. \quad (18.18)$$

由此解出

$$R_1 = 1 + \sqrt{5}. \quad (18.19)$$

据(16.4)式, R_1 是黄金分割数 γ 的两倍.

当参数 $\mu > \mu_2$ 时, 周期 2 变成不稳定, 形态又变成周期 4, 它

们满足

$$x = f(f(f(f(x)))) \quad (18.20)$$

在 $\mu = R_2$ 处 ($R_2 = 3.49856\cdots$), 周期 4 的超稳定轨道为 $0.5 \rightarrow 0.874 \rightarrow 0.389 \rightarrow 0.827 \rightarrow 0.5$.

这种周期 2 变成周期 4, 周期 4 又变成周期 8, \cdots 周期倍分岔的过程一直持续到

$$\mu_\infty = 3.5699\cdots, \quad (18.21)$$

当 $\mu > \mu_\infty$ 时, 周期变成 ∞ , 也就是没有周期的混沌区. 周期倍分岔过程见图 18-3.

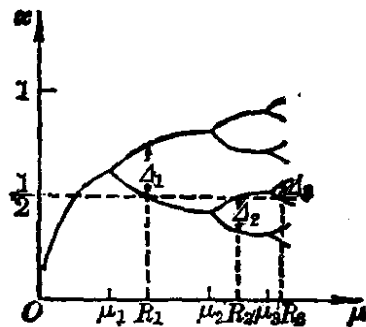


图 18-3

在物理、生物、生态、经济等领域, 常遇到周期倍分岔现象.

§ 19 费根鲍姆常数, 符号动力学

在洛吉斯蒂映射中, 可以发现许多自相似规律. 首先, 前两个分岔点之间的距离是后两个分岔点之间距离的 δ 倍, 即(参看图 18-3).

$$\frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \delta = 4.669201660910299\cdots, \quad (19.1)$$

或

$$\mu_n = \mu_\infty - c \cdot \delta^{-n}, \quad (19.2)$$

其中 δ 是无理数, 称为“费根鲍姆 (M. J. Feigenbaum) 第一常数”. 在图 18-3 中, 超稳定轨道参数值 R 之间也有类似的关系:

$$\frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n} = \delta. \quad (19.3)$$

其次, 周期倍分岔“儿子”之间的距离是“孙子”之间距离的 α 倍, 参看图 18-3. 即

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = \alpha = 2.502907875095892548\cdots, \quad (19.4)$$

其中 α 也是无理数, 称为费根鲍姆第二常数.

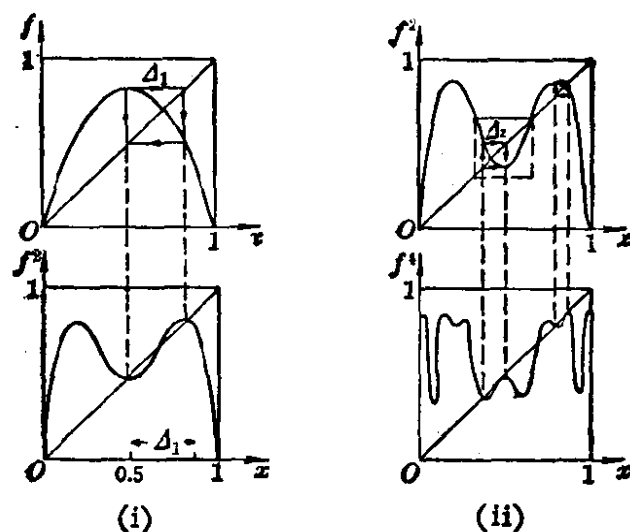


图 19-1

δ 和 α 是否可以从理论上求得? 我们看一下 f 和 f^2 的图就清楚了. 图 19-1(i) 中, Δ_1 是 $f^2\left(\frac{1}{2}\right)$ 和 $\frac{1}{2}$ 之间的距离; 图 19-1(ii) 中, Δ_2 是 $f^4\left(\frac{1}{2}\right)$ 和 $\frac{1}{2}$ 之间的距离, 这和图 18-3 标明的相一致. 比较图 19-1(i)、(ii) 中的两个方块 (一个边长为 Δ_1 , 另一个边长为 Δ_2) 看出, 这两个小方块非常相似. 图 19-2 是将这两个方块放大的结果. 较小的方块尺度是较大方块的 $\frac{1}{\alpha}$, 但将较小方块放大 α 倍且颠倒一下, 就变成较大方块, 由此就导得费根鲍姆自相似的泛函方程

$$g(x) = -\alpha g\left[g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right], \quad (19.5)$$

其中 $g(x)$ 是 f^n 的极限过程.

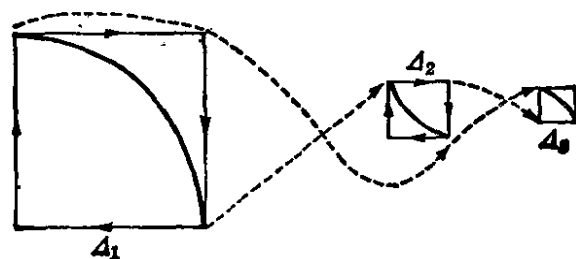


图 19-2

求解泛函方程(19.5)很困难. 为了简便, 我们现采用映射(18.3)形式. 设(19.5)的解为

$$g(x) = c_{\infty} - x^2, \quad (19.6)$$

其中 c_{∞} 是映射(18.3)的周期倍分岔的累积点, 它和 μ_{∞} 相对应. 将(19.6)代入(19.5)式, 得

$$\begin{aligned} c_{\infty} - x^2 &= -\alpha \left[c_{\infty} - \left(c_{\infty} - \left(-\frac{x}{\alpha} \right)^2 \right)^2 \right] \\ &= -\alpha \left[c_{\infty} - \left(c_{\infty}^2 - 2c_{\infty} \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{x^4}{\alpha^4} \right) \right] \\ &= (-\alpha c_{\infty} + \alpha c_{\infty}^2) - 2c_{\infty} \frac{x^2}{\alpha} + O(x^4). \end{aligned} \quad (19.7)$$

两边比较系数, 得

$$\begin{cases} c_{\infty} = -\alpha(c_{\infty} - c_{\infty}^2), \\ \alpha = 2c_{\infty}. \end{cases} \quad (19.8)$$

将(19.8)第二式代入第一式, 消去 c_{∞} , 得 $\alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0$. 从中解出 $\alpha = 1 \pm \sqrt{3}$.

取“+”号, 有

$$\alpha = 2.732.$$

它和实际的(19.4)式的 α 值仅相差 10%.

设

$$c_{n+1} = c_{\infty} - \varepsilon, \quad c_n = c_{\infty} - \varepsilon\delta, \quad \text{其中 } \varepsilon \ll 1. \quad (19.9)$$

将(19.9)代入(19.8)第一式,

$$\begin{aligned} c_n + \varepsilon\delta &= -\alpha(c_{n+1} + \varepsilon)(1 - c_{n+1} - \varepsilon) \\ &= -\alpha(c_{n+1} + \varepsilon - c_{n+1}^2 - \varepsilon c_{n+1} - \varepsilon c_{n+1} - \varepsilon^2) \\ &\stackrel{n \rightarrow \infty}{=} -\alpha(c_{\infty} + \varepsilon - c_{\infty}^2 - \varepsilon c_{\infty} - \varepsilon c_{\infty} - \varepsilon^2). \end{aligned}$$

比较两边 ε 的系数, 得

$$\delta = 2\alpha c_{\infty} - \alpha.$$

用 $c_{\infty} = \frac{\alpha}{2}$ 代入上式, 得

$$\delta = \alpha(\alpha - 1) = \alpha^2 - \alpha = 4.72.$$

它和实际的费根堡姆常数(19.1)式仅相差 10%。

下面求 μ_∞ 。按(18.4)式,

$$c_\infty = \frac{1}{4} \mu_\infty (\mu_\infty - 2),$$

故 $\mu_\infty^2 - 2\mu_\infty - 4c_\infty = 0$ 。解得

$$\mu_\infty = 1 \pm \sqrt{1 + 4c_\infty}.$$

将 $c_\infty = \frac{\alpha}{2} = 1.366$ 代入上式, 并取“+”号, 得

$$\mu_\infty = 3.54.$$

它和实际的(18.21)式的 μ_∞ 值相差也很小。

在映射中反映自相似的, 最好用迭代值 x_n 是落在左边 L , 还是落在右边 R , 或落在中央 O 的这三个符号来说明。用符号 OLR 序列来表示的轨道就叫该轨道的符号动力学(symbolic dynamics)。例如图 19-1(i) 的超稳定的周期 2 轨道的符号动力学(或叫做揉序列, 即 kneading sequence)可以写成

$$OROROR\cdots\cdots. \quad (19.10)$$

为了简化, 我们只写一个单周期, 即 OR 。那么, 周期 4 的超稳定轨道如何表示呢? 首先, 将周期 2 的符号表示为两个周期即 $OROR$, 若第二个符号 O 的左边符号 R 的数目是奇数(现在是一个 R), 则将这个 O 改写为 L ; 否则, 第二个 O 改写为 R 。因此, 超稳定轨道有如下符号动力学

周期 1: O

周期 1 \rightarrow 周期 2: $OO \rightarrow OR$

周期 2 \rightarrow 周期 4: $OROR \rightarrow ORLR$

周期 4 \rightarrow 周期 8: $ORLRORLR \rightarrow ORLRRRLR$

周期 8 \rightarrow 周期 16: $ORLRRRLRORLRRRLR$
 $\rightarrow ORLRRRLRLRLRLRRRLR$

为了书写方便, 周期 8 写成 $ORLR^3LR$, 周期 16 写成

$$ORLR^3LRLRLR^3LR.$$

有意思的是这种符号动力学表示和 TM 序列有密切关系。我

们将 R 用 1 代替, O 和 L 用 0 代替, 这样, 周期 1, 2, 4, 8 的超稳定周期轨道可以依次写成

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

这并不是 TM 序列的开始, 但是, 我们从左边开始求部分和并以模 2, 则产生

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (19.11)$$

这和 TM 序列(17.9)完全相同.

反之, 超稳定周期 4 的 0 和 1 表示的揉序列 01011101..... 可以通过 TM 序列取相邻元的和(或差)求得. 例如, (19.11)式第四行求和(或差), 得到

$$0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1$$

这就是周期 4 的揉序列.

§ 20 圆映射, 同步和法里序列

洛吉斯蒂映射(18.1)也告诉我们, 迭代产生具有自相似结构的混沌. 这里, 确定性和随机性联系得多么紧密! 这种通向混沌之路, 称为周期倍分岔道路. 在自然界中还有一种通向混沌之路, 这就是同步 (synchronization), 有时也称锁相 (phase-locking)、锁模 (mode-locking)、锁频 (frequency-locking)、共振 (resonance) 等. 最早注意到同步现象的是 17 世纪荷兰物理学家惠更斯 (Ch. Huygens), 他观察到家里板墙上相距很近的两个挂钟互相影响而同步. 第 1 章 § 3 介绍的朗道猜想: n 个频率 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$

组成的运动就是湍流运动,但是比利时数学家茹厄勒(D. Ruelle)和荷兰的塔肯斯(F. Takens)认为朗道的猜想不对. 因为如果两个周期运动之间无相互作用,而它们的频率比又为有理数,即 $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$ (其中 p, q 为互不可约的整数), 则运动仍是周期运动. 若 $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ 为无理数,一般称为拟周期运动,但巴西拓扑学家派克索托(M. Peixoto)证明环面上的准周期运动是结构不稳定的,稍有扰动就会过渡到某个周期解,两频率之比变成与原来无理数接近的有理数,这就是锁频现象.

为了讨论同步现象,用标准的耗散圆映射

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n), \quad (20.1)$$

其中 K 是耦合常数,调整两个频率之间非线性耦合的程度; Ω 是频率比(驱动频率和共振频率之比),称为 bare winding number. 映射(20.1)可以看成是圆上的点映射成圆,故称为圆映射.

我们先考虑 $K=0$ 的情况. 此时(20.1)式可以写成

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega \pmod{1}. \quad (20.2)$$

若取 $\Omega = \frac{2}{5} = 0.4$, 则从初始值 $\theta_0 = 0.3$ 出发, 映射(20.2)为

$$\theta_{n+1} = \begin{cases} \theta_n + 0.4, & \text{当 } \theta_n < 0.6 \text{ 时;} \\ (\theta_n + 0.4) - 1, & \text{当 } \theta_n > 0.6 \text{ 时.} \end{cases} \quad (20.3)$$

迭代结果如图 20-1(i), 迭代轨迹绕了两圈, 经 5 次迭代回到了原处, 显然这是周期解. 若取和 0.4 接近的无理数 $\Omega = 0.404004\dots$, 迭代总不能精确地回到原处, 轨迹无法闭合, 这是准周期解. 见图 20-1(ii).

引进平均每次迭代的增量

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n - \theta_0}{n}. \quad (20.4)$$

叫 dressed winding number. 由(20.2)知 $\omega = \Omega$, 即两者同为有

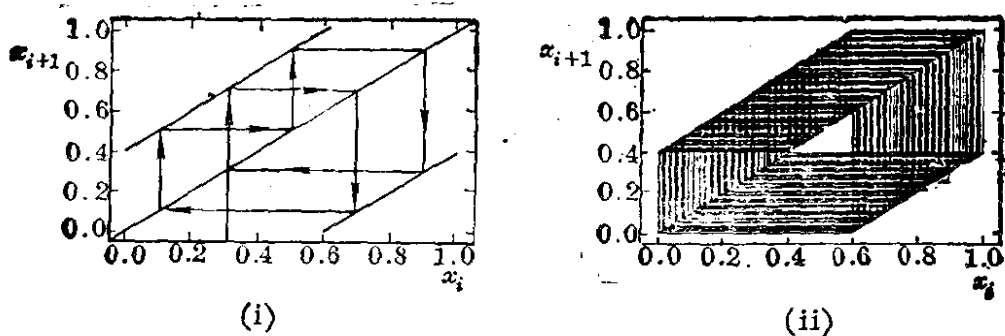


图 20-1

理数和无理数, 不存在锁定在与 Ω 接近的有理数 ω 上. 但是, 在 $K > 0$ 时(此时是非线性映射) ω 锁定在与无理的 Ω 接近的有理数 $\frac{p}{q}$ 上, 分母小的占优. 锁定范围的宽度与 K 的大小有关. 图 20-2 表示锁定的区域, 在平面 (Ω, K) 上好像是从 $K=0$ 轴上有理数伸出的舌头, 它称为阿诺尔德舌头(Arnold tongue). 舌头随着 K 的加大而加宽, 到临界值 $K=1$ 时, 有无限多锁相频率区间, 它们相应于 $(0, 1)$ 之间的所有有理数 ω , 几乎覆盖了整个 Ω 的范围. 到 $K=1$ 时, 舌头开始彼此衔接, 图 20-3 给出了此时 ω 与 Ω 的关系, 它是由无数个大大小小的平台和阶梯组成, 叫魔鬼楼梯(devil's staircase). 图中的一小块加以放大后表示在右边, 可以看出它们具有自相似的结构.

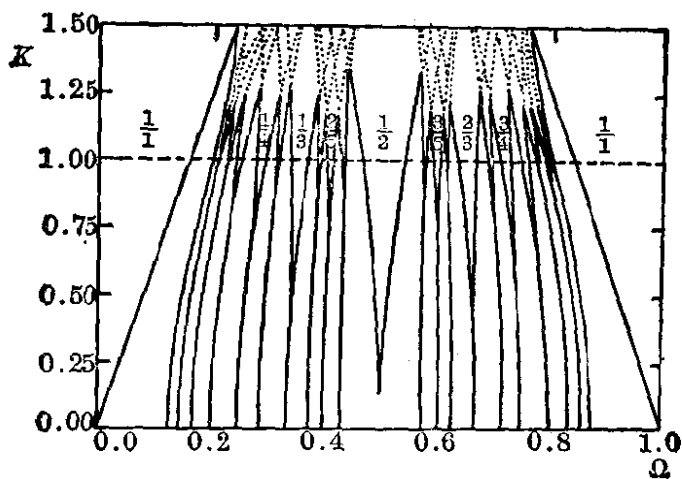


图 20-2

圆映射走向混沌有多种途径, 图 20-4 是有代表性的三种. (a) 从 ω 为无理数的区域(准周期运动)进入阿诺尔德舌头(周期性锁

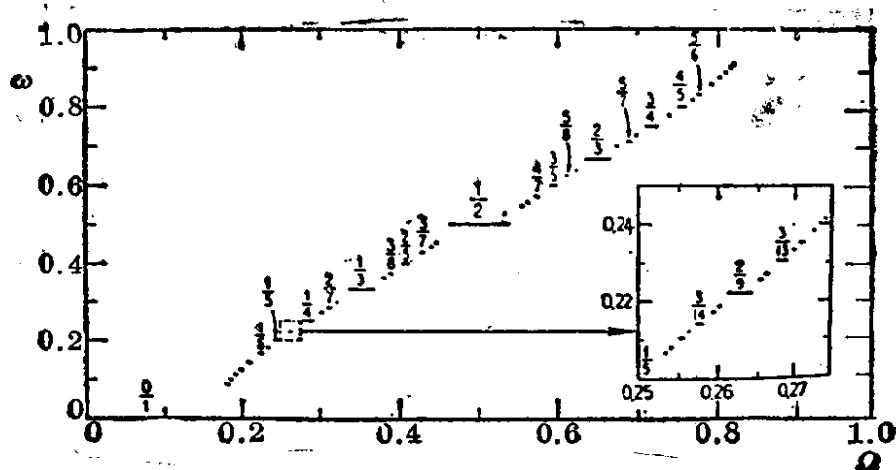


图 20-3

相), 最后当 K 超过临界值进入混沌. (b) 始终处在阿诺尔德舌头外的准周期区, 然后从阿诺尔德舌头的衔接处进入混沌状态. (c) 始终处在阿诺尔德舌头内的锁频状态下, 当 K 超过临界值后通过一系列周期倍分岔通过混沌.

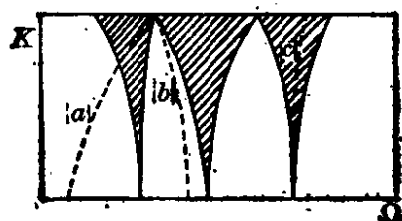


图 20-4

若参数 Ω 使得 ω 落在 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 之间, 即

$$\frac{1}{2} < \frac{p}{q} < \frac{2}{3}, \quad (20.5)$$

问题是非线性耦合条件最喜欢的锁相频率是什么? 前面我们已经提到要分母 q 尽可能的小. 数学上的答案就是分子和分母分别相加, 即

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \rightarrow \frac{3}{5} \quad (20.6)$$

这样的构造和数论上的法里(J. Farey)序列有关. 所谓法里序列, 就是 0 和 1 之间的分数序列, 它的构造方法类似(20.6)

因此分母最大为 5 的法里序列(5 叫做法里序列的序)为

其中每个分数是它相邻两个分数按(20.6)定义的“和”. 对照(20.7)和图 20-2 中的数字明显看出法里序列是阿诺尔德舌头的骨架. 有趣的是, 如果我们从构造法里数列的表中的右上角 $\frac{1}{1}$ 作 Z 字形(锯齿形)运行, 即 $\frac{1}{1} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{3}{5} \rightarrow \frac{5}{8}$, 我们注意到这些法里序列中的数的分子和分母就是(16.3)式表示的菲波那契数. 从左上角开始作锯齿形运行, 即 $\frac{0}{1} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{5} \rightarrow \frac{3}{8} \rightarrow \frac{5}{13} \rightarrow \frac{8}{21} \rightarrow \dots$ 也是两个菲波那契数之比 $\frac{F_{n-2}}{F_n}$.

利用这个结果, 可以求出映射(20.1)的自相似常数. 在(20.1)中取 $K=1, \theta_0=0$, 并调整参数 Ω 使 $\theta_{F_n}=F_{n-2}$, 则有

$$\Omega\left(\frac{5}{13}\right) \approx 0.3951174,$$

$$\Omega\left(\frac{8}{21}\right) \approx 0.3927092,$$

$$\Omega\left(\frac{13}{34}\right) \approx 0.3935608.$$

最后求到 $\Omega_{\infty} = 0.3933377$, 它相当于洛吉斯蒂映射中的 μ_{∞} , 且

$$\frac{\Omega_{n-1} - \Omega_n}{\Omega_n - \Omega_{n+1}} \rightarrow \delta = -2.8336\cdots,$$

它相当于洛吉斯蒂映射中的费根鲍姆常数 $4.669\cdots$.

§ 21 巴克爾变换——湍流混合处方

湍流中的相混(mixing)和下列伸长-折叠变换有很大关系, 这个变换叫巴克爾(H.Baker)变换(或叫做巴克爾映射), 如图21-1所示.

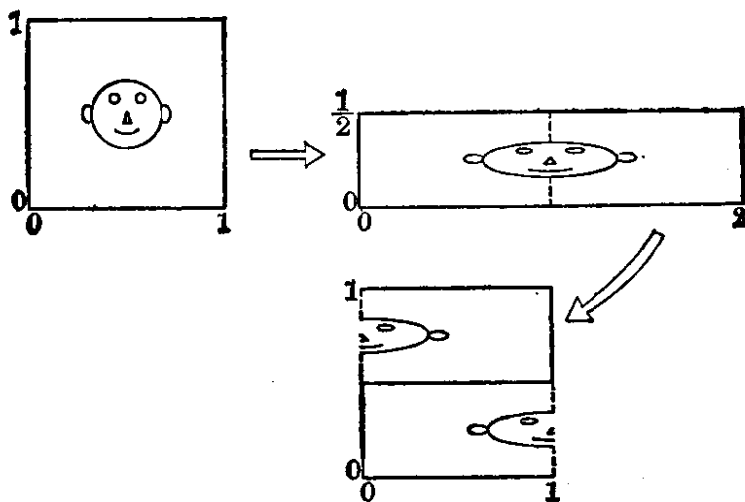


图 21-1

从数学上讲, 这种变换是先将单位方块内的点 (x, y) 通过伸长压缩转换成点 $\left(2x, \frac{y}{2}\right)$; 并且通过折叠将伸长的右半部分折叠到左半部分的上部, 即到点 $\left(\langle 2x \rangle_1, \frac{y}{2} + \frac{[2x]}{2}\right)$, 其中 $\langle \rangle$ 表示取分数部分, $[]$ 表示取整数.

如用二进制表示, 巴克爾变换就特别简单. 例如 x, y 的二进制数为

$$x_1 = 0.10110001\ldots, \quad y_1 = 0.01110100\ldots,$$

那么, 巴克尔变换就相当于把 x 向左移一位 (即小数点向右移一位), y 向右移一位 (即小数点向左移一位), 然后使 x 最左边的数字变成 y 最左边的数字. 因此, (x_1, y_1) 变换成

$$x_2 = 0.0110001\ldots, \quad y_2 = 0.101110100\ldots.$$

它再变换成

$$x_3 = 0.110001\ldots, \quad y_3 = 0.0101110100\ldots.$$

因此任何有限的分数 x , 那么映射 (或变换) 最终将接近于吸引子 $(0, 0)$.

巴克尔变换对于二进制的周期值将收敛到周期轨道. 例如 $(x = \frac{1}{3} = \overline{0.01}, y = \frac{2}{3} = \overline{0.10})$ 将映射成周期 2 的轨道. 而一般的二进制数将最终趋向混沌轨道, 并和相近的轨道分离. 例如图 21-2 中 0 点是接近于周期点 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 的点, 但映射成的点 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ……是一混沌轨道.

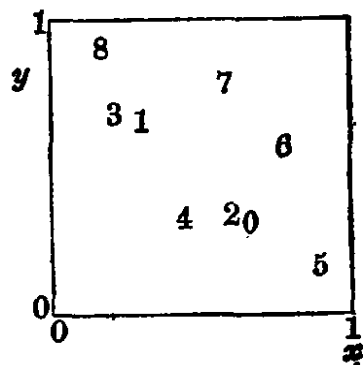


图 21-2

和这变换有关的是斯梅尔 (S. Smale's) 马蹄映射, 它将一空间在一个方向伸长, 在另一方向压缩, 然后折叠. 这个过程不断下去, 也使相近的点分离, 因而也导致混沌相混, 见图 21-3.

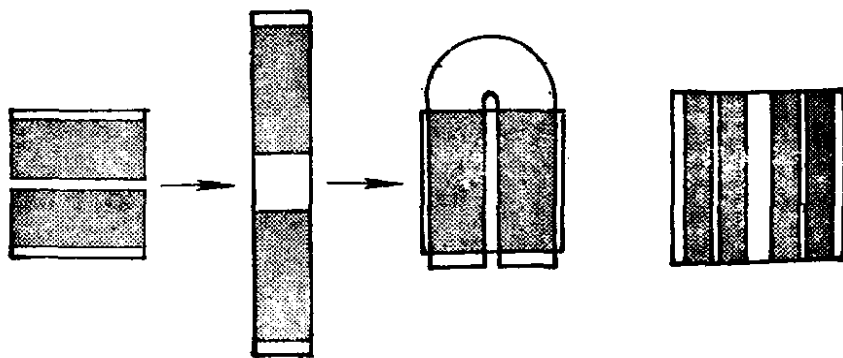


图 21-3

第 3 章

随机中的自相似律

上一章我们说明, 像湍流这样的随机现象, 却可以在确定的非线性系统中产生. 这是湍流中确定性和随机性相联系的一个侧面. 湍流虽是随机的, 但还有确定性的自相似结构, 这已经在第 1 章 § 4、§ 5、§ 6 中看到, 因此随机中的自相似是湍流中确定性和随机性相联系的另一个侧面.

§ 22 齐夫定律和布朗运动

翻开英汉辞典, 英文字千千万万. 一篇专著中用的英文字也是很多的. 其中, 每个英文字出现多少? 似乎杂乱无章. 但是, 当我们把英文字出现多少按次序排列时, 就会发现字出现的频率和字序还是很有规律的. 齐夫(Zipf)发现字频 f 反比于字序 r :

$$f(r) \propto \frac{1}{r \ln(1.78)R}, \quad (22.1)$$

其中 R 是不同字的数目. $f(r) \propto \frac{1}{r}$ 定律称为双曲定律. 如果 $R = 12000$, 那么最多的几个英文字 The, of, and, to, I, or 等的相对频率为 0.1, 0.05, 0.033, 0.025, 等等. 图 22-1 表示了字频是字序的函数.

从图 3.1 看出, 字序 1 到 10 的五个字(the, of, and, to, I) 服从齐夫双曲定律; 字序 10 到 100 的从 I 到 Say 也服从同样的齐夫定律, 即

$$f(\lambda r) = \frac{1}{\lambda} f(r), \quad (\lambda = 10) \quad (22.2)$$

(22.2)式说明, 字序是原来的 10 倍, 字频是原来的 $\frac{1}{10}$, 即由 0.1 → 0.01 变到 0.01 → 0.001.

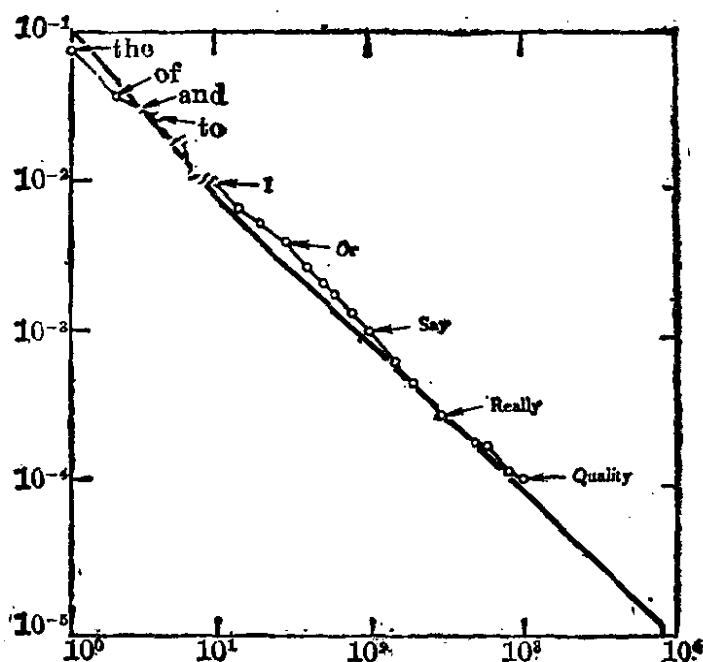


图 22-1

第 1 章 § 6 中已经谈到了布朗运动 $x(t)$, 它是一个杂乱无章的轨迹, 但是它的均方位移 $\overline{x^2(t)}$ 满足幂函数规律(6.8)式, 即

$$\overline{x^2(t)} \propto t. \quad (22.3)$$

若时间坐标 t 变换成 $\frac{t}{2}$, 则由(22.3)式得

$$\overline{x^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{2} \overline{x^2(t)}. \quad (22.4)$$

(22.4) 式说明重新标度的位移 $x\left(\frac{t}{2}\right)$ 和原有位移 $x(t)$ 之间是相似的, 只是后者的振幅是前者的 $\sqrt{2}$ 倍. 注意后者的 $t=1$ 相当于前者的 $t=2$. 图 22-2 是依次将坐标拉长 2 倍后布朗运动的轨迹. 图上的阴影部分, 形状是非常相似的,

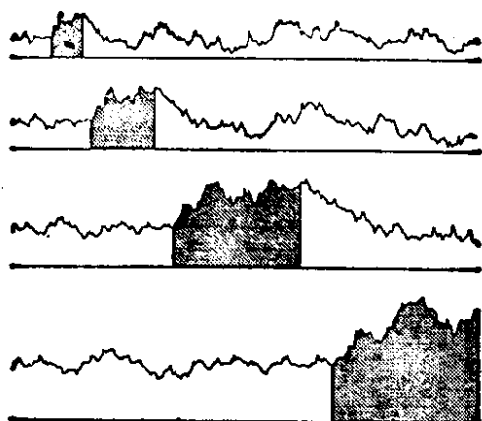


图 22-2

§ 23 相似变换

我们知道, 相似变换由标度(scaling)、旋转(rotation)和平移(translation)组成. 以平面上的点 $P(x, y)$ 为例, 其中 x, y 是该点的坐标. 所谓标度, 就是将坐标通过如下变换

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y \quad (23.1)$$

使点 P 变换成新的点 $P'(x', y')$, 其中 λ 叫做尺度因子(scale factor), 或标度比(scaling ratio). $\lambda < 1$ 或 $\lambda > 0$ 分别代表收缩或放大.

旋转变换 \mathcal{R} 为

$$\begin{cases} x'' = \cos \theta \cdot x' - \sin \theta \cdot y', \\ y'' = \sin \theta \cdot x' + \cos \theta \cdot y'. \end{cases} \quad (23.2)$$

它将点 $P'(x', y')$ 变换为 $P''(x'', y'')$, 其中 θ 是围绕原点作逆时针旋转的角度. 若 $\theta = \pi$, 则 $x'' = -x'$ 、 $y'' = -y'$, 则叫反射, 也相当于(23.1)式中 $\lambda = -1$.

平移变换 \mathcal{T} 为

$$\begin{cases} x''' = x'' + T_x, \\ y''' = y'' + T_y. \end{cases} \quad (23.3)$$

它将点 $P''(x'', y'')$ 平移 (T_x, T_y) , 而成为点 $P'''(x''', y''')$.

结合 (23.1)、(23.2)、(23.3), 就得到相似变换:

$$\begin{cases} x''' = \lambda \cos \theta \cdot x - \lambda \sin \theta \cdot y + T_x, \\ y''' = \lambda \sin \theta \cdot x + \lambda \cos \theta \cdot y + T_y. \end{cases} \quad (23.4)$$

对平面上一图形的所有点, 经过相似变换 (23.4), 所产生的图形和原来图形相似.

以科克(H.V.Koch)曲线为例. 图 23-1 是它的构造图.

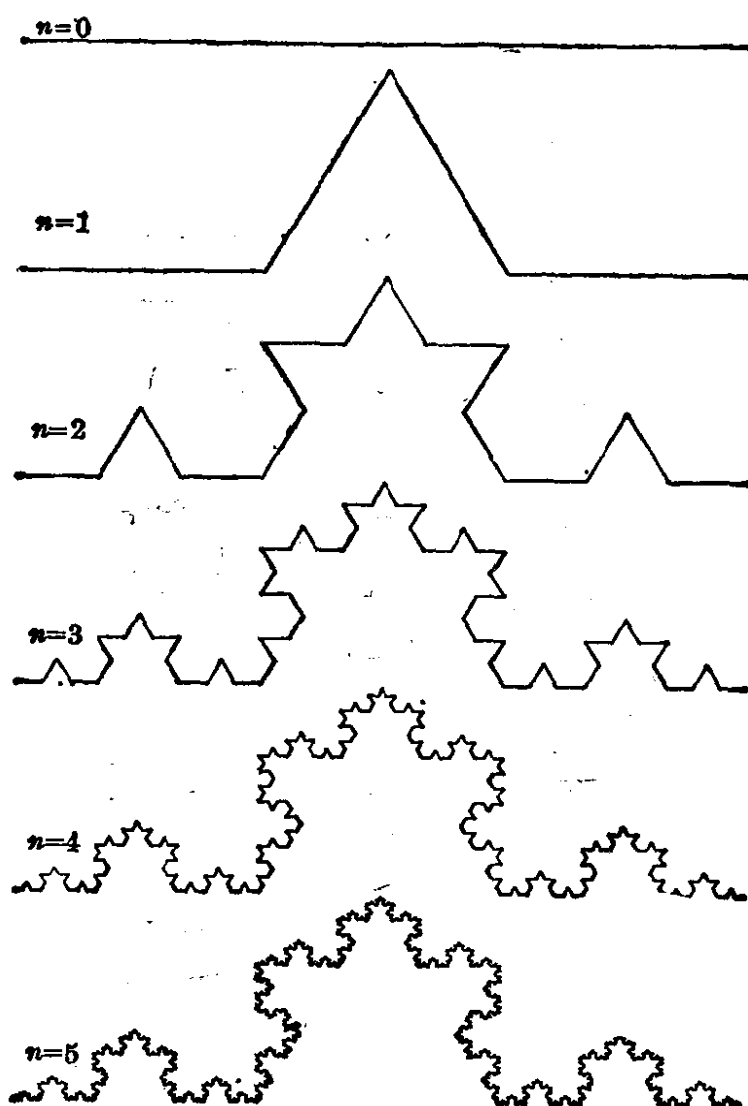


图 23-1

我们能否找到一种相似变换呢？粗看一下 $n=2$ 的一小部分，加以放大，就变成 $n=1$ 的曲线。将该曲线看成是横坐标 t 的函数 $f(t)$ ，这样科克曲线有如下性质

$$f(\lambda t) = \lambda^\alpha f(t), \quad (23.5)$$

其中标度指数 $\alpha=1$ ，且标度因子

$$\lambda = \left(\frac{1}{3}\right)^n. \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (23.6)$$

虽然 $f(t)$ 不是单值的，但相似关系(23.5)对科克曲线的每一点都是成立的。注意到在相似变换(23.5)式中 $\alpha=1$ ，这时点集的部分和整体相似，叫做自相似(self-similarity)。若 $\alpha \neq 1$ ，则叫自仿射(self-affinity)。

§ 24 康托集合和映射

我们知道，康托集合是一个单位线段 $[0, 1]$ 上的无穷点集。我们只要按康托集合构造的图(图24-1)的间格端点排号，是

$$0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \dots \quad (24.1)$$

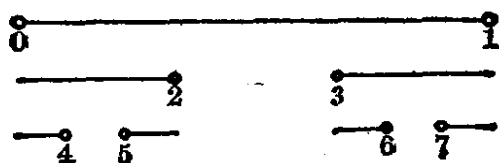


图 24-1

这些点表面上杂乱无章，却存在规律性。我们将(24.1)和下列帐篷映射联系在一起：

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} 3x_n, & \text{当 } x_n \leq 0.5 \text{ 时;} \\ -3x_n + 3, & \text{当 } x_n > 0.5 \text{ 时.} \end{cases} \quad (24.2)$$

映射(24.2)有两个不动点: $x^*=0$ 和 $x^*=\frac{3}{4}$. 在这两点上, 它们的斜率 $f'(x^*)=3$ 或 -3 , 因而均是不稳定的点. 但是, 有意思的是凡是从康托集合(24.1)出发的点, 将最终拘留在 $x_n \rightarrow 0$; 而非康托集合(24.1)的点出发, 最终将发散, 即 $x_n \rightarrow \infty$ (见图 24-2).

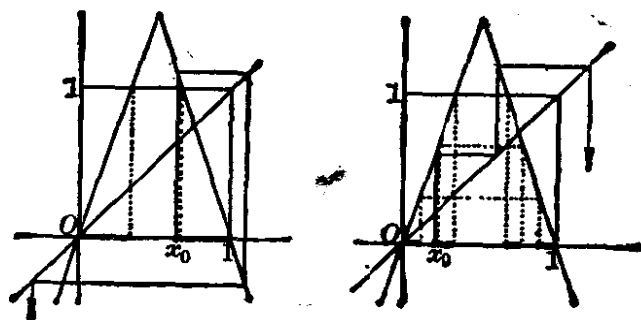


图 24-2

下表列出几个点的例子

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0 拘留集
$\frac{1}{3}$	1	0	0	0 拘留集
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	0	0 拘留集
$\frac{2}{3}$	1	0	0	0 拘留集
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{27}{2}$ 逃逸集
$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{9}{5}$ 逃逸集

康托集合和帐篷映射(24.2)相联系, 也就必然和混沌相联系. 首先, 我们注意到, 康托集合的数(24.1)按三进制展开

$$x = a_1 \cdot 3^{-1} + a_2 \cdot 3^{-2} + a_3 \cdot 3^{-3} + a_4 \cdot 3^{-4} + \dots,$$

其中 a_i 不是 0 就是 2, 决不包括 1. 例如

$$0 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4} + \dots = 2(3^{-2} + 3^{-3} + 3^{-4} + \dots)$$

$$= 2 \cdot \frac{3^{-2}}{1 - \frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3},$$

因此, $\frac{1}{3}$ 可以写成 $0.0222\bar{2}$.

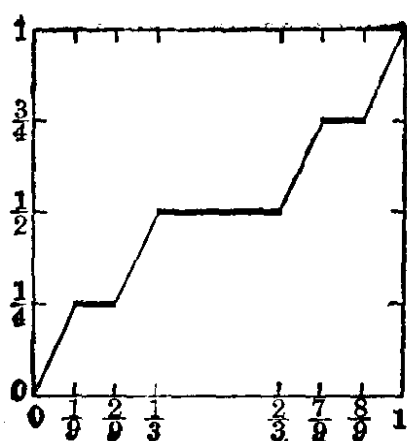
又例如

$$\frac{2}{3} = 2 \cdot 3^{-1} + 0 \cdot 3^{-2} + 0 \cdot 3^{-3} + \dots = 0.2.$$

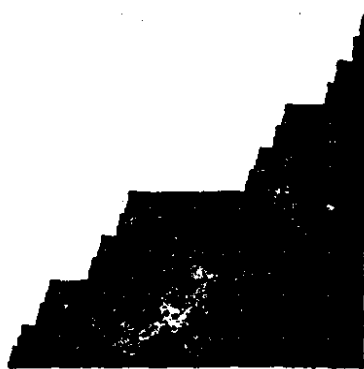
因此帐篷映射从三进制讲, 若 $x_n \leq 0.5$, 那么 x_{n+1} 是 x_n 将小数点向右漂移. 若 $x_n > 0.5$, 在小数点漂移前先将 x_n 的每一位数用它的补数代替(即 $0 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1$). 例如 $x_n = 0.2022\bar{2}$, 那么因为它是大于 0.5 的数, 首先将 x_n 写成 $0.0200\bar{2}$, 然后将小数点向右漂移得 $x_{n+1} = 0.200\bar{2}$. 因此, 若 x_0 用映射(24.2)迭代一次, 三进制的表达式小数点后就丧失一位数字, n 次迭代就丧失 n 位数字. 至于下一次迭代 x_{n+1} 在那里, 这就无法确定, 这就是混沌.

康托集合和混沌联系在一起, 说明“确定中的随机”和“随机中的确定”是完全联系在一起的. 确定性和随机性之间并无矛盾.

分形和混沌相联系还表现在康托集合的魔鬼楼梯. 我们把重量为 1 的棒截成两半, 每段再锤成长度为 $\frac{1}{3}$, 这种过程不断下去, 那么相对重量 y 是 x 的函数. 因此康托集合的第一阶段, x 从 0 到 $\frac{1}{3}$, y 则从 0 到 $\frac{1}{2}$; 而 x 从 $\frac{1}{3}$ 到 $\frac{2}{3}$ 时 y 保持常数 $\frac{1}{2}$; x 从 $\frac{2}{3}$ 变到 1 , 则 y 又从平台($y = \frac{1}{2}$)到 1 . 康托集合的第二阶段多出两个平台 $y = \frac{1}{4}$ 和 $y = \frac{3}{4}$. 这样下去, 最后形成几乎处处有平台的魔鬼楼梯. 图 24-3(i) 是康托集合构造第二阶段的魔鬼楼梯. 图 24-3(ii) 是康托集合构造的更多阶段的魔鬼楼梯. 从图上看 y 是 x 的一种奇怪函数, 它处处是常数, 而仅仅在康托集合上的点除外.



(i)



(ii)

图 24-3

§ 25 随机运动和谢尔宾斯基海绵

我们在 § 22 已经看到, 随机布朗运动可以产生幂函数定律 (22.3). 这一节我们还会看到随机游动可以产生自相似的谢尔宾斯基(W.Sierpinski)海绵结构. 这种随机运动可以这样设想, 从平面上某一点 z_0 开始, 选择一个(随机选择)方向游动一段距离并停止, 再选择另一方向游动一段距离并停止, 这样不断下去, 有什么结果呢?

取一个等边三角形, 它的三个顶点用数字 1, 2, 3 表示. 然后将一个骰子上的 4, 5, 6 三点分别改成 3, 2, 1, 这样一个骰子上只有 1, 2, 3 三种数字. 从 z_0 出发, 若掷骰子出现数字 2, 那么质点从 z_0 到三角形顶点 2 之间连线方向游动, 我们规定游动连线的一半距离到达 z_1 . 再掷一次骰子得 1, 那么按 z_1 和点 1 连接的方向游动并游动一半距离到达 z_2 . 再掷骰子得 3, 则按 z_2 和点 3 连线的方向游动并游动一半距离到达 z_3 . 这样随机掷骰子,

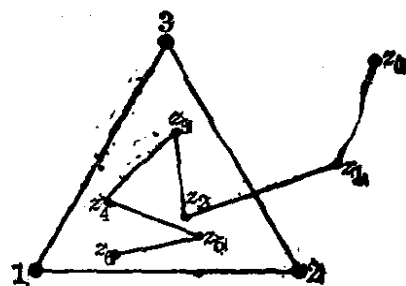


图 25-1

不断随机游动, 在三角形内产生许多点 z_4, z_5, z_6, \dots , 随机游动的前六步见图 25-1.

随着游动步子的加多, 三角形内的结构愈来愈明显, 图 25-2 (i)、(ii)、(iii)、(iv) 分别是随机游动 100 步、500 步、1000 步和 10000 步的结果.

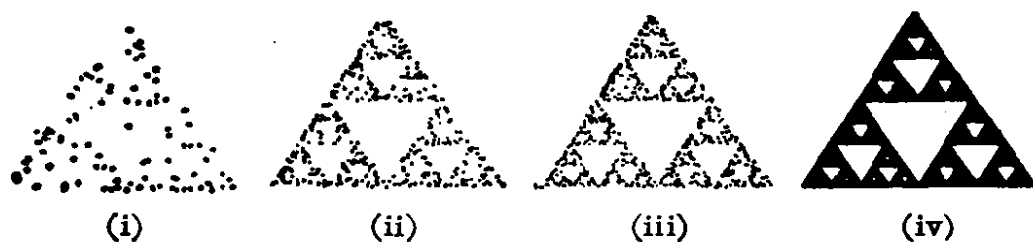


图 25-2

从图 25.2 看出, 终于出现具有自相似结构的谢尔宾斯基海绵. 这再一次说明随机中可以有确定性的自相似结果.

§ 26 外尔斯特拉斯函数

现在介绍的函数像科克曲线及康托集合一样, 是连续但处处不可微的函数

$$o(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos b^n t)}{b^{(2-D)n}}. \quad (26.1)$$

图 26-1(i) 是 $D=1.8$ 、 $b=1.5$ 的 $o(t)$ 图象. 从图象看出, 它似乎是一个随机的无规则函数. 而图 26-1(ii) 是图 26-1(i) 中 $0 < t < 0.2$ 的放大结果. 它和图 26-1(i) 极其相似. 图 26-1(iii) 是图 26-1(i) 将 t 重新标度, 即 $0 \leq t \leq b^{-1}$ 的结果. 图 26-1(iii) 和图 26-1(i) 也极其相似.

事实上, (26.1) 式存在如下的相似变换

$$o(bt) = b^{2-D} o(t), \quad (26.2)$$

因此

$$o(b^4 t) = b^{4(2-D)} o(t). \quad (26.3)$$

在 (26.1) 式中, D 就是分数维, 也即外尔斯特拉斯函数曲线的分数

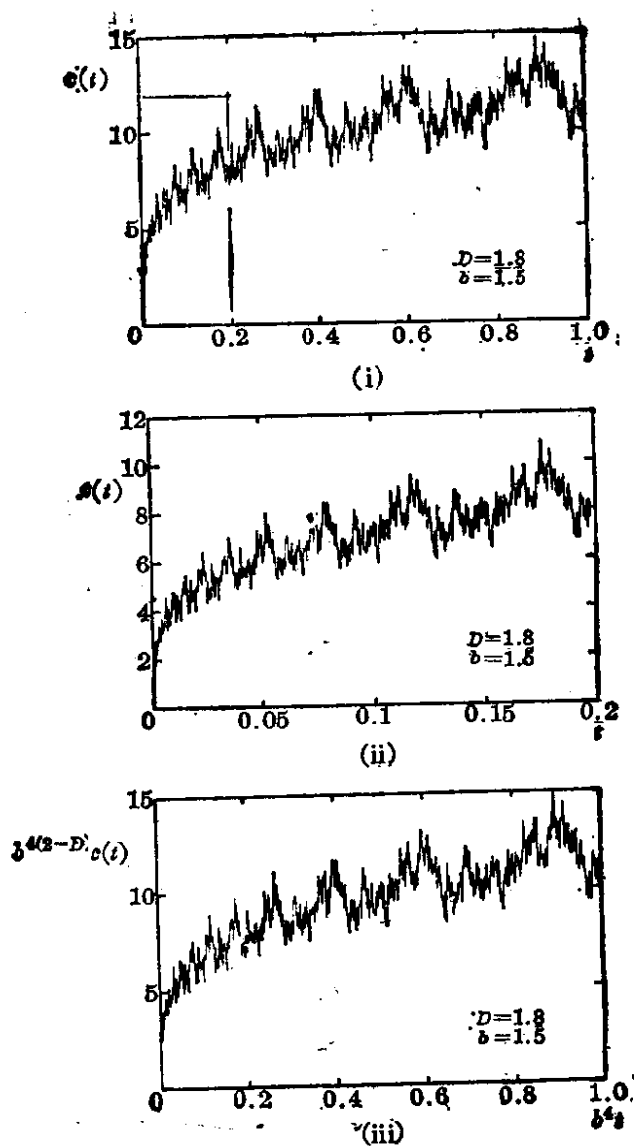


图 26-1

维, 一般 $1 < D < 2$. 假如把(26.1)看成是函数 $c(t)$ 的傅里叶展开, 那么离散频率为 $f_n = b^n$, 而每个分量的平方振幅正比于 $\frac{1}{b^{2(2-D)n}}$ 或 $\frac{1}{f_n^{2(2-D)}}$ 在带宽 $\Delta f \sim f$. 因此外尔斯特拉斯函数 $c(t)$ 的能谱密度

$$s(f) \propto \frac{\text{振幅}^2}{\Delta f} = \frac{1}{f^{2(2-D)+1}}. \quad (26.4)$$

(26.4)式和(5.6)式一致, 只是标度指数

$$H = 2 - D. \quad (26.5)$$

§ 27 无特征尺度

前面介绍了随机中有规律的若干问题, 它们的共同特点是: 无特征尺度, 却有自相似的结构. 英文的字序可以跨越四个量级(由 $10^0 \sim 10^4$), 科克曲线有大大小小的弯曲, 康托集合有大大小小的间格, 外尔斯特拉斯函数有各种尺度的涨落.

对这些问题, 要有正确的提法. 我们绝不能问: 康托集合中有多少个点? 我们也不能问: 科克曲线的长度是多少? 这是无特征尺度现象的本质. 分形创始人曼德布罗特(B. B. Mandelbrot)曾用“英国的海岸线有多长?”的提问来论述分形概念, 答案应该是: “看情况而定”. 他还讲了一个故事, 关于西班牙和葡萄牙的边界长度, 在西班牙的百科全书上写的是 616 英里, 在葡萄牙的百科全书上写的却是 758 英里, 果真是测量的问题吗?

为了说明我们用图 23-1 的科克曲线作为海岸线的模型, 我们来计算一下它们的长度. 设图 23-1 中 $n=0$ 的直线长度是 1. 由于直线的长度是 1, 因此用什么样的尺子去量(不管尺子的长度 r 是 $\frac{1}{3}$, 还是 $\frac{1}{2}$, 是 $\frac{1}{10}$ 还是 $\frac{1}{100}$), 其结果都是 1, 即直线长度 L 和尺子长度 r 之间的关系为

$$L = r^0 = 1. \quad (27.1)$$

但是, 对 $n=1$ 开始的科克曲线, 用不同的尺子长度 r , 量出来的长度 L 是:

$$\begin{aligned} r &= \left(\frac{1}{3}\right)^1, & L &= \left(\frac{4}{3}\right)^1, \\ r &= \left(\frac{1}{3}\right)^2, & L &= \left(\frac{4}{3}\right)^2, \\ &\vdots & &\vdots \\ r &= \left(\frac{1}{3}\right)^n, & L &= \left(\frac{4}{3}\right)^n. \end{aligned} \quad (27.2)$$

若设 L 和 r 的关系为

$$L = r^\mu = N(r) \cdot r, \quad (27.3)$$

将 $L = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ 、 $r = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 代入, 有

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n\mu}. \quad (27.4)$$

两边取对数, 得到

$$\mu = 1 - \frac{\log 4}{\log 3} = 1 - D = -0.2618. \quad (27.5)$$

其中

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618\ldots. \quad (27.6)$$

从(27.2)式看出, 长度 L 是随着尺子 r 的变化而变化的, 原因是用 $r = \frac{1}{3}$ 的尺子去量时, 科克曲线中 $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, \dots 的小弯曲都被忽略了. 而用 $r = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ 的尺子去量时, $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^4$, \dots 等小弯曲被忽略了. 所以尺子愈小, 量出的长度愈长. 因为(27.3)式中 μ 是负数, 故 r 愈小, L 愈大, 甚至 $r \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$.

若在(27.3)式中将 L 表示成 r 和用 r 量出的段数 N 的乘积, 显然, 从(27.3)和(27.5)有

$$N(r) = r^{-D}, \quad (27.7)$$

或

$$D = \frac{\log N(r)}{\log(1/r)}. \quad (27.8)$$

(27.8)式就是分数维的定义. 对图 23-1 的海岸线, 有

$$\begin{aligned} \left(\frac{\log 4}{\log 3}\right)_{n=1} &= \left(\frac{\log 16}{\log 9}\right)_{n=2} = \left(\frac{\log 64}{\log 27}\right)_{n=3} \\ &= \dots = 1.2618\dots. \end{aligned} \quad (27.9)$$

由上式看出, 虽然问题中无特征尺度, 但是有一个随尺子 r 变化而不变的量, 这就是分数维 D . 所以, 分数维 D 的含义是相似变换中的不变量.

§ 28 螺线结构

螺线及其结构, 是台风、DNA 等自组织现象中最常见的现象. 增长的螺线具有无特征尺度却有自相似结构, 因此可以看成是一类分形现象的原型.

我们知道, 阿基米得螺线的方程为

$$r = q\phi, \quad (28.1)$$

对数螺线的方程为

$$r = e^{q\phi}. \quad (28.2)$$

它们的图象分别见图 28-1(i) 和图 28-1(ii).

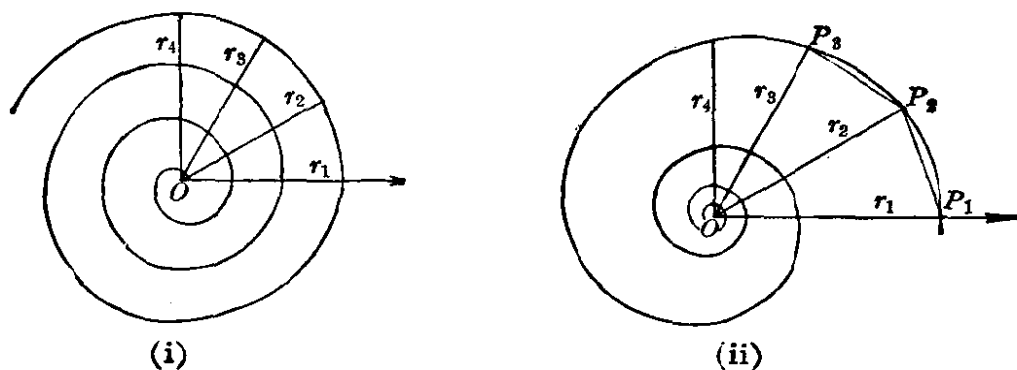


图 28-1

在阿基米得螺线中, 若选择一个任意角 α , 那么相互成角 α 的螺线上的点的向径 r_1, r_2, r_3, \dots 成算术数列. 事实上, 若 $r_1 = a\phi_1, r_2 = a(\phi_1 + \alpha), r_3 = a(\phi_1 + 2\alpha), \dots$, 那么

$$r_3 - r_2 = r_2 - r_1 = a\alpha, \quad \text{即} \quad r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + r_3).$$

在对数螺线(28.2)中, $r_1 = e^{q\phi}, r_2 = e^{q(\phi+\alpha)}, r_3 = e^{q(\phi+2\alpha)}$, 那么

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = e^{q\alpha} \quad \text{即} \quad r_2 = \sqrt{r_1 r_3}.$$

上式说明 r_1, r_2, r_3, \dots 成几何数列.

对数螺线的自相似性表现在, 若顺时针将对数螺线(28.2)式旋转一个角度 ψ , 则由(28.2)式,

$$e^{q(\phi+\psi)} = e^{q\psi} \cdot e^{q\phi} \quad \text{或} \quad e^{q(\phi')} = \lambda e^{q\phi},$$

即

$$r(\phi') = \lambda r(\phi), \quad \lambda = e^{q\psi}. \quad (28.3)$$

上式意味着通过相似变换中的旋转变换和尺度变换, 原有的螺线保持不变. 从图 28-1(ii)看出, 三角形 OP_1P_2 和 OP_2P_3 是相似的. 从表面上看, (28.3) 有一个尺度因子 λ , 但是, 如果不考虑旋转, 这种自相似性对任何尺度因子成立, 即使将 (28.2) 写成似乎有尺度 r_0 , 即 $r = r_0 e^{q\phi}$, 但实际上 r_0 可以吸收进指数中, 即 $r = e^{q[\phi + (\log r_0)/q]}$. 所以, 我们可以说对数螺线是无长度尺度的, 即无特征尺度. 应该注意到这种对数螺线的自相似和分形的自相似有不同之处, 前者函数是光滑的, 而后者函数是不可微的.

下面来看螺线的长度. 先看图 28-2 的由折线构成的下降螺线, 它们是由一系列正数 a_1, a_2, a_3, \dots 所组成: 取长度为 a_1 的一条直线段, 在该垂线的末端作一和该线段相垂直的长度仍为 a_1 的直线, 并将该线延长一个长度 a_2 , 将该线再折 90° 向下取长度 a_2 并延长一段 a_3 , 这种过程不断进行下去, 就形成折线螺线. 这个折线螺线的长度 L 为

$$L = 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \quad (28.4)$$

例如, 如果取 a_k 为公比 $q < 1$ 的等比数列 $a_k = q^{k-1}$, 那么 L 为

$$L = 2 \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{2}{1-q}. \quad (28.5)$$

因而该折线长度是有限的. 如果取 $a_k = \frac{1}{k}$, 则 L 为

$$L = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right), \quad (28.6)$$

级数 (28.6) 便是发散的, 因而该螺线长度为无穷大.

由图 28-2 的折线螺线, 我们可以构造平滑螺线. 事实上, 折线螺线上可分别构成边长为 a_k 的许多正方形, 我们分别以 a_k 为半径作圆弧, 就构成平滑螺线, 见图 28-3.

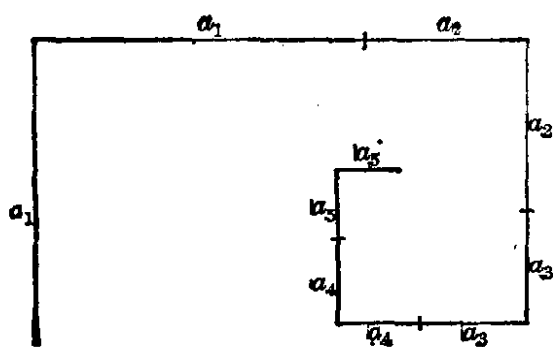


图 28-2

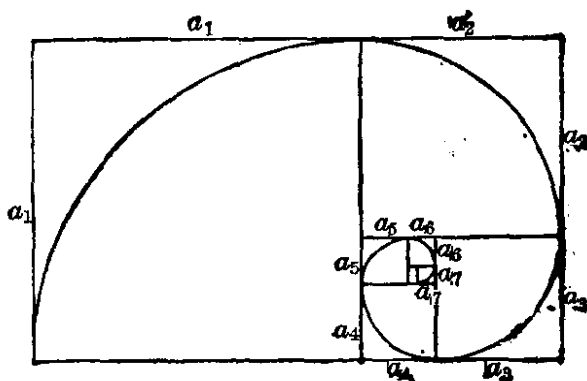


图 28-3

如果取 $a_k = \frac{1}{\gamma^{k-1}}$, 其中 $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 是黄金分割数, 构造其折线螺线和平滑折线, 不难求出其折线螺线的长度为

$$L = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma}} = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} = 2\gamma^2 = 3 + \sqrt{5}.$$

其平滑螺线的长度为

$$L = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{\pi}{2} \gamma^2 = \frac{\pi}{4} (3 + \sqrt{5}).$$

§ 29 分数维布朗运动

对于布朗运动, 虽然运动是随机的, 但表现出 $\frac{1}{f^2}$ 噪声, 这已经在第 1 章 § 6 看到. 虽然它和湍流噪声的功率谱还不相同, 但还是对研究湍流很有启发.

从物理上知道, 布朗运动粒子的位置 $x(t)$ 的概率分布服从正态分布

$$P(x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}. \quad (29.1)$$

(29.1) 式又是扩散方程

$$\frac{\partial P}{\partial t} = k \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (29.2)$$

的解.

从(29.2)式知, 正态分布的方差

$$\sigma = \sqrt{2kt} \quad \text{或} \quad \sigma^2 \propto t. \quad (29.3)$$

(29.3)式就是(6.8)式.

正态分布(29.1)有一很重要的性质, 即将(29.1)作尺度变换

$$x \rightarrow \lambda^{\frac{1}{2}} x, \quad t \rightarrow \lambda t, \quad (29.4)$$

则满足如下的标度律

$$P(\lambda^{\frac{1}{2}} x, \lambda t) = \lambda^{-\frac{1}{2}} P(x, t); \quad (29.5)$$

且在(29.4)变换下总概率不变, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\lambda^{\frac{1}{2}} x, \lambda t) d(\lambda^{\frac{1}{2}} x) = 1. \quad (29.6)$$

(29.5)式说明, 随机游动 $x(t)$ 和 $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x(\lambda t)$ 有相同的概率分布,

这就是所谓统计上是自相似的. 请注意第1章介绍的列维分布(7.1)也具有自相似性, 但和(29.5)的自相似性还是不同的.(7.1)

只有一个变数 x , 而(29.5)有两个变数 x 、 t . 从坐标 $(x, P(x, t))$ 图上看, 不同的 t 其正态分布的形式是不同的, 见图 29-1(i),

图中 $t_2 > t_1$; 但在坐标 $(\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}, \frac{P(x, t)}{t^{-\frac{1}{2}}})$ 图上却是同一个正态分布, 见图 29-1(ii).

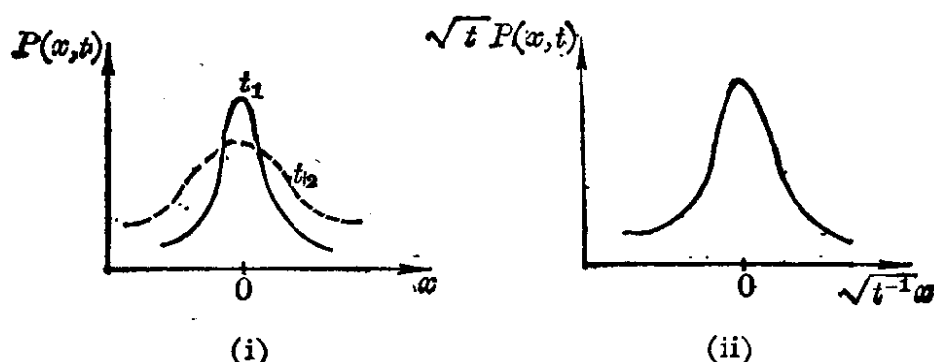


图 29-1

现在将(29.3)式推广到一般的均方位移情况,

$$[x(t_2) - x(t_1)]^2 \propto |t_2 - t_1|^{2H}, \quad (29.7)$$

其中

$$0 < H < 1 \quad (29.8)$$

叫标度指数. $H = \frac{1}{2}$ 时就是经典的布朗运动情况. 问题是 $H \neq \frac{1}{2}$ 能否改变功率谱指数 β 值吗?

(29.7)式和(5.2)式类似, 因而由(5.6)式得到功率谱指数

$$\beta = 2H + 1. \quad (29.9)$$

从(29.9)看出, 似乎只要 $0 < H < \frac{1}{2}$, β 就可以处在 $1 < \beta < 2$, 这好像很接近于实际的湍流谱(5.7)式. 但是, 我们来看一下相关函数, 因为

$$[x(t) - x(-t)]^2 = 2\overline{x^2(t)} - 2\overline{x(t)x(-t)},$$

所以相关系数

$$\begin{aligned} R &= \frac{\overline{-x(t)x(-t)}}{\overline{x^2(t)}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}[\overline{x(t) - x(-t)}]^2 - \overline{x^2(t)}}{\overline{x^2(t)}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(2t)^{2H} - t^{2H}}{t^{2H}} = 2^{2H-1} - 1. \end{aligned} \quad (29.10)$$

有意思的是, 相关系数和时间 t 无关. 因此, 这时虽不同于指数衰减形式的相关系数(它是短程相关, 长程不相关)可以有长程相关, 但也不同于幂函数的自相关函数(7.3)式.

由(29.10)看出, $H = \frac{1}{2}$ 的布朗运动时相关系数 $R = 0$. 它说明 $x(t_2) - x(t_1)$ 和 $x(t_3) - x(t_2)$ 在概率意义上 ($t_1 < t_2 < t_3$) 是独立的, 即它过去的行为不影响它将来的行为(这就是通常说的“马尔可夫过程”). 当 $H \neq \frac{1}{2}$ 时, 就会产生不依赖于时间 t 的相关效应, 这种效应可以持续很长时间. 当 $H > \frac{1}{2}$ 时, $R > 0$ 即正相关,

它的特点是过去某个时刻发生了一个增长过程，那么在将来的时刻仍然保持着这种增长趋势，而且增长的倾向持久地保持着。如果过去是一个衰退效应，同样也会持久地保持着衰退。当 $H < \frac{1}{2}$ 时， $R < 0$ 即负相关，即过去的增长倾向将会造成将来的减少趋势，反过来过去的衰退会促使将来发生增长。图 29-2 是不同 H 的分数维布朗运动曲线（图中由上到下 H 分别为 0.2、0.5 和 0.8）。这说明分数维布朗运动有强烈的时间相关效应。这种长相关的行为明显地不同于一般处于平衡态的物理系统的行为，它只与系统在二阶相变临界点附近的行为相似，因为临界点上相关长度趋于无穷。

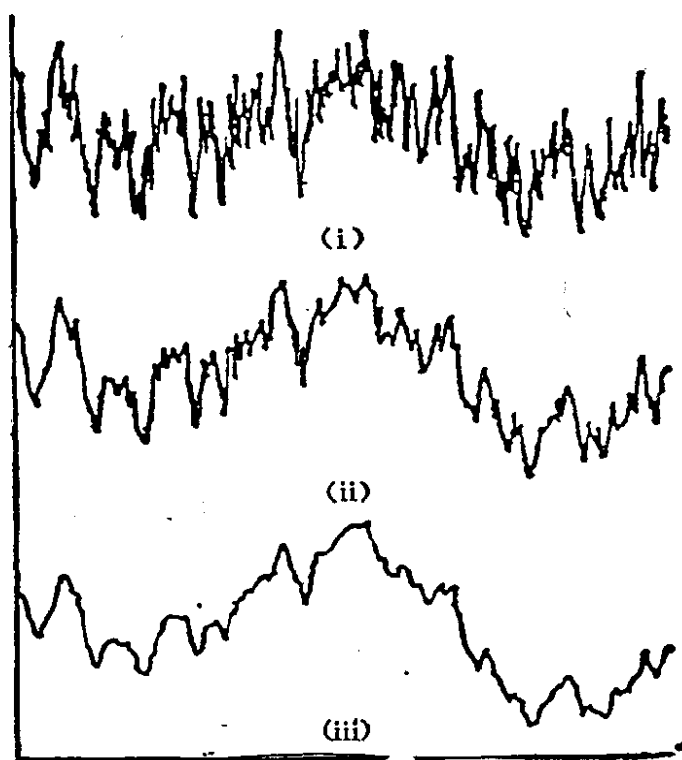


图 29-2

尽管分数维布朗运动和通常的布朗运动有差别，但它仍属于正态概率分布，和第 1 章介绍的列维分布仍有相当大的差别。

还应指出，前面(23.5)式说明，若科克曲线 t 放大 λ 倍，则函数 $f(\lambda t)$ 也是 $f(t)$ 的 λ 倍。而现在的(29.7)式可以写成

$$f(t) = t^H, \quad (29.11)$$

因此 t 放大 λ 倍, 则函数 $f(\lambda t)$ 是 $f(t)$ 的 λ^H 倍, 即

$$f(\lambda t) = \lambda^H f(t). \quad (29.12)$$

这时 H 并不是 1. 因而这种关系叫自仿射 (selfaffine).

自仿射也具有变换的不变性, 因而也可以用分数维 D 来反映这种不变性. 我们可以把图 29-2 那种分数维布朗曲线看成是 $d=1$ 的曲线上添加一些不规则性而把维数由 $d=1$ 提高到维数 $1 < D < 2$, 故对于 d 维提高到 D , 有

$$D = d + 1 - H. \quad (29.13)$$

对 $d=1$, 则 (29.13) 式为

$$D = 2 - H. \quad (29.14)$$

图 29-2 由上到下的维数分别为 1.8, 1.5 和 1.2.

将 (29.13) 代入 (29.9), 就得到 β 和 D 的关系为

$$\beta = (2d+3) - 2D = \begin{cases} 5-2D, & \text{当 } d=1 \text{ 时;} \\ 7-2D, & \text{当 } d=2 \text{ 时;} \\ 9-2D, & \text{当 } d=3 \text{ 时.} \end{cases} \quad (29.15)$$

§ 30 自组织临界性

我们知道, 地震现象很复杂. 大地震在什么地方、什么时候发生, 几乎无法知道. 但是很早就知道震级愈大、地震发生的次数愈少, 这里就表现出规律性. 震级 m 和频数 N 之间的关系是著名的 Gutenberg-Richter 关系

$$\log N(>m) = a - bm. \quad (30.1)$$

经验表明 b 值非常接近于 1, 通常 $0.8 < b < 1.5$. 又发现断裂带的尺寸 r 和震级 m 的关系为

$$\log r = m - 3.7. \quad (30.2)$$

由 (30.1) 和 (30.2) 得出 N 和 r 的关系为幂函数

$$N(>r) \propto r^{-b}. \quad (30.3)$$

又因为地震能量 E 随震级增加而增加, 即

$$\log E = c + dm, \quad (30.4)$$

所以 N 和 E 的关系也是幂函数

$$N \propto E^{-\frac{b}{a}}. \quad (30.5)$$

(30.5) 式中, 幂指数大约在 -1.2 和 -1.7 之间.

气象现象也有类似的情况. 如热带气旋发生的次数 N 与最大风速 v 的关系也是幂函数

$$N \propto v^{-\alpha}. \quad (30.6)$$

这些复杂现象中出现的幂函数规律以及在自然界出现的“ f^{-1} 噪声”(见第 1 章)规律究竟是什么原理呢? 过去对像地震这样的灾害往往归因于外部的因素强大的冲击, 自组织临界性则认为很多大的相互作用的系统会自然朝着自组织临界状态演化, 在这种状态下小的冲击或扰动可以引发大大小小的事件.

自组织临界现象最简单的模型就是沙堆模型. 一粒一粒沙子往一平面上堆, 慢慢地就会形成沙堆. 我们不要使沙堆太陡(即不稳定)或太平坦(即稳定), 而使加入沙堆中沙粒的数量和落在平面边缘外沙粒数量在总体上达到平衡时, 沙堆就停止增长, 系统就达到了临界状态. 这种临界性和相变现象在相变点的临界性不同, 它是内部相互作用而形成的自组织, 不是要求外部的压强或温度条件. 两者相同之处是在非临界点处自相关函数是指数形式(6.6), 而在临界点处自相关函数是幂函数形式(7.3). 因为系统处在亚稳态, 所以再加一粒沙子的随机性通过动力学过程加以放大, 可以使沙堆的坍方在各种尺度上发生, 因此自组织临界现象认为沙堆的小坍方和大坍方可能是同一个机理.

地震的幂函数规律(30.5)说明大小地震次数的关系是有规律的. 因此, 可以想像大小地震产生于相同的机械过程. 通常假定地震是由粘滑机制引起的. 地壳的某些区域粘附在一起, 由于挤压产生断层, 板块沿断层相对滑动, 应力释放并传向邻近区域. 图

30-1 是沿断层带的地壳粘附和滑动的 Burridge-Knopoff 模型。块体由弹簧互相连结，同时依靠其他弹簧块体链而被驱使与断层作恒速(速度是 v)运动。当断层移动时，块体之间处在粘附状态。一旦弹簧力大于静摩擦力，此时一个或多个块体即刻全部滑动，即发生了地震，直到弹簧力释放为止。这里，断层滑动的力就相当于加沙子，应力释放就相当于加一粒沙子后引起周围点上沙子滑掉而产生的高度差变化。

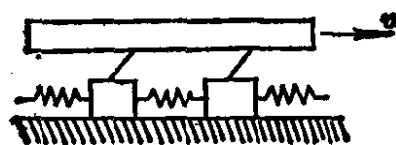
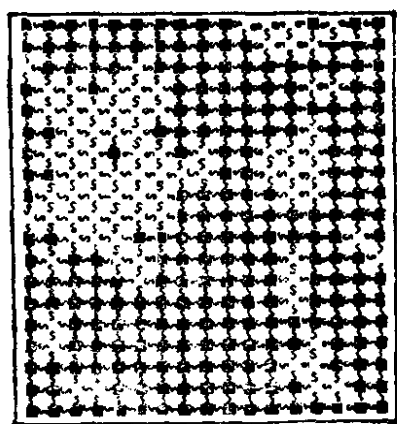
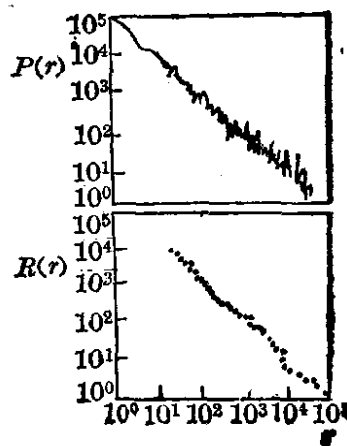


图 30-1

图 30-2(i)是重现地震特征的计算机地壳模型。由许许多多二维方块组成的弹簧板放在一个刚性板上。当这个方块阵受到挤压时，弹簧就在板块上作用一个正比于压缩量的力。作用于某个特定方块上的力只要超过一临界值，板块就开始滑动(图中的白色方块)，一组白色方块就代表一次地震。直到弹簧力减少到临界值以下，方块所失去的力均匀传给它的四邻。图 30-2(ii)是统计出的地震次数(或地震次数分布函数 $P(r)$)和释放能量(或断裂尺寸 r)的关系，有



(i)



(ii)

图 30-2

$$P(r) \propto r^{-\alpha}. \quad (90.7)$$

从图上看 α 值约为1.5, 这和(30.5)式的幂次相一致. 这意味着某地区一年中发生能量为100(以某种单位表示)的地震, 那么这地区的这一年中经历大约1000次能量为1的小地震, 这就是自相似的结构. 由于系统处于亚临界状态, 一个局部的扰动最终将由于多米诺(domino)骨牌效应而遍及整个沙堆, 因此无特征尺度也直接导致无特征时间尺度, 故张弛时间分布为(6.11)式

$$P(T) \propto T^{-\alpha}.$$

这就是第1章§6将包括湍流在内的许多自然现象出现 $\frac{1}{f}$ 噪声的一种机理. 所以, 一般把“ $\frac{1}{f}$ 噪声”和空间分维自相似结构都认为是自组织临界现象的产物. 分形可以看成是自组织临界过程的“快照”, 而“ $\frac{1}{f}$ 噪声”看成是自组织临界现象的“指纹”.

§ 31 重整化群方法

重整化群理论是1971年由威尔逊(K.G. Wilson)提出的. 在1982年因应用此方法解决相变问题而获得诺贝尔物理学奖.

连续相变是大量粒子的集合效应. 一块处于高温下的磁铁, 微观粒子的磁矩杂乱无章地排列着, 在宏观上表现不出磁性; 但是当温度逐渐下降到“居里点”, 突然沿某个方向出现了某个宏观磁矩, 对称性从绕一切方向的转动对称, 下降到沿宏观磁矩方向的一种转动, 出现了有序的磁化状态.

我们若把铁磁相变看成是大量晶格上自旋相互作用的结果. 图31-1是自旋集团模型, 左边是原来的晶格, 著名的Ising模型就是将每边两个自旋合起来组成自旋块, 如图中的方框所示, 而变成图31-1右边的有效晶格.

现在相当于“尺子”变长了, 即

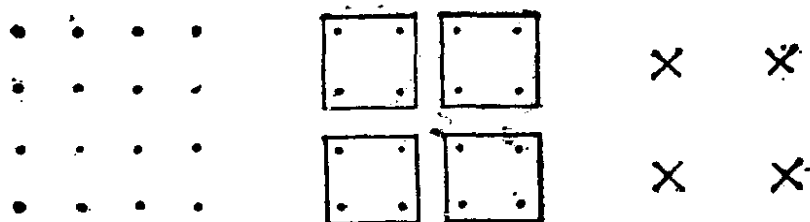


图 31-1

$$T_0 - T \rightarrow \lambda(T_0 - T), \quad (31.1)$$

其中 T_0 是临界温度. 因而, 磁矩之间的关联长度 ξ 就相应地缩小了一半, 即

$$\xi[\lambda(T_0 - T)] = \lambda^{-\nu} \cdot \xi(T_0 - T), \quad (31.2)$$

其中 $\lambda=2$ 时 $\lambda^{-\nu} = \frac{1}{2}$, ν 叫临界指数.

(31.2)式的解就是

$$\xi(T) = (T - T_0)^{-\nu}, \quad (31.3)$$

或

$$T - T_0 \propto \xi^{-\frac{1}{\nu}}. \quad (31.4)$$

由(31.3)看出, 当温度 T 降低到临界温度 T_0 时, 粒子磁矩间的相互作用压倒了随机热运动而占上风, 粒子之间的关联越来越大, 从而形成各种尺度“集团”和涨落. 在相变点关联长度 ξ 趋向无穷. 将(31.4)式与分维的定义(27.7)比较, 看出有

$$D = \nu^{-1}. \quad (31.5)$$

因此, 和分形类似, 临界指数是相变中的不变量.

相变中的重整化群方法, 就是利用尺子变换将小尺度的涨落平滑掉(即粗粒平均), 而在较大尺度的有效作用下来看临界现象. 正是由于相变现象中跨越很宽的尺度, 局部和整体相似, 因而这种变换不影响全局.

现在令变换为

$$T' = R(T), \quad (31.6)$$

这种变换将尺子 $T-T_0$ 变长为 $T'-T_0$ 。尺子变长了, 那么去量度的关联长度 ξ 按(31.3)式就由 $\xi(T)$ 缩短为 $\xi(T')$ 。但在相变点 T_0 上, 关联长度 $\xi(T_0)$ 变为无穷, 因而 T_0 是重整化群变换(31.6)的不动点, 即

$$T_0 = R(T_0). \quad (31.7)$$

将 $R(T)$ 在 T_0 附近作幂级数展开

$$R(T) = R(T_0) + \lambda(T - T_0) + \dots, \quad (31.8)$$

其中

$$\lambda = \left(\frac{dR}{dT} \right)_{T_0}; \quad (31.9)$$

又设

$$\xi(T') = b^{-1} \xi(T), \quad (31.10)$$

则

$$\frac{1}{b} = \frac{\xi(T')}{\xi(T)} = \frac{(T' - T_0)^{-\nu}}{(T - T_0)^{-\nu}}. \quad (31.11)$$

取(31.8)的线性部分

$$R(T) - R(T_0) \approx \lambda(T - T_0), \quad (31.12)$$

即

$$T' - T_0 \approx \lambda(T - T_0), \quad (31.13)$$

故(31.11)式又可以表为

$$\frac{1}{b} = \frac{\lambda^{-\nu} (T - T_0)^{-\nu}}{(T' - T_0)^{-\nu}} = \frac{1}{\lambda^{\nu}}. \quad (31.14)$$

由此求得临界指数 ν 为

$$\nu = \frac{\log b}{\log \lambda}. \quad (31.15)$$

由此可以看出, 只要知道变换 R 和不动点 T_0 , 则由(31.9)式就可以求到 λ 。若又知道尺度变换的方式(即 b 值), 就可以由(31.15)式求到临界指数 ν 这个不变量和分数维 D 值。

从如上推导可以看出, 相变和第2章洛吉斯蒂映射周期倍分岔过程之间多么相似, 见下表:

相 变	混 沌
四个自旋结合成一群	周期倍分岔的自相似性
参数 $T - T_c$	$\mu - \mu_\infty$
$T - T_c \rightarrow \lambda(T - T_c)$	$\mu - \mu_\infty \rightarrow \delta(\mu - \mu_\infty)$
重整化群变换 $T = R(T)$	周期倍分岔变换 $\mu = R(\mu)$
变换不动点 T_c	周期倍分岔累积点 μ_∞
线性化 $R(T) = R(T_c) + \lambda(T - T_c)$	$R(\mu) = R(\mu_\infty) + \delta(\mu - \mu_\infty)$
$\xi(T') = \frac{1}{2} \xi(T)$	$n(\mu_n) = \frac{1}{2} n(\mu_{n+1})$
临界指数 $\nu = \frac{\ln 2}{\ln \lambda}$	$\tau = \frac{\ln 2}{\ln \delta}$
$\xi(T) \sim (T - T_c)^{-\nu}$	$n(\mu) \sim (\mu - \mu_\infty)^{-\tau}$

应该注意到映射(31.6)不动点的性质,它有两个吸引子

$$T=0 \quad \text{和} \quad T=\infty, \quad (31.16)$$

它们分别相应于完全的有序和完全的无序. 而不动点

$$T = T_c,$$

由于变换(31.6)使 $(T' - T_c) > T - T_c$, (31.7)右端雅可比矩阵的特征值(31.9) $\lambda > 1$, 因而不不动点 $T = T_c$ 应是不稳定的不动点. 当然, T_c 又不能是完全不稳定的不动点, 否则所有参数在重整化变换下不断放大, 系统就会个性表现愈来愈突出. 因此, T_c 只能是鞍点类的不动点.

下面以线性链和二维点阵渗流为例.

图 31-2(i)是一个线性链, 链上有一系列格点, 其中黑点表示导体, 圈点表示绝缘体. 显然, 只有所有格点全是导体, 电流才能通过. 现在进行尺度变换(即粗视化), 将图 31-2(i)的二个格点归并成一个元胞, 见图 31-2(ii). 这里格点归并成元胞的方式是按“否决权”的方式, 即: 只有当元胞中每个格点都是导体(即黑点)时元胞才是导体, 否则就是绝缘体. 由于元胞集团间的长度是原格

点长度的 2 倍, 所以相关长度 ξ 就收缩了一半, 即 $b=2$.

下面来求重整化群变换公式 $R(P)$, 其中 P 是原格点导通的



图 31-2

概率. 易知格点不导通(绝缘)的概率是 $(1-P)$. 新的元胞组态导通的概率 P' 和 P 的关系为:

$$\begin{aligned} P' &= P \cdot P + 0 \cdot P \cdot (1-P) + 0 \cdot (1-P) \cdot P + 0 \cdot (1-P)(1-P) \\ &= P^2 = R(P). \end{aligned} \quad (31.17)$$

这就是线性链渗流模型的重整化群变换公式. 令(31.17)式右端和左端相等, 就求到不动点, 即

$$P = P^2, \quad P(1-P) = 0. \quad (31.18)$$

因而不动点是

$$P=0 \quad \text{和} \quad P=1. \quad (31.19)$$

按照映射(31.17)右端的雅可比矩阵的特征值的模小于 1 或大于 1, 来判断不动点是稳定还是不稳定. (31.17)右端的雅可比矩阵(且就是特征值)为

$$\lambda = \frac{\partial R}{\partial P} = 2P, \quad (31.20)$$

对不动点 $P=0$, $\lambda=0$, 因而是稳定的不动点, 它不是临界点; 对不动点 $P=1$, $\lambda=2$, 因而是稳定的不动点, 故它是临界点, 即

$$P_c = 1. \quad (31.21)$$

(31.21)的物理意义非常清楚, 即只有当每个小格点均是导体时整个链才是导体.

将临界点的 $\lambda=2$ 和 $b=2$ 代入(31.15)式, 就求到临界指数为

$$\nu = \frac{\log 2}{\log 2} = 1. \quad (31.22)$$

现在看一个二维渗流模型(见图 31-3). 图中四个格点归并成一个元胞, 格点距离加大一倍, 即 $b=2$. 但是, 现在归并的方式

是按“少数服从多数”的原则，而不是像一维情况的“否决权”方式。此时重整化群变换关系为

$$P' = R(P) = P^4 + 4P^3(1-P). \quad (31.23)$$

(31.23)式右边第一项代表四个格点都是金属，第二项代表三个格点是金属的四种可能性。



图 31-3

(31.23)式的不动点应满足如下四次方程

$$P = P^4 + 4P^3(1-P),$$

即

$$3P^4 - 4P^3 - P = 0, \quad \text{或} \quad P(P-1)(3P^2 - P - 1) = 0.$$

因此有四个不动点：

$$P=0, \quad P=1, \quad P = \frac{1+\sqrt{13}}{6} = 0.768, \quad (31.24)$$

$$P = \frac{1-\sqrt{13}}{6} = -0.434.$$

显然，(31.24)中第四个不动点 P 是负值，可以不考虑。对其他三个不动点，(31.23)式右端雅可比矩阵为

$$\frac{\partial R}{\partial P} = 4P^3 + 12P^2 - 16P^3 = 12P^2 - 12P^3 = 12P^2(1-P).$$

对不动点 $P=0$ 和 $P=1$ ，均有 $\frac{\partial R}{\partial P} = 0$ ，因而是稳定的不动点，它们不是临界点。只有对 $P=0.768$ ， $\frac{\partial R}{\partial P}$ 的模大于1，因而不稳定的不动点，求出的临界点是

$$P_c = \frac{1+\sqrt{13}}{6} = 0.768.$$

$$\lambda = \left(\frac{\partial R}{\partial P} \right)_{P_0=0.768} = 12P^2(1-P) \Big|_{P_0=0.768} = 1.64. \quad (31.25)$$

将(31.25)和 $b=2$ 代入(31.15)式, 求得临界指数

$$\nu = \frac{\log 2}{\log 1.64} = 1.4. \quad (31.26)$$

即相关长度

$$\xi = (P - P_0)^{-1.4}. \quad (31.27)$$

为了说明重整化群方法的应用, 下面再举一个三维岩石断裂造成地震的例子.

图 31-4 是岩石破裂的模型. 图中一线度为 h 的立方体岩块, 它可以分成 $2^3=8$ 块线度为 $\frac{h}{2}$ 的小立方体岩块. 假设一个小立方体破裂成 8 个小立方体的概率均为 P . 同样, 线度为 $\frac{h}{2}$ 的岩块破裂成 8 个线度为 $\frac{h}{4}$ 的小立方体的概率也是 P . 这种过程不断重复下去, 就形成大小岩块的分形结构. 设 N_m 是经过 m 次破裂的碎块总数, 那么 $(m+1)$ 次破裂的碎块总数就为

$$N_{m+1} = [8P + (1-P)]N_m. \quad (31.28)$$

上式右端第一项表示破裂成的小块数, 右端第二项是还未破裂的小块数目.

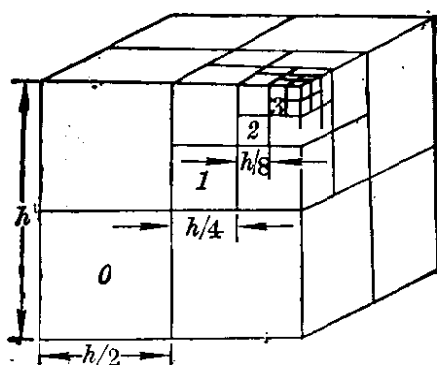


图 31-4

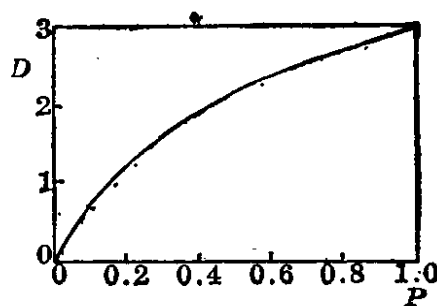


图 31-5

根据分数维的定义 (26.13) 式, 形成碎块的分布的分形维数

应是

$$D = \frac{\log\left(\frac{N_{m+1}}{N_m}\right)}{\log\left(\frac{r_m}{r_{m+1}}\right)} = \frac{\log(7P+1)}{\log 2} \quad (31.29)$$

图 31-5 的曲线给出了岩石破裂的分形维数 D 和破裂概率 P 之间的关系。从图上可看出, 若破裂概率 $P=1$, 即表示一块变 8 块的过程, 此时 $D=3$ 。一般, D 是分数。

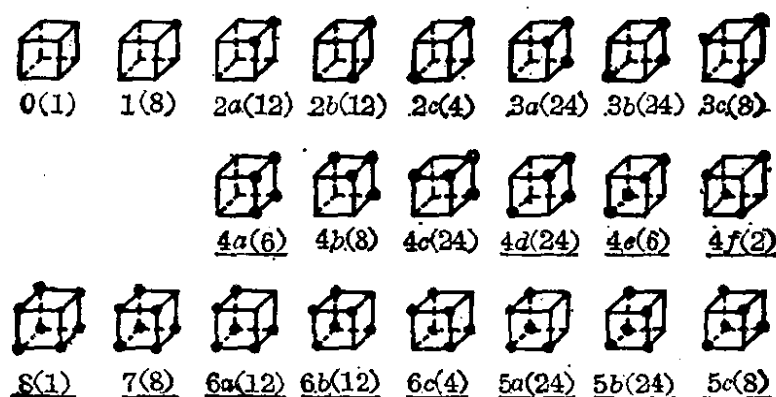


图 31-6

我们假设由小立方块的 8 个格点归并成一个元胞, 那么, 就有 $2^8=256$ 种可能的配置状况。图 31-6 列出了 256 种中的 22 种不同的拓扑配置。小方块下方的第一个数字表示破裂成单小方块的数目, 英文字母是破裂成相同数目小方块的不同情况, 圆括号中的数字表示有多少种情况, 破裂块是由该块角上的黑点表示的。图 31-7 是图 31-6 中两种情况放大的示意图。现在制订破裂规则: 假设破裂的元胞渗透到整个单元, 那么就作为该单元破裂。在图 31-6 中用黑线划出的就表示该单元破裂。故重整化群变换方程为

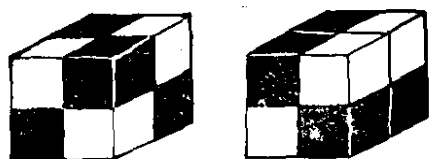


图 31-7

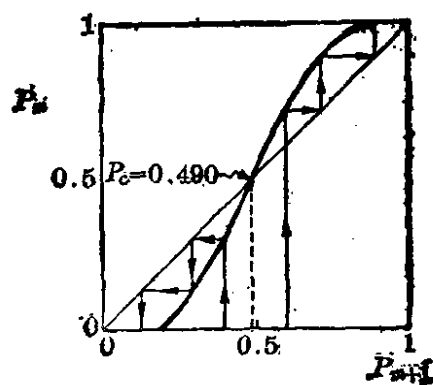


图 31-8

$$P_m = P_{m+1}^3 + 8P_{m+1}^7(1 - P_{m+1}) + 28P_{m+1}^6(1 - P_{m+1})^2 + 56P_{m+1}^5(1 - P_{m+1})^3 + 38P_{m+1}^4(1 - P_{m+1})^4, \quad (31.30)$$

或

$$P_m = 3P_{m+1}^3 - 32P_{m+1}^7 + 88P_{m+1}^6 - 96P_{m+1}^5 + 38P_{m+1}^4. \quad (31.31)$$

重整化群变换方程 (31.31) 的图象见图 31-8. 从图上看, $P=0$ 和 $P=1$ 是稳定的不动点, 而

$$P_c = 0.49 \quad (31.32)$$

是不稳定的不动点, 即临界点.

将 (31.32) 代入 (31.31) 右端的雅可比矩阵, 求得

$$\lambda = 2.18. \quad (31.33)$$

将 λ 和 $b=2$ 代入 (31.15) 式, 求得临界指数

$$\nu = \frac{\log 2}{\log 2.18} = 0.89, \quad (31.34)$$

它表示

$$\xi \sim (P - P_c)^{-0.89}. \quad (31.35)$$

将 P_c 代入 (31-29) 式, 得

$$D = \frac{\log(7P_c + 1)}{\log 2} = 2.15. \quad (31.36)$$

从以上几例看出, 在用重整化群方法中, 使用什么样的规则是非常重要的, 要力求符合物理. 还看出, 尽管导电、逾渗、岩石断裂等现象都是随机的, 但是用重整化的方法还是可以找到规律的. 所以, 重整化方法是研究分形的重要手段.

§ 32 子波变换

正像在第 1 章所看到的, 杂乱无章地湍流信号可以用傅里叶变换求其功率谱 $S(k)$ 或 $S(f)$, 在谱空间中发现湍流仍是有规律的. 同样也看到, 杂乱无章的湍流信号可以通过子波变换

(wavelet transforms)的方法了解湍流的串级过程,看清楚湍流信号原来是由大大小小尺度不同涡旋所构成的。

但是傅里叶变换把湍流信号分解成非常大的傅里叶分量的自由度(一般,在二维湍流,它正比于 R_ϵ ,而在三维湍流,它正比于 $R_\epsilon^{3/4}$)。第1章 §9 说明,湍流中存在相干结构,它们不但含有大部分能量(对三维湍流)或大部分拟能(对二维湍流),而且使非线性项减小或消失,这就有可能使纳维-斯托克斯方程投影到那些自由度较少的基本的相干结构上,或投影到物理空间充分局域化的某些有关的函数基上,这时子波变换就起着决定性的作用,因而可以直接从物理空间中来了了解湍流。

下面我们将傅里叶变换与子波变换作一比较。因为傅里叶变换的基函数是三角函数 $e^{i\omega t}$ 或 e^{ikx} ,它振荡地充满空间,因此一个函数 $f(t)$ 或 $f(x)$ 的信息含量全部在傅里叶展开的谱系数 $\hat{f}(\omega)$ 或 $\hat{f}(k)$ 之中完全非局域化了。虽然 $f(x)$ 的信息并未失去,但把它“铺展”开了。若认为湍流的信号是除在若干奇点外为处处光滑的,但 $f(x)$ 的傅里叶变换的模(或功率谱) $S(k)$ 将按 $k^{-\beta}$ 的幂函数变化,而从谱空间中分辨不出这种奇异性,因而丧失了本质的信息。而子波变换的基函数则是由解析子波 $g(x)$ 通过位移和放大来构成的。图 32-1 是墨西哥帽式的解析子波

$$g(x) = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (32.1)$$

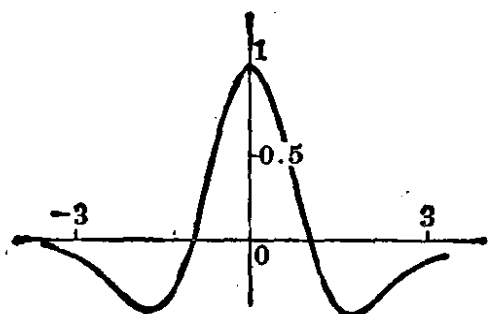


图 32-1

把解析子波 $g(x)$ 通过平移 x_0 和放大(放大倍数或分辨率为 $\frac{1}{a}$),就构成子波变换的基本函数

$$\frac{1}{a} g\left(\frac{x-x_0}{a}\right). \quad (32.2)$$

由于函数 $g(x)$ 的局域性,它在 $x=0$ 处为最大,像孤立波一样。因此,当对 $f(x)$ 作子波变换时,基函数

就在 x 轴上扫描；若函数在某点 x_0 处有奇异性，这时函数(32.2)也在 x_0 处最大，使子波变换的系数的振幅在该点急剧增大，而在光滑点的子波变换系数则较小。并且，可以通过 a 的调整由(32.2)式使图 32-1 的放大倍数(或高度)以及宽度发生变化，使能发现湍流信号中小的涨落和奇性。因此，一般把子波变换称作数学上的“显微镜”就是这个道理。

因此一个信号 $f(x)$ 的子波变换 $T_g(a, x_0)$ 就是将信号 $f(x)$ 在二个独立变量 a, x_0 上展现出来：

$$T_g(a, x_0) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot g\left(\frac{x_0 - x}{a}\right) dx. \quad (a > 0) \quad (32.3)$$

应该指出，解析子波满足平均值为 0 的条件，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 0, \quad (32.4)$$

且(32.3)式积分号前的 $\frac{1}{a}$ 是归一化因子，它使所有子波都具有相同的能量，而子波系数 $T_g(a, x_0)$ 代表能量密度。

除了(32.1)式的解析子波(它是高斯分布 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的二阶导数)外，还有高斯分布的一阶导数

$$g(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

以及二个高斯分布的差

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{8}}$$

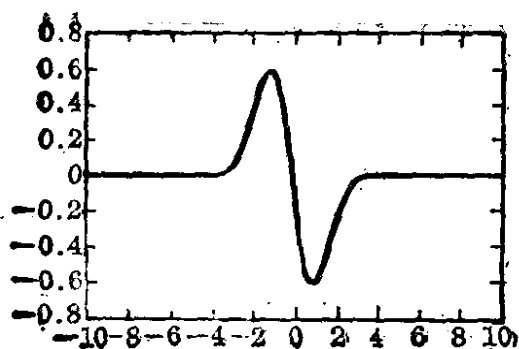
作为解析子波，分别见图 32-2(i)和(ii)。

子波变换对分析湍流的间歇性、奇异性及相干结构有很大意义。例如，湍流信号 $f(x)$ 若具有标度指数 α ，即

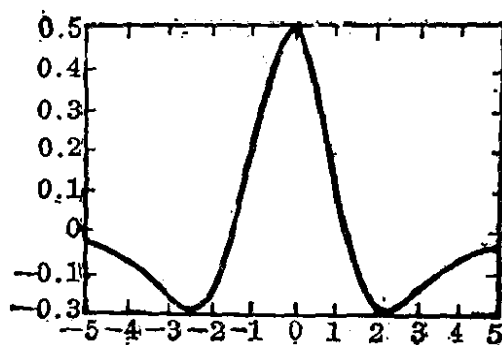
$$(\Delta f)_{x_0}(x) = f(x_0 + x) - f(x_0) = x^{\alpha(x_0)}, \quad (32.5)$$

我们并不知道 α ，但是下面我们来证明，它的子波变换 $T_g(a, x_0)$ 也具有同样的标度指数，因此可以由子波变换求出 α 。

由(32.3)式，有



(i)



(ii)

图 32-2

$$T_g(\lambda a, \lambda x_0) = \frac{1}{\lambda a} \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{\lambda x_0 - x}{\lambda a}\right) \cdot f(x) dx. \quad (32.6)$$

利用(32.4)的条件, (32.6)式可以写成

$$T_g(\lambda a, \lambda x_0) = \frac{1}{\lambda a} \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{\lambda x_0 - x}{\lambda a}\right) [f(x) - f(0)] dx. \quad (32.7)$$

令 $x' = \frac{\lambda x_0 - x}{\lambda a}$, 则 $x = \lambda(x_0 - ax')$, $dx = -\lambda a dx'$. 故(32.7)式变为

$$\begin{aligned} T_g(\lambda a, \lambda x_0) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x') \Delta f_0[\lambda(x_0 - ax')] dx' \\ &= -\lambda^a \int_{-\infty}^{+\infty} g(x') \cdot \Delta f_0(x_0 - ax') dx'. \end{aligned} \quad (32.8)$$

再令 $y = x_0 - ax'$, $dy = -a dx'$, 则(32.8)式又变成

$$\begin{aligned} T_g(\lambda a, \lambda x_0) &= \lambda^a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} g(y) \cdot \Delta f_a(y) dy \\ &= \lambda^a T_g(a, x_0). \end{aligned} \quad (32.9)$$

(32.9)式意味着若固定 x_0 , 那么子波变换具有自相似性, 它和信号 $f(x)$ 具有相同的标度指数, 即(32.9)的解为

$$T_g(a, x_0) = a^{\alpha(x_0)}. \quad (32.10)$$

这样, 点 x_0 处的标度指数 $\alpha(x_0)$ 就可在双对数坐标纸($\log T_g(a)$),

$\log a$) 上确定, 图上直线的斜率就是这个 $\alpha(x_0)$.

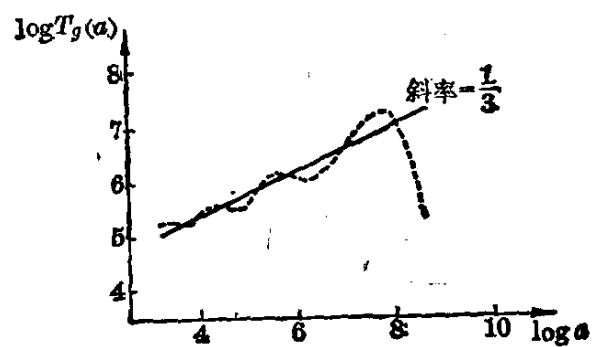


图 32-3

图 32-3 是由湍流资料得到的 $T_g(a, x_0)$ 随 a 的变化图, 通过曲线拟合直线, 斜率 $\alpha = \frac{1}{3}$, 这和柯尔莫戈洛夫的结果(5.3)相一致.

第 4 章

同(异)宿轨道和孤立波、涡旋

前已指出,对于湍流的认识,要把确定性和随机性结合起来考虑. 湍流中确定性和随机性联系的关键是什么? 这就是本章所要介绍的同宿轨道和异宿轨道. 它一方面和湍流中相干结构中的一种——孤立波相联系, 又和 § 9 中介绍的非孤立波相干结构——涡旋有关; 另一方面, 同(异)宿轨道横截相交, 又是出现混沌的条件, 见 § 15. 因此, 研究湍流, 必须找到动力系统的定常解及其相应的定常解之间相应的联接线——同(异)宿轨道.

§ 33 同宿轨道

大家知道, 非线性和色散平衡的结果可以出现孤立波(solitary wave). 著名的 KdV 方程是指

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (33.1)$$

其中 $u \frac{\partial u}{\partial x}$ 为非线性项, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ 为色散项. 我们来求方程(33.1)的行波解. 令

$$u = u(\xi), \quad \xi = x - ct, \quad (33.2)$$

其中 c 是波速, 取为常数. 将(33.2)式代入(33.1)式, 就化为常微分方程

$$\beta \ddot{u} + u\dot{u} - c\dot{u} = 0, \quad (33.3)$$

其中 u 上的每一黑点表示 u 对 ξ 的一次微商.

将方程(33.3)对 ξ 积分一次, 有

$$\beta \ddot{u} + \frac{1}{2} u^2 - cu = A, \quad (33.4)$$

其中 A 是积分常数. (33.4) 式乘以 \dot{u} 后再对 ξ 积分一次, 有

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + f(u) = 0, \quad (33.5)$$

其中

$$f(u) = \frac{1}{6\beta} (u^3 - 3cu^2 - 6Au - 6B). \quad (33.6)$$

(33.6) 式中, B 是积分常数.

令 $\dot{u} = v$, 那么 (33.4) 式就化为方程组

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = -f'(u). \quad (33.7)$$

因此, 右端的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f''(u) & 0 \end{pmatrix}. \quad (33.8)$$

由 (33.7) 式看出, 定常解为 $(f'(u) = 0, 0)$, 因此是位势 $f(u)$ 的极值点. 同时, 由 (33.8) 求出特征值满足

$$\lambda^2 = -f''(u), \quad (33.9)$$

故对位势极小值点 $f''(u) > 0$, λ 为实部为 0 的共轭复根, 因而是中心点. 对位势极大值点 $f''(u) < 0$, λ 为不同符号的实根, 因而是鞍点. 位势 $f(u)$ 的曲线见图 33-1(i), 相应的相平面 (u, v) 轨线见图 33-1(ii).

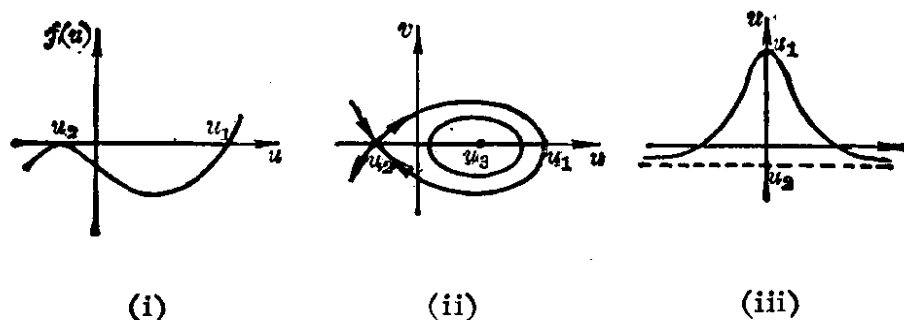


图 33-1

很易说明, 一般情况下 $f(u)$ 有三个零点 u_1 、 u_2 和 u_3 的情况, 由

于(33.5)式, 为了保证 u 有实数解, 那么 $f(u) < 0$, 此时解可以用椭圆函数表示:

$$u = u_3 + (u_1 - u_3) \operatorname{cn}^2 \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{12\beta}} \xi. \quad (33.10)$$

它对应于图 33-1(ii) 中围绕中心点的椭圆曲线.

当椭圆函数的模数 $k^2 = \frac{u_1 - u_3}{u_1 - u_2} \rightarrow 0$, 即 $u_1 \rightarrow u_3$ 时, 椭圆函数 $\operatorname{cn} \rightarrow \cos$, 那么解(33.10)化为

$$\begin{aligned} u &= u_3 + (u_1 - u_3) \cos^2 \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{12\beta}} \xi \\ &= u_3 + (u_1 - u_3) \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \cos 2 \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{12\beta}} \xi \right) \\ &= \frac{u_1 + u_3}{2} + \frac{u_1 - u_3}{2} \cos \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{3\beta}} \xi. \end{aligned} \quad (33.11)$$

这个解对应于围绕中心点附近(因为 $u_1 \rightarrow u_3$) 的圆轨道曲线.

当椭圆函数的模数 $k^2 = \frac{u_1 - u_3}{u_1 - u_2} \rightarrow 1$, 即 $u_2 \rightarrow u_3$ 时, 椭圆函数 $\operatorname{cn} \rightarrow \operatorname{sech}$, 解(33.10)化为

$$u = u_2 + (u_1 - u_2) \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{12\beta}} \xi. \quad (33.12)$$

这个解就对应于图 33-1(ii) 中由鞍点出发再回到该鞍点的轨道. 这条轨道由于 $t \rightarrow -\infty$ 和 $t \rightarrow +\infty$ 都趋向这个鞍点, 因而叫“同宿轨道”. 一般把 $t \rightarrow -\infty$ 时轨道的极限状态叫“ α 极限集”, 而 $t \rightarrow +\infty$ 时轨道的极限状态叫“ ω 极限集”. 因此, 图 33-1(ii) 中的 u_2 点是同宿轨道的 α 和 ω 极限集, 也称同宿点.

假如把(33.10)、(33.11)和(33.12)式中的 ξ 用(33.2)式中的 $x - ct$ 代入, 那么这些解就是 KdV 方程的波动解. 于是, 我们把对应于椭圆轨道的波称为椭圆余弦波 (cnoidal wave), 对应于圆轨道的波称正(余)弦波, 对应于同宿轨道的波就是孤立波 (solitary wave). 孤立波的波形见图 33-1(iii).

本节的最重要的结论是:

$$\text{同宿轨道} \xleftrightarrow{\text{对应}} \text{孤立波.} \quad (33.13)$$

这就把数学上动力系统中的同宿轨道概念和物理上的孤立波联系了起来。

§ 34 异宿轨道

前面我们已经看到, 偏微分方程的行波解可以化为常微分方程, 前者的孤立波相应于后者的同宿轨道。

除了动力系统中有同宿轨道外, 还有一种异宿轨道. 我们以 Sine-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0^2 \sin u = 0 \quad (34.1)$$

为例来说明.

将行波解(33.2)式代入(34.1)式, 导得常微分方程

$$\ddot{u} + m^2 \sin u = 0, \quad (34.2)$$

其中 $m^2 = \frac{f_0^2}{c^2 - c_0^2} > 0$ (这里 $c^2 > c_0^2$). (34.2)式就是非线性单摆方程, 可以化为微分方程组

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -m^2 \sin u. \end{cases} \quad (34.3)$$

动力系统(34.3)有两种定常状态: 中心点(0, 0)和两个鞍点($-\pi$, 0)、(π , 0), 其相图见图 34-1(i).

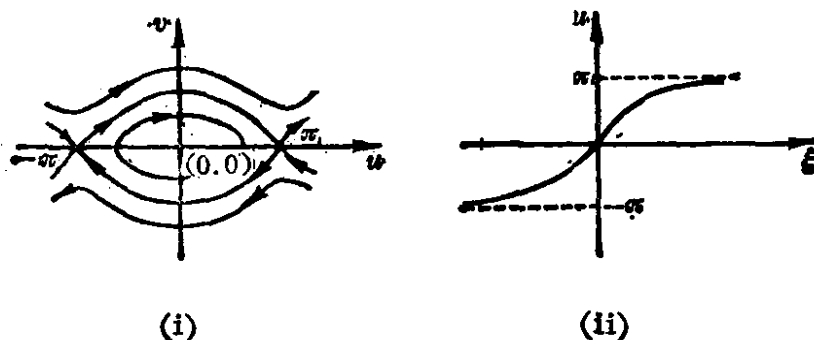


图 34-1

可以求出方程(34.2)的解析解为

$$\sin \frac{u}{2} = \pm k \operatorname{sn} \frac{f_0}{\sqrt{c^2 - c_0^2}} \xi, \quad (34.4)$$

其中 $k = \sqrt{\frac{A}{2f_0^2}}$ 是椭圆函数的模数, A 是积分常数.

(34.4) 相当于相图 34-1(i) 中的椭圆轨道. 若 ξ 用 $x - ct$ 代替, 则叫椭圆余弦波. (34.4) 有两个特殊情况:

当 $k \rightarrow 0$ 时 (即 $A \rightarrow 0$), $\operatorname{sn} \rightarrow \sin$, 所以 (34.4) 成为

$$\sin \frac{u}{2} = \pm k \sin k\xi. \quad (34.5)$$

这个解相当于图 34-1(i) 中的围绕中心点的圆轨道, 对应于线性正余弦波.

当 $k \rightarrow 1$ 时 (即 $A \rightarrow 2f_0^2$), $\operatorname{sn} \rightarrow \operatorname{th}$, 所以 (34.4) 成为

$$\sin \frac{u}{2} = \pm \operatorname{th} m\xi, \quad m = \frac{f_0}{\sqrt{c^2 - c_0^2}}. \quad (34.6)$$

由双曲函数公式, 上式化为

$$\sin \frac{u}{2} = \operatorname{th}(\pm m\xi) = \frac{e^{\pm m\xi} - e^{\mp m\xi}}{e^{\pm m\xi} + e^{\mp m\xi}},$$

即
$$e^{\pm m\xi} - e^{\mp m\xi} = (e^{\pm m\xi} + e^{\mp m\xi}) \sin \frac{u}{2},$$

或
$$e^{\pm m\xi} \left(1 - \sin \frac{u}{2}\right) = e^{\mp m\xi} \left(1 + \sin \frac{u}{2}\right).$$

由此得

$$e^{\pm 2m\xi} = \frac{1 + \sin \frac{u}{2}}{1 - \sin \frac{u}{2}}.$$

开方,

$$e^{\pm m\xi} = \sqrt{\frac{1 + \sin \frac{u}{2}}{1 - \sin \frac{u}{2}}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{u}{4}}{1 - \operatorname{tg} \frac{u}{4}} = \operatorname{tg} \left(\frac{u}{4} + \frac{\pi}{4} \right).$$

因此得到

$$u_{\pm} = -\pi + 4 \operatorname{tg}^{-1}(e^{\pm m\xi}). \quad (34.7)$$

若 e 指数上取“+”号, 则 $\xi \rightarrow -\infty$ 时 $u \rightarrow -\pi$, $\xi \rightarrow +\infty$ 时 $u \rightarrow \pi$, 即 $u = -\pi$ 和 $u = +\pi$ 是图 34-1(i) 轨道的 α 和 ω 极限集, 即图中的上支曲线. 这个解称为 Sine-Gordon 方程的扭结(kink)解, 这条轨道因此叫“异宿轨道”($t \rightarrow \pm\infty$ 趋向不同的点). 解的图象见图 34-1(ii), 它是一种冲击波 (impulse wave) 形式. 若 e 指数上取“-”号, 则 $\xi \rightarrow -\infty$ 时 $u \rightarrow +\pi$, $\xi \rightarrow +\infty$ 时 $u \rightarrow -\pi$, 这个解对应于图 34-1(i) 的下支曲线. 由于 $u_+(-\xi) = u_-(\xi)$, 因此这个解是图 34-1(ii) 中曲线的对称于 u 轴的曲线, 它称为反扭结 (anti-kink) 解.

因此本节最主要的结论是:

$$\text{异宿轨道} \xrightleftharpoons{\text{对应}} \text{冲击波}. \quad (34.8)$$

由 (34-3) 式, 我们将 (34-5) 式对 ξ 求导, 即可求到 \dot{u} , 即

$$\left(\frac{1}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cdot \dot{u} = k \operatorname{sech}^2 k\xi.$$

故

$$\dot{u} = \frac{2k \operatorname{sech}^2 k\xi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 k\xi}} = 2k \operatorname{sech} k\xi. \quad (34.9)$$

解仍然是一种孤立波形式. 所以, 从广义上讲, 结合 (33.13) 和 (34.8), 有

$$\text{同(异)宿轨道} \xrightleftharpoons{\text{对应}} \text{孤立波}. \quad (34.10)$$

§ 35 非线性薛定谔方程的同(异)宿轨道

该方程在非线性波理论中起重要作用. 我们用一般立方薛定谔方程

$$i \frac{\partial u}{\partial t} \pm \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u + |u|^2 u = 0 \quad (35.1)$$

来讨论.

为此, 我们令 u 为波包形式

$$u = \phi(\xi) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \xi = x - c_g t. \quad (35.2)$$

注意

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - i\omega \phi \right) e^{i(kx - \omega t)} = (-c_g \dot{\phi} - i\omega \phi) e^{i(kx - \omega t)}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + ik \phi \right) e^{i(kx - \omega t)} = (\dot{\phi} + ik \phi) e^{i(kx - \omega t)}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\ddot{\phi} + 2ik \dot{\phi} - k^2 \phi) e^{i(kx - \omega t)}, \\ |u|^2 u = uu^* u = \phi^3 e^{i(kx - \omega t)}, \end{cases} \quad (35.3)$$

其中 u^* 为 u 的共轭.

将(35.3)式代入(35.1)式, 有

$$\pm \ddot{\phi} + i(\pm 2k - c_g) \dot{\phi} + (\alpha + \omega \mp k^2) \phi + \phi^3 = 0. \quad (35.4)$$

为了简化, 使 $\dot{\phi}$ 前的系数为 0, 我们不妨设

$$k = \pm \frac{c_g}{2}. \quad (35.5)$$

这样, (35.4)就化为

$$\pm \ddot{\phi} + a\phi + \phi^3 = 0, \quad (35.6)$$

其中

$$a = \alpha + \omega \mp \frac{c_g^2}{4}.$$

若只讨论 $a < 0$ 情况, (35.6)式就相当于无阻尼时的 duffing 方程. 在相平面 $(\phi, \dot{\phi})$ 上, 它们的相图见图 35-1. 从图 35-1 看出, 在(35.6)式中 $\ddot{\phi}$ 前取“+”号时, 相图上由鞍点出发再回到该鞍点有两条同宿轨道 (图 35-1(i)). 而在(35.6)式中 $\ddot{\phi}$ 前取“-”号时, 相图上有一鞍点到另一鞍点形成两条异宿轨道 (图 35-1(ii)). 它们分别对应于孤立波和冲击波.

现在求方程(35.6)中 $\ddot{\phi}$ 前取“+”号的解. (35.6)式两边乘以 $2\dot{\phi}$, 并对 ξ 积分, 取积分常数为 0, 得

$$\dot{\phi}^2 = -a\phi^2 - \frac{1}{2}\phi^4 = \frac{\phi^2}{2}(2|a| - \phi^2). \quad (35.7)$$

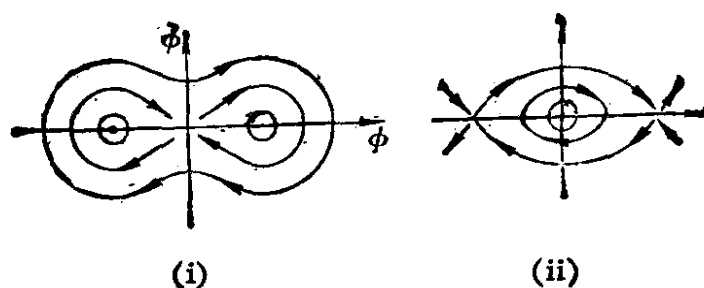


图 35-1

两边开方,

$$\dot{\phi} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \phi \sqrt{2|a| - \phi^2},$$

或

$$\frac{d\phi}{\phi \sqrt{2|a| - \phi^2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \xi. \quad (35.8)$$

上式两边积分, 并取积分常数, 注意积分公式

$$\int \frac{1}{x \sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{a} + c,$$

得

$$-\frac{1}{\sqrt{2|a|}} \operatorname{sech}^{-1} \frac{\phi}{\sqrt{2|a|}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \xi.$$

由此得到

$$\begin{aligned} \phi &= \pm \sqrt{2|a|} \operatorname{sech} \sqrt{a} \xi \\ &= \pm \sqrt{2|a|} \operatorname{sech} \sqrt{a} (x - c_0 t). \end{aligned} \quad (35.9)$$

(35.9)式分别对应于图 35-1(i)的两条同宿轨道所表示的孤立波.

至于方程(35.6)中 $\ddot{\phi}$ 前取“ $-$ ”号的解, 可以类似地讨论, 其解是图 34-1(ii)形式的冲击波.

§ 36 球面上的异宿轨道

现在讨论大气中常见的涡度守恒方程

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \quad (36.1)$$

其中 ω 是垂直方向涡度, 它表示为

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (36.2)$$

而不可压缩流体在二维情况下的连续方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (36.3)$$

因此, 由(36.3)式可以引进流函数 ψ , 有

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (36.4)$$

将(36.4)代入(36.2), 就得到垂直涡度 ω 的流函数表示为

$$\omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \equiv \Delta \psi. \quad (36.5)$$

这样, 涡度方程(36.1)就化为

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y}. \quad (36.6)$$

为了求(36.6)的解, 我们用傅里叶展开取前几项, 即设

$$\psi = -\frac{a_1(t)}{l^2} \cos ly - \frac{a_2(t)}{k^2} \cos kx - \frac{\sqrt{2} a_3(t)}{k^2 + l^2} \sin kx \sin ly, \quad (36.7)$$

其中 k 、 l 分别表示 x 和 y 方向的波数. 上式右边第一项代表沿纬向(x 方向)的基本气流, 后两项代表叠加在纬向基本气流上的扰动.

将(36.7)式微商, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{a_2(t)}{k^2} k \sin kx - \frac{\sqrt{2} a_3(t)}{k^2 + l^2} k \cos kx \sin ly, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{a_1(t)}{l^2} l \sin ly - \frac{\sqrt{2} a_3(t)}{k^2 + l^2} l \sin kx \cos ly, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= a_2(t) \cos kx + \frac{\sqrt{2} a_3(t)}{k^2 + l^2} k^2 \sin kx \sin ly, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= a_1(t) \cos ly + \frac{\sqrt{2} a_3(t)}{k^2 + l^2} l^2 \sin kx \sin ly. \end{aligned} \quad (36.8)$$

将(36.8)式的 $\Delta\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$ 代入方程(36.6)式的左边,注意到它只有三种模态 $\cos kx$ 、 $\cos ly$ 、 $\sin kx \sin ly$; 而将(36.8)式代入(36.6)式右端非线性项,我们也只考虑这三种模态. 为此,由(36.8)式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} = & -a_2(t)k \sin kx + \frac{\sqrt{2} a_3(t)}{k^2+l^2} k^3 \cos kx \sin ly \\ & + \frac{\sqrt{2} a_3(t)}{k^2+l^2} l^2 k \cos kx \sin ly, \end{aligned} \quad (36.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial y} = & -a_1(t)l \sin ly + \frac{\sqrt{2} a_3(t)}{k^2+l^2} k^2 l \sin kx \cos ly \\ & + \frac{\sqrt{2} a_3(t)}{k^2+l^2} l^3 \sin kx \cos ly. \end{aligned} \quad (36.10)$$

将(36.8)和(36.9)、(36.10)式代入(36.6)式,有

$$\begin{aligned} & \dot{a}_1(t) \cos ly + \dot{a}_2(t) \cos kx + \sqrt{2} \dot{a}_3(t) \sin kx \sin ly \\ & = \left[\frac{a_1(t)}{l^2} l \sin ly - \frac{\sqrt{2} a_3(t)}{k^2+l^2} l \sin kx \cos ly \right] \\ & \quad \cdot \left[-a_2(t) k \sin kx + \frac{\sqrt{2} a_3(t)}{k^2+l^2} k^3 \cos kx \sin ly \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sqrt{2} a_3(t)}{k^2+l^2} l^2 k \cos kx \sin ly \right] - \left[\frac{a_2(t)}{k^2} k \sin kx \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sqrt{2} a_3(t)}{k^2+l^2} k \cos kx \sin ly \right] \left[-a_1(t) l \sin ly \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sqrt{2} a_3(t)}{k^2+l^2} k^2 l \sin kx \cos ly + \frac{\sqrt{2} a_3(t)}{k^2+l^2} \right. \\ & \quad \left. \cdot l^3 \sin kx \cos ly \right]. \end{aligned} \quad (36.11)$$

两边比较系数,得

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = \gamma_1 a_2 a_3, \\ \dot{a}_2 = \gamma_2 a_3 a_1, \\ \dot{a}_3 = \gamma_3 a_1 a_2, \end{cases} \quad (36.12)$$

其中

$$\begin{cases} \gamma_1 = \sqrt{2} kl \left(\frac{1}{k^2 + l^2} - \frac{1}{k^2} \right), \\ \gamma_2 = \sqrt{2} kl \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{k^2 + l^2} \right), \\ \gamma_3 = \sqrt{2} kl \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{l^2} \right). \end{cases} \quad (36.13)$$

它就是三波相互作用方程, 且满足

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0. \quad (36.14)$$

可以证明, 在球面 (a_1, a_2, a_3) 上有四条异宿轨道, 其相图见图 36-1. 并且, 整个异宿轨道代表冲击波, 但对 $a_1(t)$ 和 $a_3(t)$ 是孤立波, 对 $a_2(t)$ 是冲击波. 图 36-2 是图 36-1 中一条球面异宿轨道所对应的孤立波和冲击波.

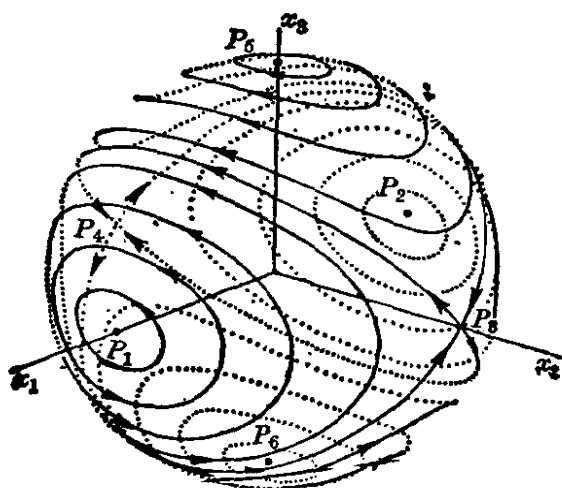


图 36-1

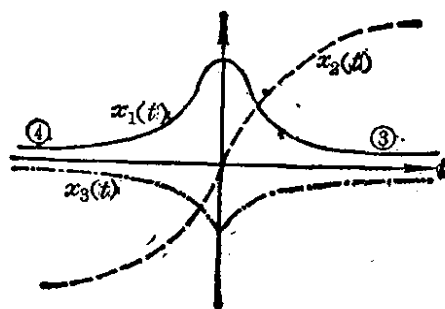


图 36-2

§ 37 耗散系统中的同(异)宿轨道

现在一般认为, 孤立波仅出现在保守系统中. 但是, 同(异)宿轨道在耗散系统中也广泛存在着, 这就可以认为从广义上讲孤立波和同(异)宿轨道的对应关系在耗散系统中仍然成立.

我们讨论伯格(J. M. Burgers)方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (37.1)$$

显然,若无非线性项 $u \frac{\partial u}{\partial x}$, 则(37.1)是一个扩散方程, 它无波动解. 由于有非线性项, 使扩散的东西集中, 才有波动状态.

将行波解(33.2)代入(37.1), 有

$$-cu + u\dot{u} - v\ddot{u} = 0. \quad (37.2)$$

积分一次, 为

$$-cu + \frac{u^2}{2} - v\dot{u} = A, \quad (37.3)$$

其中 A 是积分常数. 由(37.3)得

$$\dot{u} = \frac{1}{2v}(u^2 - 2cu - 2A). \quad (37.4)$$

在(37.2)式中, 令 $\dot{u} = v$, 则(37.2)化为

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = \frac{v}{v}(u - c) = \frac{1}{2v^2}(u - c)(u^2 - 2cu - 2A) \\ \quad = -f'(u). \end{cases} \quad (37.5)$$

因此, (37.5)有两个定常状态

$$(u_1, 0) \quad \text{和} \quad (u_2, 0), \quad (37.6)$$

其中 u_1 和 u_2 是方程

$$u^2 - 2cu - 2A = 0 \quad (37.7)$$

的实根.

但是

$$f''(u) = -\frac{1}{2v^2}[-c(u^2 - 2cu - 2A) + 2(u - c)^2],$$

故(37.5)右端雅可比矩阵的特征值为

$$\lambda^2 = -f'(u). \quad (37.8)$$

由(37.7)式, 对 u_1 和 u_2 均有 $\lambda^2 > 0$, 因而 λ 是一正、一负的实根, 定常状态(37.6)均是鞍点; 连接这两个鞍点的轨道就是异宿轨道.

由(37.4)式,

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{1}{2v}(u - u_1)(u - u_2).$$

即
$$\frac{du}{(u-u_1)(u-u_2)} = \frac{1}{2\nu} d\xi.$$

对上式积分, 注意到

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = -\frac{2}{a-b} \operatorname{th}^{-1}\left(\frac{2x-(a+b)}{a-b}\right), \quad (a>b)$$

有

$$\begin{aligned} -\frac{2}{u_1-u_2} \operatorname{th}^{-1}\left[\frac{2u-(u_1+u_2)}{u_1-u_2}\right] &= \frac{1}{2\nu} \xi, \\ \frac{2u-2c}{u_1-u_2} &= \operatorname{th}\left(-\frac{u_1-u_2}{4\nu} \xi\right) = -\operatorname{th}\left(\frac{u_1-u_2}{4\nu} \xi\right). \end{aligned} \quad (37.9)$$

其中 $u_1+u_2=2c$.

由(37.9)求到最后的解为

$$u = c - \frac{1}{2}(u_1-u_2) \operatorname{th} \frac{u_1-u_2}{4\nu} \xi. \quad (37.10)$$

因此, 这种异宿轨道对应于冲击波(37.10). 其图象见图 37-1.

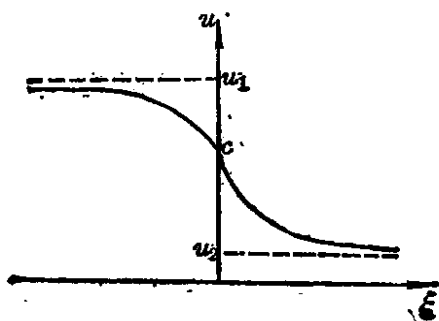


图 37-1

将(37.10)式对 ξ 求导, 就得到 v 的表达式

$$v = \dot{u} = -\frac{1}{8\nu} (u_1-u_2)^2 \operatorname{sech}^2 \frac{u_1-u_2}{4\nu} \xi. \quad (37.11)$$

(37.11)就是一种孤立波.

§ 38 鞍-结、鞍-焦异宿轨道

在保守系统中只有鞍点和中心点, 因而只存在鞍-鞍类同(异)宿轨道. 但是, 在耗散系统中, 除了鞍点外, 还有结点和焦点, 因而

也存在鞍-结、鞍-焦异宿轨道。

例如 KdV-伯格斯方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (38.1)$$

将行波解(33.2)代入上式,求得

$$-cu + u\dot{u} - \nu\ddot{u} + \beta\ddot{u} = 0. \quad (38.2)$$

将上式积分一次,得到

$$\beta\ddot{u} - \nu\dot{u} + \frac{1}{2}u^2 - cu = A, \quad (38.3)$$

其中 A 是积分常数.

(38.3)可以化为方程组

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = \frac{\nu}{\beta}v - \frac{1}{2\beta}(u^2 - 2cu - 2A). \end{cases} \quad (38.4)$$

(38.4)有两个定常状态

$$P(u_1, 0) \quad \text{和} \quad Q(u_2, 0), \quad (38.5)$$

其中

$$\begin{aligned} u_1 &= c + \sqrt{c^2 + 2A}, \\ u_2 &= c - \sqrt{c^2 + 2A} \end{aligned} \quad (c^2 + 2A > 0) \quad (38.6)$$

是代数方程 $u^2 - 2cu - 2A = 0$ 的实根. 方程组(38.4)右端的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\beta}u + \frac{c}{\beta} & \frac{\nu}{\beta} \end{pmatrix}, \quad (38.7)$$

它的特征方程为

$$\lambda^2 - \frac{\nu}{\beta}\lambda + \frac{1}{\beta}(u - c) = 0. \quad (38.8)$$

因此,对 P 点,由(38.6),特征方程(38.8)为

$$\lambda^2 - \frac{\nu}{\beta}\lambda + \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{\beta} = 0. \quad (38.9)$$

故

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu}{\beta} \right)^2 - \frac{4}{\beta} \sqrt{c^2 + 2A}} \right). \quad (38.10)$$

因此, 若 $\nu^2 \geq 4\beta \sqrt{c^2 + 2A}$ 时, λ 为两正实根, 即 P 点是不稳定结点. 若 $0 < \nu^2 < 4\beta \sqrt{c^2 + 2A}$ 时, λ 为共轭复根且实部为正, 即 P 点是不稳定焦点.

对 Q 点, 特征方程(38.8)为

$$\lambda^2 - \frac{\nu}{\beta} \lambda - \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{\beta} = 0. \quad (38.11)$$

故

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu}{\beta} \right)^2 + \frac{4}{\beta} \sqrt{c^2 + 2A}} \right). \quad (38.12)$$

因此 λ 是一正、一负的实根, 因而 Q 是鞍点.

这样, P 点和 Q 点之间就存在鞍-结或鞍-焦两种异宿轨道, 见图 38-1. 它们相应的冲击波图象见图 38-2.

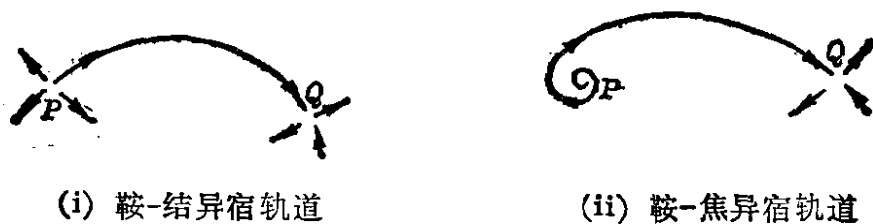


图 38-1

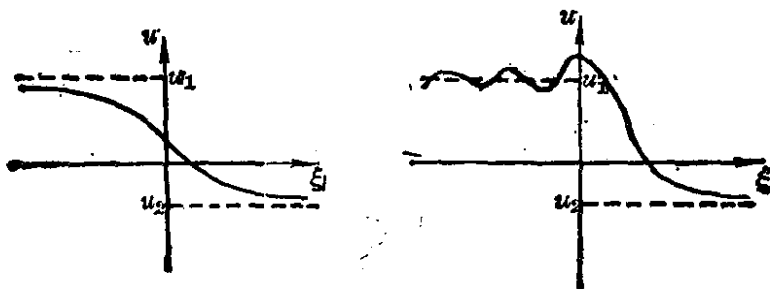


图 38-2

至于求出鞍-结、鞍-焦异宿轨道的解析表达式, 是一个相当难的问题. 对鞍-结异宿轨道, 我们设为

$$u = u_1 + u'_1, \quad u_1 = 0 + \sqrt{c^2 + 2A}, \quad (38.13)$$

将(38.13)代入(38.3)式, 得

$$\beta \ddot{u}'_1 - \nu \dot{u}'_1 + \frac{1}{2} (u_1 + u'_1)^2 - c(u_1 + u'_1) = A,$$

$$\beta \ddot{u}_1 - \nu \dot{u}_1 + \frac{1}{2} (u_1^2 + 2u_1 u_1' + u_1'^2) - cu_1 - cu_1' = A,$$

$$\beta \ddot{u}_1 - \nu \dot{u}_1 + \frac{1}{2} \left[c^2 + c^2 + 2A + 2c \sqrt{2A + c^2} + 2(c + \sqrt{c^2 + 2A}) u_1' + u_1'^2 \right] - c(c + \sqrt{c^2 + 2A}) - cu_1' = A.$$

或 $\beta \ddot{u}_1 - \nu \dot{u}_1 + \sqrt{c^2 + 2A} u_1' + \frac{1}{2} u_1'^2 = 0$. 即

$$\ddot{u}_1 - \frac{\nu}{\beta} \dot{u}_1 + \frac{1}{2\beta} u_1'^2 + \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{\beta} u_1' = 0. \quad (38.14)$$

令(38.14)式的解为

$$u_1' = \frac{Be^{b\xi}}{(1+e^{a\xi})^2}, \quad (38.15)$$

将(38.15)代入(38.14), 得

$$b^2 + \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{\beta} - \frac{\nu}{\beta} b + \frac{B}{2\beta} e^{b\xi} + \left[\frac{2}{\beta} (\sqrt{c^2 + 2A} + \alpha\nu - b\nu) - 2(\alpha^2 - b^2 + 2\alpha b) \right] e^{a\xi} + \left[\frac{1}{\beta} (2\alpha\nu - b\nu + \sqrt{c^2 + 2A}) + (2\alpha - b)^2 \right] e^{2a\xi} = 0.$$

取 $b=0$, 有

$$\left(\frac{B}{2\beta} + \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{\beta} \right) - 2 \left(\alpha^2 - \frac{\nu}{\beta} \alpha - \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{\beta} \right) e^{a\xi} + 2 \left(2\alpha^2 + \frac{\nu}{\beta} \alpha + \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{2\beta} \right) e^{2a\xi} = 0. \quad (38.16)$$

所以

$$\begin{cases} \frac{B}{2\beta} + \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{\beta} = 0, \\ \alpha^2 - \frac{\nu}{\beta} \alpha - \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{\beta} = 0, \\ 2\alpha^2 + \frac{\nu}{\beta} \alpha + \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{2\beta} = 0. \end{cases} \quad (38.17)$$

由(38.17)求得

$$\alpha = -\frac{\nu}{5\beta}, \quad B = -\frac{12}{25} \frac{\nu^2}{\beta}, \quad \sqrt{c^2 + 2A} = \frac{6\nu^2}{25\beta}. \quad (38.18)$$

将(38.18)代入(38.15), 求得

$$u'_1 = -\frac{12\nu^2}{25\beta} \cdot \frac{1}{(1 + e^{-\frac{\nu}{5\beta}\xi})^2}. \quad (38.19)$$

将(38.19)代入(38.13), 得到

$$\begin{aligned} u &= u_1 - \frac{12\nu^2}{25\beta} \frac{1}{(1 + e^{-\frac{\nu}{2\beta}\xi})^2} \\ &= u_1 - \frac{12\nu^2}{25\beta} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{th} \frac{\nu}{10\beta} \xi \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (38.20)$$

显然, $\xi \rightarrow -\infty$ 时 $u \rightarrow u_1$, 而 $\xi \rightarrow +\infty$ 时 $u \rightarrow u_1 - \frac{12\nu^2}{25\beta}$, 利用(38.18)就是 $u \rightarrow u_1 - 2\sqrt{c^2 + 2A} = c - \sqrt{c^2 + 2A} = u_2$, 这正是图 38-2 左图的情况.

至于鞍-焦异宿轨道的解, 图 38-2 右图中 $\xi > 0$ 一段类似于孤立波, $\xi < 0$ 一段类似于衰减振荡, 把两段结合起来, 就形成 KdV-伯格斯方程的鞍-焦冲击波解

$$u(\xi) = \begin{cases} u_1 + \frac{u_1 - u_2}{2} e^{\frac{\nu}{2\beta}\xi} \cdot \cos \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{2\beta} - \left(\frac{\nu}{2\beta}\right)^2} \xi, & (-\infty, 0] \\ u_2 + \frac{3(u_1 - u_2)}{2} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{8\beta}} \xi. & [0, +\infty) \end{cases} \quad (38.21)$$

显然, $\xi \rightarrow -\infty$ 时 $u \rightarrow u_1$, $\xi \rightarrow +\infty$ 时 $u \rightarrow u_2$, 且 $u(0) = \frac{1}{2}(3u_1 - u_2)$.

当不存在耗散时($\nu=0$), KdV-伯格斯方程(38.1)就化为 KdV 方程(33.1), P 就由焦点变成中心点, Q 仍是鞍点, 从鞍点 Q 出发又回到 Q 点的同宿轨道对应于孤立波.

§ 39 反应扩散和等离子体耗散系统中的同(异)宿轨道

反应扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \quad (39.1)$$

由于存在耗散和非线性项 $f(u)$, 是非常重要的方程. 特别当

$$f(u) = ku(1-u) \quad (39.2)$$

时, 方程(39.1)称为费希尔(M. Fisher)方程.

方程(39.1)、(39.2)的行波解可以存在结点和焦点. 在 $f(u) = 0$ 有两个根时(例如费希尔方程的 $f(u) = 0$ 的两根为 $u_1 = 0$ 和 $u_2 = 1$), 分析表明, 当 $c > c_{\min} = 2\sqrt{\nu f'(0)}$ 时有鞍-结异宿轨道, 见图 39-1(ii); 而当 $c < c_{\min}$ 时是鞍-焦异宿轨道, 见图 39-1(i). 当 $f(u) = 0$ 有三个根 $u_1 = 0$ 、 $u_2 = 1$ 、 $u_3 < 0$ 时, 此时有两对异宿轨道, 见图 39-2.

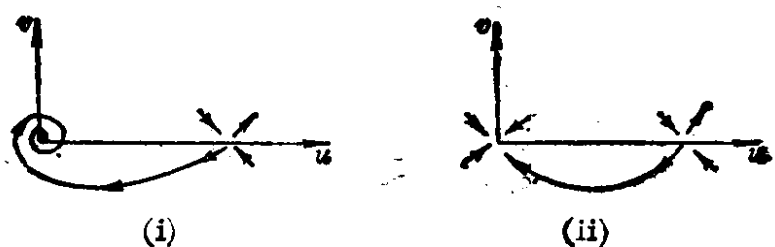


图 39-1

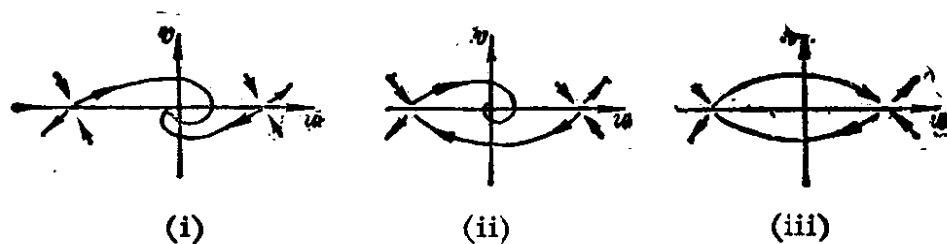


图 39-2

有意思的是, 费希尔方程(39.2)和 KdV-伯格斯方程(38.1)式

可以互相转换. 在(39.2)式中, 作变换

$$\begin{aligned}\xi &= -\sqrt{\frac{\beta}{c}} \left(\sqrt{\frac{k}{\nu}} x - \frac{k\nu}{\sqrt{\beta c}} t \right), \\ v &= 2c(1-u),\end{aligned}\quad (39.3)$$

那么, 费希尔方程(39.2)就化为 KdV-伯格斯方程的行波解方程(38.2)

$$(v-c)\dot{v} - \nu\ddot{v} + \beta\ddot{v} = 0; \quad (39.4)$$

反之, 若在 KdV-伯格斯方程(38.1)中作变换

$$\xi = -\sqrt{c}(x-ct), \quad v = 1 - \frac{u}{2c}, \quad (39.5)$$

则就化为费希尔方程的行波解方程

$$\frac{\nu}{\sqrt{c}} \dot{v} - \beta\ddot{v} - v(1-v) = 0. \quad (39.6)$$

在等离子体中, 暖电子与冷离子碰撞时会引起耗散, 其运动方程类似于 KdV-伯格斯方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (39.7)$$

将行波解(33.2)式代入后, 得到

$$-c\dot{u} + u\dot{u} + \frac{1}{2}\ddot{u} + \nu c\ddot{u} - \nu u\dot{u} - \nu\dot{u}^2 = 0. \quad (39.8)$$

积分一次, 为

$$\ddot{u} = 2\nu(u-c)\dot{u} - (u-u_1)(u-u_2), \quad (39.9)$$

其中 u_1 和 u_2 是二次方程 $u^2 - 2cu + A = 0$ 的根, 即

$$u_1 = c + \sqrt{c^2 + A}, \quad u_2 = c - \sqrt{c^2 + A}. \quad (39.10)$$

作变数替换:

$$\begin{aligned}u &= \alpha(v-1) + c, & \xi &= \frac{\eta}{\sqrt{\alpha}}, \\ \alpha &= \sqrt{c^2 + 2A}, & \delta &= 2\nu\sqrt{\alpha},\end{aligned}\quad (39.11)$$

则(39.9)化为一阶方程组

$$\frac{dv}{d\eta} = w, \quad \frac{dw}{d\eta} = \delta(v-1)w - v(v-2). \quad (39.12)$$

当耗散为 0 时 $\delta=0$, 在相平面 (v, w) 上 $(0, 0)$ 是鞍点, $(2, 0)$ 是中心, 这时存在由鞍点出发再回到鞍点的同宿轨道, 见图 39-3 中的虚线, 它们对应于孤立波. 但当存在耗散时, $0 < \delta < 2$ 时中心点变成焦点, $\delta > 2$ 时中心点变成结点. 因此随着耗散的增加, 鞍-鞍同宿轨道先演变成鞍-焦异宿轨道, 再演变成鞍-结异宿轨道, 见图 39-3 中的实线, 它们对应于图 38-2 的冲击波.

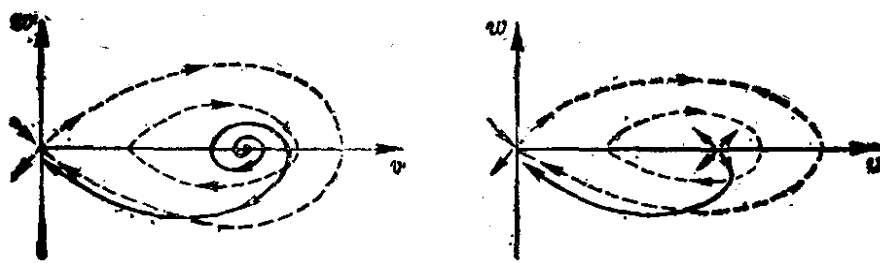


图 39-3

§ 40 湍流和同(异)宿轨道

同(异)宿轨道的横截相交, 是产生马蹄和混沌的因素(第 2 章 § 5), 同(异)宿轨道又和孤立波相对应, 是湍流涡旋的组成环节(第 1 章 § 9). 因此, 同(异)宿轨道是将确定性和随机性相联系的关键. 我们试用 KdV-伯格斯方程的鞍-焦异宿轨道来研究湍流.

因为 KdV-伯格斯方程(38.1)含有纳维-斯托克斯方程(2.1)的主要因子: 非线性、色散和耗散, 所以可以将它作为湍流的最简单模型. 湍流是当 R_0 逐渐增加而由层流变来的. § 38 已经看到, KdV-伯格斯方程中随着 ν 由 0 逐渐增加, 同宿轨道演变成鞍-焦异宿轨道、再演变成鞍-结异宿轨道. 鞍-焦异宿轨道存在的条件

$$0 < \nu^2 < 4\beta\sqrt{\sigma^2 + 2A} \quad (40.1)$$

说明, 既有足够的粘性或雷诺数, 同时(40.1)式右端的色散因素又

要比粘性因素大. 从图 38-2 右图看出, 当鞍-焦异宿轨道以速度 c 向右移动时, 该冲击波的前方首先由定常状态 u_2 控制, 慢慢地进入耗散项几乎不起作用的孤立波一段, 并使波的振幅(或能量)达到最大. 我们认为, 扰动一起来后, 由于非线性(例如剪切)和色散因素平衡, 使扰动能量达到最大(参看图 5-1), 为湍流的串级过程积累了大涡旋(含能涡旋)的能量. 然后行波就进入耗散所引起的衰减振荡, 波的振幅和尺度逐渐减少, 我们认为这相当于湍流由大涡变小涡的串级过程(第 1 章 § 4).

我们把图 38-2 中围绕 u_1 的扰动部分 u' 看作是湍流速度场. 由(38.21)式, 得

$$u'(\xi) = \alpha e^{\frac{\nu}{2\beta}\xi} \cdot \cos k_1 \xi, \quad \xi \in (-\infty, 0]$$

其中

$$\alpha = \frac{u_1 - u_2}{2} = \sqrt{c^2 + 2A},$$

$$k_1 = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\nu}{2\beta}\right)^2}, \quad k_0^2 = \frac{u_1 - u_2}{2\beta} = \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{\beta}.$$

将湍流速度场 $u'(\xi)$ 和移动一段 η 后的速度场 $u'(\xi + \eta)$ 相乘, 就求到湍流的相关函数和相关系数

$$\phi(\eta) = \overline{u'(\xi)u'(\xi + \eta)}, \quad R(\eta) = \frac{\overline{u'(\xi)u'(\xi + \eta)}}{\overline{u'^2(\xi)}}. \quad (40.2)$$

上式中的平均, 是以积分来定义的:

$$\overline{(\quad)} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 (\quad) d\xi.$$

由于(40.2)式中 $R(\eta)$ 的值与 L 无关, 按上式可求得

$$R(\eta) = e^{\frac{\nu}{2\beta}\eta} \left[\cos k_1 \eta + \frac{k_1 \frac{\nu}{\beta}}{\left(\frac{\nu}{2\beta}\right)^2 + 2k_1^2} \sin k_1 \eta \right]. \quad (40.3)$$

显然

$$R(0) = 1, \quad R(-\infty) = 0. \quad (40.4)$$

将(40.4)的自相关系数和指数衰减的自相关系数(6.6)式相比较

可看出, 现在是振荡衰减.

由(40.3)可以求得积分尺度 L 为

$$L = \int_{-\infty}^0 R(\eta) d\eta = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\beta} \right)^2}{\left[\left(\frac{\nu}{2\beta} \right)^2 + k_1^2 \right] \left[\left(\frac{\nu}{2\beta} \right)^2 + 2k_1^2 \right]}. \quad (40.5)$$

将(40.5)代入(40.2)式, 求得自相关函数为

$$c(\eta) = \frac{\alpha^2}{L} \cdot \frac{e^{\frac{\nu}{2\beta} \eta}}{\left(\frac{\nu}{2\beta} \right)^2 + (2k_1)^2} \left[\left(\frac{\nu}{\beta} + 2k_1^2 \frac{\beta}{\nu} \right) \cos k_1 \eta + k_1 \sin k_1 \eta \right]. \quad (40.6)$$

这种自相关函数虽然还不像(7.3)那样的幂函数, 但由它求到的功率谱

$$\begin{aligned} S(k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 c(\eta) \cos k \eta d\eta \\ &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha^2}{2L k_0^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{k_0} \right)^2} \cdot \frac{1 - \frac{(k_1/k_0)^2}{1 + (k/k_0)^2}}{1 - \left[\frac{2k_1/k_0 \cdot k/k_0}{1 + (k/k_0)^2} \right]} \end{aligned} \quad (40.7)$$

在双对数坐标 $\left(\log \frac{k}{k_0}, \log S(k) \right)$ 上却和柯尔莫戈洛夫谱图 (图 5-1) 很相似, 见图 40-1, 而且惯性区的能谱斜率为

$$\begin{cases} \frac{\log S(k)}{\log(k/k_0)} = -1.76, & \text{当 } 1 < \frac{k}{k_0} < 3 \text{ 时;} \\ \frac{\log S(k)}{\log(k/k_0)} = -1.97, & \text{当 } 3 < \frac{k}{k_0} < 10 \text{ 时;} \\ \frac{\log S(k)}{\log(k/k_0)} = -1.94, & \text{当 } 10 < \frac{k}{k_0} < 30 \text{ 时;} \\ \frac{\log S(k)}{\log(k/k_0)} = -1.88, & \text{当 } 30 < \frac{k}{k_0} < 80 \text{ 时.} \end{cases} \quad (40.8)$$

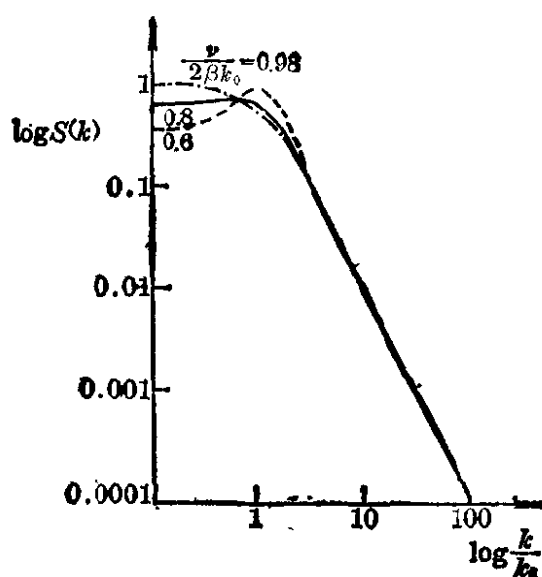


图 40-1

若以弗雷西间歇湍流模型(5.14)为据, 由此可以求到惯性区的分数维为

$$D = \begin{cases} 2.72, & \text{当 } \frac{k}{k_0} \in (1, 3) \text{ 时;} \\ 2.09, & (3, 10) \text{ 时;} \\ 2.19, & (10, 30) \text{ 时;} \\ 2.35, & (30, 80) \text{ 时.} \end{cases} \quad (40.9)$$

尽管尚不知 KdV-伯格方程是否描述湍流最合适, 但实际的结果却启发我们, 湍流和同(异)宿轨道联系是合理的.

§ 41 二维涡旋

第 1 章我们已经看出, 要出现涡旋, 必然要有异宿闭圈相配合. 我们先以二维涡旋作为例子.

将欧拉方程(9.2)取旋度, 得到

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \omega). \quad (41.1)$$

但是, 对二维运动, 不可压缩连续方程

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

简化为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (41.2)$$

其中速度场 u 和 v 均可以用流函数 ψ 表示:

$$\dot{x} = u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \dot{y} = v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (41.3)$$

此时, 涡度 ω 只有垂直方向有分量, 即

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \equiv \Delta_2 \psi.$$

因此, 涡度方程(41.1)就变成

$$\frac{\partial \Delta_2 \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta_2 \psi) = 0, \quad (41.4)$$

其中

$$J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}.$$

因此, 由(41.4)找定常解应满足

$$J(\psi, \Delta_2 \psi) = 0. \quad (41.5)$$

由上式看出, 涡度沿流函数 ψ 线是常数, 因而(41.5)式化为求如下方程的解

$$\Delta_2 \psi = f(\psi), \quad (41.6)$$

其中 $f(\psi)$ 是 ψ 的任意函数.

最简单的方法是取 $f(\psi) = -\psi$, 那么(41.6)就变成亥姆霍兹 (H. L. F. Helmholtz) 方程

$$\Delta_2 \psi + \psi = 0. \quad (41.7)$$

采用分离变量法很易求得线性方程(41.7)的解. 令

$$\psi = X(x) \cdot Y(y), \quad (41.8)$$

将(41.8)代入(41.7)式, 得

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} + 1 = k^2. \quad (41.9)$$

因此, X 和 Y 分别满足振荡型方程

$$X'' + k^2 X = 0, \quad Y'' + (1 - k^2) Y = 0. \quad (41.10)$$

其中

$$1 - k^2 = l^2. \quad (41.11)$$

分别求出 X, Y , 代入(41.10), 并叠加, 得

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} \psi_0 \sum_{i=1}^q \cos(kx + ly) \\ &= \frac{1}{2} \psi_0 \sum_{i=1}^q \cos \left[x \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{q} i \right) + y \sin \left(\frac{2\pi}{q} i \right) \right]. \end{aligned} \quad (41.12)$$

其中 $k = \cos \frac{2\pi}{q} i$, $l = \sin \frac{2\pi}{q} i$ 满足(41.11)式.

在(41.12)式中取 $q=2$, 则

$$\psi = \psi_0 \cdot \cos x. \quad (41.13)$$

显然, 由(41.3)式求得速度场

$$u=0, \quad v = -\psi_0 \sin x. \quad (41.14)$$

这是一维的一个速度方向 v 的周期流. 由于(41.14) 已经满足欧拉方程的变形——涡度方程(41.4), 又由于纳维-斯托克斯方程的粘性力表达式是 $\nu \Delta v = \nu \psi_0 \sin x = -\nu v$, 因此(41.14)满足带有外力 F 的纳维-斯托克斯方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + J(\psi, \Delta \psi) = \nu \Delta(\Delta \psi) + F, \quad (41.15)$$

其中

$$F = -\nu \psi = -\nu \psi_0 \cos x.$$

此时, 外力 F 是空间周期力, 流场(41.14)称一维柯尔莫戈洛夫流.

在(41.12)式中取 $q=2$, 则

$$\psi = \psi_0 (\cos x + \cos y). \quad (41.16)$$

此时, 速度场满足

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = \psi_0 \sin y, \\ \dot{y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi_0 \sin x. \end{cases} \quad (41.17)$$

(41.17)是二维非线性自治动力系统, 在真实的物理平面 (x, y) 上,

奇点是 $(\pm m\pi, \pm n\pi)$. (41.17)右端的雅可比矩阵为: (为简化, 设 $\psi_0=1$)

$$\begin{pmatrix} 0 & \cos y \\ \cos x & 0 \end{pmatrix}.$$

因此, 若 m, n 同为奇(偶)数, 则 $\lambda^2=1$, $\lambda=\pm 1$, 即该奇点为鞍点. 若 m, n 是一奇一偶, 则 $\lambda^2=-1$, $\lambda=\pm i$, 即该点为中心点. 其相图见图 41-1(图中“ \cdot ”为鞍点, “ \circ ”为中心点). 从图上看, 涡旋由四条连接鞍点的异宿轨道构成的闭圈所组成.

若在(41.12)式中取 $q=3$ 或 $q=6$, 则在 $\psi_0=1$ 时的流函数为

$$\psi_6 = 2\psi_3 = \cos x + \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right). \quad (41.18)$$

它们对应的速度场为

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) \\ &= -\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}y, \\ \dot{y} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\sin x - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) \\ &= -\sin x - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}y. \end{aligned} \right. \quad (41.19)$$

(41.19)式是一个非线性动力系统, 很易证明流线是一个中心点的周围有六个鞍点的对称形式, 见图 41-2. 这个六角形对称涡旋结构很像贝纳德(H. Benard)对流中的涡旋, 因此这六角涡旋是由六条异宿轨道闭圈组成.

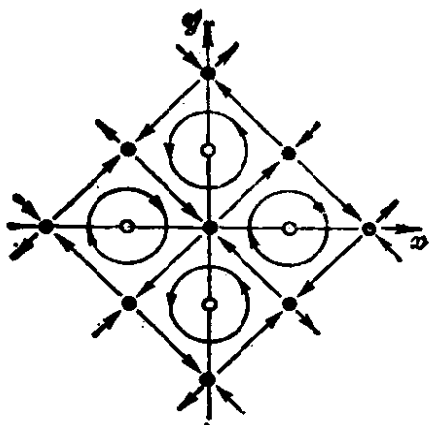


图 41-1

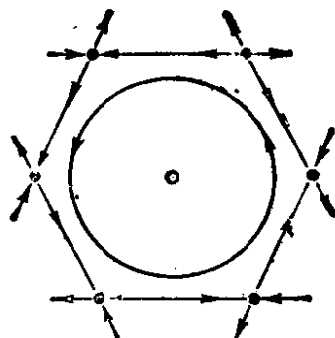


图 41-2

以上涡旋对于平移和旋转(q 为偶数时旋转 $\frac{2\pi}{q}$ 角, q 为奇数时旋转 $\frac{\pi}{q}$ 角)都具有不变性.

(41.7)若取成极坐标形式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \psi = 0, \quad (41.20)$$

我们取如下形式的解

$$\psi = c J_1(r) \sin \theta, \quad (41.21)$$

那么, 速度场为

$$\begin{aligned} v_r = \dot{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} c J_1(r) \cos \theta = f(r, \theta), \\ v_\theta = r \dot{\theta} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} = c \left(J_0 - \frac{1}{r} J_1 \right) \sin \theta = g(r, \theta). \end{aligned} \quad (41.22)$$

其中因为 $[r J_1(r)]' = r J_0$, 即 $r J_1' + J_1 = r J_0$, 故

$$J_1' = \left(J_0 - \frac{1}{r} J_1 \right). \quad (41.23)$$

(41.22)的定常解满足

$$J_1(r^*) = 0, \quad \sin \theta = 0. \quad (41.24)$$

我们设在半径为 a 的圆上 $J_1(a) = 0$, 则(41.24)式意味着圆上的 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 处为奇点.

但(41.22)右端的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{r} c J_1' + \frac{1}{r^2} c J_1\right) \cos \theta & \frac{1}{r^2} c J_1 \sin \theta \\ \left(c J_0 - \frac{1}{r} J_1\right)' \sin \theta & \frac{1}{r} c \left(J_0 - \frac{1}{r} J_1\right) \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (41.25)$$

将 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 代入(41.25)式,

$$\begin{pmatrix} -\frac{c}{r} J_0(a) & 0 \\ 0 & \frac{c}{r} J_0(a) \end{pmatrix}.$$

上矩阵的特征根有两个:

$$\lambda_1 = \frac{c}{r} J_0(a), \quad \lambda_2 = -\frac{c}{r} J_0(a), \quad (41.26)$$

因此 λ 是一正一负, 圆上的点 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 为鞍点, 见图 41-3. 从图上看, 每个涡旋均由两条鞍-鞍异宿轨道构成的闭圈组成.

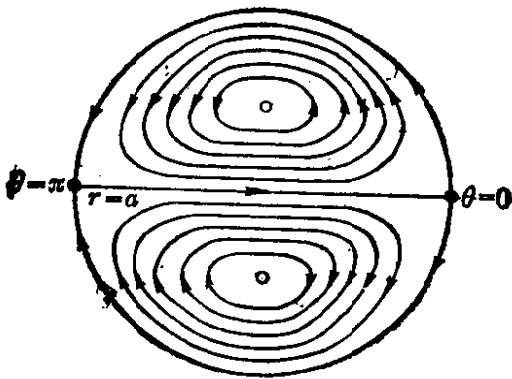


图 41-3

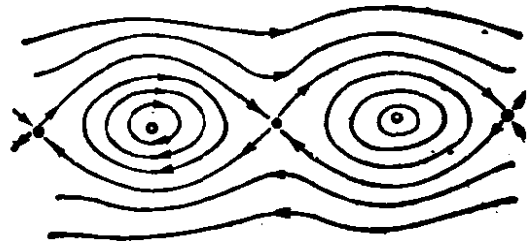


图 41-4

在(41.6)中的 $f(\psi)$ 还可以取其他形式. 例如取 $f(\psi) = e^{-2\psi}$, 则方程(41.6)变成

$$\Delta \psi = e^{-2\psi}. \quad (41.27)$$

上方程的解为

$$\psi = \ln(A \cdot \cosh y + (A^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos x). \quad (A > 1) \quad (41.28)$$

相应的速度场为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{-A \sinh y}{A \cosh y + \sqrt{A^2 - 1} \cos x}, \\ \dot{y} &= \frac{-\sqrt{A^2 - 1} \sin x}{A \cosh y + \sqrt{A^2 - 1} \cos x}.\end{aligned}\quad (41.29)$$

很易说明该流线是在 x 轴上相距 2π 的一些涡旋街, 见图 41-4. 从图上看, 由鞍-鞍两条异宿轨道形成一个涡旋.

借助于不同的 $f(\psi)$ 形式, 可得到多种涡旋图象(pattern).

§ 42 三维涡旋和螺极分解

二维涡旋的流场满足二维非线性自治动力系统(41.3), 尽管有各种各样的涡旋图象, 但是它绝不会出现混沌. 但它由于存在涡旋相干结构, 对湍流研究还是很有启发的.

为了研究三维涡旋, 我们先介绍一下有关螺极分解(toroidal-poloidal decomposition)的问题, 简称 T-P 分解.

我们已经从流体力学知道, 在二维运动中若无散场

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

可以引进流函数 ψ , 将速度场表示成(41.3)形式, 且垂直方向的涡度可以用 ψ 的二维拉普拉斯表示. 同样, 若垂直涡度为 0 (即平面无旋场),

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

那么可以引进速度势 ϕ , 使

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y};$$

且散度可以用 ϕ 的拉普拉斯表示, 即

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \Delta_2 \phi.$$

对于二维有旋且有散场

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \neq 0, \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \neq 0,$$

那么引进流函数 ψ 和速度势 ϕ , 使 u 和 v 表示为

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (42.1)$$

且

$$\zeta = \Delta_2 \psi, \quad D = \Delta_2 \phi.$$

二维速度场的(42.1)分解一般称为亥姆霍兹分解.

那么, 对三维不可压缩流体

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (42.2)$$

速度场又如何分解呢?

由(42.2)式,

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -D = -\Delta_2 \phi,$$

因而

$$w = \Delta_2 \left(\int -\phi dz \right) = \Delta_2 \chi, \quad (42.3)$$

其中

$$\chi = -\int \phi dz, \quad \frac{\partial \chi}{\partial z} = -\phi \quad (42.4)$$

称为对流速度势.

将(42.4)中的 ϕ 代入(42.1), 就得到

$$\begin{cases} u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \right), \\ v = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \right), \\ w = \Delta_2 \chi. \end{cases} \quad (42.5)$$

上式写成向量形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \operatorname{rot}(-\psi \mathbf{k}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \chi \mathbf{k}) \\ &= \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x}, 0 \right) + \left(-\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}, -\frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z}, \Delta_2 \chi \right), \end{aligned} \quad (42.6)$$

(42.6)式就叫速度的螺极展开, 即(9.12)式.

下面说明第1章中谈到的欧拉方程的定常解——贝切美流:

$$\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{\omega} \quad \text{即} \quad \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad \text{或} \quad h = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\omega} \text{ 最大} \quad (42.7)$$

所代表的三维涡旋运动.

对贝切美流, $\boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{v}$, 无论是 φ, ψ, χ 还是 \boldsymbol{v} , 均满足亥姆霍兹方程(9.15):

$$\Delta q + \lambda^2 q = 0$$

(其中 q 是 ψ, χ, φ 或 \boldsymbol{v}). 这是因为由(42.7), 涡度的三个分量(ξ, η, ζ)有

$$\xi = \lambda u, \quad \eta = \lambda v, \quad \zeta = \lambda w, \quad (42.8)$$

那么由(42.5)式,

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \Delta_2 \chi - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi, \end{aligned} \quad (42.9)$$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \Delta_2 \chi \\ &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \Delta \chi, \end{aligned} \quad (42.10)$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} \right) = \Delta_2 \psi. \end{aligned} \quad (42.11)$$

将(42.11)与(42.8)第三式比较, 并用(42.5)式,

$$\Delta_2 \psi = \lambda \Delta_2 \chi. \quad (42.12)$$

它的特解就是

$$\psi = \lambda \chi. \quad (42.13)$$

这就验证了(9.14)式.

将(42.13)代入(42.9)、(42.10), 并利用(42.8)、(42.5), 得到

$$\Delta \chi + \lambda^2 \chi = 0. \quad (42.14)$$

由(42.13)立即得

$$\Delta \psi + \lambda^2 \psi = 0. \quad (42.15)$$

由(42.4), 也有

$$\Delta\varphi + \lambda^2\varphi = 0. \quad (42.16)$$

将(42.5)两边作 Δ 运算, 并利用(42.14)和(42.15), 得

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda^2 u = 0, \\ \Delta v + \lambda^2 v = 0, \\ \Delta w + \lambda^2 w = 0. \end{cases} \quad (42.17)$$

即

$$\Delta v + \lambda^2 v = 0. \quad (42.18)$$

这样, 利用(9.15)式和二维涡旋(41.6)式类似求(9.15)式的特解 ψ, χ 来确定贝切美流的三维速度场, 从而确定三维涡旋.

例如, 在直角坐标系中取亥姆霍兹方程(9.15) $\lambda = \sqrt{2}$ 的特解

$$\begin{cases} \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} A \sin x \cos y, \\ \psi = \sqrt{2} \chi = A \sin x \cos y, \end{cases} \quad (42.19)$$

那么, 由(42.5)式找到三维速度场为

$$\begin{cases} u = A \sin x \sin y, \\ v = A \cos x \cos y, \\ w = -\sqrt{2} A \sin x \cos y. \end{cases} \quad (42.20)$$

(42.20)和(9.8)式一致, 它反映的流场是图9-1的方形螺旋涡旋, 由连接四个鞍点的异宿轨道组成.

又例如取

$$\psi = \chi = A x \cos z - B \cos x - C \sin y, \quad (42.21)$$

那么, 由(42.5)找到的速度场为

$$\begin{cases} u = A \sin z + C \cos y, \\ v = B \sin x + A \cos z, \\ w = C \sin y + B \cos x. \end{cases} \quad (42.22)$$

它就是著名的 ABC 流(9.11)式, 它的涡旋形式见图9-2.

又例如取

$$\chi = \psi + s(x \cos z + y \sin z), \quad (42.23)$$

其中 ψ 是由(41.12)式所决定的. 那么, 由(42.23)所确定的速度场为

$$\begin{cases} u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + s \sin z, \\ v = \frac{\partial \psi}{\partial x} - s \cos z, \\ w = \dot{\psi}. \end{cases} \quad (42.24)$$

(42.24)式确定的涡旋在 z 方向是分层周期, 而在平面 (x, y) 上具有 q -fold 对称性, 这叫 Q 流.

前面 Q 流中的 ψ 满足直角坐标系的亥姆霍兹方程(41.7). 若取极坐标的方程(41.20), 且取

$$\chi = \psi + s(\theta \sin z + \ln r \cdot \cos z), \quad (42.25)$$

例如取

$$\psi = A J_m(r) \cos m\theta, \quad (42.26)$$

则由(42.25)和(42.26)确定的三维速度场为

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{s}{r} \sin z \\ \quad = -\frac{m}{r} J_m(r) \sin m\theta + \frac{s}{r} \sin z, \\ v_\theta = r\dot{\theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{s}{r} \cos z \\ \quad = J'_m(r) \cos m\theta - \frac{s}{r} \cos z, \\ v_z = \dot{z} = \dot{\psi} = J_m(r) \cos m\theta. \end{cases} \quad (42.27)$$

图 42-1 是取 $m=6$ 、 $s=0$ 时的流场图. 显然, 异宿轨道闭圈在涡旋中起着重要的作用.

同样, 若取

$$\chi = \left[\cos x + \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) + \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \right] \sin z, \quad (42.28)$$

上式实际上是(41.18)式多了一项的结果. 那么, 三维流场为

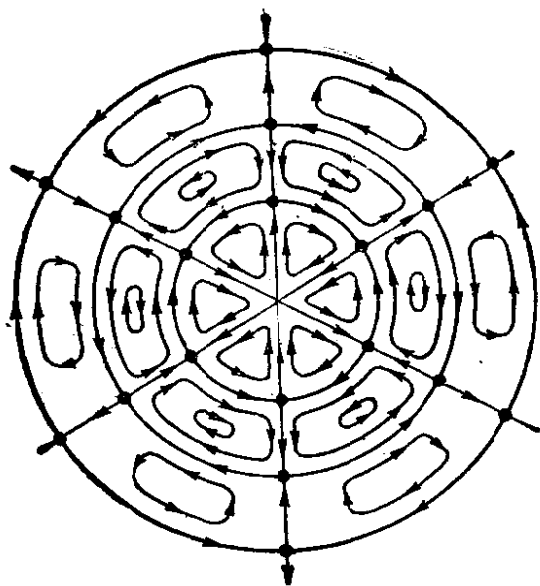


图 42-1

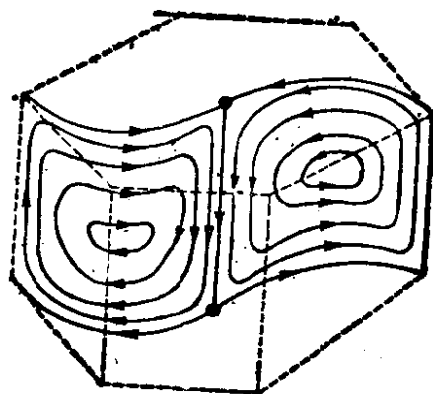


图 42-2

$$\begin{cases} u = \dot{x} = \left(-\sqrt{3} \cos \frac{x}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \cos z, \\ v = \dot{y} = \left(-\sin x - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \cos z, \\ w = \dot{z} = \left(\cos x + 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \sin z. \end{cases} \quad (42.29)$$

在图 42-2 上可清楚地看出在垂直柱面上由异宿闭圈构成贝纳德对流环流。

科学家中外译名对照表

Arnold V. I.	阿诺尔德	Lorenz E. N.	洛伦兹
Bak P.	巴克	Mandelbrot B. B.	曼德布罗特
Baker H.	巴克尔	Miles J. W.	米尔斯
Benard H.	贝纳德	Navier C.	纳维
Burgers J. M.	伯格	Newton S. I.	牛顿
Cantor G.	康托	Peixoto M. M.	派克索托
Couette M. M.	库特	Poincare H.	彭加莱
Einstein A.	爱因斯坦	Prandtl L.	普朗特
Enler L.	欧拉	Rayleigh O. M.	莱雷
Farey J.	法里	Reynolds. O.	雷诺
Feigenbaum M. J.	费根鲍姆	Ricati J. F.	黎卡提
Fibonacci L. (of Pisa)	菲波那契	Richardson L. F.	里查逊
Fisher M.	费希尔	Ruelle D.	茹厄勒
Floquet	夫洛凯特	Schrodinger E.	薛定谔
Frisch U.	弗雷西	sierpinski W.	谢尔宾斯基
Gauss C. F.	高斯	Smale S.	斯梅尔
Hamilton W. R.	哈密顿	Stokes S. G.	斯托克斯
Helmholtz H. L. F.	亥姆霍尔	Takens F.	塔肯斯
Hopf	霍普夫	Tang C.	汤超
Koch H. V.	科克	Weierstrass K.	外尔斯特拉斯
Lagrange J. L.	拉格伦日	Wiesenfeld K.	维森弗尔德
Landau L. D.	朗道	Wilson K. G.	威尔逊
Laplace P. S. D.	拉普拉斯	Колмогоров A. H.	柯尔莫戈洛夫
Levy P.	列维	Ляпунов A. M.	李雅普诺夫
Liouville J.	刘维尔		

参 考 文 献

- [1] Abdulladov, A. K., Dynamical Chaos of Solitons and Nonlinear Periodic Waves, *Physics Reports*, 179, **1**(1989), 1.
- [2] Akhromeyeva, T. S., Nonstationary Dissipative Structure and Diffusion-induced Chaos in Nonlinear Media, *Physics Reports*, 176, **5~6**(1989), 189.
- [3] Anerre, P. ed, *New Trends in Nonlinear Dynamics and Pattern forming Phenomena: The Geometray of Non-equilibrium*, Plenum, 1988.
- [4] Argoul, F., Wavelet Analysis of Turbulence reveals the Multifractal Nature of the Richardson Cascade, *Nature*, **338**(1989), 51.
- [5] Arnold, V. I., *Mathematical methods in Classical Mechanics* Springer, 1978.
- [6] Briggs, J., *Turbulent Mirror*, Harper, 1989.
- [7] Burgers, J. M., A Mathematical Model illustrating the theory of Turbulence, *Advances in Mechanics*, **1**(1948), 171.
- [8] Engelbrecht, J., *Nonlinear Waves in Active Media*, Springer, 1989.
- [9] Escher, M. C., *Art and Science*, North-Holland, 1987.
- [10] Feder, J., *Fractals*, New York, 1988.
- [11] Frisch, U., Turbulence: Challenges for Theory and Experiment, *Physics Today*, **1** (1990) 24.
- [12] Gaponov-Grekhov, Disorder, Dynamical Chaos and Structure, *Physics Today*, **7** (1990)30.
- [13] Gaponov-Grekhov, *Nonlinear Wave 1, Dynamics and Evolution*, Springer, 1989.
- [14] Gleick, J., *Chaos: Making a New Science*, Viking, 1987.
- [15] 管克英, 高歌, Burgers-KdV 混合型方程行波解的定性分析, *中国科学(A)*, **1**(1987), 64.
- [16] Hale, J., Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, *Mathematical Surveys and Monographs*, 25, 1988

- [17] Hao Bai-lin(郝柏林), *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems*, World Scientific, 1989.
- [18] Herring, J. R., ed *Lecture Notes on Turbulence*, World Scientific, 1989.
- [19] Infeld, E., *Nonlinear Waves, Soliton and Chaos*, Cambridge University Press, 1990.
- [20] Jackson, E. A., *Perspectives of Nonlinear Dynamics*, Cambridge University, 1989.
- [21] Lanwerier, H., *Fractals*, Princeton University, 1991.
- [22] 高安秀树,《分数维》,地震出版社,1989.
- [23] 刘式达,刘式适,“孤立波和同宿轨道”《力学与实践》,4(1991),9.
- [24] 刘式适,刘式达,“Fisher 方程异宿轨道精确解”,《科学通报》,37(1992), 191.
- [25] 刘式达,刘式适,《非线性动力学和复杂现象》,气象出版社,1989.
- [26] 刘式达,刘式适,“湍流的 KdV-Burgers 方程模型”,《中国科学》(A), 9(1991), 938.
- [27] 刘式达,“有关大气湍流的几个问题”,《气象学报》,3(1990).
- [28] Mandelbrot, B. B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, 1982.
- [29] Monin, A. S., Yaglom, A. M., *Statistical Fluid Mechanics*, MIT Press, 1975.
- [30] Paladin, G., Anomalous Scaling laws in Multifractal Objects, *Physics Reports*, 156(1987), 138.
- [31] Peitgen, H. O., *The Beauty of Fractal*, Springer, 1986.
- [32] Peitgen, H. O., *The Science of Fractal Images*, New York, 1988.
- [33] Peitgen, H. O., *Fractal-For the Classroom, Part 1: Introduction to Fractal and Chaos*, Springer, 1991.
- [34] Sagdeev, R. Z., *Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, Harwood, 1984.
- [35] Sagdeev, R. Z., *Nonlinear Physics: From the Pendulum to Turbulence and Chaos*, Harwood, 1988.
- [36] Schroeder, M., *Fractals, Chaos, Power Laws*, Freeman, 1991.
- [37] Seydel, R., *From Equilibrium to Chaos*, Elsevier, 1988.
- [38] Schuster, H. G., *Deterministic Chaos-An Introduction*, Weinhiim,

1984.

- [39] Sirovich, L., Chaotic Dynamics of Coherent Structure, *Physica*, D37(1989), 45.
- [40] Stauffer, D., *From Newton to Mandelbrot*, Springer, 1989.
- [41] Stewart, I., *Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos*, Oxford, 1989.
- [42] Stevens, D. S., *Handbook of Regular Patterns*, MIT Press, 1980.
- [43] Zaslavsky, G. M., *Chaos in Dynamical Systems*, Harwood, 1988.
- [44] Zaslavsky, G. M., *Weak Chaos and Quasi-regular Patterns*, Cambridge University Press, 1991.