

目 录

序	iii
作者序	v
第一章 引論	1
1. 适应问题的提出及其研究的进展	1
2. 大气中的基本波动	5
3. 大气适应形成的机制——波动能量的频散	7
4. 大气层结对声波的作用	9
5. 地球自转对重力波的影响	10
6. β 对于大尺度慢波的影响	11
第二章 适应过程和演变过程的一般性质	13
1. 大气中各类运动的特征量及无因次方程	13
2. 各类运动的准静力平衡性和准常定性	15
3. 天气变化过程的阶段性——适应过程与演变过程	17
4. 演变过程中运动的准涡旋性质	20
5. 适应过程的物理性质	24
6. f 和非线性项对于运动性质的作用	26
7. 适应过程中的能量传播和频散 (dispersion)	27
8. 大型演变过程中的能量频散	28
第三章 地转适应的物理性质及描写地转适应过程的方程组	29
1. 地球大气中准地转运动生成的物理原因 (或 $R \ll 1$ 的原因)	29
2. 地转适应过程的线性性质, 描写地转适应过程的方程组	31
3. 地转适应运动的若干物理性质的进一步讨论	34
第四章 正压大气中的地转适应过程	37
1. 方程组和解的初步分析	37
2. 适应过程中波的频散	39
3. 重力惯性波的激发	41
4. 地转适应的例子	44
5. 地转适应的结果与初始扰动尺度的关系	46

6. 非地转扰动尺度与地转适应速度的关系·····	49
7. 有限空间中的适应问题——非地转运动产生的一种机制·····	51
8. 非线性作用·····	58
9. 结束语·····	62
第五章 斜压大气中的地转适应过程及其有关问题·····	64
1. 斜压与正压大气中地转适应的相似性·····	64
(1) 解的相似·····	65
(2) 初始非地转扰动尺度与适应结果的关系·····	65
(3) 初始扰动尺度与适应速度·····	66
(4) 波的频散·····	68
2. 扰动的垂直结构对地转适应过程的影响·····	69
3. 斜压大气中地转适应的例子·····	72
4. 非地转扰动作用的上下传送·····	76
5. 斜压大气适应发生的机制·····	85
6. 物理解释·····	86
7. 地转适应的一些可能应用·····	88
8. 气象学中准地转假定的物理意义及其存在的问题·····	90
第六章 静力平衡适应·····	93
1. 研究静力适应的方程组·····	93
2. 不同模式大气中的声波和重力波·····	96
3. 声波的激发·····	98
4. 静力平衡的适应过程·····	100
5. 静力平衡适应过程与地转适应过程速度的比较·····	102
6. 科氏力在静力平衡适应过程中的作用·····	105
7. 准不可压缩大气中的静力平衡适应·····	106
第七章 中小尺度运动中风场与气压场的适应问题·····	107
1. 方程组·····	107
2. 中尺度运动中风场与气压场的适应·····	109
3. 中小尺度运动适应过程的数值计算·····	113
4. 适应状态中的中小尺度运动的一些性质及中小尺度的一些 天气分析问题·····	120
第八章 今后待研究的问题·····	122
参考文献·····	125

第一章 引 論

1. 适应問題的提出及其研究的进展

一切天气現象都是大气运动的结果，所以大气运动状态如何改变，是气象工作者們最感兴趣的問題。按照經典的說法：大气运动最根本的原因，是由于大气质量分布不均匀的结果。大气质量分布不均匀造成的气压梯度，引起了大气的运动。这时，在靜止的坐标系統中，空气质点将沿着气压梯度力的方向运动，然而在自轉的地球上，空气在运动中，它就要受到柯氏力的作用而向右偏轉（在北半球的情况）。如果气压場不变，向右偏轉将直到空气的运动方向轉到与等压綫平行（背风而立，高压在右边），而柯氏力正好与气压梯度力相等，但方向相反时为止。这时，空气运动不再加速，风向平行于等压綫，风速 v 則可由下式算出：

$$v = \frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial n}.$$

这里 $\frac{\partial p}{\partial n}$ 为气压梯度， ρ 为空气密度， f 为地球自轉参数，它等于 $2\omega \sin \varphi$ ， ω 为地球自轉角速度， φ 为緯度。上式是气象学中最重要規律之一，即所謂地轉平衡关系式。

按照上述推論，风場和气压場的关系之間，风場是被动的，气压場是主动的。当气压場由于某种原因发生变化之后，則风場要随之改变，以适应气压場，而調整为新的地轉关系。但是地轉风方程只指出风場和气压場的平衡关系，沒有因果关系。按理，仅从这个方程考虑，气压的改变既然可以引起风場的变化，同样，风場的改变也应该可以引起气压場的变化，两者的关系應該是相互影响

的。当然,对于某一具体问题来说,一个可以是主导的,另一个可以是从属的;然而没有理由在任何问题中都是以气压场为主导,风场为从属。到了1936年,C. G. Rossby^[1]提出了相反的看法,他认为如果我们某一垂直面上考虑一种质量分布,则总是可以找到一种垂直于这个面的速度分布,使得由此而产生的偏向力,在任何地方皆与由质量分布(涡旋分布)产生的压力梯度相平衡。相反的,也总是可以找到这样一种在垂直面上的质量分布,使得由此产生的水平压力梯度和任何一种与该面成法线方向的速度分布平衡。在另一方面,作用于运动方向的侧向应力,必定要产生垂直于运动方向有某些特性的速度廓线。因此在大气或海洋的一部分运动中,质量分布不是运动的原因,而是运动的结果。

由此出发,C. G. Rossby^[2-3]分析了一个初始只有速度,而无压力梯度相平衡的带状气流的演变。最后的结果是流速变化不大,而产生了与柯氏力相平衡的气压梯度。由此,C. G. Rossby认为气压场和风场是相互调整适应的,在相互适应中,主要是气压场向风场适应。对于C. G. Rossby提出的问题,A. Cahn^[4]对它进行了分析,他指出:气压场向风场适应是通过重力波¹⁾的频散(dispersion)来完成的。也就是说通过重力波,有限空间内的气压场和风场之间不平衡的能量,被散布到了整个空间,于是单位空间中的不平衡能量变为零,这时不平衡的现象消失。此后,A. M. Одыхов^[5]对于风场和气压场的适应进行了更完整的分析。B. Bolin^[6]和И. А. Кибель^[7]还进一步讨论了斜压大气中的适应问题。他们都指出,气压场主要向风场适应,亦即气压的分布是动力的结果。

然而,上述结论显然还是不够全面的,因为在大气里存在着各种热力因子,如辐射、海陆分布等等,它们对某种大气温度分布以及相应的大气质量的分布起着决定性的作用。当这些决定性的因子发生变化后,相应的大气质量分布自然也将发生改变。这时,速

1) 确切的说,应该是重力惯性波(见本章第2节)。

度場自然要发生变化以适应新的質量分布。然而，哪一些运动变化原因主要是“热力”的呢？哪一些运动变化原因主要是动力的，而質量分布是从属的呢？对于这些問題，叶篤正^[8]曾通过对地轉适应物理过程的分析，提出了一个初步答案：在較大尺度运动的地轉适应过程中，主要是风場向气压場适应；在較小尺度运动的地轉适应过程中，主要是气压場向风場适应。也就是說，大范围运动变化原因主要是热力的，較小范围运动的变化原因主要是动力的。然而，所謂大范围或小范围的标准如何决定呢？对此，曾庆存^[9]和陈秋士^[10]都进行过研究，他們得到了一致的結論认为：当运动的水平尺度 L 小于某临界尺度 L_0 时，則气压場向风場适应；当 $L > L_0$ 时，风場向气压場适应。而 $L_0 = c/f$ ，这里 c 为重力波速， L_0 就是 C. G. Rossby^[3] 曾經引用的所謂“变形半径” (radius of deformation)，而 A. M. Огѣхоб^[5] 称之为“作用半径”。在正压大气中， c 接近声速，在斜压大气中，則 c 远小于声速，所以正压大气中的 L_0 远比斜压大气中的 L_0 为大。C. G. Rossby 和 A. M. Огѣхоб 所采用的运动尺度都远小于 L_0 ，所以他們都得到，在适应过程中主要是气压場向风場适应的結果。

曾庆存^[9] 和 G. Fischer^[11] 更进一步討論了适应过程中初始扰动垂直結構的影响，他們由此得到了一致的結論：即在高空运动，变化的主要原因是动力的；在低空則主要是热力的。P. Raethjen^[12] 也指出过这一点。

以上的这些工作，在理論上都是根据綫性模式进行的，而 И. А. Кнѣзѣв^[13] 和曾庆存^[14] 还討論了非綫性的适应問題。他們把大气的变化过程分成了两个阶段。当大气运动由于某种原因失去了地轉平衡以后，它首先的变化就是适应过程。适应过程基本完成之后，此后就进入所謂准地轉演变的慢过程，慢过程主要是由非綫性的平流項控制的。适应过程和天气演变的慢过程，两者基本上是分阶段进行的。陈秋士^[10] 更进一步指出，处于高度非地轉平衡状态下的运动，非綫性的平流項比其他的綫性項小一个量级以上，可以略去。因此在高度非地轉的运动中，主要只有适应过程。适

应过程基本完成之后,平流項才显得重要起来,大气演变的慢过程才会起主要作用。

無論在动力气象学上或天气学上,地轉关系都起了很大的作用,但是这个关系主要适用于中高緯度的大型运动,緯度愈低,或运动的尺度愈小,这个关系愈不适用,可是近年来,不論是中小尺度运动或低緯度天气,都愈来愈受到人們的注意,如果在这些情况下的运动也存在着类似于中高緯度大型运动的地轉关系,則它可能对这些情况下的天气和动力分析也有不小的帮助。

無論在中小型运动或較低緯度的运动中,Rossby 数 $R = V/fL$ 都很大(V 和 L 分別为运动的特征速度和水平尺度),因此相对地与柯氏力比較來說,慣性力是大的,在运动方程中慣性力不能被略去,但是从“天气动力学”^[1]一书中,我們看到無論对那一种尺度(大尺度、中尺度或小尺度等)的运动,一般來說時間异数項都是比方程中的各主要項小一个量級以上,同时观测也指出,中小天气系統(如雷暴和雹綫等)的生成是非常迅速的,而生成之后,則有一段比較长的稳定的和緩慢的演变时期,如一个雷雨云可以在二十分鐘左右生成,而它成长后可以延續几个小时^[15],再如更大的天气系統也是如此,叶篤正和李麦村^[16]曾对此給出过一个例子,对运动方程各項量級的分析以及观测都指出:無論尺度如何,运动的演变一般都是在力的准平衡情况下进行的,对于大尺度的运动,这种准平衡状态就是地轉关系,在中尺度运动中,柯氏力、气压梯度力和慣性力三者处于准平衡状态;在小尺度运动中,慣性力和气压梯度力处于准平衡状态,当这种准平衡状态遭受到破坏后,必定有一种机制使运动恢复准平衡状态,否則我們就不能經常观测到这些准平衡状态的运动,因此,在中小尺度运动中也有一种风場和气压場的适应过程,最近叶篤正和李麦村^[16]曾对此有所証明,这种适应和地轉适应一样,也是通过重力波的頻散而实现的。

1) 陶诗言、叶篤正著,中国科学技术大学油印本。

气压場除与风場之間有适应以外，它和重力場之間还存在所謂靜力平衡关系：

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho,$$

这是从第三运动方程簡化出来的，这个簡化关系虽有高度的精确性，但在小范围的运动里，当对流性活动較強时，它也会遭到破坏；但此后却必定有一种机制使它恢复，这种恢复的过程称靜力适应。A. C. МОНИН 和 A. M. ОБУХОВ^[17]，G. HOLLMANN^[18]以及巢紀平^[19]等对此都有过研究，他們得出靜力适应是通过声波頻散而实现的。

由以上的叙述可以看出，气压場与风場和重力場之間的各种适应机制虽有不同，但都是通过某种波动，使其間不平衡的能量被散布到整个空間的結果。因此我們将在本章以下几节中，討論大气中的几种基本波动，以及波动能量在空間传播的情况。

2. 大气中的基本波动

大气运动中有几种基本的波动，在最簡單的无旋轉的（即不考虑地球自轉）一維运动中，同时， $v = w = 0$ ，波动的波速为：

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{\nu RT} \quad (\nu = c_p/c_v), \quad (1.1)$$

其中 \bar{u} 为流体的基本流速， R 为气体常数， T 为温度。（1.1）式为大家所熟知的声波波速。在大气里， $\nu = 1.4$ ， $R = 2.78 \times 10^6$ （厘米）²/秒²·度，取 T 为 273°A，則相对于基本气流，声波波速为 330 米/秒左右。

如再設有两层不可压缩和无旋轉的流体，两层流体的界面高度为 h ，上层流体的厚度远大于 h ，令运动主要发生于下层，并限制于 (x, z) 面上，則此时的波动为重力波，其波速为：

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{gh(1 - \rho_1/\rho_2)}, \quad (1.2)$$

其中 ρ_1 和 ρ_2 分別为上层和下层流体的密度，当 $\rho_1 \approx 0$ ， $\rho_2 \neq 0$ （如上层流体为大气，下层为海洋）时，則

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{gh}. \quad (1.3)$$

这就是浅海重力波波速，也是重力外波，当 ρ_1 和 ρ_2 皆不为零时，

(1.2)式表示重力內波,在大气里,对于不同的情况, $(1 - \rho_1/\rho_2)$ 变化范围非常大,可由 0.02 到 0.30, h 也可由 1 公里变到数公里,所以重力內波波速可以由 10 米/秒到 100 米/秒,而重力外波則接近于声速。

在旋轉的地球上,如完全沒有外力,当某一空气质点受到扰动时,它的移动軌迹接近一个圓,称为慣性圓。这种运动为一种慣性运动,质点繞圓的周期为:

$$T_f = \frac{2\pi}{f} = \frac{\pi}{\Omega \sin \varphi}, \quad (1.4)$$

其中 Ω 为地球自轉角速度, φ 为质点所在的緯度。

在大气中,大尺度天气演变过程可以近似地用渦度守恒的原則来描写,如不考慮地球自轉参数 $f = 2\Omega \sin \varphi$ 随緯度的变化,則一維小扰动渦度方程为:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \zeta'}{\partial x} = 0, \quad (1.5)$$

式中 ζ' 为质点的相对渦度,由(1.5)式有:

$$\zeta' = F(x - \bar{u}t) = 0. \quad (1.6)$$

显而易见,这种波动的波速为:

$$c = \bar{u}. \quad (1.7)$$

由此可見,在不考慮 $\beta = df/dy$ 时,大型天气演变重要的波动(称天气波)是以基本气流的速度传播的,波速約为 10 米/秒。

比較上述各种波速,以天气波最慢,故天气波在大气中称为慢波,其余的波称为快波。

上述声波、重力波、慣性波及天气波为大气基本波动。不过这些純粹的单一波,只是在特殊情况下才存在。在一般情况下,在同一种运动中,同时存在两种或两种以上的波动。例如在层結大气中,声波和重力波就一起出現,重力波和慣性波同时出現或为重力慣性波,而长波与重力波常以混合波形式而共存。

3. 大气适应形成的机制——波动能量的频散

在第1节中已经指出,适应过程的物理本质是由于某种原因,集中于有限区域的波动能量传播到整个空间,于是单位空间中的能量为零,波动消灭,场中各种力间趋于平衡,场的适应于是形成。因此波动能量在空间传播的情形,是适应过程中的一个根本问题。

在均匀无旋转的流体中,平面直角坐标中的波动方程可以写成:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0. \quad (1.8)$$

初始条件: $t = 0, u = \varphi(x_1, x_2, x_3),$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x_1, x_2, x_3). \quad (1.9)$$

方程(1.7)及(1.8)中脚号 i 代表波动方程的空间度数,现在分别来讨论三种波动的初始扰动能量的传播过程。

对三维 ($i = 3$) 方程式(1.8),带有初始条件(1.9)式的解是球面波。由经典的数学物理方程理论指出:当初始扰动区域 R_0 为一有限区域时,波有清晰的前阵面和后阵面,初始扰动 φ 和 ψ 将散布于以 $at + R_0$ 和 $at - R_0$ 为半径的两个同心球体之间。因为随着时间的增长,这个空间将无限地加大,所以最后这个空间的扰动强度趋于零,扰动在整个空间中消灭。

二维 ($i = 2$) 波是柱面波,柱面波与球面波不同之点是无后效,即有前阵面而无后阵面。因此,初始扰动能量将随着时间的增长,分配在以 $R + ct$ 为半径的圆面积上,最后随着时间的无限增长,圆面积无限增大,波动消灭。

对于一维 ($i = 1$) 情况,方程(1.8)的解的形式是:

$$u(x, t) = f_1(x + ct) + f_2(x - ct). \quad (1.10)$$

由解的形式可以看出,这是两个移动相反的波,但是在移动过程中并不变形,也不消灭。

由以上讨论可以看到,对于球面波和柱面波,当扰动一旦形成

之后,能量将散失到越来越大的空间中去,最后波动消失,但是对一維空間的扰动,波动一旦出現之后,并不消失,然而,在大气中許多現象都可以近似于一維問題、一維問題中适应将如何实现呢?这是我們最关心的問題,

对于实际大气而言,描写各种波动过程的方程比(1.8)式复杂,在以后的几节討論中将会看到,在实际大气中,由于地球自轉以及大气层結等作用,波动方程中还会出现形式如 p^2u 的項,以一維为例,波动方程可写成下面形式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p^2 u = 0, \quad (1.11)$$

其中 u 是大气的某个物理量, p 是由大气运动某些特性所决定的参数,

令波解 $u \sim e^{im(x-ct)}$, 則有

$$c^2 = c_0^2 - \frac{p^2}{m^2}. \quad (1.12)$$

由(1.11)式看出,由于 p 的存在,使波速与波长 $L = \frac{2\pi}{m}$ 有关,于

是一維波动也变为頻散波了,

按定义,波的羣速度为:

$$c_g = c + m \frac{dc}{dm}, \quad (1.13)$$

(1.12)式的羣速度为:

$$c_g = \frac{c_0^2}{\sqrt{c_0^2 - \frac{p^2}{m^2}}}. \quad (1.14)$$

比較(1.12)和(1.14)式可見,羣速不与波速相同,因为能量是随羣速传播的,所以遵守(1.11)式的一維波动也能将波动能量散布到整个空間,

下面各节,我們將討論大气层結以及地球自轉等因素,如何使大气一維波动变为頻散波,

4. 大气层結对声波的作用

在第2节里,我們对声波的討論沒有考虑大气层結的作用,考虑了层結作用之后,問題就比較复杂了. 这时綫性化后的方程組为^[19],

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} u'}{\partial t} &= - \frac{\partial p'}{\partial x}, \\ \frac{\partial \bar{\rho} v'}{\partial t} &= - \frac{\partial p'}{\partial y}, \\ \frac{\partial \bar{\rho} w'}{\partial t} &= - \frac{\partial p'}{\partial z} - g \rho', \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial \bar{\rho} u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w'}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial p'}{\partial t} &= - c_s^2 \left(\frac{\partial \bar{\rho} u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w'}{\partial z} \right) - \beta \bar{\rho} w'. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

这里符号上有“ $-$ ”的表示大气基本場中的变数,而“ $'$ ”表示基本場中的扰动;基本状态的 $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$, $\bar{p} = \bar{p}(z)$, $d\bar{p}/dz = -g\bar{\rho}$, $\beta \leq \nu R(\gamma_d - \gamma)$, 为描写大气层結的参数, $\nu = c_p/c_v$, γ_d 为干絕热温度遞減率, γ 为大气的温度遞減率, $c_s^2 = \nu R \bar{T}$ 为声速的平方.

为了和第2节相比,我們假定扰动量 ($\bar{\rho} u'$, $\bar{\rho} v'$, $\bar{\rho} w'$, p' , ρ') 与 y 和 z 无关,这样,由(1.15)式可以得到一个四阶微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(\kappa) &= 0, \\ \mathcal{L} &= \frac{\partial^4}{\partial t^4} - c_s^2 \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial x^2} - \beta g \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

这里 κ 可以代表上述五个变量的任何一个.

設有波解:

$$\kappa \propto e^{im(x-a)},$$

則得

$$c^4 - c_s^2 c^2 + \frac{\beta g}{m^2} = 0,$$

或

$$c^2 = \left(c_s^2 \pm \sqrt{c_s^4 - \frac{4\beta g}{m^2}} \right) / 2. \quad (1.17)$$

当 $m \sim 10^{-6}$ (厘米) $^{-1}$, $\gamma_d - \gamma \sim 4 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C} \cdot (\text{厘米})^{-1}$, $c_s \sim 3 \times 10^4$ 厘米/秒时, 可以看出, $4\beta g/m^2 \ll c_s^4$, 因此(1.17)式可以近似地写为:

$$c_a^2 = c_s^2 - \frac{\beta g}{c_s^2 m^2}, \quad (1.18)$$

$$c_g^2 = \frac{\beta g}{c_s^2 m^2}. \quad (1.19)$$

显然, 第一组(c_a)为层结大气中的声波, 和(1.1)式相比它出现了层结影响的修订项($-\beta g/c_s^2 m^2$)¹⁾. 这个修订项和主要项($c_s^2 = \nu R \bar{T}$)相比是个小项, 两者之比约为 1:10, 所以对于声速的绝对值来说, 层结影响是可以忽略不计的. 虽然在绝对值方面不起大作用, 可是它对声波的物理性质却起着重要的影响. 我们曾经指出过, 在沒有层结的情况下, 一维声波波速和波长没有关系, 因此它是非频散的, 但层结影响的修订项是波长($L = 2\pi/m$)的函数, 因而使得声波成了频散波. 由(1.13)和(1.18)式, 可以找出在层结大气中声波的群速 c_g 为:

$$c_g = \frac{c_s^4 m^2 - 2\beta g}{c_s^4 m^2 - \beta g} c_a. \quad (1.20)$$

5. 地球自转对重力波的影响

一切条件仍和第2节一样, 只是多考虑了地球自转的作用, 这时描写重力波的方程就成为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} - f v' + g(1 - \rho_1/\rho_2) \frac{\partial h'}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + f u' &= 0, \\ \frac{\partial h'}{\partial t} + h \frac{\partial u'}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

1) 注意(1.1)式中的 \bar{u} , 在(1.18)或(1.19)式中不出现, 因为这里我们假设 $\bar{u} = 0$.

由(1.21)式可以得出:

$$\left. \begin{aligned} L(\kappa) &= 0, \\ L &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - g(1 - \rho_1/\rho_2)\bar{h} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + f^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

(1.22)式有形式为 $e^{im(x-ct)}$ 的波解, 则

$$c^2 = g(1 - \rho_1/\rho_2)\bar{h} - \frac{f^2}{m^2}. \quad (1.23)$$

比較(1.21)和(1.23)式可以看出, 地球自轉使重力波速多了一个修訂項¹⁾ $(-f^2/m^2)$. 在第2节中已經指出, 在大气里 $\sqrt{g(1 - \rho_1/\rho_2)\bar{h}}$ 为几十米/秒, 如令波长为 10^2-10^3 公里时 ($f \approx 10^{-4}$ /秒), 則这个修訂項 f^2/m^2 不及主項 $(g(1 - \rho_1/\rho_2)\bar{h})$ 的百分之十. 所以對於重力波的絕對速度來說, 地球自轉的影响是不大的. 但是如同层結对于声波的作用一样, 地球自轉改变了重力波的物理性質. 不考虑地球自轉的作用($f = 0$), 重力波波速和波长无关, 所以是非頻散的. 有了地球自轉 ($f \neq 0$), 重力波就成为頻散的, 因为这时波速是波长的函数了. 这时重力波的羣速为:

$$c_g = \frac{g(1 - \rho_1/\rho_2)\bar{h}m^2 - 2f^2}{g(1 - \rho_1/\rho_2)\bar{h}m^2 - f^2} c. \quad (1.24)$$

这里 c 由(1.23)式来确定. 因为有了 f 的作用, 这种波又称为重力慣性波.

6. β 对于大尺度慢波的影响

一切条件与第2节相同, 只多考虑地球自轉参数 f 随緯度改变, 于是(1.5)式便可改写成:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + \bar{u} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v = 0, \quad (1.25)$$

式中 $\beta = df/dy$, 而 v 为风速南北扰动量. 設有 $e^{im(x-ct)}$ 的波解, 則

$$c = \bar{u} - \beta/m^2, \quad (1.26)$$

(1.26) 式即所謂著名的 Rossby 公式. 当考虑了 f 随緯度的变化

1) 注意, 这里我们设 $\bar{u} = 0$, 故(1.23)式中不出现 \bar{u} .

后,慢波又常称为长波。 β 改变了慢波性质, $\beta = 0$ 时,慢波波速与波长无关,所以是非频散波。考虑了 β 后慢波是频散波,因为这时波速是波长的函数了。此时长波的群速为:

$$c_g = \bar{u} + \beta/m^2. \quad (1.27)$$

由以上的讨论可以看出,由于大气层结和地球自转等作用,大气中的几种主要的一维波动也是频散波。

第二章

适应过程和演变过程的一般性质

在第一章中,我們闡述了大气运动中風場、气压場和重力場之間适应問題的提出过程。由第一章的叙述可以看出,当風場与气压場之間出現不平衡或不适应时,它們将进行相互調整。可以想象,調整过程必定是迅速的,因为不平衡必将引起強烈的变化,这个过程即称为适应过程。当不适应的風場和气压場調整到接近平衡或适应状态时,它們的变化一定要緩慢下来。因为到了完全平衡或适应时,它們将不能再有变化,而进入稳定的状态。这种准适应或准平衡状态下的緩慢演变,И. А. Кибель^[13]和曾庆存^[14]称之为演变过程。

依照这种推論,适应过程和演变过程在時間上是應該可以划分的,在物理性質上它們也是應該有区别的。但是在時間上它們如何划分,物理性質又如何不同,这就是本章所要討論的問題。此外,在第一章中我們虽然从物理意义方面叙述了适应过程,但从数学方面对它的必然性还没有进行論証。这项工作将在以后几章中詳細論述。本章的前几节,将从无因次方程入手,論証在一般情况下,对于大气各类运动,运动方程以及热流量方程等的時間导数項比这些方程中的主要項都小一个量級。因此在一般情况下,运动都是在准平衡状态下进行緩慢的演变。但当准平衡的关系受到破坏后,即发生适应过程。

1. 大气中各类运动的特征量及无因次方程

因为地表面不是光滑的,它給予大气运动以很大的摩擦力。这使得近地面层大气的运动复杂化,在这里,簡單的气压場和風

場之間的准平衡关系，如地轉公式是不能成立的。愈到高空摩擦力愈小，到了一公里以上高空，和作用于大气运动的其他的力相比，摩擦力就可以忽略不計了，这就进入了所謂的自由大气，地轉风关系以及其他气压場和风場之間的准平衡关系，都是在自由大气中发生的，在自由大气中，三个运动方程可写成：

$$c \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -f u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

一般从运动方程的原始形式中，很难看出运动的本质，因为在上述形式的运动方程中，我們虽然作了簡化（例如忽略了摩擦力以及地球曲率影响等），但是它依然包含着无数的可能运动的类别，只有将这无数可能的运动类别加以区分，分为几种主要的类型，我們才能看出各种类型运动的主要特性，因此，需設法将运动的类别在方程式中表示出来，为此，我們不直接用运动方程中的自变数或应变数，而是引用这些变量和各种类别运动的特征量之比，即以相对量作为新的变量。

在流体力学里，一种运动的主要特性将由几种特征量来描写，它們是运动的时间、空間范围和速度的量級等，在大气里，运动的水平空間和鉛直空間范围相差非常大，运动的水平速度和鉛直速度分量也有非常大的差别，所以对于大气运动，这两个方向上的差异應該注意，現令 L 和 H 分别为运动的水平和鉛直空間特征尺度， u 和 w 分别为运动的水平和鉛直特征速度， τ 为运动的特征时间尺度， $\Delta_x P$ 和 $\Delta_z P$ 分别为 p 的水平和鉛直空間特征变化量， ρ 为空气密度的特征量，这里應該注意，我們虽然給出了这些特征量，但是它們不完全独立，其中的一些特征量将由运动方程的結構和其他特征量来决定，这一点在下面可以看出。

引进新的变量，如

$$\left. \begin{aligned} (u', v') &= (u, v)/V, \quad w' = w/W, \quad (x', y') = (x, y)/L, \\ z' &= z/H, \quad t' = t/\tau, \quad \rho' = \rho/\pi, \quad \Delta p' = \Delta p/\Delta_h P \text{ 或 } \Delta p/\Delta_z P, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

則有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{f\tau} \frac{\partial u'}{\partial t'} &= \frac{V}{fL} \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) + \frac{W}{fH} w' \frac{\partial u'}{\partial z'} = \\ &= u' - \frac{\Delta_h P}{\pi f V L} \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'}, \\ \frac{LW}{V^2 \tau} \frac{\partial w'}{\partial t'} + \frac{W}{V} \left(u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) + \frac{W^2 L}{V^2 H} w' \frac{\partial w'}{\partial z'} &= \\ &= -\frac{gL}{V^2} - \frac{\Delta_z P}{\pi V^2} \frac{L}{H} \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial z'} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

因为第二运动方程与第一运动方程完全相似, 故未在(2.3)式中给出。

(2.3)式已經变为无量綱的了, 它的各項都是沒有量綱的。因为所有新的变量都是以运动的特征量为单位进行測量的, 所以它們以及它們的导数的量級都是 1。因此, 同一个方程中各項的大小, 決定于它們的由各种特征量組成的系数。給定了运动的特征量, 就可以算出各个系数值, 从而由此可以决定方程的主要項(即高量級的項)和次要項。

2. 各类运动的准靜力平衡性和准常定性

运动类型的划分, 一般是以运动的空間尺度为主要依据的, 空間尺度又分为水平空間尺度和鉛直空間尺度。这两种空間尺度中又以水平空間尺度为主, 因为一般来講, 天气系統的水平范围变化很大, 而上下范围变化較小。根据觀測, 在一般情況下, 运动的水平空間尺度一經确定, 运动的其他的特征量也随之而定(特殊天气系統例外)。一般水平空間范围分为大、中、小三种, 亦即运动的类别可分为大型、中型和小型运动三种。

对于大型运动, 可以令 $L = 10^6$ 米, $H = 10^4$ 米, $V = 10$ 米/秒, $W = 10^{-2}$ 米/秒, $\tau = 10^5$ 秒, 再取 $f = 10^{-4}$ /秒, $g = 10$ 米/秒²。將它們代入(2.3)式, 可以看出, 左边各項的系数比右端第一

項的系数(10^0)小一个量級以上。所以對於大型运动方程, (2.1)式的零級近似可以写成:

$$\left. \begin{aligned} f_v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ f_u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

这就是大家所熟知的地轉关系式和靜力方程。由此可得, 大型运动中气压的水平变化和鉛直变化特征量分别为:

$$\Delta_h P = \pi f V L, \quad \Delta_z P = \pi g H, \quad (2.5)$$

對於水平尺度 L 为 10^5 米的中型运动, 除 W 外, 其他各种特征量均和大型运动相似。这里的 W 可比大型运动的 W 大到一个量級。将中型运动的各种特征量代入 (2.3) 式, 比較各項系数, 可以得出 (2.1) 式的零級近似方程为:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= f_v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -f_u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

(2.6) 式告訴我們, 在中型运动中慣性加速是不能略去的, 但時間导数項可以略去。

對於这种运动, $\Delta_h P$ 的量級可以取为:

$$\Delta_h P = \pi V^2. \quad (2.7)$$

这就是一般在流体力学中所采用的关系。

對於更小尺度的运动, 如 $L = 10^4$ 米的运动, V 仍为 10 米/秒, W 可达 10^0 米/秒, H 則一般为 $10^3 - 10^4$ 米。这种系統的生命一般为若干小时, 故 $\tau = 10^4$ 秒。把这些特征量代入 (2.3) 式, 并采用 (2.7) 式, 則对小型运动的零級近似运动方程可写成:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ -g &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

無論对于大型、中型或小型运动，零級近似的运动方程組(2.4)、(2.6)和(2.8)都有两个重要的相同的特点：(1)靜力平衡都是可以使用的¹⁾，(2)三組方程里都沒有時間导数項，所以在大气中，对于天气有比較重要作用的运动，都是准靜力的和准常定的，这就指出：在大气中無論那一类的运动，都是在准靜力的平衡状态下进行緩慢的演变。

3. 天气变化过程的阶段性——适应过程与演变过程

前一节指出，大气运动一般都是在力的准平衡状态下进行演变的，这种演变是比較緩慢的，如果由于某种原因，力的准平衡状态遭到了破坏，那必定有一种机制使得遭到破坏的力的准平衡迅速恢复，否則一般所观测到的运动就不大可能是在力的准平衡状态下进行的了，这样看来，一般大气运动演变过程可以划分为两个阶段，一个是力的准平衡状态恢复阶段，另一个是力的准平衡状态下的演变阶段，前者就是适应过程，后者为演变过程，这两者又分別名为快过程和慢过程^[5]。

在理論上，这两种阶段是否可以区分开？И. А. Кибель^[20,21]曾试图对大型运动作这样的研究，对于大型运动， H （等压面高度）， ψ （流函数）和 φ （位势）的演变可以写成三个部分：第一項依赖于初始辐散，第二項依赖于初始地轉偏差，第三項依赖于涡度平流、温度平流和散度平流等，可以看出，前兩項随时間很快消弱，最后只有第三項为主要的，它滿足准地轉关系，И. А. Кибель的工作，很清楚地把大气大型运动过程分为两种，一种依赖于初始的地

1) 对于 $L = 10$ 公里的小型运动，靜力平衡关系虽然是高度近似正确的，但靜力平衡的偏差对于运动已有不小的作用，因此对于这类运动往往不用靜力关系。

轉偏差(輻散作用包括在其中), 另一種則依賴于各種平流的非線性項。第一種就是快過程, 第二種則是慢過程, 但是這兩種過程是否在時間上可以比較嚴格地分開, 在 И. А. Кубень 的工作中是看不清楚的。曾慶存^[14]曾對此作了補充說明。

對於大型運動, 我們暫時採用靜力平衡。在第一、二運動方程中, 略去 ω 項¹⁾, 無因次化後, 第一、二運動方程變為:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial u'}{\partial t'} + a \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} - v' &= -R \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right), \\ \varepsilon \frac{\partial v'}{\partial t'} + a \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} + u' &= -R \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

這裡 φ' 為無因次的位勢高度, $\varepsilon = (f\tau)^{-1}$ 是 И. А. Кубень^[21] 引用的參數, $R = 1/(fL)^{-1}$ 稱為 Rossby 參數, $a = \Delta_b \Phi (fLV)^{-1}$, $\Delta_b \Phi$ 為運動的位勢高度在水平方向上變化的特徵量。這裡, 我們用了位勢高度, 亦即採用了 (x, y, p) 座標, 因為我們假定了靜力平衡是成立的。

因為無因次的變量和它的微商的量級為 $O(1)$, 所以 (2.9) 式右邊各項的量級為 $O(R)$ 。對於大型運動, $R = 10^{-1}$ 。運動的地轉程度, 決定於 $\left(a \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} - v' \right)$ 和 $\left(a \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} + u' \right)$ 的量級。量級愈小, 地轉程度愈高。現今它們的量級為 10^n 。一般運動的准地轉程度為 $n \approx -1$ 。這時 ε 的量級等於 $O(R)$ 或 $O(10^{-1})$ 。由此可得 τ 的量級為:

$$O(\tau) \geq 10f^{-1}, \quad (2.10)$$

所以處於准地轉平衡狀態下的演變過程的時間特徵量, 大於等於 $10f^{-1}$ 或 10^5 秒。對於高度非地轉的情況, $n \geq 0$, 這時 R 仍為 10^{-1} 。由此可得 ε 量級為:

$$\begin{aligned} O(\varepsilon) &= O(10^n), \\ \text{或} \quad O(\tau) &= 10^{-n}f^{-1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

1) 採用靜力平衡和略去 ω 項這兩個近似, 只是為了方便, 不用這兩個近似也完全可以得出下面的結果。

当 $n \geq 0$ 时, $O(\tau) \leq f^{-1} = 10^4$ 秒, 地轉平衡破坏的程度愈大 (即 n 愈大), 运动演变得愈快, 即 $O(\tau)$ 愈小.

由此可見, 当某一地区的地轉平衡遭受破坏后, 初期变化非常迅速, 经过一很短的时间, 风場和气压場即可达准地轉平衡状态. 此后的演变, 即进入緩慢阶段, 其演变的时间尺度大于等于 $10f^{-1}$. 这样我們可以看到, 运动过程的两个阶段在時間上就基本上分开了.

大型运动是如此, 其他尺度的运动如何呢? 現在来看小尺度运动. 这时第一、二运动方程的无因次形式可以写为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon' \frac{\partial u'}{\partial t'} + \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) + a' \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} &= 0, \\ \varepsilon' \frac{\partial v'}{\partial t'} + \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) + a' \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

这里 $\varepsilon' = L(V\tau)^{-1}$, $a' = \Delta\phi V^{-2}$. 这里有两个力, 一个为慣性力, 另一个为气压梯度力. 这两种力的平衡程度决定于

$$\left[\left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) + a' \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \right] \text{ 和 } \left[\left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) + a' \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} \right]$$

的量級. 量級愈小, 平衡程度愈大. 現令它們的量級为 10^n . 此时 $O(\varepsilon') = O(10^n)$. 由此給出:

$$O(\tau) = 10^{-n} L/V. \quad (2.13)$$

由此可見, 慣性力和气压梯度力的平衡状态破坏得愈大 (即 n 愈大), 运动变化得愈快 [即 $O(\tau)$ 愈小]. 在力的准平衡情况下, $n \leq -1$, 这时运动的时间特征量 $\tau \geq 10 L/V$. 在力的准平衡高度破坏的情况下, $n \geq 0$, 这时 $\tau \leq L/V$. 令 $L = 10^4$ 米, $V = 10$ 米/秒, 則 $L/V = 10^3$ 秒. 所以在小尺度运动中, 慣性力和气压力的准平衡状态遭到破坏后, 先是运动高速地以小于 10^3 秒为時間特征量而演变, 使这两种力迅速地达准平衡状态. 然后, 运动再緩慢地进行, 这时時間的特征量将大于等于 10^4 秒. 所以对于小尺度运动, 演变的两个阶段在時間上也基本上是可以区分的.

对中尺度运动, 我們可以作同样的分析. 不过, 这时应注意

到 $V/L \geq f$, 因此只要把小尺度运动方程中的 $\left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'}\right)$ 和 $\left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'}\right)$ 分别变为 $\left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} - u'/R\right)$ 和 $\left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + u'/R\right)$ 即可, 以下的讨论同小尺度运动一样。

现在, 我们再来讨论准静力平衡遭受破坏后的情况, 第三运动方程的无因次形式可以写为:

$$\begin{aligned} \frac{W}{\tau g} \frac{\partial \omega'}{\partial t'} + \frac{VW}{Lg} \left(u' \frac{\partial \omega'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \omega'}{\partial y'} \right) + \frac{W^2}{Hg} \omega' \frac{\partial \omega'}{\partial z'} = \\ = -1 - \frac{\Delta_z P}{g\pi H} \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial z'} \end{aligned} \quad (2.14)$$

对于任何种类的运动, VW/Lg 和 W^2/Hg 都是 $\ll 1$, 例如对于小尺度运动 ($W = 10^0$ 米/秒, $V = 10$ 米/秒, $L = 10^4$ 米, $H = 10^3 - 10^4$ 米), $W^2/Hg \leq WV/Lg = 10^{-4}$, 这也说明静力平衡关系在大气运动中是高度准确的, 但因某种原因静力平衡遭受破坏后, 恢复速度依破坏的程度而定, 令

$$O \left[-1 - \frac{\Delta_z P}{g\pi H} \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial z'} \right] = O(10^{-n}),$$

在一般大气运动中, $n \geq 4$, 也就是静力平衡关系的误差一般不会大于万分之一, 由(2.14)式和上式可得:

$$O \left(\frac{W}{g\tau} \right) = O(10^{-n}),$$

或

$$O(\tau) = 10^n W/g. \quad (2.15)$$

现在取 $n = 3$, 如 $W = 10^0$ 米/秒 (小尺度运动), $O(\tau) = O(10^2)$ 秒, 所以当静力平衡遭受到破坏时, 将在几分钟内即可恢复, 在极端情况, 静力平衡完全遭到了破坏, 这时令 $n = 0$, 则 $O(\tau) = O(10^{-1})$ 秒, 亦即静力平衡立刻趋向恢复。

4. 演变过程中运动的准涡旋性质

上节指出, 各种类型的大气运动都有两个过程: 适应过程和

适应过程，这两个过程在时间上可以有比较清楚的区分，因此我们可以对它们分别讨论，事实上，本书的目的就是专门讨论适应问题，而不讨论演变问题，在以后的几章中，我们将集中讨论适应过程的机制，但在这以前，本节和下一节将适当地对演变过程和适应过程加以对比，借以了解两者物理性质的不同，因为我们已经看到静力平衡总是高度准确的，所以在以下的讨论中，除静力适应的研究以外，我们都是采用 x, y, p 座标。

当空气运动纯粹为地转的情形时，

$$\left. \begin{aligned} fu &= -g \frac{\partial h}{\partial y}, \\ fv &= g \frac{\partial h}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)'$$

以流函数 ψ 和速度位势 φ 来表示风速，则有

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v &= \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

设 f 为常数，由(2.4)'和(2.16)式可得：

$$\nabla^2 \psi = \frac{g}{f} \nabla^2 h, \quad (2.17)$$

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (2.18)$$

或

$$\psi = \frac{g}{f} h, \quad (2.17)'$$

$$\varphi = 0. \quad (2.18)'$$

所以地转运动纯粹是涡旋运动，速度位势为零，流函数 ψ 和等压面高度 h 有着(2.17)或(2.17)'式的关系，这是 $f = \text{常数}$ 的情况，但大尺度运动， f 不宜设为常数，这时常定的地转运动也有着一定的少量的位势部分。

中小尺度运动的情况，则比较复杂，当风场、气压场和科氏力三者平衡的时候，我们有

$$\left. \begin{aligned} R \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) + v' &= -a \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}, \\ R \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) + u' &= -a \frac{\partial \varphi'}{\partial y'}. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

由此得涡度方程:

$$R \left(u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} \right) + (R\zeta' + 1)D' = 0. \quad (2.20)$$

对中尺度运动, $R = 1$ ($V \sim 10$ 米/秒, $L = 10^5$ 米, $f = 10^{-4}$ /秒). 在无量纲方程中, 任何变量及其导数项的量级皆为 1. 但两项以上组成的变量, 如 ζ' ($= \frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'}$) 和 D' ($= \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'}$) 的量级可以小于 1, 因其组成部分可以抵消. 因此, $O(\zeta')$ 和 $O(D')$ 都可以为 10^{-m} ($m \geq 0$). 由此, (2.20) 式第二括号项中的 $R\zeta'$ 与 1 相比可以略去, 而不会改变这个括号项的量级. 这样 (2.20) 式便可以改写为:

$$u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} + D' \approx 0. \quad (2.21)$$

在这三项里, 前两项的量级是一样的. 为了使方程式平衡, 第三项的量级不可能大于前两项的任何一项, 但可以小于它们. 这时, (2.21) 式主要由前两项相平衡, 第三项可以略去. 由此可以看出, 在中尺度的常定运动中,

$$D' \approx \zeta'. \quad (2.22)$$

在小尺度运动里, $R \gg 1$. 除接近于无旋运动 ($\zeta' \ll 1$) 以外, 与 $R\zeta'$ 相比, (2.20) 式第二括号项中的 1 可以略去. 这时 (2.20) 式成为:

$$u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} + \zeta' D' \approx 0. \quad (2.23)$$

因为上式每一项都含有 ζ' , 故在比较各项量级时, ζ' 可以约去. 因此, 上式不能给出 $O(\zeta')$ 和 $O(D')$ 的比较关系, 从而在小尺度的常定运动中 $O(\zeta') \approx O(D')$.

以上说明, 一般的中尺度常定运动不纯粹是涡旋的, 但运动的位势部分小于涡旋部分. 小尺度的常定运动情况就更为复杂, 它可以是准涡旋的, 可以是准位势的, 也可以是二者混合的. 决定它

的运动性质还必须附加条件，以上是一般的情况，但我们注意到在中小尺度系统中（尤其是中尺度），有许多是接近于圆形的。对于这类圆形系统，我们可以假定它们是轴对称的，这时如风场、气压场和科氏力场三者绝对平衡时，则有

$$\left. \begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} - f v_\theta &= -g \frac{\partial h}{\partial r}, \\ v_r \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} + f \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

这里采用了极坐标 (r, θ) ， v_r 和 v_θ 分别为 r 方向和 θ 方向的风速。对小尺度运动，令 $f = 0$ 即可。由(2.24)式的第二式，可得

$$v_r = 0, \text{ 或 } \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} + f = 0.$$

这两个条件那一个成立，可借助于连续方程决定。常定的轴对称的连续方程为：

$$\frac{d}{dr}(h v_r) + \frac{h v_r}{r} = 0. \quad (2.25)$$

积分后给出：

$$h v_r = c = \text{常数}.$$

如 $c \neq 0$ ，上式要求当 $r = 0$ 时， $v_r \rightarrow \infty$ （因为 h 不能 $\rightarrow \infty$ ）。这显然不能成立，所以 c 必须为零，而上式中 h 和 r 不能恒为零，故只有 $v_r = 0$ ，于是(2.24)式变为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_\theta^2}{r} + f v_\theta &= g \frac{dh}{dr}, \\ v_r &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

所以轴对称的中型平衡运动遵守梯度风规则，小型平衡运动 ($f = 0$) 遵守涡旋风(cyclostrophic)规则。对于二者， v_r 皆为零。

引入流函数 ψ 和速度位势 φ ，对于轴对称的运动，则有

$$\begin{aligned} v_\theta &= \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \end{aligned}$$

因为 $v_r = 0$ ，所以 $\varphi = 0$ ，故平衡的轴对称中小型运动也纯粹是

涡旋运动,亦即是无势运动,

有些中小尺度的运动近于一维的,对于这类运动,我们有:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} - fv &= -g \frac{\partial h}{\partial x}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + fu &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

由(2.27)式的第二式指出, $u = 0$, 或 $\frac{\partial v}{\partial x} + f = 0$, 但结合定常的连续方程可以得出, $u = 0$. 在一维的情况中, $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, 所以定常的一维中小尺度的运动也是涡旋的, 无势的.

由以上的讨论可以看出: 准平衡状态下的大尺度运动以及轴对称的和一维的中小尺度运动的演变过程, 基本上是涡旋运动. 但在一般的准平衡状态下的中小尺度的演变过程中, 位势运动的重要性增加了.

5. 适应过程的物理性质

在上节里我们论述了演变过程中运动的物理性质. 现在让我们来讨论适应过程中运动的物理性质. 对大尺度的地转适应过程来说, 运动方程可以线性化(参看第三章), 它的无因次形式为:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon \frac{\partial u'}{\partial t'} - v' &= -a \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}, \\ \epsilon \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' &= -a \frac{\partial \varphi'}{\partial y'}. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

由此可得涡度方程:

$$\epsilon \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + D' = 0, \quad (2.29)$$

在本章第3节中已经指出, 在适应过程中 $O(\epsilon) = O(10^{-6})$, 所以

$$10^6 \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + D' \cong 0, \quad (2.29)'$$

在无量纲方程中, 个别变量及其导数项的量级皆为 10^0 . 但上节已指出, 由两项以上组成无量纲的变量如 $\zeta' \left(= \frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \right)$ 和

$D' \left(-\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)$ 可以小于 10^0 , 因此上式给出, $10^n O(\zeta') = O(D')$, 由此可以看出, $\zeta' \ll D'$. 地轉平衡破坏得愈厉害 (即 n 愈大), ζ' 愈比 D' 小, 所以地轉适应过程基本上是“位势”运动. n 愈大, “位势”运动的程度愈大.

对中小尺度的适应过程, 运动方程不能綫性化, 保留了非綫性項后, 则无量綱的渦度方程变为:

$$\varepsilon \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + R \left(u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} \right) + (R\zeta' + 1)D' = 0. \quad (2.30)$$

对中尺度运动, $R = 1$ ($V \sim 10$ 米/秒, $L = 10^5$ 米, $f = 10^{-4}$ /秒). 因为 $O(\zeta') \leq O(10^0)$, 所以仅討論各項的量級关系时, $R\zeta'$ 与 1 相比可以略去, 而有

$$\varepsilon \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} + D' \approx 0. \quad (2.31)$$

在适应过程中, $O(\varepsilon) = 10^n$, 故上式第一項的量級为 $O(10^n \zeta')$ ($n \geq 0$). 而第二、三兩項之和的量級小于等于 ζ' , 所以上式中两个主要平衡項应为第一和第四項. 于是

$$O(D') = O \left(\varepsilon \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} \right) = O(10^n \zeta'),$$

或

$$O(D') \gg O(\zeta'). \quad (2.32)$$

由此可見, 中尺度运动的适应过程, 和大尺度一样是准“位势”运动. 气压場、风場和科氏力場之間的平衡破坏得愈厉害, 則适应过程愈接近“位势”运动.

对小尺度运动, $R \gg 1$ ($V \sim 10$ 米/秒, $L = 10^4$ 米, $f = 10^{-4}$ /秒). 除 $\zeta' \ll 1$ 外, 与 $R\zeta'$ 相比, (2.30) 式最后項括号中的 1 可以略去, 故

$$\frac{\varepsilon}{R} \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} + D'\zeta' \approx 0. \quad (2.33)$$

1) “位势”是指相对于旋轉座标系统中的位势. 当 $\zeta = 0$ 时, 虽然 $f \neq 0$, 我们也称这种运动为“位势”运动, 或“无旋”运动.

上式中每一项都有 ζ' ，在比较这四项的量级时， ζ' 的量级可以在上式中约去，因此单从上式出发，我们找不出 $O(D')$ 和 $O(\zeta')$ 的大小关系，和常定情况一样，小尺度适应过程的运动性质（准“涡旋”还是准“位势”的），不能单从运动方程看出，运动性质的决定，还需要其他附加条件。

6. f 和非线性项对于运动性质的作用

由前面两节可以看出，在一般情况下，小尺度运动和大中尺度运动间的最大差异在于：无论是演变过程还是适应过程，小尺度运动的性质不能单从运动方程决定，还需附加条件，而大中尺度运动的性质可以由运动方程来决定，其原因在于大尺度运动的性质主要决定于科氏力，中尺度运动中科氏力也是一个主要的力，而在小尺度运动，科氏力是可以忽略不计的，在(2.20)和(2.30)式中，相对于 $R\zeta'$ ，1的忽略等于忽略了 f ，这时大气不再是一个旋转的流体，在一个非旋转的流体中，如果初始流场是无旋的，则此后的运动皆是无旋的，如初始流场是有旋的，但其涡度场的绝对值非常小，则此后运动的涡度也不会太大，除非有很强烈的辐散辐合，由此可以看出，小尺度运动的性质在很大程度上决定于初始状态，这就是前二节所谓的附加条件。

在旋转的流体中，情况就不同了，即使初始流场中相对涡度到处为零，但通过 f 和散度的作用， ζ 场就可以制造出来，由(2.29)式可以看出，散度 D 对涡度 ζ 的制造率与 D 和 $(f + \zeta)$ 成正比，所以在大中尺度运动中， $f \approx 0$ ，即使起始时， $\zeta = 0$ ，通过 f, D 仍可对 ζ 有相互作用。

在本章第4节中，我们还看到在大尺度的常定运动中， $D=0$ ，而在一般的中尺度常定运动中， $D \leq \zeta$ ，这说明散度在中尺度的演变过程中比在大尺度的演变过程中有着更重要的作用，这种差异在于非线性项——平流项或惯性力项在运动中作用的差异，大尺度运动的发展主要决定于科氏力和气压梯度力之间的矛盾关系，而中尺度运动的发展主要决定于惯性力、科氏力和气压梯度力

三者之間的矛盾关系，慣性力——非綫性項的出現，加強了相对渦度和散度之間的相互制約关系，这一关系的重要性，曾庆存^[14]曾經指出过，两者制約的关系強，就不可能出現一方強烈的发展，而另外一方保持微弱的現象。

7. 适应过程中的能量传播和頻散 (dispersion)

对于小尺度运动，沒有附加条件(初始状态)，我們不能决定 D 和 ζ 的大小关系。对这类运动，本节将不予討論。在大中尺度的适应过程中， $D \gg \zeta$ ，即运动为准“位势”的，而它們在适应状态中， $D = 0$ (大尺度)或 $D \leq \zeta$ (中尺度)。由此可以看出，适应状态的破坏，引导出強烈的位势运动。位势运动的強度(相对于涡旋运动)和适应状态的破坏程度是正相关。适应状态破坏了的运动恢复适应时，必須回到 $D = 0$ 或 $D \leq \zeta$ 的运动状态。因此可以推論：适应过程的物理本質为：通过 D (或运动的位势部分)气压梯度力和科氏力与慣性力发生相互調整，最后在一个新的基础上达到平衡关系。而同时在这个适应过程中， D 首先是非常强大，然后逐漸減弱，最后回到 $D = 0$ 或 $D \leq \zeta$ 。一般速度势(运动的位势部分)滿足波动方程，亦即位势运动是个波动运动。因此在适应过程中，波动的振幅先是很強大，逐漸減小到零(大尺度)，或某一定的程度(中尺度)。波动振幅之所以減小，不是由于摩擦消耗，因为在我們的模式中沒有摩擦。因此它的減弱是由于以下两个原因：(1) 波动形式的能量轉換成为其他形式的能量。(2) 它的能量的一部分或全部，由某一局部地区被散布到更大的区域或整个空間。第二种形式的減弱又有两种可能：一为通过頻散，能量向四周靜止区域传播(如二維波动)，另一形式为能量随波动本身前进，但波面越来越扩张(如点源引起的三維波)。随着波面的加大，单位体积中的波动能量逐漸減小，波动強度也就減弱。

凡是頻散波 (dispersive wave)，能量不随波速前进，而随羣速前进，这是頻散波中能量頻散的本質。当羣速大于波速时，在波动还未到达的区域，能量已先到达，使这原为平靜的地区激发出新

波, 这样使得能量逐渐散布到整个空间, 使得单位体积中的能量变为无限小, 于是波动趋于消灭。当群速小于波速时, 波动已传到前方, 而在波的后面留下一部分能量, 这样也同样地可使能量散布于整个空间, 使波动归于消灭。

由这个讨论可以看出, 如果整个空间都充满了非准平衡的运动, 则它永远得不到适应, 因为这时散布在空间的能量必定已变为无穷大, 到处皆是, 也就无法适应。

8. 大型演变过程中的能量频散

当大尺度运动基本上适应了之后, 就进入了准地转的发展或演变过程。这时按一般的理解如无其他的扰动, 它将无限地演变下去。从天气的实际情况看, 大气中的大型准地转运动也确是无休止地演变着。不过这是因为整个大气都充满着准地转的大型运动的缘故。前节曾提到, 如果大型的非地转运动也充满整个空间, 非地转的大型运动也将无休止地运转下去, 而无所谓适应过程。这时, 就没有适应过程和演变过程的分别了。现在设想有一种情况: 大尺度的准地转波动仅仅局限于某一地区, 此地区之外的大气是静止的或为纯粹的平直的地转西风。这样这个准地转运动将如何演变呢? 首先, 我们要注意到准地转运动是大型运动, 在大型运动中应该考虑地球自转参数 f 随纬度的变化, 即¹⁾ $\frac{df}{dy} = \beta$ 。在有 β 效应的旋转流体中, 准地转运动是一种长波运动, 而这种长波是一种频散波^[23-24]。因此, 如果有可能出现仅仅局限于某一局地区域的准地转运动, 则这个运动的能量也将被散布到整个空间, 最后这个长波波动趋于消灭。在能量频散这个意义上, 大型准地转演变过程和适应过程是相似的。不过由第三章可以看出, 适应过程中的能量频散是通过重力惯性波实现的, 而准地转演变过程的能量频散是由长波频散来实现的。

1) 地转适应过程也是一种大尺度运动, 按理讨论地转适应时, 也应考虑 β , 但如 L 不大于 10^6 米时, 可以不考虑 β , 参看后面第三章第 2 节。

第 三 章

地轉适应的物理性質及描写地轉 适应过程的方程組

在第二章里我們已經指出，各种尺度的运动基本上可以分为两个主要阶段：适应阶段的快过程和准平衡状态下演变的慢过程。在時間上，这两个过程基本上是分开的，因此，我們可以把它們分別进行討論。在前两章中已对它們的一般物理性質作了介紹，下面我們將比較深入地討論有关适应过程的問題。

在第二章中虽然根据运动方程本身的性質指出，大型运动中必定有适应过程和准地轉的演变过程，但是所有的討論都建筑于 $R \ll 1$ 的基础上， R 值决定于 V 值的选取。而 V 值的选取，仅根据观测結果，无理論的依据，这是一个缺点。因此，本章将首先从更根本的原因，討論大型运动准地轉的必然性。然后，再度討論适应过程的物理性質，从而給出描写地轉适应过程的适宜方程組。

1. 地球大气中准地轉运动生成的物理原因 (或 $R \ll 1$ 的原因)

在第二章中，我們引用了 Rossby 数 R 。無論在适应过程或演变过程中， R 皆起着重大的作用。在第二章里，我們对不同尺度运动中的 R 給予了不同的数值。 R 值的确定，虽然是以观测为根据的，但在一定的意义上也有着某种程度上的任意性。 R 值的确定主要問題在于特征速度的选取，因为在 $R(=V/fL)$ 式里， f 是固定的， L 选定后， R 就决定于 V 了。在第二章里，我們仅根据观测

而令 $V = 10$ 米/秒。在本節里，我們將不先給定 V 值，而更一般地討論地球大氣中准地轉生成的物理原因。由此可以間接地推論大型運動中特征速度 V 的數值。對於這個問題，作者之一^[8]有過討論，他求出

$$R(R+1) = - \frac{gH}{L^2 \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad (3.1)$$

上式中的 H 為運動鉛直方向的空間尺度、 \bar{T} 為 H 以下的平均溫度。由(3.1)式可以看出， R 主要決定於 H/L 和 $\frac{1}{f^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$ 。首先，由於大氣可以看作是覆蓋在地面上的一層很薄的气体，即 $H/L \ll 1$ ，所以大氣本身所固有的空間尺度特性是造成 $R < 1$ 的一個主要條件，也就是造成准地轉風的一個主要條件。J. G. Charney^[25] 早已指出過， $\frac{H}{L} \leq \frac{w}{u}$ ，所以在大型運動中， $w \ll u$ ，這就是說，大氣本身的尺度特性規定了大型運動基本是水平的，而水平運動是地轉運動的一個必有的特色。

非地轉程度還和 $\frac{1}{f^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$ 成正比，郭曉嵐^[26]也得到同樣的結果。

這個關係指出，旋轉速度低而溫度梯度大的流体里，非地轉的運動更容易產生。許多試驗(如 Hide^[27])都証明了這個結論。在大氣里， $f^2 \partial \bar{T} / \partial y$ 很小，令 $\bar{T} = 250^\circ \text{A}$ ， $H = 10^4$ 米，對 $L = 10^6$ 米和 $L = 5 \times 10^5$ 米，作者之一^[8]曾求出 $R \approx 1$ 的溫度梯度，並和由輻射平衡所形成的溫度梯度相比，結果是前者大於後者，亦即由輻射所形成的溫度梯度遠小於非地轉運動所要求的溫度梯度。由此可見，地球所特有的地球自轉角速和大氣中不均勻的輻射加热的分布特性，是形成准地轉運動的主要物理原因。

按 R 的定義，給定了 L ， R 值就決定於 V (f 是固定不變的)。上面的討論指出， R 值同時也決定於(3.1)式。由此可見，大型運動的特征速度 V 也是由地球自轉角速和大氣中輻射不均勻的加热所決定的，這是有它的物理根據的。

2. 地轉适应过程的綫性性質, 描写地轉

适应过程的方程組

由第二章第 3 节可以看出, 地轉适应过程基本上是綫性运动。我們將进一步肯定这个事实, 但这个結果, 仅是由运动方程得到的, 其它方程, 如热通量方程是否可以綫性化, 还必须作进一步的研究。在我們的研究中, 有时还假定了 f 为常数。在中小尺度运动里, 这个假定問題不大, 在大尺度运动里, 它能适用的范围也值得說明。此外, 非地轉风出現到什么程度即可使用綫性化的方程, 也应有一标准, 这些問題将是本节討論的对象。

对于大尺度运动, 第一、二运动方程可以写成:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= fv - g \frac{\partial h}{\partial x} = f u_1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -fu - g \frac{\partial h}{\partial y} = -f u_1, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

上式中的 u_1 和 v_1 分别为 x 和 y 方向的地轉偏差。將上式无量綱化, 則

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial u'}{\partial t'} + R \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) &= \frac{V'}{V} v'_1, \\ \varepsilon \frac{\partial v'}{\partial t'} + R \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) &= -\frac{V'}{V} u'_1, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

这里 V' 为地轉偏差的特征量, 在大尺度运动里, $O(R) = O(10^{-1})$ 。如果认为比主要項小一个量級的項可以略去, 則上式綫性化的条件为 $V'/V \geq 1$ 。亦即当地轉偏差等于或大于实际风速时, 非綫性的平流項可以略去。略去了平流項后, 有

$$O(\varepsilon) = O\left(\frac{V'}{V}\right), \quad (3.4)$$

或

$$O(\tau) = O\left(\frac{V}{V'}\right) f^{-1}. \quad (3.5)$$

(3.5)式和(2.11)式一样,说明地轉偏差愈大,运动的特征时间愈短。不过,(3.5)比(2.11)式更能精确地说明 τ 和地轉偏差程度的关系。

现在让我们来看适应过程中的热通量方程的形式。因为适应过程是快速的,热通量方程可采用絕热形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right) + u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right) + v \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right) + \frac{c^2}{g} \frac{1}{p^2} \omega = 0, \quad (3.6)$$

这里 $c^2 = \alpha R T$, $\alpha \approx \frac{R}{g} (\Gamma_d - \Gamma)$, Γ_d 为干絕热垂直温度递减率,

Γ 为垂直温度递减率。令 δh 为 h 在 p 方向上的变化特征量, P 和 W 分别为 p 和 ω 的特征量。上式的无量纲形式可以写成:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial h'}{\partial p'} \right) + R \left[u' \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial h'}{\partial p'} \right) + v' \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial h'}{\partial p'} \right) + v' \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial h'}{\partial p'} \right) \right] + \frac{c^2}{g} \frac{W}{P} \frac{1}{f \delta h} \frac{1}{p'^2} \omega' = 0, \quad (3.7)$$

在适应过程中, $O(\varepsilon) \gg O(R)$, 所以上式主要由第一和第三两项相平衡, 非綫性的温度平流项可以略去。略去平流项后, 絕热方程的物理意义为: 局部的温度变化主要是由垂直运动引起的。由此看来, 适应过程中的垂直运动是強烈的, 这是可以理解的, 因为适应过程中, 散度是非常大的。

现在让我们来討論在适应过程中, f 随緯度的变化可否忽略的問題。为此, 我們把略去了非綫性項的第一、二运动方程化成渦度方程和散度方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \beta v + f D &\approx 0, \\ \frac{\partial D}{\partial t} + \beta u - f \zeta + g \nabla^2 h &\approx 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

式中的 $\beta = df/dy$ 写成无量纲的形式, 有

$$\left. \begin{aligned} b \varepsilon \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + \frac{\beta W}{f D_0} v' + D'_1 &\approx 0, \\ \frac{\varepsilon}{b} \frac{\partial D'_1}{\partial t'} + \frac{\beta W}{f Z_0} u' - \zeta'_1 + \frac{g \delta h}{L^2 f Z_0} \nabla'^2 h' &\approx 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

其中 $b = Z_0/D_0$, Z_0 和 D_0 分别为相对涡度和散度的特征量, ζ'_1 和 D'_1 分别为无量纲的相对涡度和散度, 它们的量级都为 1. 角号 1 的采用是为了区别于第二章中的 ζ' 和 D' . ζ' 和 D' 的量级可以小于 1. 先看(3.9)式中第一式的 β 项可否略去. 在适应过程中, 散度很强, 可令 $D_0 = \frac{V}{L}$ (发展过程中 $D_0 \ll V/L$), 于是:

$$\frac{\beta V}{f D_0} = \frac{L \beta}{f} = \frac{L \cos \varphi}{a \sin \varphi},$$

这里 a 为地球半径. 由此可见, 当 $L = 10^6$ 米时, 在中高纬地区 $L \cos \varphi / a \sin \varphi \cong 10^{-1}$, 和 D'_1 相比, 故 β 项可略去, 即在涡度方程中可不考虑 f 的变化. 但当 $L \approx a$ 时, 则 β 项必须考虑.

在散度方程中, β 项可否略去, 就不只和空间的尺度有关. 在适应过程中, 相对涡度可能很小, 故不能设 $Z_0 \approx V/L$, 这时可将 β 项的系数 $\beta V / f Z_0$ 写为:

$$\frac{\beta V}{f Z_0} = \frac{\beta V}{b f D_0} = \frac{L \beta}{b f}.$$

和方程(3.9)第二式第一项的系数 ϵ/b 比它总是小的, 只有地转关系破坏得不是很严重 ($\epsilon=1$) 的非常大尺度的运动 ($L=a$), 散度方程中的 β 项才不能略去. 当地转关系破坏得非常严重时 ($\epsilon \gg 1$), 即使非常大尺度 ($L=a$) 的运动, β 项也可以略去.

应当指出, 在本节里 ζ'_1 和 D'_1 的量级均为 1, 而在第二章里的 ζ' 和 D' 的量级均小于等于 1. 两者的不统一, 是因为两者的意义有所不同. 在第二章中, ζ' 和 D' 是由

$$\left(\frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) \text{ 和 } \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)$$

定义的, 因而 ζ 和 D 的量级分别为:

$$\frac{V}{L} \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) = \frac{V}{L} \zeta' \text{ 和 } \frac{V}{L} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = \frac{V}{L} D'.$$

在本章中, ζ'_1 和 D'_1 是由 ζ/Z_0 和 D/D_0 定义的. 按此定义 ζ 和 D 的量级分别为 Z_0 和 D_0 . 由此看来, 在第二章中 ζ' 和 D' 分别出现于 ζ 和 D 的量级表达式中, 而在本章中, ζ' 和 D' 不出现在这种表

达式中,

既然, $o(\zeta_1')$ 和 $o(D_1')$ 的量级均为 1, 由(3.9)式的散度方程(第二方程)可以看出, 对地轉关系破坏得严重的运动 ($\varepsilon \gg 1$, $b \ll 1$, 参看第二章), ζ_1' 可以略去, 这时散度方程主要是以第一和第四两项相互平衡. 在一般程度的破坏 ($\varepsilon \approx 1$, $b \approx 1$) 情况下, ζ_1' 必须保留.

总结以上我们对适应过程的讨论, 可以提出下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + fD &= 0, \\ \frac{\partial D}{\partial t} + f\zeta + g\nabla^2 h &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right) + \frac{c^2}{g} \frac{1}{p^2} \omega &= 0, \\ D + \frac{\partial \omega}{\partial p} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

(3.10)式的第四式为連續方程, 对于非常大尺度的运动, 则需要适当地考虑 β 的作用.

3. 地轉适应运动的若干物理性质的进一步讨论

在第二章里, 我们仅从运动方程出发, 对一般的适应过程和发展过程的物理性质有了一些原则性的讨论. 现在我们有了描写地轉适应的方程组. 从这个方程组, 我们可以不根据详细的数学分析, 就可以看出更多的地轉适应运动中的物理性质. 因为这是一个綫性方程组, 一切的变化都与平流无关, 涡度变化仅是由散度引起的. 而温度的变化, 则仅是由垂直运动引起的. 这些都是很容易理解的现象. 因为在适应运动中散度是非常强的, 它一方面引导出涡度的巨大变化, 另一方面它制造出强大的垂直运动, 而强大的垂直运动又引起温度的絕热变化. 在适应过程中, 地轉涡度偏差也必然是大的, 由它誘导出的散度变化也必然是强烈的, 是超过其它因子对散度的影响的.

对于地轉适应过程中的涡度和散度量级, 在第二章中曾有过

討論。在这里我們又出現了描写运动的另一因子，即 ω ，在适应过程中 ω 的量級也容易予以估計。从(3.3)和(3.7)式（略去平流項）可以看出， ϵ 分別等于 V'/V 和 $\frac{c^2}{g} \frac{\omega}{P} \frac{1}{f\delta h}$ ，由此可得：

$$\omega = \frac{gPf\delta h}{c^2} \frac{V'}{V}.$$

由此看出，垂直运动的速度与地轉偏差成正比，与大气层結的稳定度(c^2)成反比。上式中的 δh 不便于估計。引用温度变化特征量 δT ，則有：

$$\omega = \frac{f\delta T}{\Gamma_p} \frac{V'}{V} \quad (3.11)$$

其中 $\Gamma_p = \frac{1}{g\rho}(\Gamma_s - \Gamma)$ ，今取 $\Gamma_s - \Gamma = 3 \times 10^{-3}$ 度/米， $g=10$ 米/秒²， $\rho = 10^3$ 克/米³， $f = 10^{-4}$ /秒， $\delta T = 10$ 度和 $V'/V = .1$ ，則 $\omega = \frac{1}{3} \times 10^4$ 克·米⁻¹·秒⁻³，如将 p 垂直速度換作直綫的垂直速度 W ，則 $W = \frac{1}{3}$ 米·秒⁻¹，由此看来，适应过程中的垂直速度量級为 10^{-1} — 10^0 米/秒，这比发展过程大 1—2 个量級。

由(3.10)式綫性化的性質，我們还可以推断出地轉适应运动的另一物理性質：即等散度綫（即等 D 值綫）应与流綫的交角不大。在适应过程中，散度本身是大的，如果它的等值綫与流綫交角很大，則散度平流必不会小。这样它必会出现于散度方程。既然平流項不出現于散度方程，則散度的传播和变化必然是由另一种动力过程引起的。在第二章中已經指出：它是一种波动过程。

无論在第二章或本章中，我們都可以看出：地轉关系破坏得愈厉害，其运动就愈接近位勢运动。这样可以推論地轉偏差(V')和散度(D_0)有着某种比例关系。由(3.10)式的第四式，有

$$D_0 = \frac{\omega}{P}. \quad (3.12)$$

比較(3.11)和(3.12)式，得

$$D_0 = - \frac{f \delta T}{p \Gamma_p} \frac{V'}{V}. \quad (3.13)$$

由上式指出, D_0 与 V' 成正比, 与大气层結稳定度成反比.

现在再来看相对涡度特征量 Z_0 和 V' 有无关系. 从(3.10)式的第二式和略去非綫性項的(3.3)式, 可以看出, ϵ 分別等于 $\epsilon = D_0/Z_0$ 和 V'/V , 由此有

$$\frac{D_0}{Z_0} = \frac{V'}{V}. \quad (3.14)$$

比較(3.13)和(3.14)式, 得

$$Z_0 = \frac{f \delta T}{p \Gamma_p}. \quad (3.15)$$

上式指出, Z_0 不直接和地轉偏差发生关系, 而 D_0 正比于 V' . 这就說明为什么地轉偏差愈大, 其运动就愈趋向位势运动.

陈秋士^[10]曾得出类似(3.14)式的关系. 他并以 $c_0 \sim Z_0/D_0$ 为度量地轉关系破坏程度的一个参数. c_0 愈小, 地轉关系破坏得愈厉害. 結合我們的討論可以看出, c_0 的引用是有物理意义的. 陈秋士更进一步指出, 当 $c_0 \sim 1-1.5$ 时, 运动方程和絕热方程的平流項可以略去. 这里我們也应该指出: 陈秋士提出的 Z_0/D_0 与地轉偏差的关系式和(3.14)式也有些不同. 它是这样的: $Z_0/D_0 \sim V_g/V'$, 这里 V_g 为地轉风特征量. 显然, 这只有在 $V \sim V_g$ 时, 地轉关系破坏得还不太严重的情况下才能成立. 实际上, 在他們的研究中, 确实用了 $V \sim V_g$ 的假定.

第四章

正压大气中的地轉适应过程

正压大气是大气中最基本也是最简单的状态。实际大气中的許多动力过程，都可以在这种大气中得到近似的模拟。地轉适应过程也是如此，大部分地轉适应过程的基本原则，都可以在正压大气里得到解决。因此这里首先研究正压的情况，在第五章中再討論斜压的影响。

1. 方程組和解的初步分析

(3.10) 式是描写斜压大气中地轉适应的方程組，在正压大气中无需絕热方程，同时(3.10)式中的連續方程(第四式)也可以用更简单的形式来代替。設大气是均質不可压缩的，其平均厚度(即未被扰动状态的厚度)为 H ，則連續方程可写为：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

很容易看出，在适应过程中，局地变化項要比平流項大一个量級，因而后者可以略去。令 $h = H + h'$ ， h' 为扰动高度。显然 $h' \ll H$ ，因此上式可写成：

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

或

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + D = 0, \quad (4.1)$$

其中 $\sigma = h'/H$ 。

將 σ 引入(3.10)式，它的前二式为：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + fD = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + f\zeta + c_0^2 \nabla^2 \sigma = 0, \quad (4.3)$$

其中 $c_0^2 = gH$ 为无旋轉流体中重力外波波速的平方, (4.1) — (4.3) 式即为研究正压大气中适应过程的基本方程組.

現引进速度位势(φ)和流函数(ψ), 我們有:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v &= \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

由此有 $\zeta = \nabla^2 \psi$, $D = \nabla^2 \varphi$, 將它們引入(4.1) — (4.3)式, 則

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla^2 \varphi &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + f\varphi &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - f\psi + c_0^2 \sigma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

这就是 A. M. Огьхоб^[5] 用来研究地轉适应的方程組.

將(4.5)方程組稍加改变, 得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi - f\sigma) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \varphi + f^2 \varphi &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

由此方程組的第一式指出: 在适应过程中有一个不变量, A. M. Огьхоб 称之为位势渦度, 就是

$$\nabla^2 \psi - f\sigma = \text{常数}. \quad (4.7)$$

这个常数决定于初值.

第二章的分析指出: 在适应后的运动中, $\varphi = 0$, 代入(4.5)式, 得:

$$f\psi = c_0^2\sigma, \quad (4.8)$$

很容易看出,这就是地轉关系.

(4.7)和(4.8)式指出:(4.6)式的解可以分成两部分,其中一部分为 ψ_1, σ_1 和 φ_1 . 这部分解满足下列关系:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2\psi_1 - f\sigma_1 &= \text{常数}, \\ f\psi_1 &= c_0^2\sigma_1, \\ \varphi_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

这部分解也就是我們所需要的最后地轉适应状态.

(4.6)式的第二式是和(1.8)式形式相同的波动方程,因此解的第二部分为波解: ψ_2, σ_2 和 φ_2 . 而且 ψ_2, σ_2 和 φ_2 ,还必定在 $t \rightarrow \infty$ 时趋向于零,否則地轉适应将无法达到.

2. 适应过程中波的頻散

上述解的第二部分既然是波动,同时它又必須在 $t \rightarrow \infty$ 时趋向于零. 因此,一定是局限于一个局地区域的波动能量,散布到整个空間. 如果局限于一維空間的問題,(4.6)式的第二式和(1.11)式完全一样. 对于滿足这个方程的波动能量的頻散, C. G. Rossby^[2]有过詳細的討論,現簡述如下.

由方程組(4.6)第二式,可得波速和羣速为:

$$c = \pm \sqrt{c_0^2 + \frac{f^2 L^2}{4\pi^2}}, \quad (4.10a)$$

$$c_k = \frac{c_0^2}{c} = \pm \frac{c_0^2}{\sqrt{c_0^2 + \frac{f^2 L^2}{4\pi^2}}}. \quad (4.10b)$$

因此,波长愈短,波速愈小,而羣速愈大. 最大羣速值为:

$$|c_{g\max}| = \frac{c_0^2}{c_0} = c_0 = \sqrt{gH}. \quad (4.11)$$

它与波长无关. 能量既然由羣速輸送,就可以看出:一个局地扰动源所产生的扰动,将局限于两个移速相同但方向相反的鋒面之內,它們的移速为 $c_0 = \sqrt{gH} = c_{g\max}$. A. Cahn^[4]的計算分析,

就指出了这一点。

現今方程組(4.6)第二式的解为:

$$\varphi = \varphi_0(x, t) e^{i\alpha(x, t)}. \quad (4.12)$$

并定义频率(ν)和波数(k)分别为:

$$\nu = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad k = - \frac{\partial \alpha}{\partial x}. \quad (4.13)$$

代入方程組(4.6)第二式, 并分别令虚部和实部为零, 則得二个方程, 其中之一为:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial c_k E}{\partial x} = - \frac{E}{\nu} \frac{d\nu}{dt}, \quad (4.14)$$

这里 $E \propto \varphi_0^2$ 表示波动的能量, $\frac{d}{dt}$ 定义为:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_k \frac{\partial}{\partial x}. \quad (4.15)$$

在频率个别变化可以略去的区域, (4.14)式变为:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial c_k E}{\partial x} = 0. \quad (4.16)$$

C. G. Rossby 指出, 离开扰源和扰动传播区域的边界 ($x = \pm c_0 t$), (4.16)式就可以应用。

(4.16)式有它特殊的物理意义, 設考虑向正 x 方向前进的波列, 自某平面(位于 x)以东(南北的宽度为一单位)的总能量为:

$$A = \int_x^\infty E \delta x. \quad (4.17)$$

如这个平面的移速为 Dx/Dt , 总能量 A 的变化率为:

$$\frac{DA}{Dt} = \int_x^\infty \frac{\partial E}{\partial t} \delta x + E \frac{Dx}{Dt}. \quad (4.18)$$

能量变化率 DA/Dt 可以解释为自右向左穿过移动平面的能量通量。这个通量为 x 和 t 的函数, 如 $\frac{Dx}{Dt} = c_k$, 則穿过群速平面的能量通量为:

$$K(x, t) = - c_k E + \int_x^\infty \frac{\partial E}{\partial t} \delta x. \quad (4.19)$$

由(4.14)和(4.19)式有:

$$\frac{\partial K}{\partial x} = -\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial c_g E}{\partial x} = \frac{E}{v} \frac{dv}{dt}. \quad (4.20)$$

在 dv/dt 可以略去的区域, 則

$$\frac{\partial K}{\partial x} = -\left(\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(c_g E)}{\partial x}\right) = 0. \quad (4.21)$$

此式表明, 在两个随羣速移动的平面之間的能量是不变的. C. G. Rossby 的这种能量传播和羣速的关系, 推广了过去能量由羣速传播的概念.

C. G. Rossby 还指出, 对于一个局地扰源所产生的扰动来說, 羣速可写为:

$$c_g = \frac{x}{t}. \quad (4.22)$$

(4.22) 式表示在任意一个时刻, c_g 是向下游 (即向波动移动的方向) 增加的. 因此两个随羣速移动的平面之間的距离, 随時間加大. 但由(4.21)式看, 它們之間的能量是不变的, 故最后每单位距离内的能量必趋向于零, 結果扰动消灭. 这就是第二部分的解 $(\phi_2, \varphi_2, \sigma_2)$ 趋向于零的物理本质.

C. G. Rossby 还对点源扰动消灭的速度作了估計. 他得到:

$$E = \frac{E_0(x - c_g t)}{1 + t c'_{g_0}(x - c_g t)}, \quad (4.23)$$

上式角号“0”表示初值. $c'_{g_0}(\xi) = dc_{g_0}/d\xi$. 在我們这里, 显然 $c'_{g_0} > 0$ [参看(4.22)式], 因此能量是与 t 成反比地消滅.

最后, 我們再次提出第一章第 5 节所指出的 f 的作用, 它使一維重力波变为頻散的. 因此, 也就是 f 使一維的地轉适应成为可能. 二維重力波本身虽是頻散的, 但在 f 場中二維重力波的頻散速度得到了加大.

3. 重力慣性波的激发

前面指出, 适应过程中的一个重要的机制是: 重力慣性波的

消散，但这种波在什么情况下才会出现呢？在一般数值预告中，这种波被认为“气象噪音”而被滤去，滤去这种波动的一种方法，就是采用准地转假定，在准地转运动中不再存在重力波的问题。早在 1947 年 J. Charney^[28] 即已指出，由此看来，重力惯性波的存在是和地转偏差分不开的，在 1958 年 A. C. Moun^[29] 就已指出，大气中的重力波是地转偏差激发出来的，Y. Ogura 和 J. G. Charney^[30] 也证明了这点。现在我们采用他们的方法，在正压情况中对此问题加以阐述。

令 ψ , φ 和 σ 的初值为¹⁾：

$$\begin{aligned}\psi(x, 0) &= \psi_0 e^{imx}, \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0 e^{imx}, \\ \sigma(x, 0) &= \sigma_0 e^{imx}.\end{aligned}\quad (4.24)$$

(4.5)式的解可写为：

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \frac{(m^2\psi_0 + f\sigma_0)c_0^2}{c_0^2m^2 + f^2} e^{imx} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{f}{\mu} \left[\frac{\mu(f\psi_0 - c_0^2\sigma_0)}{c_0^2m^2 + f^2} - i\varphi_0 \right] e^{i(mx-\mu t)} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{f}{\mu} \left[\frac{\mu(f\psi_0 - c_0^2\sigma_0)}{c_0^2m^2 + f^2} + i\varphi_0 \right] e^{i(mx+\mu t)},\end{aligned}\quad (4.25a)$$

$$\begin{aligned}\varphi(x, t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\mu(f\psi_0 - c_0^2\sigma_0)i}{c_0^2m^2 + f^2} + \varphi_0 \right] e^{i(mx-\mu t)} - \\ &- \frac{1}{2} \left[\frac{\mu(f\psi_0 - c_0^2\sigma_0)i}{c_0^2m^2 + f^2} - \varphi_0 \right] e^{i(mx+\mu t)},\end{aligned}\quad (4.25b)$$

$$\begin{aligned}\sigma(x, t) &= \frac{f(m^2\psi_0 + f\sigma_0)}{c_0^2m^2 + f^2} e^{imx} - \\ &- \frac{1}{2} \left[\frac{m^2(f\psi_0 - c_0^2\sigma_0)}{c_0^2m^2 + f^2} - i\varphi_0 \right] e^{i(mx-\mu t)} - \\ &- \frac{1}{2} \left[\frac{m^2(f\psi_0 - c_0^2\sigma_0)}{c_0^2m^2 + f^2} + i\varphi_0 \right] e^{i(mx+\mu t)},\end{aligned}\quad (4.25c)$$

这里

1) 二维问题与一维问题完全相同。

$$\mu^2 = m^2 c_0^2 + f^2, \quad (4.26)$$

由(4.25a)——(4.25c)式,我們可以看到(4.5)式的解可以分成两部分: $(\psi_1, \varphi_1, \sigma_1)$ 和 $(\psi_2, \varphi_2, \sigma_2)$, 第一部分是常定的部分, 即(4.25a)和(4.25c)的第一項, 并 $\varphi_1 = 0$. 由(4.25a)和(4.25c)的第一項可以看出, $f\psi_1 = c_0^2 \sigma_1$, 故这部分解是满足地轉关系的. 同时, $\nabla^2 \psi_1 - f\sigma_1 = \nabla^2 \psi(x, 0) - f\sigma(x, 0)$, 因此, 这部分解满足(4.9)式, 也就是 §4.1 所分析的适应过程解的第一部分. 至于 $(\psi_2, \varphi_2, \sigma_2)$ 就是(4.25a)——(4.25c)式其余的部分, 它显然是(4.5)式的波解部分. 由此可以看出, A. M. Obyxob^[5] 对(4.5)式解的性质的分析是正确的. 不过当 $t \rightarrow \infty$ 时, (4.25a)——(4.25c)的 ψ_2, φ_2 和 σ_2 不趋向于零, 这就和前面的分析是不同的, 这是因为我們的初始扰动充满了整个空間, 充满了整个空間的非地轉扰动, 是无法达到准地轉平衡的, 亦即不能有适应过程. 对此第三章已經提到, 下面还要討論.

現在讓我們把注意力放在波解 $(\psi_2, \varphi_2, \sigma_2)$ 上. 显然这是重力慣性波, 因为它的頻率方程满足(4.10a)式. 这部分解是由两部分組成的, 一部分与 $f\psi_0 = c_0^2 \sigma_0$ 成正比, 另一部分与 φ_0 成正比. 它們都是初始运动的非地轉部分, 所以大气中重力慣性波的強度与地轉偏差成正比, 因此大气中的地轉偏差可以激发出重力慣性波. 由此看来, 在一般情况下, 当大气运动中出现強大的地轉偏差时, 就会激发出強大的重力慣性波. 通过重力慣性波的頻散, 地轉偏差趋于消灭, 重新恢复地轉平衡的关系, 所以地轉偏差所引起的重力波反过来又可以消灭地轉偏差.

由(4.25a)和(4.25b)式还可以看出: $|\varphi_2|/|\psi_2| = \mu/f$, 亦即由地轉偏差所激发的重力慣性波动的能量分为两部分: 位势运动部分和涡旋运动部分, 二者之比为 μ/f . μ^{-1} 可以看作与运动的时间特征量 τ 成正比, 所以 $|\varphi_2|/|\psi_2| \propto (\tau f)^{-1} = \epsilon$. 当 ϵ 非常大时(即地轉偏差的量級大), $|\varphi_2| \gg |\psi_2|$; 当 ϵ 非常小时, $|\varphi_2| \ll |\psi_2|$. 前者为准位势的运动, 后者为准涡旋的运动, 这就再一次証实了第二章第4节中的討論.

4. 地轉适应的例子

現在讓我們來討論非地轉运动的最后的适应状态。根据本章第一节的分析,(4.5)式解的第二部分随着时间的增长而趋向于零,所以不論初始运动的状态如何,最后的适应状态都是能以(4.9)式来描写的。如果我們的兴趣不在适应的过程,而在最后的状态,則只解(4.9)式就可以了。(4.9)式中第一式的常数由初值决定,将第二式代入第一式,得

$$\nabla^2 \psi_1 - \frac{f^2}{c_0^2} \psi_1 = \nabla^2 \psi_0 - f \sigma_0 = Q(x, y). \quad (4.27)$$

其中的角号“0”表示初值。因为上式只含有 ψ_0 和 σ_0 ,所以最后适应状态与初始风場的位势速度部分无关,这部分只能影响适应的过程。

(4.27)式的解为:

$$\psi_1(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint Q(\xi, \eta) K_0 \left[\frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{L_0} \right] d\xi d\eta, \quad (4.28)$$

这里 K_0 为虚变数的零阶第一类贝塞尔函数, $L_0 = c_0/f$ 为具有长度量綱的一个常数。C. G. Rossby^[3]称 L_0 为“变形半径”,A. M. Обыхов^[5]称之为“作用半径”。在下面我們可以看到,在适应过程中 L_0 是一个重要的常数,因为当 $r \gg 1$ 时, $K_0(r) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{-r}$,所以(4.28)式是不难用数值方法积分的。A. M. Обыхов給出了一个特殊的軸对称的初始場,即 $t=0$ 时, $\sigma_0=0$,而速度場由流函数:

$$\psi_0(x, y) = A \left[2 + \left(\frac{R}{L_0} \right)^2 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}} \quad (4.29)$$

来描述,式中 $r = x^2 + y^2$,由(4.28)和(4.29)式計算出适应后的 $\psi_1(x, y)$ 为:

$$\phi_1(x, y) = A \left[2 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}}. \quad (4.30)$$

适应后的 $\sigma_1(x, y)$ 可由地转关系求出, 以气压 $p'_1(x, y)$ 来代替 $\sigma_1(x, y)$, 则得:

$$p'_1(x, y) = f \rho_0 b_1 = B \left[2 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}}. \quad (4.31)$$

以上各式中的 R 可看作是涡旋的半径, $2A/R$ 则为特征速度. A. M. Obyxov 取 $R = 500$ 公里, $2A/R = 10$ 米/秒, $L_0 = 2200$ 公里, 在此情况下 B 等于 23 毫巴. 图 1 为初始风场与适应后的风场

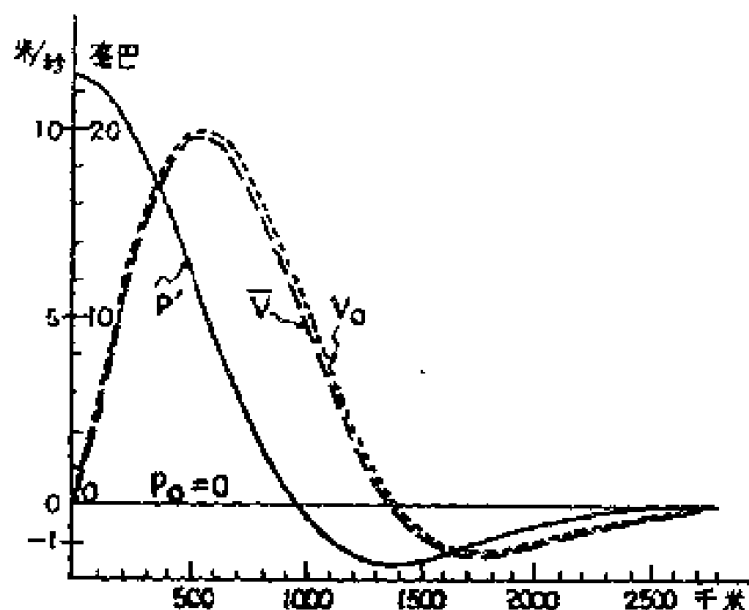


图 1 正压大气中初始速度(V_0)的分布和适应后速度(\bar{V})和气压(P')的分布^[5]

和气压场的对比. 由图 1 可以看到, 在所考虑的例子中, 适应过程中流场变化不大, 它的速度变化不过 5%, 而相应的气压场则起了根本的变化, 在中心气压变化超过了 20 毫巴.

这是初值只有风场而气压梯度为零的情况, 现今初始风场为零而气压不为零, 于是 σ_0 为:

$$\sigma_0(x, y) = \frac{c_0^2}{f^2} D \left[\left(\frac{8}{R^2} + \frac{1}{L_0^2} \right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{1}{L_0^2} + \frac{r^4}{R^6} \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}}, \quad (4.32)$$

$$\sigma_1 = D \left[2 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}}, \quad (4.33)$$

如以气压单位表示,则上式应乘以 $g\rho_0 H$, 与 σ_1 相对应的最终流函数 ϕ_1 为:

$$\phi_1 = D \frac{c_0^2}{f} \left[2 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}}, \quad (4.34)$$

如仍取 $R = 500$ 公里, $L_0 = 2200$ 公里, 则初始的中心气压与适应后的中心气压之比为 $(\sigma_0)_{r=0}/(\sigma_1)_{r=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{8L_0^2}{R^2} + 2 \right) \approx 76$, 即适应后的气压场强度比初始气压场强度小了 76 倍, 由此看来, 实际上在这个例子中气压场是消灭了, 与最终气压场相适应的风场自然也基本上是不存在的。

上面的计算指出: 在 $R = 500$ 公里和 $L_0 = 2200$ 公里的情况下, 没有气压支持的非地转风场可以激发出气压场与之相适应; 而没有风场支持的非地转气压场则要趋于消灭, 因此古典的“风适应气压梯度”的想法至少不是经常正确的, 在大气运动中很大一部分的运动, 是气压场适应流场, 而后者的演变决定于位势涡度的分布。

5. 地转适应的结果与初始扰动尺度的关系

根据 C. G. Rossby 和 A. M. Ogyxon 的计算看来, 他们都推翻了古典的想法, 但古典的想法是否完全不对呢? 作者之一(叶笃正^[81])曾提出了这个问题, 他从具体的计算结果指出: 流场适应于气压场, 或者反之, 决定于扰动的尺度, 在尺度小的运动中, 气压场向流场适应; 在尺度大的运动中, 风场向气压场适应, 这个结果可以从(4.29)和(4.30)式以及(4.32)和(4.33)式的比较中看出, 将(4.29)和(4.30)式对 r 微分, 则得最终风场和初始风场, 它们之比为:

$$r_\psi = \frac{\frac{d\psi_1}{dr}}{\frac{d\psi_0}{dr}} = \frac{\psi - \left(\frac{r}{R}\right)^2}{\psi + \left(\frac{R}{L_0}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}, \quad (4.35)$$

由此可以看出,当 $R \ll L_0$ 时, $r_\psi \approx 1$; 但当 $R \gg L_0$ 时, 则 $r_\psi \ll 1$. 这就说明较小范围的没有气压场支持的非地转风场可以维持, 而气压场则要向它适应; 反之, 大范围的没有气压场支持的非地转风场, 则不能维持.

再求(4.33)和(4.32)式之比, 得最终气压场和初始气压场之比为:

$$r_p = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \frac{2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}{\left(\frac{8L_0^2}{R^2} + 1\right)\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + 1 + \frac{L_0^2}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^4}. \quad (4.36)$$

由此可以看出, 当 $R \ll L_0$ 时, $r_p \ll 1$; 当 $R \gg L_0$ 时, 我们的注意力集中于 $r < R$ 的区域, 则 $r_p \approx 1$. 所以小范围的没有风场支持的非地转的气压场是不能维持的, 而大范围的没有风场支持的非地转气压场可以维持, 而风场向它适应.

事实上地转适应与扰动尺度的关系, 也可以很简单地从(4.25a)——(4.25c)式看出. 这些方程指出, 在适应过程中初始扰动的能量分配于两种形式的运动: 一为准地转的慢运动, 由(4.25a)式和(4.25c)式的第一项代表; 另一种为重力惯性运动, 由(4.25a)——(4.25c)式的其余各项代表. 准地转慢运动的能量是要保持下去的, 而重力惯性波的能量则将被频散掉的. 现在让我们注意第一种运动, 即(4.25a)和(4.25c)式的第一项, 它们分别代表最终状态的风场和气压场. 设初值只有风场 ($\sigma_0 = 0$), 则这两项的强度正比于 $\frac{m^2}{m^2 + f^2/c_0^2}$. 当扰动尺度小时 (即 m 很大), 则这个比数接近于

1; 当扰动尺度很大时 (即 m 很小), 则这个比数趋近于零. 相反, 设初值只有气压场时 ($\psi_0 = 0$), 则这两项的强度正比于 $\frac{f^2/c_0^2}{m^2 + f^2/c_0^2}$. 当

$m \rightarrow 0$ 时, 这个比数接近于 1; 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 这个比数趋近于零, 这和上述计算结果是相同的. 曾庆存^[9]和陈秋士^[10]曾同时指出, 扰动尺度的大小是以 $L_0 = c_0/f$ 为度量的, 这也可以由这两个比数看出, 因为这两个比数可以分别写为 $1 / \left(1 + \frac{L_0^2}{4\pi^2 L^2}\right)$ 和 $1 / \left(1 + \frac{4\pi^2 L_0^2}{L^2}\right)$ ($L = 2\pi/m$).

上述结果是在特殊情况下求得的, 在一般情况下可以按曾庆存^[9]将 σ_1 的解写成:

$$\sigma_1 = \frac{f}{c_0^2} \psi_0 - \frac{f^2}{2\pi c_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{f}{c_0^2} \psi_0 - \sigma_0 \right] K_0(r_1) r_1 dr_1 d\theta, \quad (4.37)$$

其中 $r_1 = \frac{r}{L_0}$. 若初始扰动限于 $r_1 \leq R'$ 之内, 则

$$\sigma_1 = \frac{f}{c_0^2} \psi_0 - \left(\frac{f}{c_0^2} \psi_0^* - \sigma_0^* \right) [1 - R' K_1(R')],$$

这里 * 号表示平均值, 当 $R' = \frac{R}{L_0} \ll 1$ 时, $1 - R' K_1(R') \approx 0$, 所以

$$\sigma_1 \approx \frac{f}{c_0^2} \psi_0.$$

当 $R' = \frac{R}{L_0} \gg 1$ 时, $1 - R' K_1(R') \approx 1$, 所以扰动比较均匀时

$$\sigma_1 \approx \frac{f}{c_0^2} \psi_0 - \left(\frac{f}{c_0^2} \psi_0^* - \sigma_0^* \right) \approx \sigma_0^*.$$

这个分析指出, 对于 $R \gg L_0$ 的扰动, 最终气压场与初始气压场无大变化; 而当 $R \ll L_0$ 时, 气压场向风场适应.

由于 $L_0 = c_0/f$, 正压大气中的 c_0 大于斜压大气中的 c_0 , 因而对同一尺度的运动, 正压大气中风场更易于维持, 在斜压大气中气压场更易于维持.

叶笃正和朱抱真^[34]曾就地转适应对尺度的依赖关系给出了这样一个物理解释: 当只有风场(设为西风)没有气压场时, 柯氏力产生北风, 使质量在气流的右边堆集, 堆集结果, 造成南北气压梯

度,以平衡柯氏力。当只有气压場(設南边气压高,北边气压低)沒有风場时,由气压梯度力产生南风,再由柯氏力产生西风。然后由西风的柯氏力去平衡气压梯度力。从这种适应过程来看,当只有气压場时,一方面产生了西风,同时由西风得到了平衡气压場的柯氏力。但另一方面,它也向北輸送質量,削弱了气压場。因此对于小范围只有气压場的不平衡运动,在柯氏力还没有能发展到可以平衡气压梯度力时,气压場的大部分已被填塞了。对于很大范围只有气压場的不平衡运动,柯氏力有足够的时间可以发展到平衡气压梯度力,而絕大部分的气压不被填塞。因为范围愈大,范围两端的气压差也愈大,需要填塞它的质量也愈多,时间也愈长。只有西风风場时,由此产生的北风,一方面运送質量以建立平衡西风风場的气压場,另一方面也产生柯氏力以削弱西风。設有两种极端情况,一种空間范围很小,另一种空間范围很大,而二者西风风速相同。对于前者(小范围),平衡西风风場的气压場很快的就可以建立(因为所需要向南輸送的质量少),对于后者(大范围),平衡西风风場的气压場需要很长时间才能建立。所以对于小范围情况,西风风場未被大量减弱时,气压場已經建立好了;对于大范围情况,西风风場則已大量被减弱了,气压場才能建立。这是对于空間尺度作用的一个物理解释。

6. 非地轉扰动尺度与地轉适应速度的关系

非地轉扰动尺度不仅影响着最終的适应状态,它还决定着場的适应速度。地轉适应的实现依赖于波动能量的頻散,而能量頻散的速度一方面决定于羣速的大小,另一方面决定于被頻散的波动能量的分布情况。显然,在一定羣速条件下,波动能量分布愈广,能量頻散完毕所需要的时间愈长,因而地轉适应速度亦愈慢。A. M. Одынов^[5] 在他的計算中,曾給出适应时间为三、四小时。这是正压大气中 $R = 500$ 公里的情况,如增大 R 值,則适应时间就将加长。

为了进一步說明这个問題,我們在下列边界条件下:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y, 0) &= g_1(x, y) = \text{常数, 当 } r \leq R; \\ &= 0, \text{ 当 } r > R; \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} &= g_2(x, y) = \text{常数, 当 } r \leq R; \\ &= 0, \text{ 当 } r > R \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

$$(r = \sqrt{x^2 + y^2}).$$

解方程組(4.6)的第二式,由方程組(4.5)可以看出, $\varphi(x, y, 0)$ 和 $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0}$ 表示初始时刻的非地轉風的分布, 方程組(4.6)第二式的解为^[5]:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) &= -\frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\rho \leq c_0 t} \frac{g_1(x + \rho \cos \theta, y + \rho \sin \theta)}{\sqrt{(c_0 t)^2 - \rho^2}} \times \\ &\times \cos \left(\frac{f}{c_0} \sqrt{(c_0 t)^2 - \rho^2} \right) \rho d\rho d\theta + \\ &+ \frac{1}{2\pi c_0} \iint_{\rho \leq c_0 t} \frac{g_2(x + \rho \cos \theta, y + \rho \sin \theta)}{\sqrt{(c_0 t)^2 - \rho^2}} \times \\ &\times \cos \left(\frac{f}{c_0} \sqrt{(c_0 t)^2 - \rho^2} \right) \rho d\rho d\theta. \end{aligned} \quad (4.39)$$

不失一般性,我們可以討論原点($x = 0, y = 0$)的 $\varphi(0, 0, t)$, 并令 $ct \geq R$, 于是(4.39)式变为:

$$\begin{aligned} \varphi(0, 0, t) &= \frac{g_1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(c_0 t - \sqrt{(c_0 t)^2 - R^2} \right) \times \right. \\ &\times \left. \cos \left(\frac{f}{c_0} \sqrt{(c_0 t)^2 - \rho^{*2}} \right) \right] + \\ &+ \frac{g_2}{c_0} \left(c_0 t - \sqrt{(c_0 t)^2 - R^2} \right) \times \\ &\times \cos \left(\frac{f}{c_0} \sqrt{(c_0 t)^2 - \rho^{*2}} \right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$(c_0 t \geq R),$$

其中 $0 \leq \rho^* \leq R$, 当 $(c_0 t) \gg R$ 时, 上式趋向于零, 显然 R 愈大, t 亦必須愈大, 才能使 $\varphi(0, 0, t)$ 接近于零, 这就說明了适应時間随着非地轉扰动尺度增长的关系, 上式还指出, 适应時間和

c_0 的关系。当 R 固定时, c_0 大, 则 t 不需要太大, 即可使 φ 接近于零; c_0 小, 则 t 要大才能使 φ 接近于零。按(4.10b)式 c_0 为 c_x 的最大值, 这就说明适应速度与重力惯性波的最大壘速的依赖关系。

7. 有限空间中的适应问题——非地转

运动产生的一种机制

上节讨论了尺度与适应过程的关系, 这种关系只能适用于有限尺度的情况。当扰动尺度趋向于无限时, 这种关系就不再成立, 因为这时波动能量充满了整个空间, 而无处频散, 这点已在本章第4节中指出。事实上, 不仅充满整个空间的非地转扰动不能再恢复地转适应, 一个有限空间(如地球)中的任何非地转扰动都不能严格地再恢复地转适应。因为这时波动能量不是频散到无穷空间, 单位体积中的波动能量不再为零, 故此地转平衡不能严格地恢复。同时, 单位体积中波动能量虽小, 但通过某种作用它有集中的可能, 波动能量集中的地区, 就要出现大的非地转运动。

为了说明波动能量集中的可能, 设在一均匀的西风带(\bar{u})中, 每隔一定的距离引入一强度相等的非地转扰动。研究这种扰动发展的方程组可以写成:

$$\left. \begin{aligned} Du &= fv - gh_x, \\ Dv &= -fu, \\ Dh &= \frac{f\bar{u}}{g}v - Hu_x, \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

这里 $D = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}$, 由此得:

$$\left. \begin{aligned} D \left(D^2 - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) h + f^2 h_t &= 0, \\ (D^2 + f^2)u &= -gDh_t, \\ (D^2 + f^2)v &= -gfh_x. \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

这就是 K. Hinkelmann^[32] 用于研究“气象噪音”的方程组。设初值如图 2a 和图 2b 所示, 该图指出, 每个扰动区域为 L/m , 每两个相

邻的扰动距离为 $L\left(1 - \frac{1}{m}\right)$ 。每个 $h(x, 0)$ 的扰动为余弦波形, 每个 $u(x, 0)$ 为正弦波形, $v(x, 0) = 0$ 。当 L 一定时, 扰动区域随 m 的增大而减小, 而无扰区则随 m 的加大而加大。在我们的模式里, 这种扰动显然是完全非地转的。

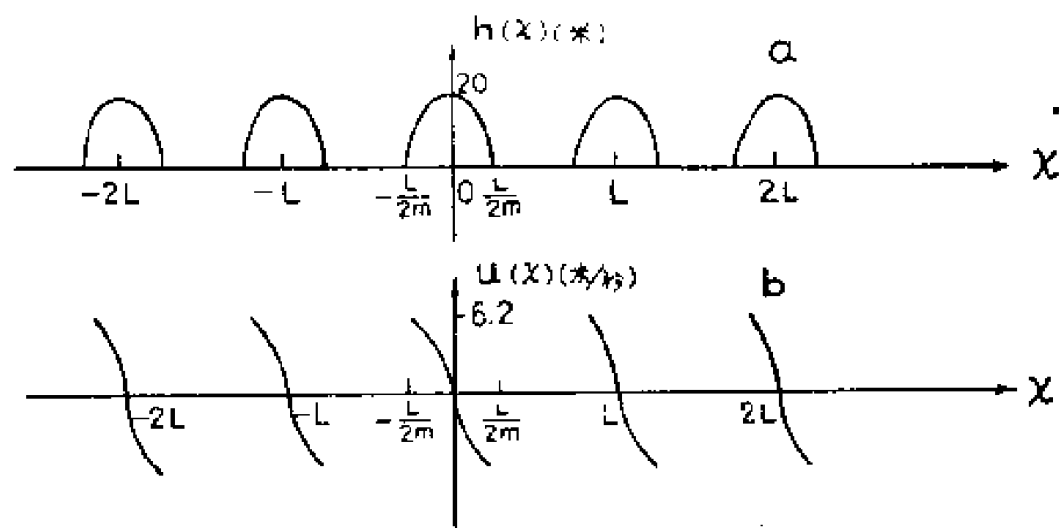


图 2 正压一维线性化模式中初始值分布
a. $h(0, x)$ 的分布, b. $u(0, x)$ 的分布

将初值用傅里叶级数展开, 则得¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} h(x, 0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A h_{0n} e^{i \frac{n\pi}{L} x}, \\ u(x, 0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \frac{g n \pi}{L f} h_{0n} e^{i \frac{n\pi}{L} x}, \\ v(x, 0) &= 0, \\ h_{0n} &= h_{0(-n)} = \frac{1}{2} a_n, \\ a_n &= \begin{cases} \frac{2m}{(m^2 - n^2)\pi} \cos \frac{n}{2m} \pi, & n \neq m, \\ \frac{1}{2m}, & n = m, \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

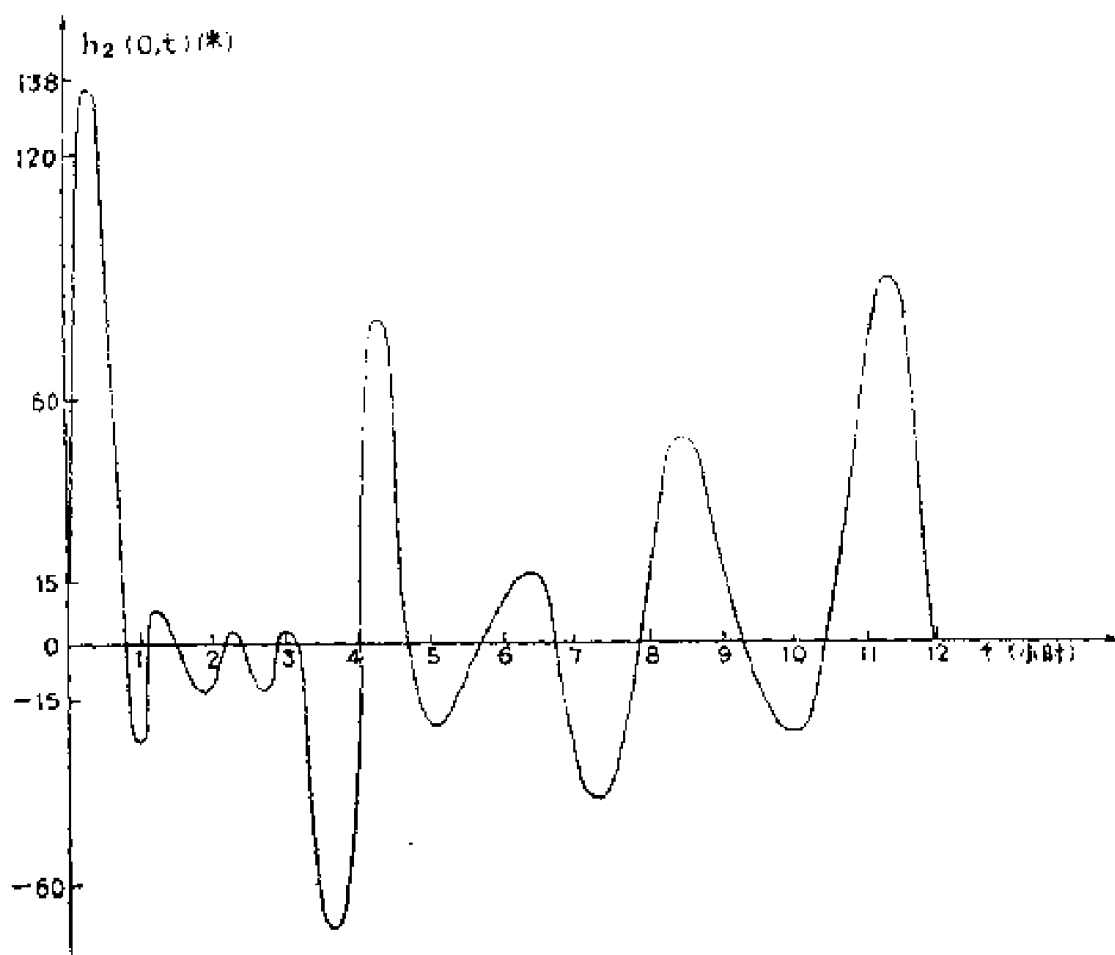
这里 A 决定扰动的振幅, 采用 K. Hinkelmann^[32] 对于单波分析的

1) 这里傅氏级数的展开以及下面的分析和计算是高登义同志进行的。

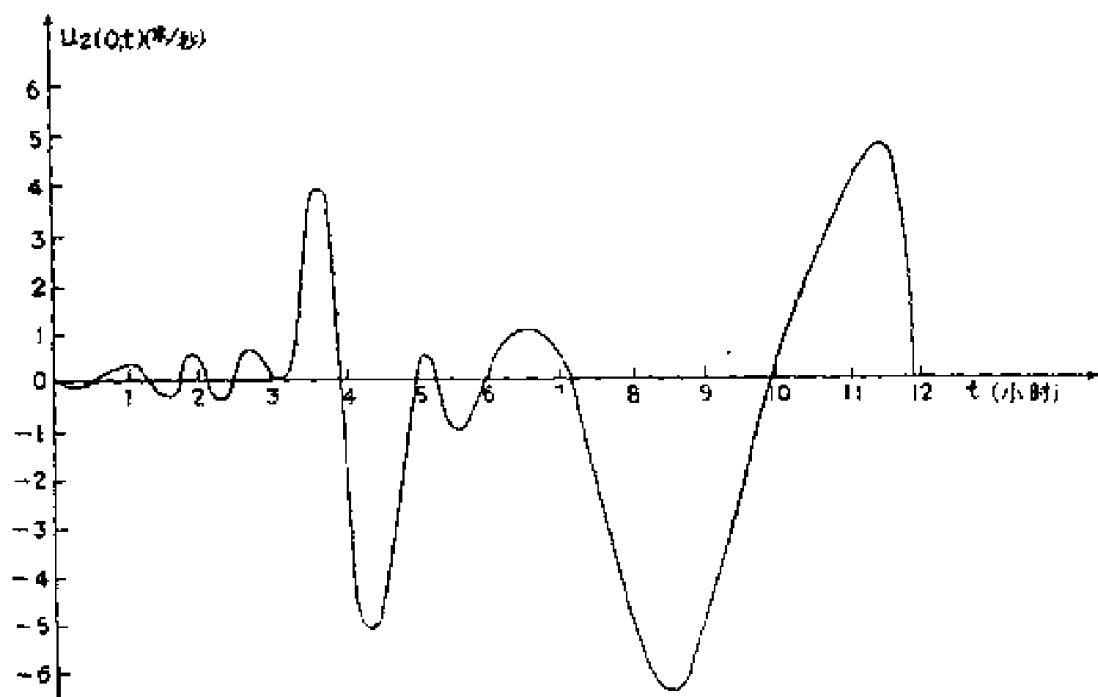
方法, 可将 $h(x, t)$ 、 $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 的解分为以下两部分:

$$\left. \begin{aligned} h_1(x, t) &= Ah_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Aa_n \left[A'_{1n} \cos \frac{n\pi}{L}(x - c_nt) - \right. \\ &\quad \left. - A''_{1n} \sin \frac{n\pi}{L}(x - c_nt) \right], \\ u_1(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{gn\pi A}{Lf} a_n \left[B'_{1n} \cos \frac{n\pi}{L}(x - c_nt) - \right. \\ &\quad \left. - B''_{1n} \sin \frac{n\pi}{L}(x - c_nt) \right], \\ v_1(x, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{gn\pi A}{Lf} a_n \left[c'_{1n} \cos \frac{n\pi}{L}(x - c_nt) + \right. \\ &\quad \left. + c''_{1n} \sin \frac{n\pi}{L}(x - c_nt) \right]. \end{aligned} \right\} (4.44)$$

$$\left. \begin{aligned} h_2(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} Aa_n \left\{ (A_{2n} + A_{3n})' \cos \frac{n\pi}{L} \left[x - \left(\bar{u} + \frac{d}{2} \right) t \right] - \right. \\ &\quad \left. - (A_{2n} + A_{3n})'' \sin \frac{n\pi}{L} \left[x - \left(\bar{u} + \frac{d}{2} \right) t \right] \right\} \cos \frac{n\pi}{L} mt - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} Aa_n \left\{ (A_{2n} - A_{3n})' \sin \frac{n\pi}{L} \left[x - \left(\bar{u} + \frac{d}{2} \right) t \right] + \right. \\ &\quad \left. + (A_{2n} - A_{3n})'' \cos \frac{n\pi}{L} \left[x - \left(\bar{u} + \frac{d}{2} \right) t \right] \right\} \sin \frac{n\pi}{L} mt, \\ u_2(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} Aa_n \frac{gn\pi}{Lf} \left\{ (B_{2n} + B_{3n})' \cos \frac{n\pi}{L} \left[x - \left(\bar{u} + \frac{d}{2} \right) t \right] - \right. \\ &\quad \left. - (B_{2n} + B_{3n})'' \sin \frac{n\pi}{L} \left[x - \left(\bar{u} + \frac{d}{2} \right) t \right] \right\} \cos \frac{n\pi}{L} mt - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} Aa_n \frac{gn\pi}{Lf} \left\{ (B_{2n} - B_{3n})' \sin \frac{n\pi}{L} \left[x - \left(\bar{u} + \frac{d}{2} \right) t \right] + \right. \\ &\quad \left. + (B_{2n} - B_{3n})'' \cos \frac{n\pi}{L} \left[x - \left(\bar{u} + \frac{d}{2} \right) t \right] \right\} \sin \frac{n\pi}{L} mt, \\ v_2(x, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} Aa_n \frac{gn\pi}{Lf} \left\{ (C_{2n} + C_{3n})' \sin \frac{n\pi}{L} \left[x - \left(\bar{u} + \frac{d}{2} \right) t \right] + \right. \end{aligned} \right\} (4.45)$$



a



b

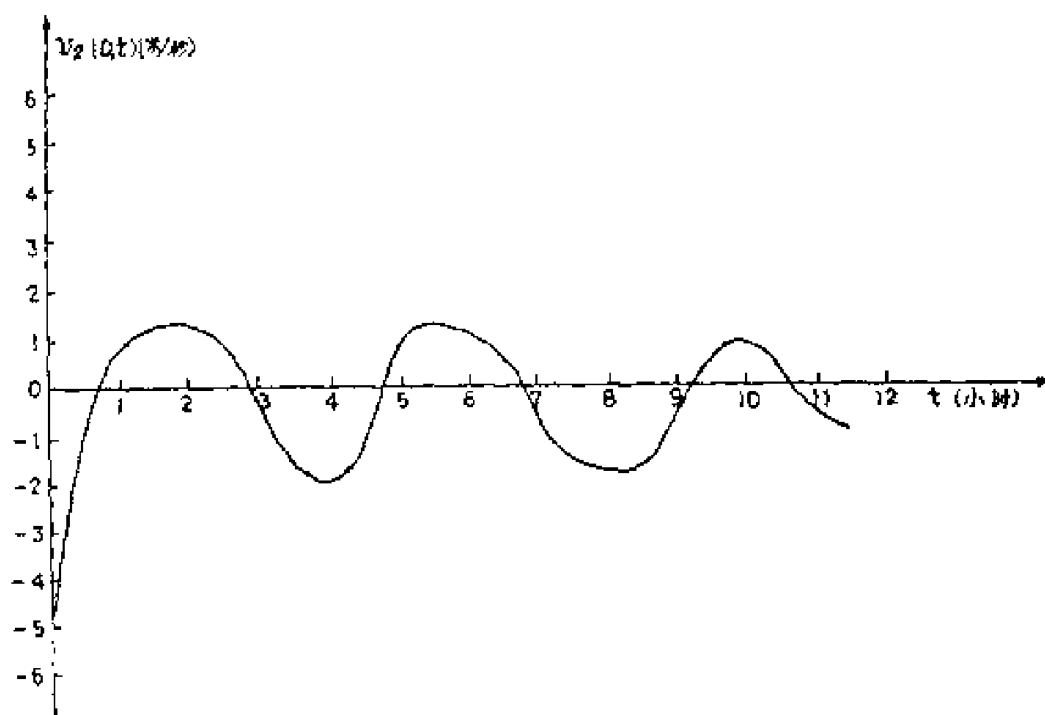


图3 例一($L = 2 \times 10^6$ 米, $m \approx 2$, $A \approx 20$ 米)中,
在 $x = 0$ 处场的非地转部分随时间的演变
a. $h_2(0, t)$ 的演变, b. $u_2(0, t)$ 的演变, c. $v_2(0, t)$ 的演变

$$\begin{aligned}
 & + (C_{2n} + C_{3n})'' \cos \frac{n\pi}{L} \left[x - \left(\bar{u} + \frac{d}{2} \right) t \right] \Big\} \cos \frac{n\pi}{L} mt - \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} A a_n \frac{gH\pi}{L f} \left\{ (C_{2n} - C_{3n})' \cos \frac{n\pi}{L} \left[x - \left(\bar{u} + \frac{d}{2} \right) t \right] - \right. \\
 & \left. - (C_{2n} - C_{3n})'' \sin \frac{n\pi}{L} \left[x - \left(\bar{u} + \frac{d}{2} \right) t \right] \right\} \sin \frac{n\pi}{L} mt,
 \end{aligned}$$

其中

$$c_n = \bar{u} - d, \quad d = \frac{\bar{u} f^2 L^2}{n^2 \pi^2 \Delta^2}, \quad \Delta^2 = gH + \frac{f^2 L^2}{n^2 \pi^2},$$

$$m = \sqrt{\Delta^2 - \frac{3}{4} d^2},$$

A'_{in}, \dots, C'_{in} 等为 n, m, f, L, gH, \dots 等参数的复杂函数, 其形式这里不再给出. 第一组解代表慢波, 波速与基本气流相近. 第二组解为重力快波, 波速与 $c_0 = \sqrt{gH}$ 相近. 第二种波就是非

地轉运动的主要部分,也是我們主要的研究对象。

我們对以下两例进行了計算:

1. $L = 2 \times 10^6$ 米, $m = 2$, $A = 20$ 米¹⁾, 这等于初始扰动和非扰动的范围皆为 1000 公里, 最大扰动高度为 20 米, 最大扰动速度为 6.2 米/秒。这种情况的計算比較简单, 取 $n = 4$ 已足够精确了。图 3a—3c 分别表示在 $x=0$ 的 $h_2(0, t)$, $u_2(0, t)$ 和 $v_2(0, t)$ 。这三张图指出两个重要結果: 第一、这种情况基本上无适应可言, 因为 h_2 , u_2 和 v_2 都沒有消滅的趋势, 例如 $|h_2(0, t)|$ 很少小于 12 米(图 3a), 所以非地轉运动基本上沒有消滅。其次, 波动能量集中的情况很明显, 如在 $t \approx 1000$ 秒、4 小时、8 小时和 11 小时附近, $|h_2|$ 分别达 138 米、80 米、50 米和 90 米的高度, 比初值大了好几倍。 u_2 (图 3b)和 v_2 (图 3c)的情况也一样, 都有周期性集中的现象。在集中的地区, 非地轉运动特别发展。

2. $L = 2 \times 10^7$ 米, $m = 20$, $A = 20$ 米¹⁾: 这相当于扰动区为 1000 公里, 两个相邻扰动区之間的无扰动区为 19,000 公里。因为緯度 60° 附近的緯圈距离为 20,000 多公里, 因而这种选取相当于高緯地区只有一个扰动区域。这个計算要比第一个計算繁得多。級数取到 $n = 40$ 时, 由(4.49)式計算的图形和图 2 的初始場已非常接近, 所以对(4.50)式的計算, 我們也取到 $n = 40$ 。由于計算的繁杂, 我們只对 $h_2(x, t)$ 进行了計算。由 $h_2(x, t)$ 本身也可以看出非地轉运动演变的情况。

图 4 为 h_2 在 $x=0$ 的演变过程。由图 4 我們首先看到, 在开始的 1500 秒內, $h_2(0, t)$ 由初值增到 120 米。此后, $|h_2(0, t)|$ 就迅速減小, 到了 $t = 3$ 小时以后, $|h_2|$ 降到 3 米以下, 一直到 $t = 18$ 小时, $|h_2|$ 才增到 10 米。所以这段时期(18 时以前)非地轉运动的强度是很小的, 运动状态基本上可以說是准地轉的。18 时以后, $|h_2|$ 强度加大, 但一般在 8 米以內, 不过和初值比, 它是很可观的了。到了 $t = 35$ 小时附近, 波动又出現了一次大的集中, $|h_2|$

1) A 仅是一个比例常数, 对于图 3 和图 4 的形状完全没有影响。如取 $A = 100$ 米, 则将图 3 和图 4 的垂直轴放大 5 倍即可。

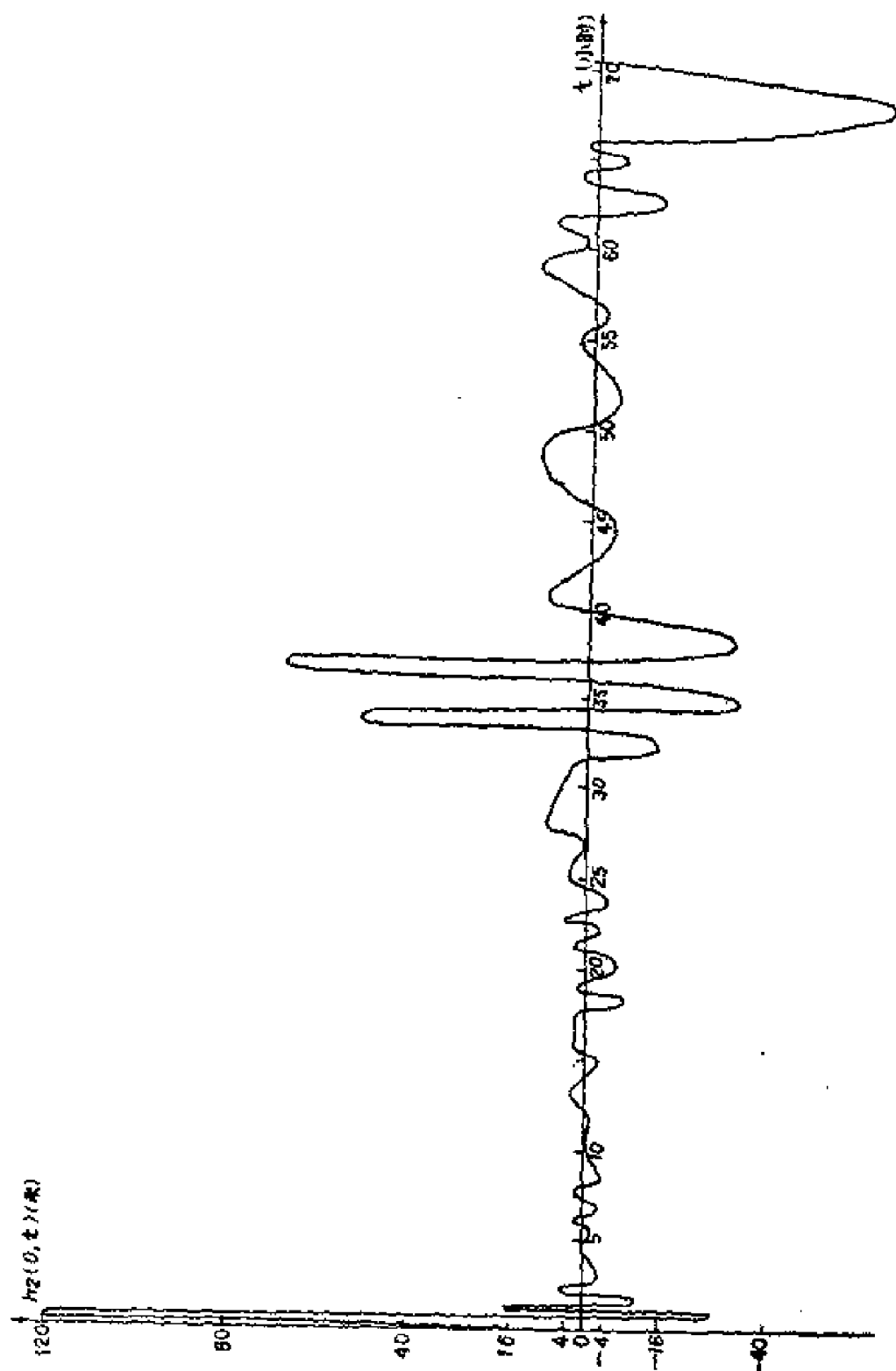


图4 例二($L = 2 \times 10^7$ 米, $m = 20$, $A = 20$ 米)中在 $x = 0$ 处 $h_2(0, t)$ 随时间的演变

达67米。此后, $|h_2|$ 又迅速下降, 到 $t = 70$ 小时左右, 再次出現波动的集中, 使 $|h_2|$ 上升到65米。自 $t = 35$ 小时到 $t = 70$ 小时之間, $|h_2|$ 值虽小, 但一般还大于10米。和初值比, 这段时间內虽比較平靜, 但不能認為是准地轉的。

由以上的計算, 我們可以有以下几点推論:

(1) 在有限空間的某一地区, 出現較強大的非地轉扰动后, 准地轉运动将不能再得到恢复。但如扰动区域与整个空間相比为一小量(如第二例)时, 則在开始的若干時間內可以有适应过程, 使运动达准地轉的平衡状态。但过了这短暫的准平衡状态后, 大的地轉偏差仍會出現。地球就是一个有限空間的球体, 所以严格地說, 非地轉扰动一旦在大气中出現后, 它将永远不能消灭。但大气中是有摩擦的, 摩擦可以消耗非地轉运动的能量, 使它消灭。

(2) 图3和图4中所表示的几个 $|h_2|$ 极大值, 显然是由重力慣性波的集中所致。在我們所用模式中, 重力慣性波波速可以近似为300米/秒, 1600秒內, 这种波可以行走500公里。显然, 图3和图4的第一个 $|h_2|$ 极大值, 就是由于处在 $x = 0$ 的扰动所激发的重力慣性波的集中結果。按此理, 图3和图4的第一个极大值都应出現于1500秒。但图3的第一个极大值却出現于1000秒。这个不协调的原因可能是由有限傅氏級数逼近初始場(图2)的誤差所引起的。至于图3和图4的第二个极大值所出現的时间, 与 $2L/\sqrt{gH}$ 相差不到半小时, 第三个极大值出現的时间約为 $4L/\sqrt{gH}$ 。因此, 这种极大值的出現是邻近扰动源激发的重力慣性波集中的結果。这种非地轉运动的激发机制, 已在作者另一文^[6]中提出。

8. 非綫性的作用

本章中以上各节的討論, 都是从綫性方程出发的, 这是允許的, 因为地轉适应过程基本上是綫性的。但一方面为了进一步說明适应过程的綫性性质, 另一方面也为了討論非綫性的作用, 我們将在本节中討論非綫性运动中的适应問題。

1957 年^[14] 和 1958 年^[15] И. А. Кибель 对于这个問題有过討論, 1960 年^[13] 他又解决了非綫性方程的初值問題. 他的解答由三部分組成: 第一部分为演变項, 第二部分为常定項, 第三部分为阻尼項. 阻尼項在很短時間內即迅速消灭, 这相当于本章第 1 节中的波解. 常定項有地轉关系, 相当于本章第 1 节中的 ψ_1 和 σ_1 ($\varphi_1=0$). 時間稍长, 演变項就起主导作用, 它是由各种平流以及 β 等所决定的. 这部分解基本上滿足地轉关系. 所以時間稍长 ($t \gg t^{-1}$), 运动就进入准地轉的演变过程. 如略去平流及 β 作用 (即略去非綫性項), 則不出現演变項, 只留下常定項和阻尼項两部分的解.

繼 И. А. Кибель 的工作之后, 曾庆存^[11] 又对非綫性运动中的适应問題作了进一步的討論 (但略去了 β). 曾庆存将正压大气运动方程組写成 (依照本书中的符号):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - fv + \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \equiv A_1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu + \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \equiv A_2, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + c_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \equiv A_3, \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

这里 $\Phi \equiv gh$. 他认为非綫性項 A_1 , A_2 和 A_3 为已知的. 在下列初值

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \quad v(x, y, 0) = v_0(x, y), \\ \Phi(x, y, 0) &= \Phi_0(x, y) \end{aligned} \quad (4.47)$$

情况下, 方程組 (4.46) 的解为:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \Phi_1(x, y, t) + \Phi_2(x, y, t), \\ u(x, y, t) &= u_1(x, y, t) + u_2(x, y, t), \\ v(x, y, t) &= v_1(x, y, t) + v_2(x, y, t). \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

这里

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y, t) &= \frac{f}{2\pi c_0^2} \iint_{r \ll c_0 t} [-c_0^2 \nabla^2 \phi_0 + f\Phi_0] \tilde{K}_0(r, t) dx' dy' + \\ &+ \frac{1}{2\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{r \ll c_0 t} \{ [-c_0^2 \nabla^2 \phi_0 + (A_3)_0] \tilde{K}_0(r, t) + \\ &+ f\Phi_0 G(r, t) \} dx' dy', \end{aligned} \quad (4.49a)$$

$$\begin{aligned}
u_1(x, y, t) = & -\frac{1}{2\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial y} \iint_{r \leq c_0 t} [-c_0^2 \nabla^2 \phi_0 + f \Phi_0] \tilde{K}_0(r, t) dx' dy' + \\
& + \frac{1}{2\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{r \leq c_0 t} \left\{ \left[f \left(u_0 - \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) + (A_1)_0 \right] \tilde{K}_0(r, t) + \right. \\
& \left. + u_0 G(r, t) \right\} dx' dy', \quad (4.49b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1(x, y, t) = & \frac{1}{2\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \iint_{r \leq c_0 t} [-c_0^2 \nabla^2 \phi_0 + f \Phi_0] \tilde{K}_0(r, t) dx' dy' + \\
& + \frac{1}{2\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{r \leq c_0 t} \left\{ \left[-f \left(u_0 + \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right) + (A_2)_0 \right] \tilde{K}_0(r, t) + \right. \\
& \left. + f v_0 G(r, t) \right\} dx' dy'; \quad (4.49c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2 = & -\frac{1}{2\pi c_0^2} \iint_{r \leq c_0 t} \int_0^{t-r/c_0} [B_{\partial T}] \tilde{K}_0(r, t-t') dt' dx' dy' + \\
& + \frac{1}{2\pi c_0^2} \iint_{r \leq c_0 t} \int_0^{t-r/c_0} [B_\phi] \frac{\partial \tilde{K}_0(r, t-t')}{\partial t'} dt' dx' dy', \quad (4.50a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 = & \frac{1}{2\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial y} \iint_{r \leq c_0 t} \int_0^{t-r/c_0} [B_{\partial T}] \tilde{K}_0(r, t-t') dt' dx' dy' + \\
& + \frac{1}{2\pi c_0^2} \iint_{r \leq c_0 t} \int_0^{t-r/c_0} [B_u] \frac{\partial \tilde{K}_0(r, t-t')}{\partial t'} dt' dx' dy', \quad (4.50b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2 = & -\frac{1}{2\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \iint_{r \leq c_0 t} \int_0^{t-r/c_0} [B_{\partial T}] \tilde{K}_0(r, t-t') dt' dx' dy' + \\
& + \frac{1}{2\pi c_0^2} \iint_{r \leq c_0 t} \int_0^{t-r/c_0} [B_v] \frac{\partial \tilde{K}_0(r, t-t')}{\partial t'} dt' dx' dy'. \quad (4.50c)
\end{aligned}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \\ \nabla^2 \phi_0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \nabla^2 \phi_0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y}, \\ B_{\partial T} &\equiv c_0^2 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) - f A_3, \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{\Phi} &\equiv c_0^2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} \right) - \frac{\partial A_3}{\partial t}, \\ B_u &\equiv -\frac{\partial A_1}{\partial t} - f A_2 + \frac{\partial A_3}{\partial x}, \\ B_v &\equiv f A_1 - \frac{\partial A_2}{\partial t} + \frac{\partial A_3}{\partial y}. \end{aligned} \right\}$$

此外, G 和 \tilde{K}_0 都是格林函数, 它們的形式分別为:

$$\left. \begin{aligned} G(r, t) &\equiv \cos \sqrt{(ft)^2 - (fr/c_0)^2} / \sqrt{(ft)^2 - (fr/c_0)^2}, \\ \tilde{K}_0(r, t) &= \int_{r/c_0}^t f G(r, t) dt = \int_0^{\sqrt{(\frac{c_0}{r}t)^2 - 1}} \frac{\cos\left(\frac{f}{c_0} r \lambda\right)}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} d\lambda, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{K}_0(r, t) &= K_0\left(\frac{f}{c_0} r\right). \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

由(4.49a)——(4.49c)式可以看出, Φ_1 , u_1 和 v_1 仅决定于初值, 与非綫性項 (B_{DT}, \dots, B_v) 无关. 当初始扰动只局限于有界区域内, 或其强度仅在較小区域内是显著时, 总能量是有限的, 这就可以看出, (4.49a)——(4.49c)式的第二积分趋向常定值, 于是它的时间微商趋于零. 因此 Φ_1 , u_1 和 v_1 主要由第一項給出, 它們滿足地轉关系. 这就是前面所討論的地轉适应过程.

考虑了非綫性項后, 則有无适应过程則要看 Φ_2 , u_2 和 v_2 的演变如何. 由(4.50a)——(4.50c)式可以看出, 由 B_{DT} 所决定的部分滿足地轉关系, 而由 B_{Φ} , B_u 和 B_v 决定的部分代表运动的非地轉部分. 曾庆存分析了对应地轉部分的格林函数 $\tilde{K}_0(r, t - t')$ 与非地轉部分的格林函数 $\frac{\partial \tilde{K}_0(r, t - t')}{\partial t'}$. \tilde{K}_0 在 $r = 0$ 附近达最大值, 它

圍繞着 $K_0\left(\frac{f}{c_0} r\right)$ 上下摆动, 但一直保持正值(当 r 不大时). 这說明 B_{DT} 带来了正貢獻, 所以地轉部分朝着某一比較确定的方向作相对緩慢的演变. 相反, $\frac{\partial \tilde{K}_0}{\partial t'}$ 在 $r = c_0(t - t')$ 附近达最大, 但

1) $\partial \tilde{K}_0 / \partial t'$ 在零附近上下摆动, 其周期約为 $2\pi/f$. 同时, 当 t 足够大

时($t \gg f^{-1}$), $|f \int_0^{t-t_0} \tilde{K}_0(r, t-t') dt'| \gg |\tilde{K}_0(r, t)|$. 因此时间长了之后, 非地轉部分 B_θ , B_u 和 B_v 的貢獻仅是可變号的小振動——一般称之为“气象噪音”. 由此可以看出, 場的非綫性使得过程沿某一定的方向发展, 而且这种发展滿足地轉关系, 但同时場的非綫性, 还激发出环绕着这个基本方向、周期很短和强度也不大的非地轉过程, 所激发出的非地轉运动, 又通过科氏力作用不断地在地轉关系調整. 因此, 在一般的非綫性情况下, 运动不断地有着地轉适应, 但場却不会完全适应.

9. 結 束 語

由以上各节的討論, 我們可以看出, 在自轉的地球大气中, 大型运动有一个基本的动力过程, 那就是地轉适应过程. 当运动中出现了非地轉的成份之后, 就会激发出重力慣性波, 这种波具有頻散的性質. 通过頻散, 它的振幅迅速減小, 当重力慣性波完全阻尼后, 运动就重新完全达到地轉平衡. 所以严格地說, 只有 $t \rightarrow \infty$ 时, 完全适应的状态才会出現. 但实际上, 当重力慣性波的强度达到某一程度, 运动就可以认为实际上达到地轉状态了. 这种状态可以称为准地轉状态. 当非地轉的扰动区域不大时(如 1000 公里的范围), 几个小时就可以到达准地轉状态了.

由此看来, 大气的大型运动有着两个基本过程, 地轉适应过程是其一, 另一基本过程为沿某一方向作比較緩慢的准地轉的演化过程. 由于在完全的地轉平衡下, 大气运动就没有了变化, 所以演变过程正是通过地轉平衡不断破坏而产生的. 而地轉平衡一旦破坏之后, 适应过程又把运动拉向准地轉的軌道上来. 大气的大型运动, 就是在适应与适应破坏的相互矛盾过程中向前发展的.

在大型运动中, 也經常出現一些范围不太小, 而强度很大的非地轉风. 阻塞高压形成的后期, 在其东部就經常出現穿过等高线的风^[36] (图 5). 关于非地轉风形成的机制, 在本章第 8 和第 9 节中都涉及一些. 显然, 在第 9 节中所提到的机制, 仅能解释大型

分析一般所观测到的地转偏差（量级约为地转风的十分之一），不能解释如图 5 中所出现的强大的非地转运动。在第 8 节中所提到的重力惯性波集中的机制，可以产生比较强大的局地的非地转运动，但这仅是可能的机制的一种。陈秋士^[10]认为温度平流和涡度平流不协调时，就要产生非地转运动。因为非地转运动的成因不是本书讨论的问题，这里就不再讨论。

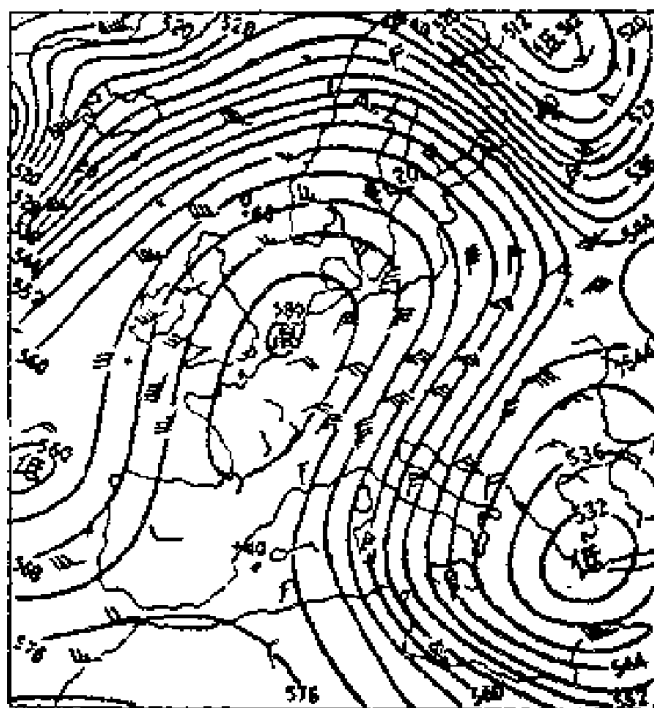


图 5 1959 年 1 月 28 日 15:00 500 毫巴形势图^[36]

然而，不管怎样，大气中地转平衡的破坏机制是经常存在的。一般说来，大型运动中地转关系破坏的速度，不能大于地转适应的速度，这样才会出现准地转的运动。但当地转关系破坏的速度大于适应速度时，就会出现如图 5 所表示的强度很大的地转偏差。根据陈秋士^[10]所提出的地转风的破坏速度与地转适应速度对比的概念，当前者大于后者时，适应就不存在了。

所有本章的讨论，都是对正压大气而言的，但这里所提到的基本原则，对斜压大气也同样适用。不过在斜压大气中，出现了温度场以及三维空间的问题，不仅情况复杂，而且还有不少新现象。在下一章中，我们将讨论斜压大气中的地转适应过程。

第 五 章

斜压大气中的地轉适应过程 及其有关問題

在前一章中，我們討論了正压大气中的地轉适应过程，有关地轉适应的重要原則，已大部分包含在其中了。这些原則，例如适应的物理本質，适应性質与速度和扰动尺度的关系等等，正压大气与斜压大气没有什么不同。但是斜压大气是个三維空間問題，这不但在数学上給适应問題带来了困难，而且初始非地轉扰动的空間結構的变化，也給地轉适应带来了新的問題。此外，在前一章中，我們有一个重要的参数，即 $L_0 = c_0/f$ ，正压大气中的 $c_0 = \sqrt{gH}$ 接近于声速，在下面的討論中我們可以看到，在斜压大气中， c_0 远小于声速，这就对地轉适应有很大的影响。因此，有必要对斜压大气中的地轉适应問題进行討論。

1. 斜压与正压大气中地轉适应的相似性

在討論斜压大气中地轉适应的特殊問題之前，首先讓我們比較一下斜压大气和正压大气中，地轉适应过程的相似性是有益处的。适于描写斜压大气的地轉适应过程的方程組，已在第三章中給出[即(3.10)式]，將(4.4)式代入(3.10)式，然后由其中的最后二式消去 ω ，即可得：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} + f\varphi &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - f\psi + \Phi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\zeta^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \right] - c_0^2 \nabla^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

其中 Φ 为位势高度 gh ; $\zeta = \frac{p}{p_0}$, p_0 为地面平均气压, $c_0'^2 = \frac{R(\Gamma_0 - \Gamma)}{g}$.
 $\cdot RT$, Γ_0 和 Γ 分别为干绝热和实际大气的温度递减率.

(1) 解的相似

经过整理, (5.1) 式又可写为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla^2 \psi + \frac{f}{c_0'^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(f^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \right] + c_0'^2 \nabla^2 \varphi &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + f \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

此式和正压大气情况的(4.6)式相当. 和正压大气情况一样, 在斜压大气中地转适应过程也有一个不随时间改变的位势涡度:

$$\nabla^2 \psi + \frac{f}{c_0'^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) = \nabla^2 \psi_0 + \frac{f}{c_0'^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta} \right), \quad (5.3)$$

上式中角号“0”表示初值. 斜压大气中, 这个不变量已由 И. А. Кибель^[7] 和 А. С. Мошин^[29] 等给出过. 和正压一样, (5.2) 式的解也可以分为两部分: 一为常定部分, ψ_1 , Φ_1 和 φ_1 , ψ_1 和 Φ_1 满足 (5.3) 式和地转关系 $f\psi_1 = \Phi_1$, 而 $\varphi_1 = 0$. 另一部分为波解 ψ_2 , Φ_2 和 φ_2 , 它们满足 $L(m) = 0$ (m 代表 ψ_2 , Φ_2 或 φ_2),

$$L = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\zeta^2 \left(f^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] + c_0'^2 \nabla^2.$$

解的第一部分(ψ_1 , Φ_1)也就是适应后的地转关系.

(2) 初始非地转扰动尺度与适应结果的关系

我们知道在正压大气的地转适应过程中, 风场向气压场或是气压场向风场适应决定于扰动尺度与 $L_0 = c_0/f$ 的比值. 曾庆存^[9] 和陈秋士^[10] 都曾证明, 在斜压大气里也同样如此. 不过在正压大气里, $c_0 = \sqrt{gH}$, 其值接近于声速; 而在斜压大气中存在着两种频散波动能量的重力惯性波, 即外波和内波, 重力惯性外波的最

大速度,接近 $300 \text{ 米} \cdot \text{秒}^{-1}$,和正压大气的 c_0 差不多,而重力惯性内波的最大速度,则远小于此值,不过几十米·秒⁻¹,所以在有重力惯性外波的斜压大气运动中, L_0 和正压大气的 L_0 基本一样;而在滤去重力惯性外波的斜压大气运动中, c_0 必须代以 c'_0 ,于是 L_0 就要小好几倍,因而也就使气压场更容易维持些。

(3) 初始扰动尺度与适应速度

在正压大气里,我们还看到适应的速度随着初值扰动尺度的增大而减小,在斜压大气里也是如此,要证明这点,必须在初值和边值条件下解方程组(5.2), И. А. Кибель^[7] 曾采用上界扰动有限性和在 $\lim_{\zeta \rightarrow 1} \omega = 0$ 的条件下,求得方程组(5.2)第二式的解为:

$$[\Phi](x_1, y_1, \zeta, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t_1} \int_0^1 \iint_{r_1 < 2t_1} G \Phi_0(x'_1, y'_1, \zeta') \frac{dx'_1 dy'_1}{r_1} d\zeta'_1 + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \iint_{r_1 < 2t_1} G \Phi_1(x'_1, y'_1, \zeta') \frac{dx'_1 dy'_1}{r_1} d\zeta'_1.$$

其中 $(x_1, y_1) = (f/c'_0)(x, y)$, $t_1 = ft$, G 为格林函数(其形式将在下面给出), $r_1 = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (y'_1 - y_1)^2}$, Φ_0 和 Φ_1 分别为 $[\Phi](x, y, \zeta, 0)$ 和 $\frac{\partial [\Phi]}{\partial t}(x, y, \zeta, 0)$, 而 $[\Phi] = (\zeta)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\zeta \Phi d\zeta$, 设初值扰动仅局限于 $r_1 < r'_1$, 而且是均匀的, 则上式可写为:

$$[\Phi] = \frac{\partial}{\partial t_1} 2t_1 \int_0^1 \Phi_0 \int_0^{r'_1/2t_1} G ds d\zeta'_1 + 2t_1 \int_0^1 \Phi_1 \int_0^{r'_1/2t_1} G ds d\zeta'_1, \quad (5.4)$$

这里 $s = r_1/2t_1$, 而 G 则为:

$$G = \frac{1}{8\zeta'^2} \left| \begin{array}{l} \eta = \left(\frac{1}{2st_1} \ln \frac{\zeta'}{\zeta} \right)^2 \\ \eta = \left(\frac{1}{2st_1} \ln \zeta \zeta' \right)^2 \end{array} \right\} \left\{ \left[1 + \frac{(1-s^2)\eta}{s^2(1+\eta)} \right] J_0[t_1 \sqrt{(1-s^2)(1+\eta)}] + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{1-s^2}(1-\eta)}{s^2 t_1 (1+\eta)^{3/2}} J_1[t_1 \sqrt{(1-s^2)(1+\eta)}] \right\}.$$

由此可以看出, (5.4)式含有三种型式的项, И. А. Кибель 已经证

明，它們都随着時間的增长而趋向于零，其中的一种型式的項趋向于零的速度最慢，为了我們的討論目的，我們只討論这一項即可，它为：

$$G = \frac{1}{8\zeta'} \left[\eta = \left(\frac{1}{2st_1} \ln \frac{\zeta'}{\zeta} \right)^2 \right. \\ \left. \eta = \left(\frac{1}{2st_1} \ln \zeta \zeta' \right)^2 \right] J_0[t_1 \sqrt{(1-s^2)(1+\eta)}],$$

当 t_1 很大时，該項可表示为：

$$\frac{1}{8\zeta'} \frac{1}{\sqrt{t_1(1-s)^{1/2}}} \left[\frac{\cos \left(t_1 \sqrt{1-s^2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{1-s^2}}{2} \frac{b'}{t_1} \right)}{\sqrt{1+b'/2t_1^2}} - \right. \\ \left. - \frac{\cos \left(t_1 \sqrt{1-s^2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{1-s^2}}{2} \frac{b''}{t_1'} \right)}{\sqrt{1+b''/2t_1'^2}} \right]$$

其中

$$b' = \left(\frac{1}{2s} \ln \frac{\zeta'}{\zeta} \right)^2, \quad b'' = \left(\frac{1}{2s} \ln \zeta \zeta' \right)^2.$$

G 由兩項組成，不过它們的形式是完全一样的，所以只要討論其中的一項即可，如第一項，这一項对 s 的积分為：

$$\frac{1}{8\zeta'} \int_0^{r_1'/2t_1} \frac{\cos \left(t_1 \sqrt{1-s^2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{1-s^2}}{2} \frac{b'}{t_1'} \right)}{\sqrt{t_1(1-s)^2} \sqrt{1+b'/2t_1^2}} ds = \\ = \frac{\cos \left(t_1 \sqrt{1-s^{*2}} - \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{1-s^{*2}}}{2} \frac{b'}{t_1} \right)}{8\zeta'} \times \\ \times \int_0^{r_1'/2t_1} \frac{ds}{\sqrt{t_1(1-s)^{1/2}} \sqrt{1+b'/2t_1^2}},$$

其中 $0 < s^* < r_1'/2t_1$ ，将 b' 的表达式代入上式，并注意到在积分区間內 $s \ll 1$ （因 t_1 很大， $r_1'/2t_1 \ll 1$ ），积分号中的 $\sqrt{(1-s)^{1/2}} \approx \left(1 + \frac{1}{4}s\right)$ ，故上面的积分可近似地成为：

$$\frac{1}{16\xi'c_0'^2}\left\{\left[\sqrt{r_1'^2 + \left(\ln \frac{\xi'}{\xi}\right)^2} - \sqrt{\ln \left(\frac{\xi'}{\xi}\right)^2}\right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{86c_1}\left[r_1'\sqrt{r_1'^2 + \left(\ln \frac{\xi'}{\xi}\right)^2} + \frac{1}{2}\left(\ln \frac{\xi'}{\xi}\right)^2\left(\log\left(r_1' + \sqrt{r_1'^2 + \frac{1}{2}\left(\ln \frac{\xi'}{\xi}\right)^2}\right) - \log \sqrt{\frac{1}{2}\left(\ln \frac{\xi'}{\xi}\right)^2}\right)\right]\right\}.$$

由上式可以看到, 当 $r_1' = 0$ 时, 它也等于零, 同时它随着 r_1' 的增加而加大, 因为 $r_1' = \left(\frac{f}{c_0'}\right)r'$, 其中 r' 为初值扰动的半径, 所以由此可以看出, 适应的时间将随 r' 的增加而延长, 同时也随 c_0' 的减小而延长. 在斜压大气里, c_0' 小, 所以适应得慢. B. Bolin^[6] 和 G. Fischer^[11] 都曾得到这样的完全相同的結果.

(4) 波的頻散

正压大气中, 地轉适应过程的主要物理机制, 在于能量的頻散. 斜压大气中也是如此. 将(5.2)式中的 φ 代以新变数,

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \int_0^\xi \varphi d\xi, \quad \xi = \ln(1/\zeta), \quad (5.5)$$

則(5.2)式的第二式变为(暫設 $\bar{\varphi}$ 不依赖于 y):

$$c_0'^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} + f^2 \bar{\varphi} \right) = 0. \quad (5.6)$$

令

$$\bar{\varphi} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k(x, t) e^{ik\xi}.$$

則有

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} - \frac{c_0'^2}{k^2 + \frac{1}{4}} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^2} + f^2 A_k = 0. \quad (5.7)$$

(5.7)式和(4.6)式第二式的形式完全相同, 不过将(4.6)式第二式中的 $c_0'^2$ 代以(5.7)式中的 $c_0'^2 / \left(k^2 + \frac{1}{4}\right)$ 而已. 因此, 正压大气中

的能量频散的分析, 完全适用于斜压大气. 不过因为 $c_0'^2 / \left(k^2 + \frac{1}{4} \right) < c_0'^2$, 斜压大气中的频散速度较慢而已, 而且因为

$$\bar{\varphi}(x, \xi, 0) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k(x, 0) e^{ik\xi}, \quad (5.8)$$

可以看出, 初值扰动在垂直方向(ξ)上愈不均匀, 它所激发出的波动在这个方向上的节面(nodal surfaces)愈多, 即 k 愈大, 能量频散的也愈慢.

2. 扰动的垂直结构对地转适应过程的影响

斜压大气和正压大气的地转适应过程, 虽然许多在本质上是相同的, 但是作为一个三维空间问题的斜压地转适应, 它也有着独特之处, 就是初始扰动的垂直结构不同, 适应过程也不同, 适应后的结果也不一样. 在正压大气里, 则不存在这个问题. P. Raethjen^[12] 曾将大气分为 ν 和 $(1 - \nu)$ 两层 ($\nu < 1$), 它将扰动限制在 ν 层. 结果指出: 一个深厚的非地转流的流场, 适应后变更得很少, 而一个浅薄的流场, 适应后变动得非常大. B. Bolin^[6] 更在层结流体中讨论了这个问题, 他得到初始非地转的流场随高度的变化, 将引起有很大振幅的重力惯性内波. 这种重力惯性内波的传播速度, 远小于上下一致的非地转流场所引起的重力惯性外波. 适应后, 上下一致的流场变动得很小, 而流速的切变则有很大的减弱.

叶篤正和朱抱真^[13] 也指出, 在深厚的系统中速度场容易维持, 气压场发生变化以适应速度场; 在浅薄的系统中, 则气压场容易维持, 速度场发生变化以适应气压场. 最近曾庆存^[9]、陈秋士^[10] 和 G. Fischer^[14] 等都讨论了这个问题, 得到类似的结论. 下面将曾庆存对这方面的研究予以简述.

令角号“ ∞ ”表示适应后的状态, 将地转关系 $f\psi_\infty = \Phi_\infty$ 代入 (5.3) 式, 得

$$\frac{c'^2}{f^2} \nabla^2 \Phi_\infty + \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial \Phi_\infty}{\partial \zeta} = \frac{c'^2}{f} \nabla^2 \psi_0 + \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta}, \quad (5.9)$$

上式可以写为:

$$\left(\frac{\zeta'^2}{f^2}\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial\zeta'}\zeta'^2\frac{\partial}{\partial\zeta'}\right)(\Phi_\infty - f\psi_0) = \frac{\partial}{\partial\zeta'}\zeta'^2\frac{\partial}{\partial\zeta'}(\Phi_0 - f\psi_0), \quad (5.9)'$$

由上边界能量密度有界的条件, $\lim_{\zeta \rightarrow 0} |\sqrt{\rho} w| < \infty$, 并设

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \left| \zeta' \sqrt{\zeta} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta'} \right| < \infty,$$

则得

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \left| \zeta' \sqrt{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta'} (\Phi_\infty - f\psi_0) \right| < \infty. \quad (5.10a)$$

由下边界条件, $\lim_{\zeta \rightarrow 1} w = 0$, 得

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow 1} \left(-\frac{\partial}{\partial \zeta'} + \alpha_1 \right) (\Phi_\infty - f\psi_0) &= \\ \lim_{\zeta \rightarrow 1} \left(-\frac{\partial}{\partial \zeta'} + \alpha_1 \right) (\Phi_0 - f\psi_0), \end{aligned} \quad (5.10b)$$

满足以上二边界条件情况下(5.9)'式的解, 已由 И. И. Булеев 和 И. Марчук^[37] 给出为:

$$\begin{aligned} \Phi_\infty - f\psi_0 &= \frac{\alpha_1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} G_{\zeta'=1}(f\psi_0 - \Phi_0)_{\zeta'=1} dx' dy' - \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \left(\zeta' \frac{\partial G}{\partial \zeta'} \right) \left[\zeta' \frac{\partial}{\partial \zeta'} (f\psi_0 - \Phi_0) \right] d\zeta' dx' dy', \end{aligned} \quad (5.11)$$

这里 α_1 为 $(\Gamma_\infty - \Gamma)R/g$ 在 $\zeta = 1$ 处之值, 上式中 G 为格林函数, 其形式为:

$$\begin{aligned} G(x, y, \zeta; x', y', \zeta') &= \frac{1}{2\sqrt{\zeta\zeta'}} \left[\sigma\left(r_1, \ln \frac{\zeta}{\zeta'}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma\left(r_1, \ln \frac{1}{\zeta\zeta'}\right) + (1 - 2\alpha_1)e^{-(\frac{1}{2}-\alpha_1)\ln \frac{1}{\zeta\zeta'}} I\left(\alpha_1, r_1, \ln \frac{1}{\zeta\zeta'}\right) \right], \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\sigma(r_1, b) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{r_1^2+b^2}}}{\sqrt{r_1^2+b^2}}, \quad I(\alpha_1, r_1, b) = \int_b^\infty e^{(\frac{1}{2}-\alpha_1)b'} \sigma(r_1, b') db',$$

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (y_1 - y'_1)^2}, (x_1, y_1) = \frac{f}{c_0}(x, y).$$

由 G 的表达式可以看出, $\lim_{\zeta \rightarrow 0} G = 0$, 和 $\lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\partial G}{\partial \zeta'} = 0$, 所以

$\Phi_\infty|_{\zeta \rightarrow 0} = f\psi_0|_{\zeta \rightarrow 0}$. 这说明不论初始非地转扰动的垂直结构为何, 在高空总是风场容易维持, 气压场向风场适应. 在不同的 $(f\psi_0 - \Phi_0)$ 随 ζ 的分布下, 曾庆存讨论了 $(\Phi_\infty - \Phi_0)$ 与初始非地转扰动尺度的关系. 其结果已在第一节予以叙述, 即当尺度大于 L_0 时, 风场向气压场适应, 当尺度小于 L_0 时, 反之. 这里我们特别讨论一下非地转扰动仅出现于下层大气的情况.

首先令(5.11)式右端第二积分中的 $\zeta' \frac{\partial}{\partial \zeta'} (f\psi_0 - \Phi_0) = \tilde{K}(x', y', \zeta') (f\psi_0 - \Phi_0)_{\zeta'=1}$. 因为非地转扰动仅出现于大气低层, 故当 $\zeta' < 1$ 时, $\frac{\partial}{\partial \zeta'} (f\psi_0 - \Phi_0) \rightarrow 0$. 因此, 在 $\zeta' = 1$ 附近, $\tilde{K} \approx 1$, 而在 $\zeta' > 1$ 时, \tilde{K} 迅速减为零. 将这些关系代入(5.11)式, 则得

$$\begin{aligned} \Phi_\infty = f\psi_0 - \frac{\alpha_1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} G_{\zeta'=1} (f\psi_0 - \Phi_0)_{\zeta'=1} dx' dy' - \\ - \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \zeta' \frac{\partial G}{\partial \zeta'} \tilde{K}(x', y', \zeta') (f\psi_0 - \Phi_0)_{\zeta'=1} dx' dy' d\zeta'. \end{aligned}$$

在实际大气中, α_1 的量级不过 0.1, 上式右端第二积分可以略去. 于是

$$\begin{aligned} \Phi_\infty \approx f\psi_0 - \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{M}(x', y'; x, y, \zeta) (f\psi_0 - \Phi_0)_{\zeta'=1} dx' dy' \\ = f\psi_0 - (f\psi_0 - \Phi_0)_{\zeta=1} \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{M}(x', y'; x, y, \zeta) dx' dy' \quad (5.13) \end{aligned}$$

其中“—”表示某种形式的平均, \tilde{M} 为

$$\tilde{M} = \int_0^1 \zeta' \frac{\partial G}{\partial \zeta'} \tilde{K}(x', y', \zeta') d\zeta'. \quad (5.14)$$

根据格林函数 G 的性质, $\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{M} dx' dy' \approx 1$, 所以 $\Phi_\infty \approx \Phi_0$. 这表示当扰动 $(f\psi_0 - \Phi_0)$ 迅速向上减弱或局限于大气低层时, 气压场

容易維持,風場向氣壓場適應。

綜合以上討論可以看出,在高空流場容易維持,當高空有非地轉的扰动出現后,在適應過程中流場變動較小,而氣壓場向風場適應。當非地轉的扰动僅出現于低空時,則氣壓場容易維持(除很小尺度的扰动外),風場向氣壓場適應。由此可以推論,在高空系統的成因和變化一般是由動力作用引起的,在低空淺薄系統的成因和變化一般則是熱力作用引起的。

3. 斜壓大氣中地轉適應的例子

И. А. Кибель^[38] 曾以 $\psi_0=0$ 和 $\Phi_0 = gA\zeta \sqrt{\zeta} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\zeta \right) e^{-R(x^2+y^2)}$ 形式的初始非地轉的扰动氣壓場,計算了適應問題。 $\zeta=1$ 的 Φ_∞ 分布見圖 6。由圖可以看出,適應前后低空氣壓場基本上沒有變化。

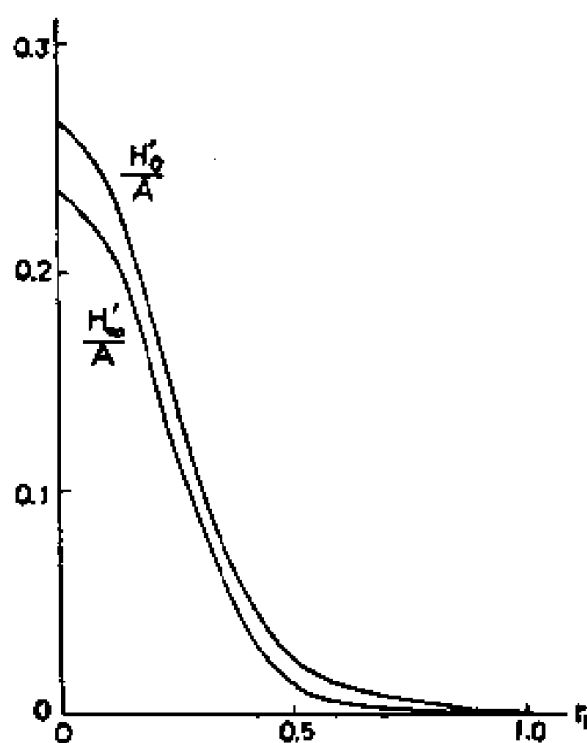


圖 6 斜壓大氣中初始扰动 $-\frac{H'_0}{A}$ 及適應后函数 $\frac{H'_\infty}{A}$ 隨 r_1 的分布($\zeta=1.0$)^[38]

А. С. Монин^[37]

用 $\Phi_0=0$, $\psi_0 = A' \left[\frac{1+\alpha^2(1-\zeta)}{R_1^2} \left(\frac{x_1^2}{R_1^2} - 1 \right) - 2\zeta \right] e^{-x_1^2/2R_1^2}$ 的初始場作了計算, 这里 $\alpha^2 = \frac{(\Gamma_a - \Gamma)R}{g}$

$\frac{T}{T_0}$, $(R_1, x_1) = (R, x)/L_0$. 在計算中, $R_1 = 0.2$, $L_0 = 2500$ 公里, $\zeta = 1$ 的結果如圖 7, 在圖中指出, 適應后的流場和初始流場是相差很小的。

在這兩個例子中, 一個是氣壓場得到維持, 另一個是風場得到維持。這個矛盾, А. С. Монин 認為是由于 И. А. Кибель 採用了近似的邊界條件的結果。

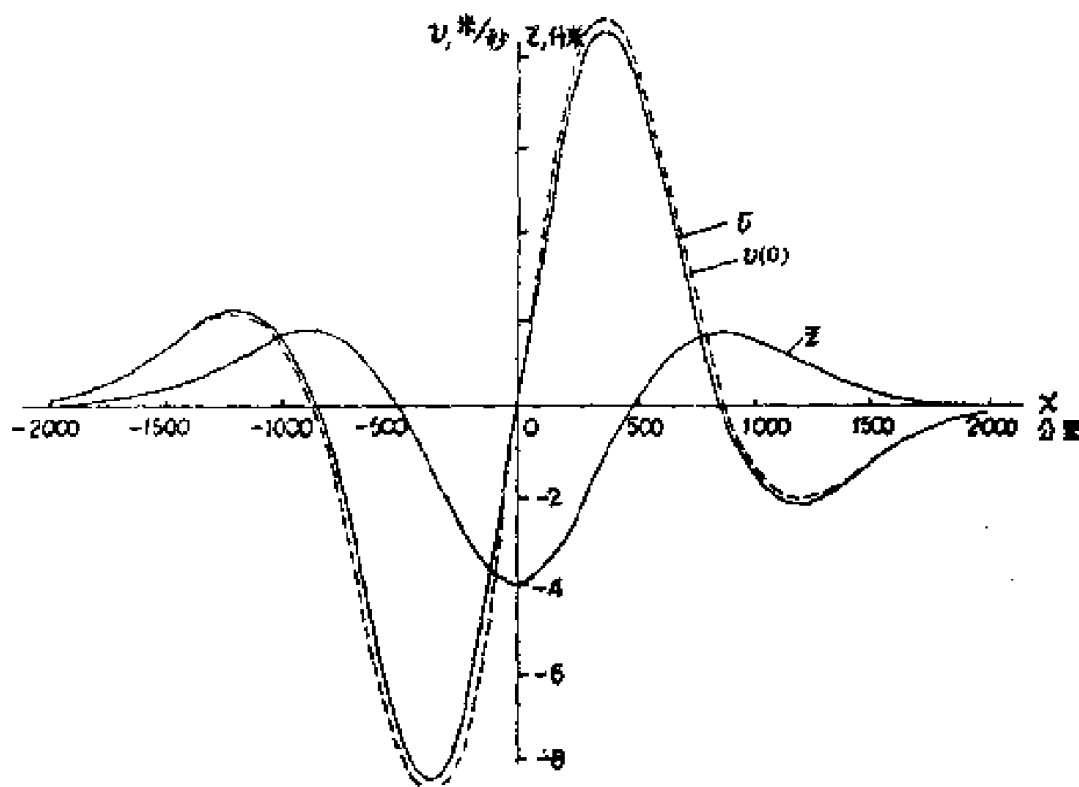


图7 斜压大气中初始速度 $v(0)$ 和适应后速度 \bar{v} 及等压面高度 z 随 x 的分布 ($P=1$)^[17]

И. А. Кибель 的下边界条件是令 (5.10 b) 式中的 α_1 为零。这等于使 $\lim_{\zeta \rightarrow 1} \omega = 0$ 。А. С. Монин 认为这个边界条件是近似的，这意味着 $\lim_{\zeta \rightarrow 1} \omega = 0$ 是准确的。这个解释是不合适的。因为在没有地形影响时， $\lim_{z \rightarrow 0} \omega = 0$ 才真正是准确的边界条件。显然 $\zeta=1$ 只是近地面的某一等压面，而不是 $z=0$ 的地面。因而 $\lim_{\zeta \rightarrow 1} \omega = 0$ 也是近似的。从物理意义方面讲，对于没有地形影响的情况， $\lim_{\zeta \rightarrow 1} \omega = 0$ 应该比 $\lim_{\zeta \rightarrow 1} \omega = 0$ 更为合理些。因为无地形影响时， $\lim_{z \rightarrow 0} \omega = 0$ 和 $\lim_{\zeta \rightarrow 1} \omega = 0$ 都可以滤去下边界条件所引起的重力惯性外波，而 $\lim_{\zeta \rightarrow 1} \omega = 0$ 却引起了重力惯性外波。所以在 И. А. Кибель 提出问题中无重力惯性外波，而在 А. С. Монин 提出问题中，这种波却是存在的。这是他们之间主要差别之一。因为重力惯性外波波速远大于重力惯性内波，按定义 $L_0 = c'_0/f$ ，所以在 И. А.

Кибель 問題中的 L_0 小, 气压場容易得到維持: А. С. Монин 問題中的 L_0 大, 风場容易得到維持。

И. А. Кибель 和 А. С. Монин 之間另一主要差別, 在于初值扰动垂直結構的不同。从他們的初值表达式可以看出, И. А. Кибель 的扰动是迅速向上減小的非地轉平衡的气压場, 而 А. С. Монин 的扰动則为非地轉平衡的流場, 其中主要部分 $\frac{1}{R_1^4} \frac{\alpha^2}{R_1^4} \left(\frac{x_1^2}{R_1^2} - 1 \right)$ 是不隨高度而变的。根据前节的討論, 这一不同也将导致 И. А. Кибель 和 А. С. Монин 的不同結果。

В. Bolin^[6] 討論了海洋中的地轉适应, 他的初值为局限于某个寬度(90 公里)以內的非地轉平衡的洋流, 如图 8 中 a。适应的結果, 如图 8 中 b。比較这两个图可以看出, 經過适应, 流場起了很大的变化。首先适应后(图 8 中 b), 在上部洋流的主要部分变狹和变弱, 两旁出現了反流, 而下部則变寬并加强。为了清楚起见, В. Bolin 又給出了图 9 和图 10: 图 9 为中心($\eta = 0$)、距中心为 18 公里($\eta = 0.4$)和 36 公里($\eta = 0.8$)的垂直方向上的风速廓綫。比較适应风速廓綫的分布, 可以看出适应后的风速上下更为均匀

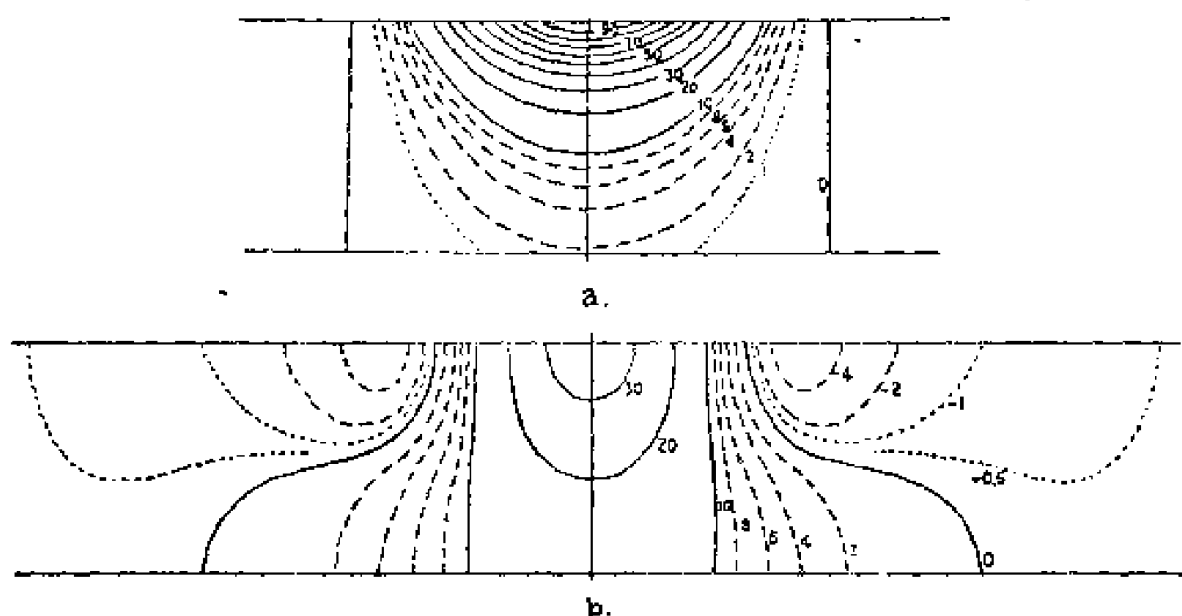


图 8 斜压洋流中的地轉适应^[6]
a. 初始非地轉流場的分布, b. 适应后流場的分布

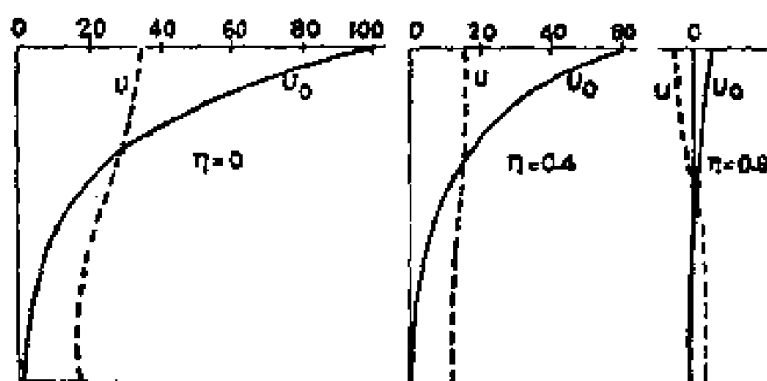


图 9 适应前(实线)后(虚线)在距扰动中心不同距离的点上洋流水平速度的垂直廓线^[6]
(图中的曲线系根据图 8 所作)

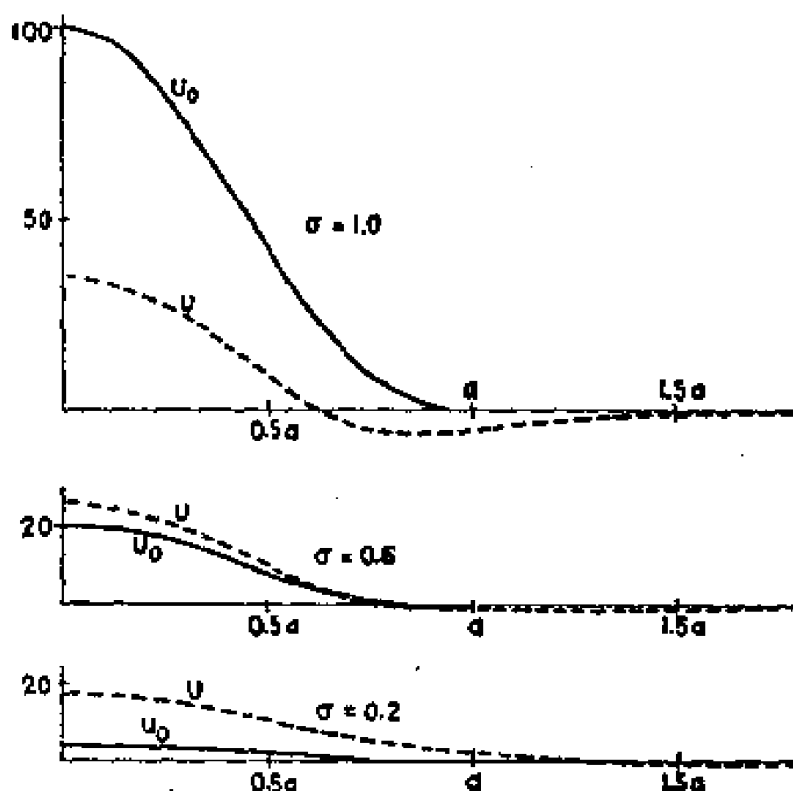


图 10 适应前(实线)后(虚线)各个不同高度上洋流水平速度的水平分布^[6]
(图中曲线系根据图 8 所作)

了,同时垂直方向上平均风速 $\left(\int_0^1 u d\zeta\right)$ 有不变的趋势,这是容易理解的。如将斜压大气中的适应方程沿垂直方向平均,则得正压情况,而在正压大气中,图 9—10 中的扰动宽度(90 公里)远小于 L_0 , 故 $\int_0^1 u d\zeta$ 应有不变的趋势。图 10 是顶部 ($\sigma = 1.0$)、中部

($\sigma = 0.6$) 和下部 ($\sigma = 0.2$) 的风速水平廓綫适应前后的变化, 可以看出, 它的变化是很大的。由此可以看出, 上下趋于一致的扰动流場容易維持, 上下不均匀的扰动流場适应后将上下趋于一致。

4. 非地轉扰动作用的上下传送

在斜压大气中非地轉的扰动可以出現于任何一层, 一旦出現之后, 它的作用将通过垂直运动而影响到它的上层或下层。过去地轉适应的討論多注意于某层的扰动与該层适应結果的关系, 非地轉扰动的上下影响比較注意的少。最近 G. Fischer^[11] 曾將一扰动放置于中层大气, 在討論适应的結果时, 注

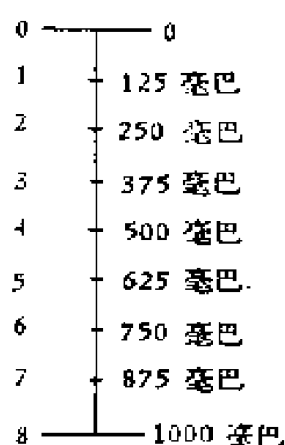


图 11 四层模式中
等压面分层图^[39]

意到了它的上层和下层的現象。对于这个問題討論得比較多的, 是最近陈秋士^[40]的工作。他以四层模式(图 11)描写大气的垂直結構, 其中 f 随高度而变, α_0 也随着改变, 因而有了平流层和对流层的分別。这在过去是没有考虑过的, 因为一般都将 α_0 看作常数。

将渦度方程、散度方程和連續方程写在 1, 3, 5, 7 层上, 絕热方程写在 2, 4, 6, 8 层上, 然后求出位势渦度守恒方程, 由守恒方程

和边界条件 ($p = 0$ 时, $\rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right)$ 有界; $p = p_8$ 时, $\omega_8 = \rho_0 \frac{\partial \Phi_8}{\partial t}$) 以及适应的地轉关系 ($\Phi_\infty = f\psi_\infty$), 陈秋士^[40]归結出以下描述适应后的流場的方程組:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \psi_{1\infty} + \frac{f^2}{\alpha_2^2} (\psi_{3\infty} - \psi_{1\infty}) &= \Omega_{10}, \\ \nabla^2 \psi_{1\infty} + \nabla^2 \psi_{3\infty} + \frac{4f^2}{\alpha_4^2} (\psi_{5\infty} - \psi_{3\infty}) &= \Omega_{30}, \\ \nabla^2 \psi_{1\infty} + \nabla^2 \psi_{3\infty} + \nabla^2 \psi_{5\infty} + \frac{4f^2}{\alpha_6^2} (\psi_{7\infty} - \psi_{5\infty}) &= \Omega_{50}, \\ \nabla^2 \psi_{1\infty} + \nabla^2 \psi_{3\infty} + \nabla^2 \psi_{5\infty} + \nabla^2 \psi_{7\infty} + \frac{4f^2}{\alpha_8^2} \psi_{7\infty} &= \Omega_{70}, \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

其中 $\alpha_j^2 = \frac{(\Gamma_0 - \Gamma_j)R}{g} RT_j$ ($j = 2, 4, 6, 8$), $\alpha_0^2 = \frac{\alpha_8^2}{8} + gH_0$, $H_0 = \frac{p_0}{\rho_0 g}$ 为均质大气高度, 角号“0”表示初值, 而

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{10} &= \nabla^2 \phi_{10} + \frac{f}{c_2^2} (\Phi_{30} - \Phi_{10}), \\ \Omega_{30} &= \nabla^2 \phi_{10} + \nabla^2 \phi_{30} + \frac{4f}{c_4^2} (\Phi_{50} - \Phi_{30}), \\ \Omega_{50} &= \nabla^2 \phi_{10} + \nabla^2 \phi_{30} + \nabla^2 \phi_{50} + \frac{9f}{c_6^2} (\Phi_{70} - \Phi_{50}), \\ \Omega_{70} &= \nabla^2 \phi_{10} + \nabla^2 \phi_{30} + \nabla^2 \phi_{50} + \nabla^2 \phi_{70} - \frac{4f}{c_8^2} \Phi_{70}. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

这里 ϕ_i 和 Φ_i 分别表示扰动流函数和扰动的位势高度. 用傅氏变换方法, 可求得(5.15)式的解为:

$$\phi_{i\infty}(x, y) = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=1,3,5,7} \beta_{ijk} \Omega_{j0}(\xi, \eta) \right] K_0\left(\frac{\rho}{L_k}\right) d\xi d\eta \quad (5.17)$$

($i = 1, 3, 5, 7$),

其中 $\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, $L_k = c_k/f$, β_{ijk} 为常系数, 而 $c_1 = 306$ 米·秒⁻¹, $c_2 = 114$ 米·秒⁻¹, $c_3 = 36$ 米·秒⁻¹, $c_4 = 19$ 米·秒⁻¹.

给定了 Ω_{j0} , 即可由(5.17)式计算适应后的各层流场 $\phi_{i\infty}$, 再由地转关系即可求得 $H_{i\infty}$, 由此可以算出厚度场亦即温度场.

在实际计算中, 陈秋士取 $\Gamma_2 = 0$, $\Gamma_4 = \Gamma_6 = 0.64^\circ\text{C} (100 \text{ 米})^{-1}$, $\Gamma_8 = 0.58^\circ\text{C} (100 \text{ 米})^{-1}$. 这种取法相等于把 375 毫巴以上当作了平流层. 第一个例计算的初值取为:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{i0} &= A \left[2 - \left(\frac{R}{L_1} \right)^2 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}} \quad (i = 1, 3, 5, 7), \\ \Phi_{i0} &= 0 \quad (i = 1, 3, 5, 7), \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

其中 $R = 1000$ 公里, $L_1 = 2423$ 公里 (f 取作 60° 的值), $A = 5 \times 10^6$ 米²·秒⁻¹. 各层流场是相同的, 为一反气旋, 距中心 750.

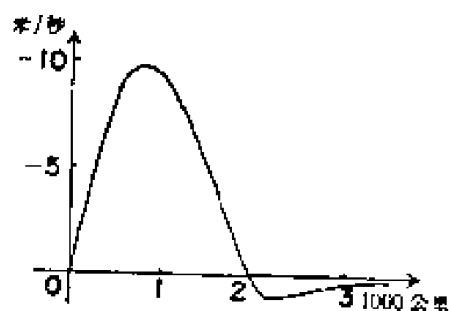


图 12 初始流場分布^[39]
 $[\Phi_{i0} = 0 (i = 1, 3, 5, 7)]$

公里处风速最大, 为 9.7 米·秒⁻¹ (见图 12)。适应后的各层流場见图 13 a—d, 比較图 12 和 13 可以看出, 适应前后的流場变化不大, 气压場向风場适应。对于这个上下一致, 同时 $R < L_1$ 的情况, 計算結果和前面分析是相同的。但有一点值得注意, 即适应后 125 和 375 毫巴的反气旋不

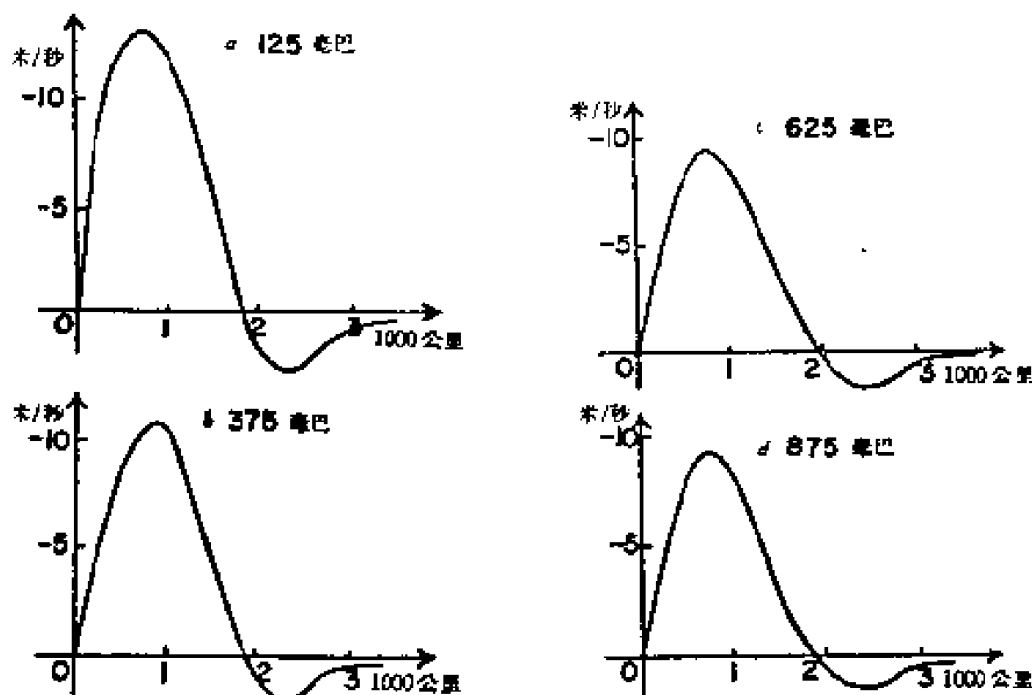


图 13 适应后各层流場分布图(初始值见图 12)^[39]

a. 125 毫巴流場, b. 375 毫巴流場, c. 625 毫巴流場, d. 875 毫巴流場

但不比适应前弱, 反而强度增加了, 而下两层(625 和 875 毫巴)上的强度稍有减弱。适应后的系統强度可以增加, 这是有意思的。这个計算指出, 适应过程使一个反气旋由正压的变成了一个暖性的。

現取另一初值:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{10} &= A \left[2 - \left(\frac{R}{L_1} \right)^2 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}}, \\ \psi_{i0} &= 0 (i = 3, 5, 7), \Phi_{i0} \text{ 为 零 } (i = 1, 3, 5, 7). \end{aligned} \right\} (5.19)$$

这个初值表示在 125 毫巴上有一个没有气压场相平衡的反气旋流场,其强度和大小与图 12 完全相同,其他各层的扰动皆为零.适应后的流场,见图 14a—d.可以看出,125 毫巴流场(图 14a)适应前后几乎没有变化,最大风仅降到 9.4 米·秒⁻¹,只减小了 3%.在 375 毫巴以下,出现了非常微弱的反气旋.在 375 毫巴,最强风速不到 2 米·秒⁻¹,以下更小.这说明这是一个暖性反气旋.

如令初值为:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{i0} &= 0 \quad (i = 1, 3, 5, 7), \\ \phi_{10} &= Af \left[2 - \left(\frac{R}{L_1} \right)^2 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}}, \\ \phi_{i0} &= 0 \quad (i = 3, 5, 7). \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

则它表示在 125 毫巴上有一个没有流场相伴随的高压(它的相应的地转风场,见图 12).在温度场上表示 125 到 375 毫巴层之间有一高温.这里所取的参数值和上例相同(以下各例也相同),因此如以地转风表示之,则和图 12 完全一样.适应后的各层流场分布,见图 15a—d.在 125 毫巴上(图 15a)为反气旋,强度很小,最大风速不过为 1.3 米·秒⁻¹. 375 毫巴以下(图 15b—d)引导出一气旋,但强度非常弱.

由以上两个例子来看,不论平流层中出现的非地转扰动是流场或气压场,通过适应它都不能在对流层中引起在天气上比较有意义的变化.就这两种扰动本身而言,可以看出风场的扰动通过适应过程后依然存在,而气压场的扰动通过适应后就几乎完全消灭了.这是合乎前面(本章第 2 节)的分析的.不过应当指出,这是 $R = 1000$ 公里的情况,对于更大的 R 还得重新计算.

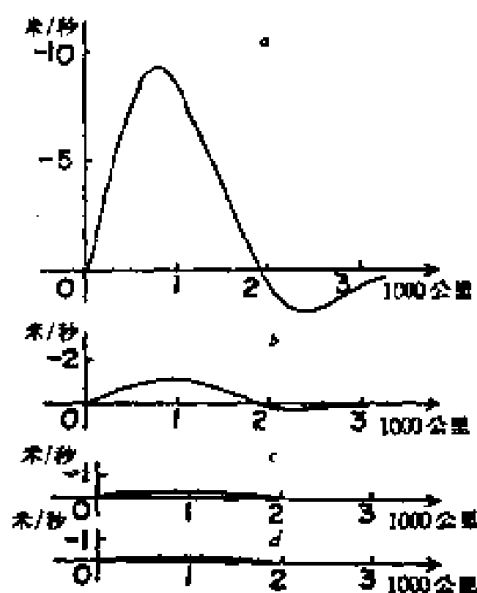


图 14 适应后各层流场分布图^[39]
[初始值: $\phi_{10} \approx 0$, $\phi_{i0} = 0$ ($i = 3, 5, 7$), $\phi_{i0} = 0$ ($i = 1, 3, 5, 7$), 其他说明见图 13]

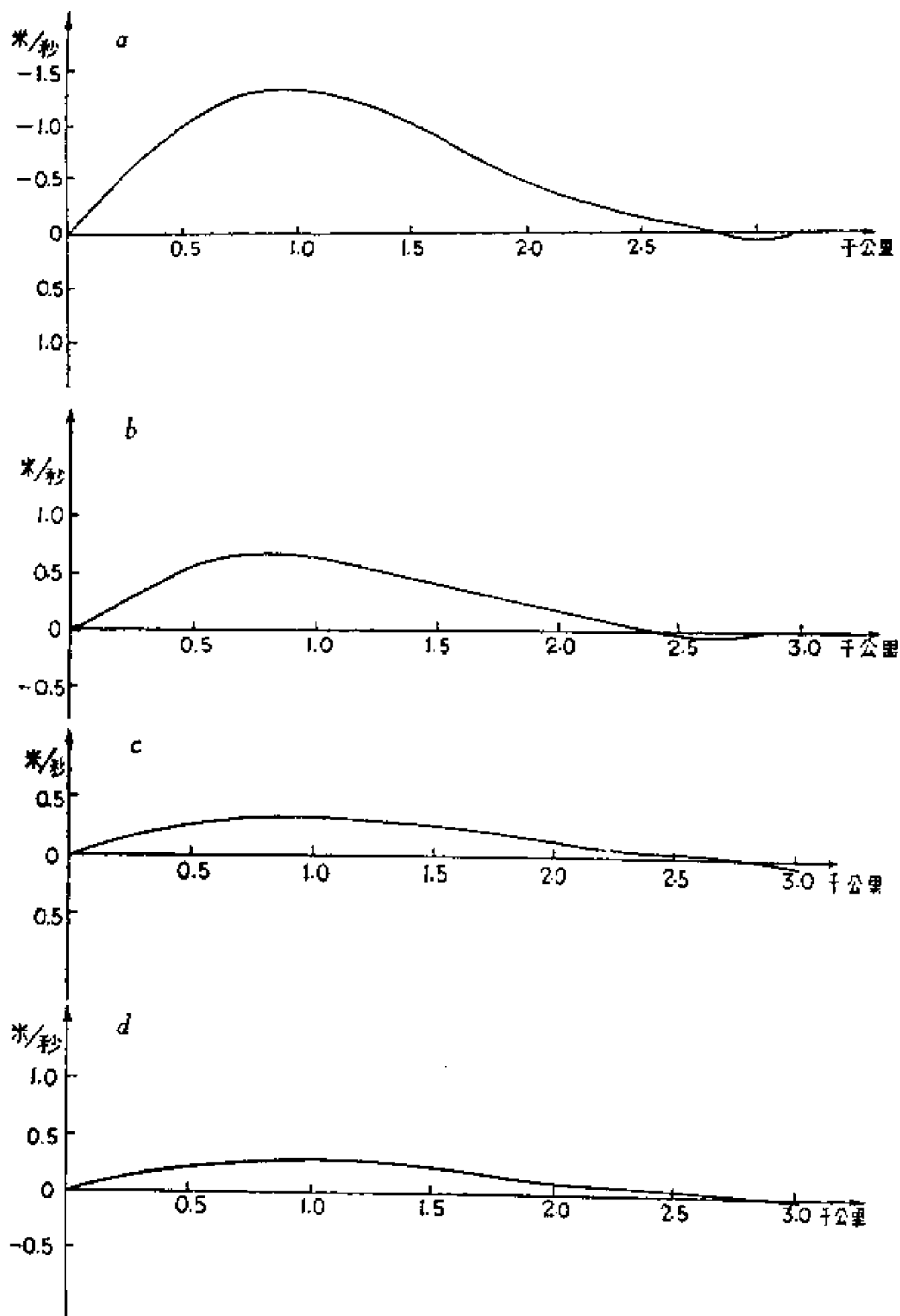


图 15 当适应后各层流场的分布
 $[\phi_{10} \approx 0, \phi_i = 0 (i = 3, 5, 7), \phi_i = 0 (i = 1, 3, 5, 7), \text{其他说明见图13}]$

現在讓我們來討論對流層下部，非地轉的擾動通過適應過程對高空所起的作用。對此，我們選取了以下兩種初始場：

$$1. \left. \begin{aligned} \psi_{70} &= A \left[2 - \left(\frac{R}{L_1} \right)^2 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}}, \\ \psi_{i0} &= 0 \quad (i = 1, 3, 5), \\ \Phi_{i0} &= 0 \quad (i = 1, 3, 5, 7), \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

$$2. \left. \begin{aligned} \Phi_{70} &= Af \left[2 - \left(\frac{R}{L_1} \right)^2 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}}, \\ \Phi_{i0} &= 0 \quad (i = 1, 3, 5), \\ \psi_{i0} &= 0 \quad (i = 1, 3, 5, 7), \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

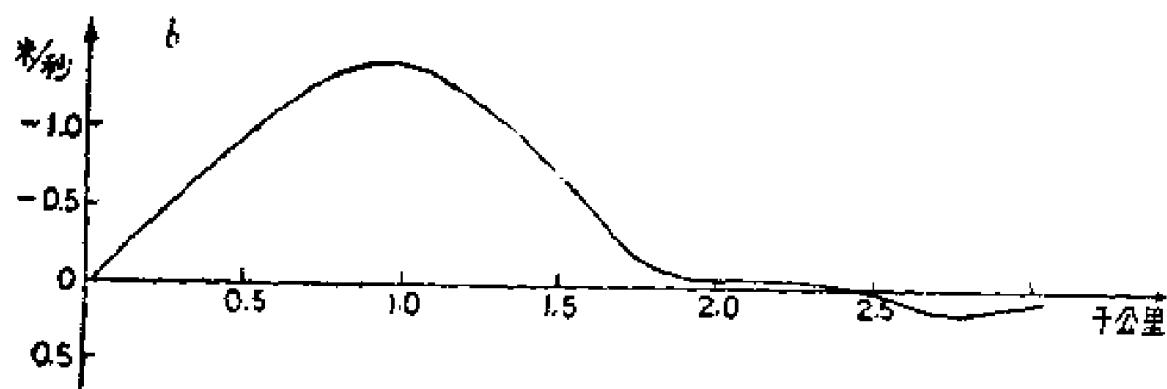
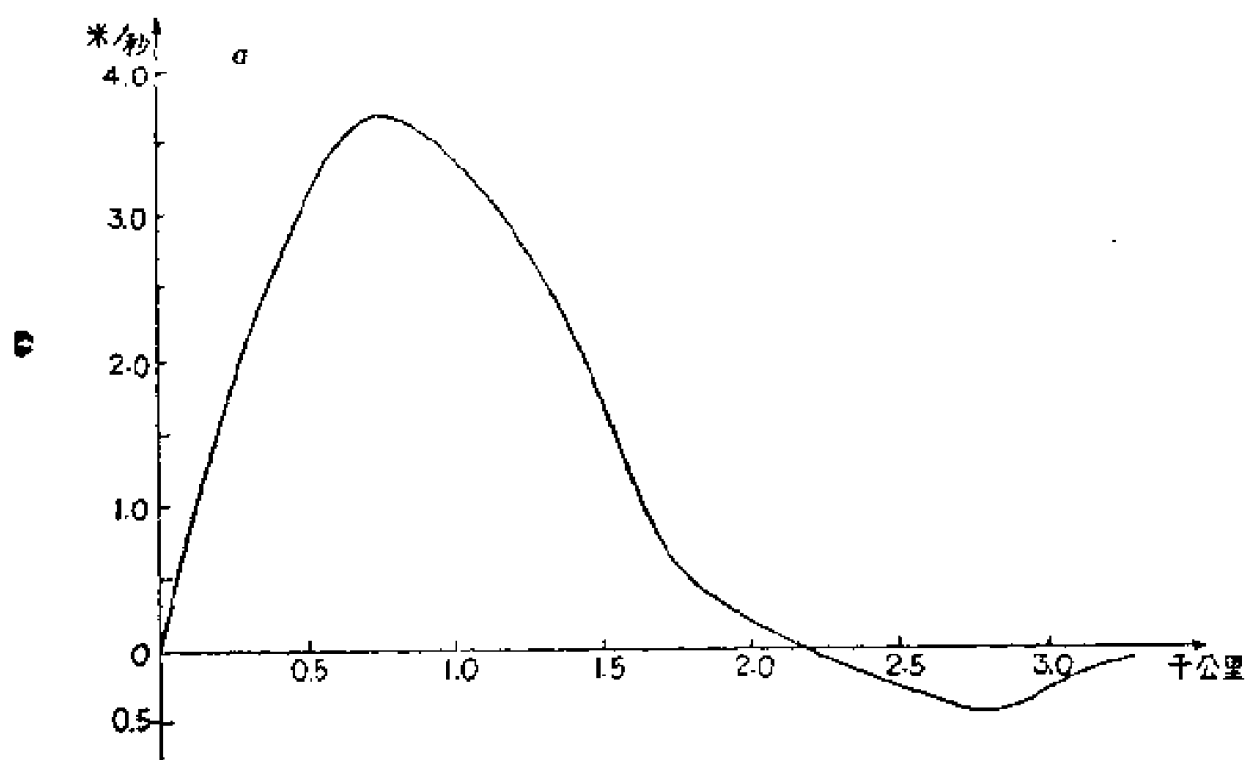
第一種是在 875 毫巴面上一個沒有氣壓場相伴隨的反氣旋流場，第二種是 875 毫巴面上一個沒有流場相伴隨的高壓。在溫度場上，等於在 875—625 毫巴層中有一冷中心。對於第一種情況，適應後各層流場的分布見圖 16a—d。在擾動所發生的 875 毫巴面（圖 16d）上，仍維持一個反氣旋，但強度比適應前約減小了一半，最大風速為 5.5 米·秒⁻¹。這個反氣旋的強度向上減小，在 625 毫巴（圖 16c）上最大風為 3.2 米·秒⁻¹，到了 375 毫巴（圖 16b）上最大風速降到了 1.4 米·秒⁻¹。在平流層的 125 毫巴（圖 16a）面上成了氣旋，其最大風速為 3.7 米·秒⁻¹。由此可見，這是冷性系統，在對流層為冷高壓，平流層為冷低壓，強度不大。

對於第二種情況，適應後各層流場的分布見圖 17a—d。由圖可見，適應後的流場在對流層里是一個強度向上減小的反氣旋，它的最大風速在 875 毫巴（圖 17d）面上為 5.5 米·秒⁻¹。到了 375 毫巴（圖 17b）上，它的最大風速降到了 2 米·秒⁻¹。到了平流層的 125 毫巴（圖 17a），它已經完全消失了。由此可見，這個反氣旋也是冷性的。

如果在第二例中，我們在 625 毫巴上再加一初始擾動

$$\Phi_{50} = \Phi_{70} [\Phi_{i0} (i = 3, 1) \text{ 和 } \psi_{i0} (i = 1, 3, 5, 7) \text{ 為零}], \quad (5.23)$$

則等於把第二例中，875—625 毫巴的冷中心移到了 625—375 毫



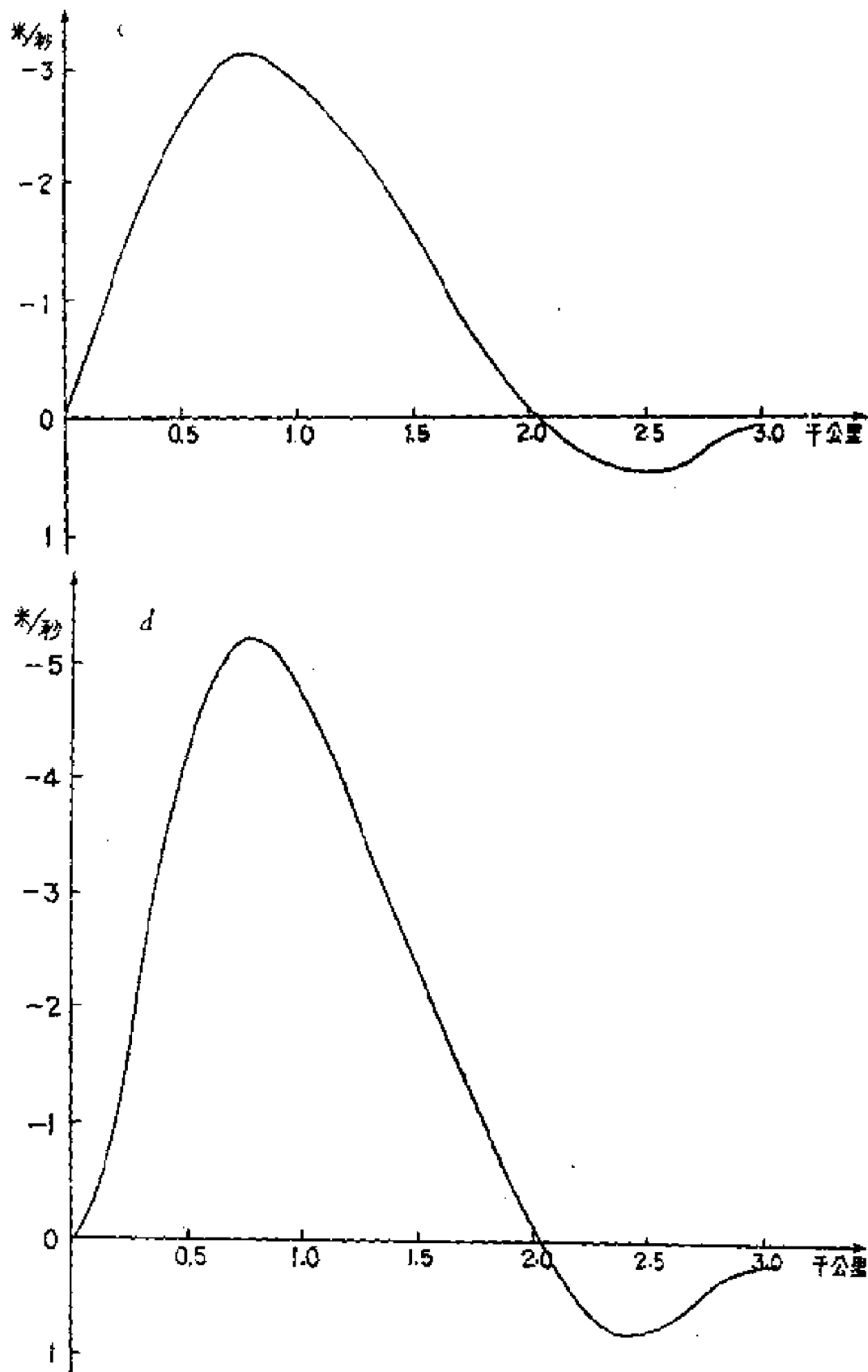


图 16 适应后各层流场的分布

[初始场: $\phi_1 \approx 0$, $\phi_i \approx 0$ ($i = 1, 3, 5$), $\phi_i \approx 0$ ($i = 1, 3, 5, 7$),
其他说明同图 13]

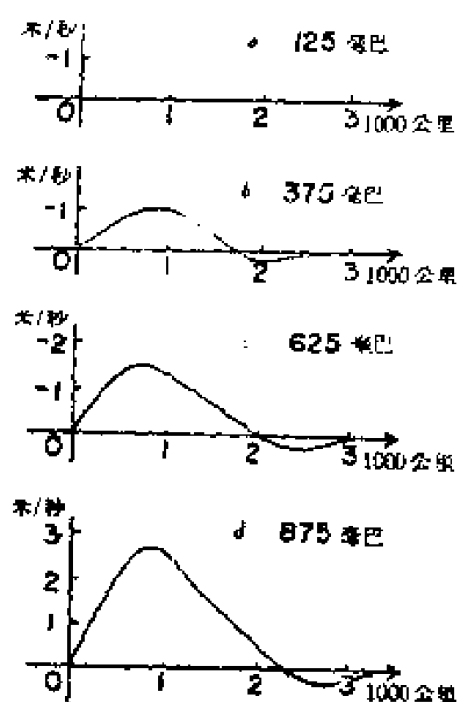


图 17 适应后各层流场的分布^[49]
 [初始场: $\phi_{70} \approx 0$, $\phi_{75} = 0$ ($i = 1, 3, 5$), $\phi_i \approx 0$ ($i = 1, 3, 5, 7$)]
 情况^[40]。

由以上的计算可以推论, 对流层下部的非地转扰动, 通过适应过程可以在对流层顶部引起很大的变化。但对流层顶是一个影响的过滤层, 通过这层时, 影响强度大大减小。非地转扰动自上向下

巴层中。这时适应后的各层流场见图 18a—d。图中指出, 对流层下部(图 18c 和 d)为一强度向上增加的反气旋; 而在对流层上部(图 18a 和 b)为一气旋, 它强度很大, 最大风速达 $7.2 \text{ 米} \cdot \text{秒}^{-1}$ 。到达平流层(图 18a), 仍有这个反气旋的痕迹, 但强度已很弱。由此可以推知温度分部在 625—375 毫巴仍为冷中心, 但在 875—625 毫巴和 375—125 毫巴间则出现了暖中心。如将这个例子中的正负号改变一下, 则在对流层有一强大的暖源, 在这个暖源的对流上部出现了强大的反气旋。这正类似于西藏高原夏季的情况。

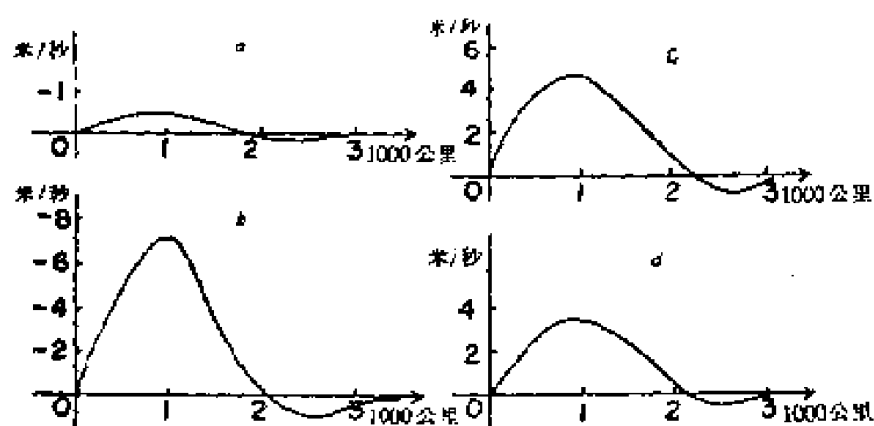


图 18 适应后各层流场的分布^[49]
 [初始场: $\phi_{30} \approx \phi_{70} \approx 0$, $\phi_{10} = \phi_{20} = 0$, $\phi_{i0} = 0$ ($i = 1, 3, 5, 7$), 其他说明见图 13]

的影响更是不易通过这个对流顶了。

5. 斜压大气适应发生的机制

在第四章第5节中我们看到，正压大气中地转适应是通过整层大气质量的辐散辐合来调节的，也就是由重力惯性外波来实现的。斜压大气情况稍有不同，除整层辐散辐合外，还有散度的上下变化，也就是还有重力惯性内波。此外，在斜压大气中除质量场外，垂直运动还调节温度场和流场之间的关系。在静力平衡的假定下，温度场可由等压面的厚度表示。为了单纯考虑斜压的特点，我们将在方程组中滤去重力惯性外波，仅保留内波，采用两层模式，由涡度方程、散度方程、绝热方程和连续方程，陈秋士^[10]求得：

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t} = \frac{p_2}{2} \nabla^2(\Phi_1 - \Phi_3) - \frac{p_2 f}{2} \nabla^2(\psi_1 - \psi_3), \quad (5.24)$$

其中角号 1, 2 和 3 分别表示 250, 500 和 750 毫巴。上式指出，当流场和高度不满足热成风关系

$$\Phi_1 - \Phi_3 = f(\psi_1 - \psi_3) \quad (5.25)$$

时，将有垂直运动被引发出来。当温度场的热成风涡度 $\left[\frac{1}{f} \nabla^2(\Phi_1 - \Phi_3) \right]$ 大于流场切变的涡度 $[\nabla^2(\psi_1 - \psi_3)]$ 时， $\frac{\partial \omega_2}{\partial t} > 0$ ，有下沉运动；当温度场的热成风涡度小于流场的切变涡度时， $\frac{\partial \omega_2}{\partial t} < 0$ ，有上升运动。一方面上升运动还将有上层(250毫巴)辐散，下层(750毫巴)辐合，在流场上将引起 $\nabla^2(\psi_1 - \psi_3)$ 的减小；下沉运动还将引起 $\nabla^2(\psi_1 - \psi_3)$ 的加强。另一方面，在温度场中上升降温，将引起 $\nabla^2(\Phi_1 - \Phi_3)$ 的增加，下沉增温将引起 $\nabla^2(\Phi_1 - \Phi_3)$ 的减小。因此，垂直运动发展到一定阶段，温度场和流场将重新达到热成风平衡关系。

达到热成风平衡时， $\partial \omega_2 / \partial t = 0$ 。此时 ω_2 达极值。由于惯性作用， ω_2 将继续存在，于是引导出与初始状态相反的非热成风。这种相反的非热成风再使 ω_2 减速。这样， ω_2 将形成绕平衡点的往复

的扰动,由此引起波动向四周传播,形成重力惯性内波。将(5.24)式对时间微商,并利用两层模式中的涡度方程和绝热方程,便得 ω_2 的波动方程:

$$\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2} - c_0'^2 \nabla^2 \omega_2 + f^2 \omega_2 = 0. \quad (5.26)$$

在给定的初值条件下,求解上述方程,即得出适应过程中的垂直运动的变化,并由此利用绝热方程可求出温度场的变化,利用连续方程可求出散度场变化,有了散度场,便可有涡度场变化,于是适应过程中各种场的相互调节的情况便可得出。

6. 物理解释

前面我们从理论上得到了初始非地转扰动的尺度,以及扰动垂直结构等等对适应结果的影响,对于这些现象,我们应当予以物理的解释,这样我们才能对它们有比较深刻的了解。在前章第5节中,我们探讨了扰动尺度影响适应结果的物理原因,在这节里我们将讨论初始扰动的垂直结构以及它所出现的高度在适应过程中的物理作用。

在对这些现象进行物理解释以前,我们首先讨论重力内波的波速。在陈秋士^[39]的四层模式中出现四个重力内波波速,即本章第4节中的 $c_j(j=2,4,6,8)$ 。在陈秋士所采用的 Γ_j 和 T_j 的数值下, c_j 的数值分别为 $c_2=1.38 \times 10^3$ 米·秒⁻¹、 $c_4=85$ 米·秒⁻¹、 $c_6=89$ 米·秒⁻¹、 $c_8=99$ 米·秒⁻¹。这四个重力波速出现于求解 φ_i 或 $\omega_i(i=1,3,5,7)$ 所需要的四个波动方程中,陈秋士解 ω_i ,并分析了 c_j 在 ω_i 演变中所起的作用,发现层次愈高,速度愈大的重力内波所起的作用愈大;层次愈低,速度愈低的重力内波所起的作用也愈大。因此,在适应过程中初始扰动出现的层次愈高,快速重力惯性波的作用愈大;出现层次愈低,慢速重力惯性波的作用愈大。

B. Bolin^[6]和G. Fischer^[41]对三维空间的适应问题求解时,在垂直方向上没有采用差分,而将变数在垂直方向上用三角级数

$\sum_K A(\tau, \eta) \sin \lambda_K \sigma$ 展开, 其中 τ 和 η 分别为无量纲的时间和纬向长度, σ 为垂直坐标 z 的函数, $\sigma|_{z=0} = 0$, 在顶部 $\sigma = 1$. 这样在适应过程中的波动方程可归结为:

$$\frac{\partial^2 A_K}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\lambda_K^2} \frac{\partial^2 A_K}{\partial \eta^2} + A_K = 0, \quad (5.27)$$

上式中 λ_K^{-1} 相当于无量纲的重力波速 c_K . 上式指出, 如将初始非地转扰动在垂直方向上分解为若干个波状的部分, 则对应于扰动的每个部分都有一个 λ_K^{-1} . 因此, 非地转扰动的不同部分的适应将以不同的速度来进行. 将 c_K 以有量纲的形式表示, B. Bolin (对于密度上下变化很小的海洋) 求出:

$$c_0 = \sqrt{gH_0}, \quad c_K = \frac{\sqrt{\alpha}}{K\pi} c_0 \quad (K > 0), \quad (5.28)$$

其中 H_0 为海洋深度, α 为度量在垂直方向上流体密度梯度的参数 ($\alpha \ll 1$). 由上式看出, 当 $K=0$ 时, 描写上下平均运动 $\left(\int_0^1 u \sigma d\sigma\right)$ 的适应. 当扰动有垂直变化时, 则具有一个或若干个节面 (nodal surfaces) 的波动被激发出来, 这些波 ($K \geq 1$) 的波速将远小于 $K=0$ 的波速, 而且具有节面愈多的波 (K 愈大) 波速愈小.

有了重力内波波速的知识, 我们就不难对非地转扰动的垂直结构在适应过程中的作用作出解释. 按第四章第 5 节和本章第 1 节, 在适应过程中气压场容易得到维持, 或是流场容易得到维持, 决定于初始扰动尺度 (L) 与 $L_0 (= c/f)$ 之比. $L/L_0 < 1$ 时, 流场容易维持; $L/L_0 > 1$ 时, 气压场容易维持. 既然快速的重力内波在高空适应过程中作用大, 慢速的重力惯性波对于低空适应过程作用大, 则高空的 L_0 大于低空. 对同一尺度 L 的初始扰动, L/L_0 的数值在高空小, 低空大. 因此, 在高空流场容易维持, 在低空则气压场容易维持. 实际上这从方程组 (5.1) 的第三式或线性化的正压连续方程

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

也可以看出：同样的散度， c^2 愈大 Φ 場的变动也愈大，也就是在适应过程中 Φ 愈向流場适应；反之 c^2 愈小， Φ 場变动得愈小，流場則愈向 Φ 場适应。

在本章第 3 节里我們还看到，上下趋于一致的扰动流場容易維持，上下不匀的扰动流場不容易維持，这可以这样来解释：将扰动随高度的分布用三角級数 $\sum_K A_K \sin \lambda_K z$ 分解，可以看出，如上下完全一致，則用 $K = 0$ 一項即可描写扰动的垂直結構；如上下愈不一致，則 K 愈大才能描写。因此，上下愈不一致的扰动激发的重力波波速愈慢，它的临界尺度 L_0 亦愈小，故速度場愈不易維持，

7. 地轉适应的一些可能应用

前一章对正压大气中的地轉适应問題进行了討論，这一章的前几节对斜压大气中地轉适应过程的主要問題也作了探討，由这些討論中我們可以发现，許多地轉适应理論可以有直接或間接的应用，陈秋士曾把地轉适应的理論結果用于气旋发展的分析，設

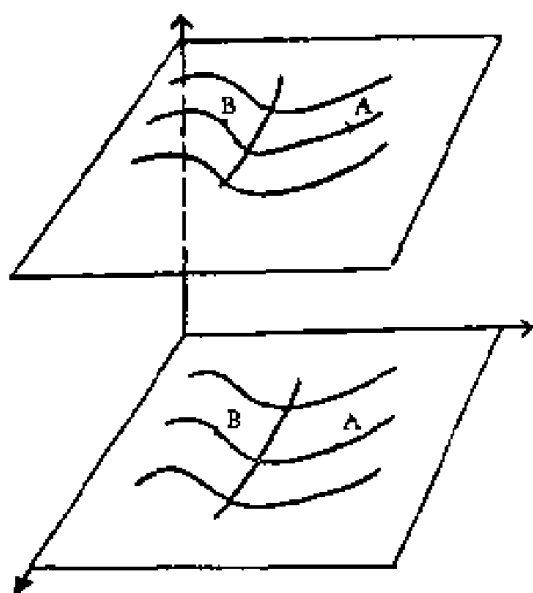


图 19 两层等压面上的流线或等温分布^[10]

某时 ($t = 0$) 西风帶中有一长波系統，如图 19，在各等压面上流綫和温度綫重合一致，而且均滿足地轉关系。但按热成风原則，平均西风和扰动强度均向上增强，故在平流作用下，槽前(A)的正涡度平流上层大于下层；槽后負涡度平流的强度也是上层大于下层。于是涡度平流的上下变化，将在风場上产生一附加的流場热成风。但此时温度場沒有平流，所以这个附加的热成风是非地轉的[參看(5.24)和(5.25)式]，

适应因此产生。結果在槽前有暖平流，槽后有冷平流，将更加強这

种垂直运动。陈秋士曾利用这种适应的概念，分析了一个天气实例。

曾庆存和张可苏以及松本誠一 (Matsumoto)^[42] 等都曾研究过非絕热加热場在地轉适应过程中的作用。他們的結果指出，加热場可以产生非地轉风，而且曾庆存和张可苏的研究还說明，在常定加热作用下非地轉扰动也有适应过程。这个結果，就可以用来討論冬季大范围冷空气出現于温暖的洋面上所引起的环流变化。J. Namias^[43] 所研究的阿拉斯加 (Alaska) 槽的迅速加深，及由此引起的一系列的环流演变，即起源于加热。当一槽自大陆行至阿拉斯加湾时，槽后冷空气遇到温暖的洋面，受到大量加热。因为加热来自洋面，所以加热强度迅速向上减小，于是由非絕热加热引起的非地轉扰动将主要出現于对流层下部，这个扰动显然是气旋式的。根据本章第 5 节，适应后它将对对流层深厚的大气发生影响。

长波的斜压不稳定是近年来气象学中的一个大问题。从各种理論角度出发，斜压不稳定的判据中都有这样一个条件：即只有波长 (L) 超过某一临界波长 (L_0) 的波动才会不稳定。陈秋士^[20] 从地轉适应角度分析了斜压不稳定的物理机制。在略去 β ($\equiv df/dy$) 效用的两层模式中，他得到不稳定的条件为：

$$\frac{\mu^2 + k^2}{f^2/c_0'^2} < 1,$$

这里 $\mu = \pi/2W$ ， $2W$ 为扰动的南北宽度； $k = \frac{2\pi}{L}$ ，为扰动在东西方向上的波数。

当 $(\mu^2 + k^2) / \left(\frac{f^2}{c_0'^2} \right) > 1$ 时，长波将是中性的。

显然，如令 $\mu^2 + k^2 = \frac{1}{e^2}$ ，则 e 可代表扰动的尺度。上述不等式指出，当长波尺度 L 大于某临界尺度 $L_0 = L'_0/f$ 时，它将是不稳定的。这个临界尺度也正是我們在本章中，或第四章中所常見的所謂“变形半径”。适应后的状态是决定于非地轉扰动尺度与 L_0 之比大于 1 或小于 1。所以不稳定波长的临界值和决定适应后状态的非地轉扰动尺度的临界值是一样的，这不是偶然的，这意味着

长波时斜压不稳定扰动是相地轉(或热成风)的破坏与初始适应过程有关系的。陈秋士又以天气中常见的长波为例,从热成风的破坏和适应过程来分析它的不稳定条件,他得到:当厚度槽的位相落后于高度槽(即槽的轴綫由下向上向西傾斜)时,槽是不稳定的;当厚度槽的位相超前于高度槽时,槽将是阻尼的;两者的位相相合时,則槽是中性的。这正合乎观测现象。

以上我們举了一些地轉适应理論可以应用的地方,相信这个理論一定有更广泛的应用,因为天气过程的演变就是在地轉关系的破坏和适应之間矛盾的发展过程中进行的。

8. 气象学中准地轉假定的物理意义 及其存在的問題

在气象工作中經常采用所謂准地轉的假定,这个假定簡化了許多問題。在天气学上,它使人們提出了中高緯度大尺度天气分析的方法;在动力气象学上,它簡化了数学上的問題,使得若干方程的解答成为可能。近年来,数值預告的成功,它也起了很大的作用。这个假定虽然广泛地被应用,但是人們对于它的物理含义注意得不够。准地轉的假定,相当于在运动中滤去了重力快波^[2],这一点在第四章第3节里也看得很清楚。(4.25)式指出,重力波就是非地轉扰动所激发出来的。在运动中过滤了重力惯性波有什么物理意义呢?在地轉适应理論出現之后,这个問題就比較清楚了。天气的演变必須依賴地轉偏差,因为純粹的地轉运动是沒有变化的。地轉关系的破坏因子是多种多样的,如非絕热加热和非綫性平流作用等等。地轉关系一旦被这些因子破坏之后,就有重力惯性波激发出来,使风場和气压場重趋于适应关系。适应过程虽快,但也需要一段時間来完成。在这段時間里空气質点有一定的移动,同时气压場和风場也有一定的变化。滤去了重力惯性波,則等于假定风場和气压場的适应速度是无穷的。这样在适应过程中空气質点所发生的位移和风場和气压場的变化都小到可以略去。于是天气型式的演变是在气压梯度力和柯氏力(风場)两者的准平

衡状态下进行的。

由上面討論可以看出，准地轉假定的精确程度依赖于地轉适应过程的速度。适应速度愈大，准地轉假定也愈精确。适应是因波动能量的頻散而产生的，所以适应速度和波动羣速成比例。在一維空間的問題里，羣速的最大值为 c_0 (正压大气) 或 c'_0 (斜压大气) (参看第四章第 2 节)。在正压大气里， c_0 接近于声速，远較风速为大。但在斜压大气里， c'_0 不过几十米·秒⁻¹，比风速大不了一个量級。于是地轉适应的速度就不比大型天气演变的速度大到在适应过程中所发生的变化可以略去的程度。这时，在适应期間所发展出来的非地轉运动的成分将有相当的强度，使得准地轉的假定不再是一个很好的近似，这个假定将引起比較大的誤差，这也是数值預告中准地轉斜压模式的一个缺点。

陈秋士^[10]曾考虑了三种情况下的地轉适应。設某时的地轉偏差为 v'_0 ，它的近似适应時間为 τ ， v'_0/τ 可以称为地轉适应率。如在形势变化过程中，地轉破坏率为 $\partial v'/\partial t$ ，則有以下三种情况：

$$\frac{\partial v'}{\partial t} \begin{cases} \ll \\ \leq \\ \gg \end{cases} \frac{v'_0}{\tau}, \quad (5.29)$$

对于第一种(上)情况，在运动中 $|v'| \ll |v'_0|$ 总是滿足的，准地轉的假定是好的。对于第二种(中)情况，破坏率虽小于适应率，但在运动中地轉偏差已占重要位置，准地轉假定也就不太好了。对于第三种(下)情况，已无适应可言，地轉假定也就无意义了。

在斜压大气中，总的来說适应較慢，准地轉假定虽然会引起一定的誤差，但在本章第 3 和第 5 节中我們指出，对于上下层平均流場 $\left(\int_0^1 v d\zeta\right)$ 来說，适应的进行仍然是快的(由重力慣性外波的頻散而适应)。所以對於斜压大气的平均运动，准地轉假定还是可用的。一般 500 毫巴的运动接近于大气的平均运动，对于这层采用准地轉假定，應該比其他层好些。

所有以上的討論，都是在 $\Gamma < \Gamma_0$ 的假定下进行的。对中高緯度的大型运动来說，这个假定是沒有問題的。但是在較低緯度

(不低到地轉假定不能用的緯度)的海洋上，可能在比較大的範圍內大氣是濕絕熱不穩定的，這時 Γ_0 將代以 Γ_m (濕絕熱溫度遞減率)，於是 $c_0'^2 < 0$ ，(5.6)式或(5.7)式的解將變為不穩定的，這時地轉適應將成為不可能，也就無地轉適應過程了，陳秋士^[45]曾由此討論了台风的形成問題。

第 六 章

靜力平衡适应

过去一般对于风場和气压場之間适应問題的研究，仅限于大尺度运动的地轉适应。在中小尺度运动中，气压場和风場之間是否也有某种形式的适应，对此过去未曾有人注意。关于这个問題，在第二章中我們已予以肯定的答复，即某种形式的适应是存在的。在第二章中，我們并且提出了中小尺度运动中风場和气压場之間准平衡的关系式。在第三——五章中，我們已对大尺度的地轉适应过程进行了討論，在第七章中将研究中小尺度运动中风場和气压場的适应問題。但在討論中小尺度运动中适应問題以前，在本章中首先將討論一下靜力平衡的适应問題。

前面已經指出，对于大气中各种尺度运动而言，靜力平衡都能高度近似地成立。但是大气的靜力平衡意味着垂直加速度的消失，垂直加速往往与大气的垂直靜力不稳定相联系在一起，因此在由于层結不稳定而发生的对流运动中，靜力平衡可能遭到破坏。中小尺度的运动是对流运动盛行的区域，因此研究靜力平衡的适应，对中小尺度运动比对大尺度运动更为重要。

1. 研究靜力适应的方程組

大尺度运动是准靜力的，地轉适应过程又基本上是綫性的，由此我們找到了适于描写地轉适应过程的方程組，因而才能比較順利地討論地轉适应过程。在研究靜力适应过程的时候，我們也需要首先建立适宜于描写靜力适应过程的方程組。

設大气原为靜止的，其压力、密度和温度分布分別为 $p_0(z)$ ， $\rho_0(z)$ 和 $T_0(z)$ ，它們滿足靜力平衡关系：

$$\partial p_0 / \partial z = -g\rho_0. \quad (6.1)$$

在这样的大气中,某一局地区域受到了扰动,如大气是无摩擦的,运动是绝热的,则有以下无量纲方程组:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon' \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + r w' \frac{\partial u'}{\partial z'} - R^{-1} v' \\ = - \frac{a}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'}, \\ \varepsilon' \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + r w' \frac{\partial v'}{\partial z'} + R^{-1} u' \\ = - \frac{a}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial y'}, \\ \varepsilon' \frac{\partial w'}{\partial t'} + u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + r w' \frac{\partial w'}{\partial z'} \\ = - \sigma - \frac{b}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial z'}, \\ \frac{\Delta' \rho}{\bar{\rho}} \varepsilon' \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\Delta \rho}{\bar{\rho}} \left(u' \frac{\partial \rho'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \rho'}{\partial y'} \right) + r \frac{\Delta' \rho}{\bar{\rho}} \times \\ \times w' \frac{\partial \rho'}{\partial z'} + \rho' \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) + r \rho' \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0, \\ \frac{\Delta' \theta}{\bar{\theta}} \varepsilon' \frac{\partial \theta'}{\partial t'} + \frac{\Delta \theta}{\bar{\theta}} \left(u' \frac{\partial \theta'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \theta'}{\partial y'} \right) + r \frac{\Delta' \theta}{\bar{\theta}} w' \frac{\partial \theta'}{\partial z'} = 0, \\ \theta = T(p_{00}/p)^{K/c_p}, \quad p' = \beta \rho' T'. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

和第二章一样,这里所有带撇的变数都是无量纲的, $\varepsilon' = \frac{L}{v\tau}$,

$r = \frac{LW}{HV}$, $R = V/fL$, $a = \Delta p / \bar{\rho} V^2$, $b = \frac{\Delta' p}{\bar{\rho} H W V} \frac{L}{V}$, $\sigma = gL/VW$,

$\beta = \bar{p}/R\bar{p}\bar{T} \cdot v$, W 、 L 、 H 和 τ 等的含义仍和过去一样, \bar{p} 、 $\bar{\rho}$ 、 \bar{T} 和 $\bar{\theta}$ 分别为气压、密度、温度和位温的特征量; Δ 、 Δ' 、 Δ'' 分别表示 p 、 ρ 或 θ 的(水平、垂直、时间)变化特征量; p_{00} 为1000毫巴. 对于我们所要讨论的水平范围为几十公里的系统,可令 $r \ll 1$, $R \gg 1$;

对于任何运动都有 $\left(\frac{\Delta \rho}{\bar{\rho}}, \frac{\Delta p}{\bar{p}}, \frac{\Delta \theta}{\bar{\theta}} \right) \ll \left(\frac{\Delta' \rho}{\bar{\rho}}, \frac{\Delta' p}{\bar{p}}, \frac{\Delta' \theta}{\bar{\theta}} \right) < 1$.

由此可以看出,在(6.2)式第四个方程中,相对于后四项第二、三两项可以略去,第五个方程中相对于第四项第二、三两项也可以略

去。

因為我們討論的對象是靜力平衡的適應，第三個運動方程不能取靜力平衡，故 $\sigma + \frac{b}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial z'} \neq 0$ 。為了使(6.2)式第三個方程的兩端求得平衡，必須 $\varepsilon' \gg 1$ 。同時還可以看出，該式左端的后三項可以略去。既然 $\varepsilon' \gg 1$ ，第一、二兩個方程左端的后四項和第一項相比也可以略去。按定義： $\varepsilon' = \frac{L}{\nu \tau}$ ，取 $L = 10^4$ 米， $\nu = 10$ 米·秒⁻¹，故 $\tau \leq 10^2$ 秒。由此可見，適應過程是非常迅速的。當在水平範圍為 10 公里左右的大氣中，靜力平衡被破壞後，它在幾分鐘內即可得到恢復。這是和 A. M. Обухов 和 A. С. Монин^[18] 的結果相同的。

由以上的討論可以看出，以下的方程組是適宜於描寫靜力適應過程的：

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \rho w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0, \quad p = R \rho T, \\ \theta &= T(p_0/p)^{R/c_p}. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

由此方程組可以看出，在靜力適應過程中表示主要非綫性作用的水平平流項是不重要的。上面的方程組可以進一步的簡化，因為 ρ 和 θ 比風速的變化小得多，所以和風速一起出現的 ρ 和 θ 可以由它們的基本場 ρ_0 和 θ_0 來代替。再令 $(p, \rho, T, \theta) = (\rho_0 + p', \rho_0 + \rho', T_0 + T', \theta_0 + \theta')$ ，代入方程組(6.3)的后二式，取對數后再展開，即可得 $\rho' = \frac{1}{c^2} p' - \alpha'$ ，其中 $\alpha' = \frac{\rho_0}{\theta_0} \theta'$ ，而 $c^2 = \nu p_0 / \rho_0 = \nu R T_0$ ， $\nu = c_p / c_p$ 。注意，這裡的“撇”不再代表無量綱數，而表示與基本場的偏差。由此，(6.3)方程組便可寫為：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial w'}{\partial t} = -g \rho' - \frac{\partial p'}{\partial z}, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial \rho'}{\partial t} &= \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + s w' = 0, \\ \rho' &= \frac{1}{c^2} p' - \alpha'. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

这里 $(u', v', w') = (\rho_0 u, \rho_0 v, \rho_0 w)$, $s = \frac{\partial}{\partial z} (\ln \theta_0)$.

我們在方程式(6.4)的第三和第四式左端分別乘以 λ 和 μ , 而 λ 和 μ 等于零或 1. 当它們为零时, 表示运动为靜力平衡的, 大气为不可压縮的. 当它們为 1 时, 則运动为非靜力的, 大气为可压縮性的. 引入 μ 和 λ 的用意在于, 便于討論靜力平衡和大气可压縮性对于大气运动波型的影响, 这就是我們下一节要討論的.

2. 不同模式大气中的声波和重力波

在第三章中已經指出, 大气运动中一般存在着三种波型, 即声波、重力波和慢波. 現在我們来討論这些波型与靜力平衡的关系.

方程組(6.4)是关于 $u', v', w', P', \rho', \alpha'$ 的常系数微分方程組, 由此我們得到:

$$\left[\lambda \mu \frac{\partial^4}{\partial t^4} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\lambda \nabla_z^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - (\mu c^2 s + g) \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial z} - c^2 s g \nabla_z^2 \right] (u', v', w', P', \rho', \theta') = 0 \quad (6.5)$$

或

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (\mu c^2 s + g) \frac{\partial}{\partial z} - \lambda \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] + c^2 \nabla_z^2 \left(\lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} + s g \right) \right\} (u', v', w', P', \rho', \theta') = 0,$$

其中 $\nabla_z^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为平面拉普拉斯算子. 設有波解

$$u', v', w', P', \rho', \theta' \sim e^{-\frac{(g + \mu c^2 s)}{2c^2} z + i(-\delta t + lx + my + nz)}. \quad (6.6)$$

代入(6.5)式, 得到

$$\begin{aligned} \lambda \mu \delta^4 - \delta^2 \left[c^2 n^2 + \left(\frac{g + \mu c^2 s}{4c^2} \right)^2 + c^2 \lambda (l^2 + m^2) \right] + \\ + c^2 g s (l^2 + m^2) = 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

由此得($\lambda = \mu = 1$):

$$\delta_a^2 = \frac{c^2}{2} \left[(l^2 + m^2 + n^2) + \left(\frac{g + c^2 s}{2c^2} \right)^2 \right] \times \\ \times \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{64c^6[gs(l^2 + m^2)]}{4c^4(l^2 + m^2 + n^2) + (g + c^2 s)^2}} \right\}, \quad (6.8)$$

$$\delta_g^2 = \frac{c^2}{2} \left[(l^2 + m^2 + n^2) + \left(\frac{g + c^2 s}{2c^2} \right)^2 \right] \times \\ \times \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{64c^6[gs(l^2 + m^2)]}{[4c^4(l^2 + m^2 + n^2) + (g + c^2 s)^2]^2}} \right\}. \quad (6.9)$$

δ_a 为大家所熟知的声波频率, 而 δ_g 为大家所熟知的重力波频率. 因为声波和重力波都是同时向不同方向传播的, 所以(6.8)式和(6.9)式分别表示两个移动方向相反的波系, 共有四个波系. 但按方程组(6.4)应有五阶时间导数项, 故亦应有五个波系. 但由于我们假定了基本气流为零, 故随基本气流移动的第五个波系不再出现. 考虑到一般情况下,

$$\frac{64c^6 gs(l^2 + m^2)}{[4c^4(l^2 + m^2 + n^2) + (g + c^2 s)^2]^2} \ll 1,$$

因而声波和重力波的简单形式为:

$$\delta_a'^2 \approx c^2 \left[(l^2 + m^2 + n^2) + \left(\frac{g + c^2 s}{2c^2} \right)^2 \right], \quad (6.10)$$

$$\delta_g'^2 \approx \frac{gs(l^2 + m^2)}{(l^2 + m^2 + n^2) + \left(\frac{g + c^2 s}{2c^2} \right)^2}. \quad (6.11)$$

从(6.7)式容易看出, 不论令 $\lambda = 0$ 或 $\mu = 0$, 或二者同时为零, (6.7)式皆退化为二次方程. 由此可见, 采用静力平衡或不可压缩的结果, 都会使声波消失^[30], 但同时也使重力波发生了变形. 如令 $\lambda = 0$, $\mu = 1$, 我们有

$$\delta_a^2 = 0, \quad (6.12)$$

$$\delta_g^2 = \frac{gs(l^2 + m^2)}{\left[n^2 + \left(\frac{g + c^2 s}{2c^2} \right)^2 \right]}. \quad (6.13)$$

比較(6.13)式和(6.11)式可以看出,靜力平衡使重力波頻率表达式中分母失去了 $(l^2 + m^2)$,也就是提高了重力波的頻率,如

$$l, m \sim \frac{1}{L}, n \sim \frac{1}{H}.$$

H 为扰动垂直尺度, L 为扰动水平尺度,在大尺度运动中, $L \gg H$; 所以 $n^2 \gg (l^2 + m^2)$. 在小尺度运动中, $L \sim H$, 所以 $m^2 \sim (l^2 + m^2)$. 由此可見,在大尺度运动中靜力平衡对于重力波的变形不大,而在中小尺度中,靜力平衡大大歪曲了重力波. 例如:在中小尺度中, $sc^2 = \frac{g}{6}$, $l \sim m \sim n \sim \frac{2\pi}{L} \sim 10^{-3}$, 而 $\left(\frac{sc^2 + g}{2c^2}\right) \sim 10^{-4}$. 因而由于靜力平衡結果,可以使重力波頻率提高2—3倍,有使重力波的頻率向更快的声波頻率靠近的可能.

如令 $\lambda = 1$, $\mu = 0$, 則

$$\delta_a^2 = \frac{gs(l^2 + m^2)}{(n^2 + m^2 + l^2) + \left(\frac{g}{2c^2}\right)^2}, \quad \delta_s^2 = 0. \quad (6.14)$$

由于 $\left(\frac{g + sc^2}{2c^2}\right)^2 \sim \left(\frac{g}{2c^2}\right)^2 \ll n^2$, 所以对于中小尺度系統來說, (6.14)式比(6.13)式接近(6.11)式得多,也就是靜力平衡比不可壓縮的假定对重力波有更大歪曲. 因为重力波在中小尺度系統中有重大意义,为了不使重力波受到重大的歪曲,一般在中小系統分析时,不采用靜力平衡而利用不可壓縮的假定以滤去声波^[30].

最后我們指出:如令 $s = 0$, 即假定大气层結为中性的, 則(6.7)式也退化为二次方程, 这时

$$\delta_a^2 = c^2(n^2 + m^2 + l^2) + \left(\frac{g}{2c}\right)^2, \quad \delta_s^2 = 0, \quad (6.15)$$

这时重力波不存在, 仅有声波. 因为 $c^2s \ll g$, 比較(6.15)式和(6.10)式可見, 这时声波无大的歪曲.

3. 声波的激发

前节指出,在可壓縮的大气中靜力平衡和声波紧紧地联系着,

由此自然想到在可压缩的大气中静力平衡的破坏是激发声波的充分和必要的条件，声波的强度也决定于静力平衡破坏的程度。本节将对此加以论证。在前节中我们还看到，当 $s = 0$ 时，重力波即被滤去，而声波不十分受影响。为了使问题简化，我们将专门讨论声波的激发，以中性大气（即 $s = 0$ ）为对象，这时

$$\alpha' = 0.$$

将方程组(6.4)的第一和第二式变为涡度和散度方程，并令 $u' =$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v' = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}$, 即有下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -P', \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} &= -\Delta \varphi - \frac{\partial w'}{\partial t}, \\ \frac{\partial w'}{\partial t} &= -\frac{\partial P'}{\partial z} - g\rho', \\ c^2 \rho' &= P'. \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

令初始值

$$\left. \begin{aligned} \varphi' &= \varphi_0 e^{i(lx+my+nz)-\frac{gz}{2c^2}}, \\ P' &= P_0 e^{i(lx+my+nz)-\frac{gz}{2c^2}}, \\ \rho' &= \rho_0 e^{i(lx+my+nz)-\frac{gz}{2c^2}}, \\ w' &= w_0 e^{i(lx+my+nz)-\frac{gz}{2c^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

即有

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} \left[\varphi_0 + \frac{1}{i\sigma\beta} \left(-\frac{\partial P'_0}{\partial z} - \rho'_0 g \right) \right] e^{i(lx+my+nz)-\frac{gz}{2c^2}+i\sigma t} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\varphi_0 - \frac{1}{i\sigma\beta} \left(-\frac{\partial P'_0}{\partial z} - \rho'_0 g \right) \right] e^{i(lx+my+nz)-\frac{gz}{2c^2}-i\sigma t}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

W' , ρ' , P' 亦可写成类似形式。其中

$$\sigma^2 = c^2(l^2 + m^2 + n^2) + \left(\frac{g}{2c^2} \right)^2, \quad \beta = in + \frac{g}{2c^2}. \quad (6.19)$$

这里的 σ^2 和(6.15)式的 δ_0^2 完全相同, 所以这里的波动为声波, 从(6.18)式可以看出, 声波振幅是与初始非静力平衡密切联系着的, 如果在初始时刻 $\varphi_{|0} = 0, \frac{\partial \varphi_{|0}}{\partial z} = -\rho'_{|0}g$, 那么 φ 永远为零, 就是假如初始场中无声波, 则只有非静力平衡才能把声波激发出来, 当大气由于某种原因静力平衡得到了破坏, 于是立刻激发出声波, 声波频率与波长有关, 故为频散波, 在下节里可以看出, 声波的频散结果又会导致静力平衡, 此外由非静力平衡激发出的声波强度与非静力平衡的强度成正比, 因此静力平衡破坏得越厉害声波噪音也越强.

4. 静力平衡的适应过程

前节指出, 大气中一旦静力平衡遭到破坏后, 立刻会激发起声波, 并且指出这种声波具有频散的性质, 有限区域的扰动由于这种频散而消失, 最后会恢复静力平衡, 对于这个问题 A. C. Монин 和 A. M. Обухов^[17] 以及巢紀平^[19]等都有过研究, 现在这儿我们也来讨论一下这种适应过程, 由(6.16)式得:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla_3^2 - g \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = 0, \quad (6.20)$$

$\nabla_3^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为三维空间的拉普拉斯算子, 引进变换:

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi'(x, y, z, t) e^{-\left(\frac{g}{2c^2}\right)z}, \quad (6.21)$$

则(6.20)式变成:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_3 + f^2 \right) \varphi' = 0, \quad (6.22)$$

$$f^2 = \left(\frac{g}{2c} \right)^2. \quad (6.23)$$

在下列初始条件下:

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(x, y, z, 0) &= F(x, y, z), \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial t}(x, y, z, 0) &= G(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

(6.22)式的解为^[44];

$$\varphi' = \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{ct} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{ct} \rho^2 J_0(f' \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}) Q_1(x, y, z, \rho) d\rho + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{ct} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{ct} \rho^2 J_0(f' \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}) Q_2(x, y, z, \rho) d\rho \right] \right\}, \quad (6.25)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega_1} F(x + \rho\beta_1, y + \rho\beta_2, z + \rho\beta_3) d\omega_3, \\ Q_2 &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega_1} G(x + \rho\beta_1, y + \rho\beta_2, z + \rho\beta_3) d\omega_3. \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

就是說, Q_1 和 Q_2 分别为 F 和 G 在以 (x, y, z) 为中心, 以 ρ 为半径的圓內的平均值. 显然, 它們既是 x, y, z 的函数, 也是 ρ 的函数. J_0 是零阶 Bessel 函数. 現在我們討論适应过程: 若初始扰动只在一个有限的小区域中, 即

$$\left. \begin{aligned} F &\begin{cases} = \text{常数}, & x^2 + y^2 + z^2 \leq R_0^2, \\ = 0, & x^2 + y^2 + z^2 > R_0^2, \end{cases} \\ G &\begin{cases} = \text{常数}, & x^2 + y^2 + z^2 \leq R_0^2, \\ = 0, & x^2 + y^2 + z^2 > R_0^2. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

于是(6.25)式可以写成形式(在 $x = y = z = 0$ 的原点):

$$\varphi'(0, 0, 0, t) = Q_1(R_0) \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R_0} \rho^2 J_0(f' \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}) d\rho + \\ + Q_2(R_0) \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R_0} \rho^2 J_0(f' \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}) d\rho \right] \quad (6.28) \\ (ct \gg R_0).$$

或有:

$$\varphi'(0, 0, 0, t) = \frac{f' c R_0^3}{3t} [Q_2(R_0) J_1(f' ct) - Q_1(R_0) J_1(f' ct)], \quad (6.29)$$

当 $ct \gg R_0$

考虑到(6.26)式和(6.27)式后, (6.29)式可写成:

$$\varphi'(0, 0, 0, t) = \frac{f' c R_0^3}{9t} [G J_2(f' ct) - F J_1(f' ct)], \quad (6.30)$$

显然, $t \rightarrow \infty$ 时, $\varphi(0, 0, 0, t) \rightarrow 0$, 可见, 当 R_0 有限时, 最后可恢复到静力平衡。另外, 初始扰动 G, F 的大小和性质也决定了静力平衡适应的快慢。由(6.30)式还可以看出, $\varphi(0, 0, 0, t) \propto R_0^3$ 。因此, 初始扰动的尺度大小, 将大大地影响到静力平衡完成的时间。当扰动范围为无限大时, 静力平衡实际上是不可能的。这和当地转偏差为无限时, 地转适应为不可能的情况一样。此外, 我们^①知道, 当 t 很大时,

$$\left. \begin{aligned} J_1(f'ct) &= \sqrt{\frac{2}{\pi f'ct}} \sin\left(f'ct - \frac{\pi}{4}\right), \\ J_2(f'ct) &= \sqrt{\frac{2}{\pi f'ct}} \cos\left(f'ct - \frac{5\pi}{4}\right), \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi f'ct}} \cos\left(f'ct - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

于是,

$$\begin{aligned} \varphi(0, 0, 0, t) &= \frac{f'cR_0^3}{9t^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\pi f'c}} \left[G \sin\left(f'ct - \frac{\pi}{4}\right) - \right. \\ &\quad \left. - F \cos\left(f'ct - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.32)$$

上式指出, $\varphi(0, 0, 0, t)$ 随时间的 $t^{-3/2}$ 而衰减, 这与 Л. А. Дикий^[15] 的结果是一致的。

5. 静力平衡适应过程与地转适应 过程速度的比较

在一般常见的稳定度之下, 有

$$\frac{\delta_\sigma^2}{\delta_\theta^2} \sim 10^2 - 10^3.$$

因周期 $T_\sigma = \frac{2\pi}{\delta_\sigma}$, $T_\theta = 2\pi/\delta_\theta$, 则有 $\frac{T_\sigma}{T_\theta} \sim 10^1 - 10^2$. 这说明重力波与声波相比是低频振荡, 而时间周期慢了一个量级。因此声波是比重力波更快的一种过程, 这就使得地转适应慢于静力平衡

适应。因此，当大气同时在一有限地区发生了一个非地轉和非靜力平衡的扰动时，則首先靜力平衡迅速地恢复，然后，地轉适应才逐漸实现。Л. А. Дикий^[45] 曾对这个問題进行过数学分析，現簡述如下，为了簡便起見，只討論等温层結大气的情況，即 $\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ ，于是

$$S = \frac{(\kappa - 1)}{c^2} g, \quad \kappa = c_p/c_v. \quad (6.33)$$

因为要討論地轉适应，必須考虑 f 。这时方程(6.5)对 w 便可写成 ($\lambda = \mu = 1$):

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \left(c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa g \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + \Delta \times \right. \\ \left. \times \left[(\kappa - 1)g^2 + c^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \right\} w = 0. \quad (6.34)$$

$$\text{取 } w = \eta(x, y, z, t) e^{-\frac{\kappa g}{2c^2} z},$$

則上式变成:

$$\left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right] \left(c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\kappa^2 g^2}{4c^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + \Delta_2 \times \right. \\ \left. \times \left((\kappa - 1)g^2 + c^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right\} \eta = 0. \quad (6.35)$$

这是个四阶的常系数双曲型方程。現令初始条件为:

$$\eta|_{t=0} = \eta_0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{t=0} = \eta_1, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \eta_2, \quad \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} \Big|_{t=0} = \eta_3, \quad (6.36)$$

不难将 η_0, η_1, η_2 和 η_3 用初值 $W_0, \varphi_0, \psi_0, \rho_0$ 和 p_0 表示之:

$$\eta_0 = W_0, \quad \eta_1 = - \left(\frac{\partial P_0}{\partial z} + g\rho_0 \right), \\ \eta_2 = \left(g + c^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta \varphi_0 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa g + c^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) W_0 \\ \eta_3 = \left(g + c^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta (f\psi_0 - P_0) - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa g + c^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial P_0}{\partial z} + g\rho_0 \right). \quad (6.37)$$

再令边界条件为:

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } z = 0, \quad \eta = 0, \\ \text{当 } z \rightarrow \infty, \quad \eta \text{ 有限.} \end{array} \right\} \quad (6.38)$$

在边界条件(6.38)和初始条件(6.36)下, 方程(6.35)可这样求解: 将它对时间用拉氏变换, 对 x, y 用傅氏变换, 而得到一个关于 z 的二阶常微分方程. 求解后, 再进行反变换, 即可得到了关于 η 解的格林函数:

$$G = \frac{1}{8\pi^2 i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} e^{Pt} \times \\ \times \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{\kappa^2 g^2}{4c^2} + P^2} \sqrt{\delta z^2 + \frac{f^2 + P^2}{(\kappa-1)g^2/c^2 + P^2} (\delta x^2 + \delta y^2)} \right\}}{\left(\frac{(\kappa-1)g^2}{c^2} + P^2 \right) \sqrt{\delta z^2 + \frac{f^2 + P^2}{(\kappa-1)g^2/c^2 + P^2} (\delta x^2 + \delta y^2)}} dP, \quad (6.39)$$

式中 r 为任意常数, $\delta x = x - x_1$, $\delta y = y - y_1$, $\delta z = z - z_1$. 影响函数(6.39)式, 通过演算可以分成两部分, 一部分为声波解的影响函数 G_{sk} , 另一部分为重力波解的影响函数 G_{rp} . 当时间很大时, 这两部分分别为:

$$\left. \begin{aligned} G_{sk} &= \kappa^{3/4} H^{1/4} \pi^{-3/2} g^{-5/4} (\kappa-2)^{-2} \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{\kappa g / H} t + \frac{\pi}{4} \right) t^{-3/2}, \\ G_{rp} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{(m_1^2 - m_2^2)(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2)}} \times \\ &\times \left[\frac{\cos \left(m_2 t - 3(a/2)^{2/3} t^{1/3} + \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{3m_2 t}} - \frac{\cos \left(m_3 t + \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{m_3 t}} \right], \\ a &= \frac{\sqrt{(m_1^2 - m_2^2)(m_1^2 - m_3^2)(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2)}}{2m_2 \kappa g H}, \\ m_1 &= \frac{1}{2} \frac{\kappa g}{c}, \quad m_2 = \frac{\sqrt{\kappa-1} g}{c}, \\ m_3 &= \sqrt{\frac{f^2 (\delta x^2 + \delta y^2) + [(\kappa-1)g^2/c^2] (\delta z^2)}{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

(6.40)式清楚地告訴我們，属于声波部分的影响函数随 $t^{-3/2}$ 而衰减，而属于重力波频率的部分，則随 $t^{-1/2}$ 而衰减。也就是說，声波振幅比重力波振幅随時間的衰减速度快了 t 倍，亦即靜力平衡适应比地轉适应完成速度快了 t 倍。

不过这里我們應該指出：在上面的討論中，重力外波已被滤去[参看边界条件(6.38)式]。在正压大气中，地轉适应是通过重力惯性外波的頻散而来的，而重力惯性外波的速度和声波速度是接近的，可見在正压大气中，地轉适应和靜力适应的速度将是相近的。

6. 科氏力在靜力平衡适应过程中的作用

前节指出，当大气同时有非靜力平衡和非地轉扰动时，声波和重力波立刻向周围頻散，于是場中首先达靜力平衡，而后是地轉平衡，最后有：

$$\left. \begin{aligned} f\psi &= +P', \quad \frac{\partial P'}{\partial z} = -g\rho', \\ \varphi &= 0, \quad W = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

但若沒有科氏力 ($f = 0$)，則 p' 和 ρ' 也为零。这說明在非科氏力場中，靜力平衡是恢复到扰动以前的气压和密度皆为均一的靜止状态。但是在科氏力場中則不然，扰动后不是回到扰动以前的均一靜止状态，而是在新的基础上平衡。此时平衡場滿足地轉关系，而气压和密度的平衡也是新的基础上的靜力平衡。

由此可以看到：

$$f \frac{\partial \psi}{\partial z} = -g\rho', \quad (6.42)$$

也就是說靜力平衡与地轉平衡存在一定的关系，这种关系不仅是风場和气压場的关系，而且风場与热力場(温度、密度)也相互制約。也就是說，在斜压大气中风場与气压場的适应、靜力平衡适应，风与温度場的适应完全是有机的一体。

7. 准不可压缩大气中的静力平衡适应

上节指出,静力平衡要比地转平衡的恢复来得迅速(斜压大气中),这是因为声速比重力内波波速快的缘故。但实际上大气的可压缩性较小,许多小尺度动力学模式都采用不可压缩的大气。而不可压缩的大气中,不存在声波(本章第2节)。这时静力平衡将通过什么机制实现呢?现在让我们来分析下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + f\varphi &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - f\psi &= -p', \\ \nabla^2 \varphi + \frac{\partial \omega'}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \omega'}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial z} - g\rho', \\ c^2 \rho' &= p'. \end{aligned} \right\} \quad (6.16)'$$

这个方程组和方程组(6.16)完全相当,不过多考虑了地球自转和假设了不可压缩。在这个模式里没有声波,只有重力波。设在此模式中,某一局部地区发生了地转平衡和静力平衡的破坏,重力波必将使运动恢复地转平衡。地转平衡恢复后, $\varphi = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ 。由方程组(6.16)'的第三式指出:此时 $\partial \omega' / \partial t$ 亦为零,因此第四式变为:

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -g\rho',$$

即静力平衡亦恢复。由此可见,在不可压缩大气中静力平衡和地转平衡同时恢复,它们都是通过重力波频散实现的。

第 七 章

中小尺度运动中風場与 气压場的适应問題

近年来，对中小尺度天气系統的分析 and 預告的研究进展很迅速，这是很自然的，因为它们对天气有很大的影响，災害性天气往往都是由它們引起的。要作好災害性的天气預告，不能不对中小尺度系統作进一步的研究。

然而，中小尺度系統的分析 and 預告，远远沒有达到大尺度运动那样成熟的地步，在天气分析方法上还缺乏一套办法。尽管人們近年来分析了大量天气图，然而分析图时所应遵循的准则，还缺乏一套象大尺度地轉风分析那样可靠的方案。有关它們的預告方法，还只是处于萌芽阶段，对于它的动力学規律了解得还很少。所有这些情况說明，除一般天气动力学的研究以外，中尺度动力学面临着一个重要的任务，就是应当找到相当于大尺度地轉平衡状态下的風場与气压場之間的关系，以及类似地轉适应过程，以使用来进行天气分析和預告，乃至机制的探討。本章的目的就是试图探討这一方面的問題。

1. 方 程 組

在第二章里，我們看到在中小型运动中，風場和气压場不是向綫性的地轉关系适应，而是向慣性力、科氏力和气压梯度力三者之間的准平衡关系适应。这是一个非綫性关系，因此对于它的研究，要比地轉适应的研究困难。为了解决这个困难，我們首先需要找到一个适于研究中小尺度运动适应問題的方程組。

虽然中小尺度运动实际上是三維空間的，但为了数学运算上的方便和物理意义清楚起見，而在动力方面也不丢掉問題本質的条件下，我們可以采用标准座标系的正压运动方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + fv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - fu, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= - \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

其中 $\Phi = gh$ ，方程(7.1)中前二个方程可以写成另一形式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (f + \zeta)v &= - \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (f + \zeta)u &= - \frac{\partial P}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

其中

$$P = \Phi + \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) \quad (7.3)$$

为正压大气单位質量的能量。方程(7.2)与大尺度綫性的运动方程十分相似，所不同者只是在大尺度方程中左边第二项中的 f 代以流場本身的绝对渦度 $(f + \zeta)$ ，同时右边的 Φ 代以 P ，因为在一般情况下，時間导数項較其他各項小一量級，故

$$\left. \begin{aligned} (f + \zeta)v &= - \frac{\partial P}{\partial x}, \\ (f + \zeta)u &= - \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

这一关系式与大尺度地轉平衡完全相似。由此可見，在一般情况下中小尺度运动中風基本上沿等能量綫吹。

对于小尺度，由于运动不需要考虑 f 的作用，則

$$\left. \begin{aligned} \zeta v &= - \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \zeta u &= - \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

由此可見,中尺度适应状态的形式是界于大尺度与小尺度之間的.

現在將方程(7.2)的第一个方程乘以 u ,第二个方程乘以 v ,再与方程(7.1)的第三个方程相加,即得:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \left[u \frac{\partial}{\partial x} (\Phi + P) + v \frac{\partial}{\partial y} (\Phi + P) \right]. \quad (7.6)$$

于是方程(7.2)与(7.6)組成了 u, v, P 的閉合方程系,这个閉合方程系是我們以下討論的基本方程組.

2. 中尺度运动中風場与气压場的适应

在第二章中,我們已經指出:如中小尺度的运动中力的准平衡关系[方程(7.5)或(7.4)]遭到严重的破坏,則运动将作迅速的調整,并再趋向准平衡的关系.但在第二章里,我們未作严格的数学証明,这就是本节中所要討論的.

首先,將方程(7.2)和(7.6)写成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} &= +N_u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y} &= +N_v, \\ \frac{\partial P}{\partial t} + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= N_P, \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} N_u &= (f + \zeta)v, \\ N_v &= -(f + \zeta)u, \\ N_P &= - \left[u \frac{\partial (P + \Phi)}{\partial x} + v \frac{\partial (P + \Phi)}{\partial y} \right] - \Phi' \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \Phi &= \bar{\Phi} + \Phi', \quad c^2 = \bar{\Phi} = \text{常数}, \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

省略中間运算的步驟,由方程組(7.7)最后可得:

$$\mathcal{L} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) = fM_Q + \frac{\partial}{\partial t} M_P,$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) &= -\frac{\partial M_D}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} M_u, \\ \mathcal{L}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) &= \frac{\partial M_D}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} M_v, \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} M_D &= c^2 \left(\frac{\partial M_v}{\partial x} - \frac{\partial M_u}{\partial y} \right) - f N_P, \\ M_u &= - \left(\frac{\partial N_u}{\partial t} - \frac{\partial N_P}{\partial x} \right) - f N_v, \\ M_v &= - \left(\frac{\partial N_v}{\partial t} - \frac{\partial N_P}{\partial y} \right) + f N_u, \\ M_P &= c^2 \left(\frac{\partial N_u}{\partial x} + \frac{\partial N_v}{\partial y} \right) - \frac{\partial N_P}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

而

$$\mathcal{L}(\varphi) = \left[c^2 \nabla^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \right] \varphi,$$

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为平面拉普拉斯算子。解方程组(7.8)所需要的初始条件,可由辐散(D),涡度(ζ), P , u , v 等初值来表示:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} \Big|_{t=0} &= -c^2 D_0 + (N_P)_0, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \Big|_{t=0} &= c^2 (\nabla^2 P_0 - f \zeta_0) - (M_P)_0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= (\zeta_0 + f)v_0 - \frac{\partial P_0}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{t=0} &= -(M_u)_0 - f^2 \left(u_0 + \frac{1}{f} \frac{\partial P_0}{\partial y} \right) + c^2 \frac{\partial D}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} &= -(f + \zeta_0)u_0 - \frac{\partial P_0}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{t=0} &= -(M_v)_0 - f^2 \left(v_0 - \frac{1}{f} \frac{\partial P_0}{\partial x} \right) + c^2 \frac{\partial D_0}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

非齐次方程:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi) &= -g(x, y, t), \\ t=0, \quad \varphi &= \varphi_0(x, y), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \varphi_1(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

的解为:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) = & \frac{1}{2\pi c} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \iint_{r \leq ct} \varphi_0(x', y') G(r, t) dx' dy' + \right. \\ & + \iint_{r \leq ct} \varphi_1(x', y') G(r, t) dx' dy' + \\ & \left. + \iint_{r \leq ct} \int_0^{t-r/c} f(x', y', t') G(r, t-t') dx' dy' dt' \right\}, \quad (7.13) \end{aligned}$$

其中

$$G = \frac{\cos \frac{f}{c} \sqrt{c^2 t^2 - r^2}}{\sqrt{f^2 t^2 - \frac{f^2 r^2}{c^2}}}, \quad (7.14)$$

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2.$$

将方程组(7.8)的非齐次项和方程组(7.11)的初值代入(7.13)式,即为所要求的解答:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & \frac{1}{2\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \iint_{r \leq ct} [-c^2 D_0 + (N_P)_0] G(r, t) dx' dy' + \right. \\ & + \iint_{r \leq ct} [c^2 (\nabla^2 P_0 - f \zeta_0) - (M_P)_0] G(r, t) dx' dy' - \\ & - \iint_{r \leq ct} \int_0^{t-r/c} \left(f M_0 + \frac{\partial}{\partial t'} M_P \right) G(r, t-t') dx' dy' dt', \\ \frac{\partial u}{\partial t} = & \frac{1}{2\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \iint_{r \leq ct} \left[(\zeta_0 + f) v_0 - \frac{\partial P_0}{\partial x} \right] G(r, t) dx' dy' + \right. \\ & + \iint_{r \leq ct} \left[-(M_u)_0 - f^2 \left(u_0 + \frac{1}{f} \frac{\partial P_0}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. \left. + c^2 \frac{\partial D_0}{\partial x} \right] G(r, t) dx' dy' - \right. \\ & - \iint_{r \leq ct} \int_0^{t-r/c} \left(\frac{\partial M_u}{\partial t'} - \frac{\partial M_v}{\partial y'} \right) G(r, t-t') dx' dy' dt', \\ \frac{\partial v}{\partial t} = & \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \iint_{r \leq ct} \left[-(\zeta_0 + f) u_0 - \frac{\partial P}{\partial y} \right] G(r, t) dx' dy' + \right. \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$+ \iint_{r \leq ct} \left[-(M_\nu)_0 - f^2 \left(\nu_0 - \frac{1}{f} \frac{\partial P_0}{\partial x'} \right) + c^2 \frac{\partial D_0}{\partial y'} \right] \times \\ \times G(r, t) dx' dy' - \\ - \iint_{r \leq ct} \int_0^{t-r/c} \left(\frac{\partial M_u}{\partial x'} + \frac{\partial M_\nu}{\partial t} \right) G(r, t-t') dx' dy' dt'. \quad (7.15)$$

現在我們來討論 t 很小以及 t 很大時, φ 值的大小. 令 φ_0 和 φ_1 僅在某一區域 T 內不為零, T 以外到處為零. 設我們討論 T 內某點 (x, y) 上 φ . 令 $\varphi = \frac{\partial u}{\partial t}$, 則當 $t \rightarrow 0$ 時, (7.12) 式趨向於 (參看方程組 (7.2) 第一式)

$$\varphi|_{t \rightarrow 0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t \rightarrow 0} = \left(N_u + f\nu - \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{t=0}. \quad (7.16)$$

因為我們所討論的對象是准平衡狀態遭到高度破壞的情況, (7.16) 式右端一定非常大, 事實上我們可以人為地令它任意的大.

當 t 很大時, T 僅為積分區域中的一個很小的範圍, 所以不論 t 多大, (7.13) 式第一、二個積分的積分區域均為 T , 而 t 很大時, $G \rightarrow 0$, 故這時 (7.13) 式僅決定於第三個積分. 引入新函數:

$$\tilde{G} = \int_{r/c}^t f G(r, \xi) d\xi. \quad (7.17)$$

曾慶存^[14]曾證明,

$$\iint_{r \leq ct} \int_0^{t-r/c} f(x', y', t') G(t-t', r) dt' dx' dy' \\ = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{r \leq ct} \int_0^{t-r/c} g \tilde{G} dt' dx' dy'.$$

故當 $t \rightarrow \infty$ 時,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{r \leq ct} \int_0^{t-r/c} g(x', y', t') \tilde{G}(t-t', r) dt' dx' dy' \\ = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{r \leq ct} \left(t - \frac{r}{c} \right) g(x', y', t^*) \tilde{G}(t-t^*, r) dx' dy', \quad (7.18)$$

其中 $0 < t^* < t - r/c$. 並注意到 $\tilde{G}_{t \rightarrow \infty} = K_0 \left(\frac{f}{c} r \right)$. 故上式可

近似地为:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t \rightarrow \infty} &= \frac{1}{2\pi c^2} \iint_{r' \leq ct} g(x', y', t^*) K_0(r') dx' dy' \\ &\cong \frac{1}{f^2} \int_0^{ct} \bar{g}(x', y', t^*) K_0(r') r' dr',\end{aligned}\quad (7.19)$$

其中 $r' = \frac{f}{c} r$, \bar{g} 为随 θ 方向的平均, $rK_0(r)$ 随 r 的分布见图 20.

由图可以看出, 随 r 的增加 $rK_0(r)$ 非常迅速地趋向于零, 而其最高值也不过为 0.47 (单位为 r 的单位). 上式只在 $r = 6$ 以内积分, 即可达到很精确.

因为随着时间的增长, 初值扰动将随重力波愈向它的四周非扰动空间传播, 因此当 t 很大时, \bar{g} 的强度一定非常小.

这样 $\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t \rightarrow \infty}$ 将趋向于零. 为了确切起见, 我们以 $\bar{g}(x', y', 0)$ 代替了 $\bar{g}(x', y', t^*)$, 这样估计

出(7.19)式右端的量级为 $10^{-1} - 10^{-6}$ 米·秒⁻¹. 这是 $\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t \rightarrow \infty}$ 最大的可能. 这比一般用中小尺度运动特征量所估计出的 $\partial u / \partial t$ 还小很多.

同样可以证明, $\partial v / \partial t|_{t \rightarrow \infty}$ 和 $\partial P / \partial t|_{t \rightarrow \infty}$ 也非常小.

以上的讨论指出: 当中小尺度运动的准平衡状态遭受破坏之后, 运动先有一个迅速调整的阶段, 然后进入准常定的演变时期.

3. 中小尺度运动适应过程的数值计算

在前一节里, 我们已用一般的数学方法讨论了中小尺度运动适应问题. 说明当某一区域中发生扰动后, 风场和气压场即进行调整, 最后趋于适应, 而风场和气压场也趋于稳定. 但从上节的讨

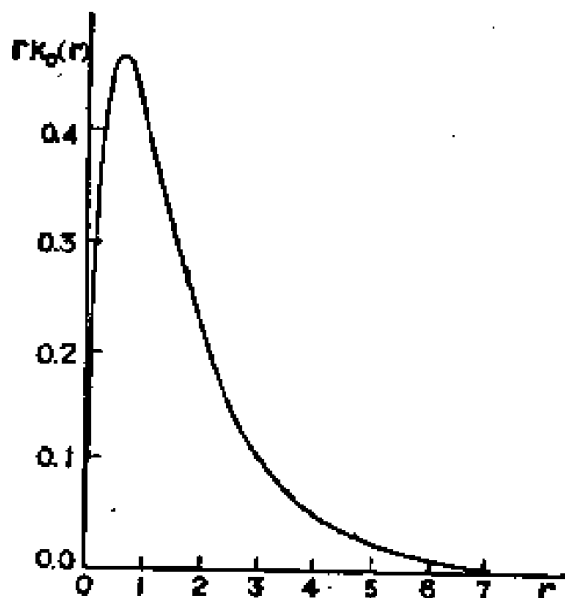


图 20 函数 $rK_0(r)$ 随 r 的分布

論看不出适应的速度,也看不出适应的过程。在本节中,我們將通过数值計算来討論这两个問題。因为方程是非綫性的,求解困难,所以我們將采用一維情况:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= f v - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} &= -f u, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Phi \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

令 $\Phi = gh = c^2$, 代入上式, 并将第一和第三两式相加和相減, 即得

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u+2c) &= f v, \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u-2c) &= f v, \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right] v &= -f u. \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

在給定的初值条件下, 上式可以用特征綫方法求解。为了方便, 我們將引用无因次变换。不过因为 $c > u$, 对于它們我們不能引用同一特征量。但引用两个特征量, 將給計算带来了麻煩。为了克服这个不便, 我們令

$$c = c_0 + c^*, \quad c_0^2 = \bar{\Phi} = \text{常数}. \quad (7.22)$$

这样 c_0 是个常数, 而 $0(c^*) = 0(u)$ 。

現引用各种特征量, 并引入无量綱变量:

$$\begin{aligned} u &= v_0 u', \quad v = v_0 v', \quad c^* = v_0 c', \quad f = \lambda_0, \\ x &= \frac{v_0}{\pi} x', \quad t = \frac{t'}{\pi}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

即得:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t'} + \left(u' + \frac{c_0}{v_0} + c' \right) \frac{\partial}{\partial x'} \right] (u' + 2c') &= \lambda v', \\ \left[\frac{\partial}{\partial t'} + \left(u' - \frac{c_0}{v_0} + c' \right) \frac{\partial}{\partial x'} \right] (u' - 2c') &= \lambda v', \\ \left[\frac{\partial}{\partial t'} + u' \frac{\partial}{\partial x'} \right] v' &= -\lambda u'. \end{aligned} \quad (7.24)$$

于是如图 21 所示,沿以 $\frac{dx'}{dt'} = u' + \frac{c_0}{v_0} + c'$ 为斜率的特征线上,有

$$u' + 2c' = u'_1 + 2c'_1 + \lambda v'_1 \Delta t'_1. \quad (7.25)$$

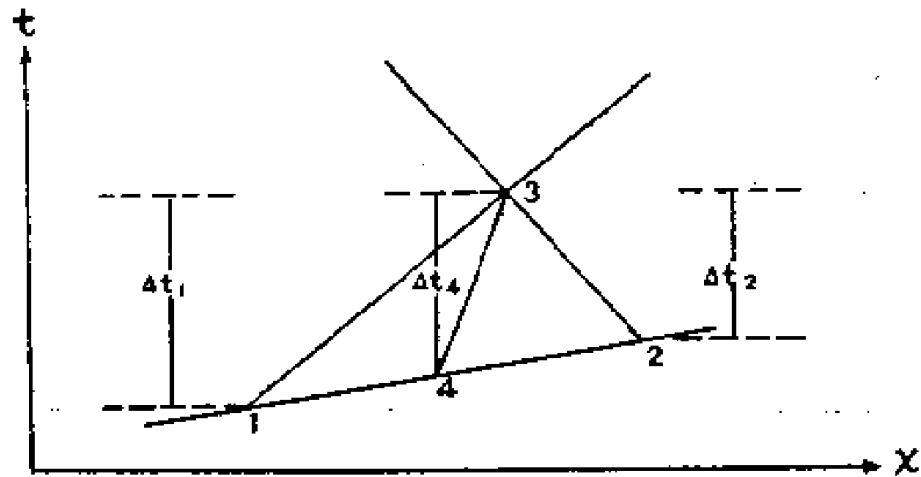


图 21 特征线方法计算图

沿以 $\frac{dx'}{dt'} = u' - \left(\frac{c_0}{v_0} + c'\right)$ 为斜率的特征线上,有

$$u' - 2c' = u'_1 - 2c'_1 + \lambda v'_1 \Delta t'_1. \quad (7.26)$$

沿以 $\frac{dx'}{dt'} = u'$ 为斜率的特征线上,有

$$v' = v'_1 - \lambda u'_1 \Delta t'_1. \quad (7.27)$$

于是便可得:

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{u'_1 + u'_2}{2} + c'_1 - c'_2 + \lambda v'_1 \frac{\Delta t'_1}{2} + \lambda v'_2 \frac{\Delta t'_2}{2}, \\ c' &= \frac{u'_1 - u'_2}{4} + \frac{c'_1 - c'_2}{2} + \frac{\lambda v'_1 \Delta t'_1}{4} - \lambda v'_2 \frac{\Delta t'_2}{4}, \\ v' &= \frac{v'_1 + v'_2}{2} - \lambda \left[u' + \left(\frac{u'_1 + u'_2}{2} \right) \right] \times \frac{\Delta t'_1 + \Delta t'_2}{4}. \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

当初始值已给定,便可求解 u' , v' 和 c' . 在我们的计算中,取 $\frac{\rho - \rho'}{\rho} = 0.015$, $c_0 = 20.06$ 米/秒,当 $\lambda = 0$, $z = 10^{-3}$ /秒,计算的是小尺度的适应过程,而 $\lambda = 1$, $z = 10^{-4}$ /秒,则为中尺度的适应过程. 具体计算是在中国科学院计算技术研究所 103 机器中实现的.

今取初值为 $u'(x', 0) \approx 0$, $v'(x', 0) = 0$, $c'(x', 0) = 0$, $u'(x', 0)$ 的分布见图 22. 图 22 是中尺度和小尺度扰动共有的初始分布. 虽然两种尺度运动的初值, 在无量纲坐标中完全一样, 但在两种尺度中单位 x' 代表不同的实际长度, 因而实际分布亦各有

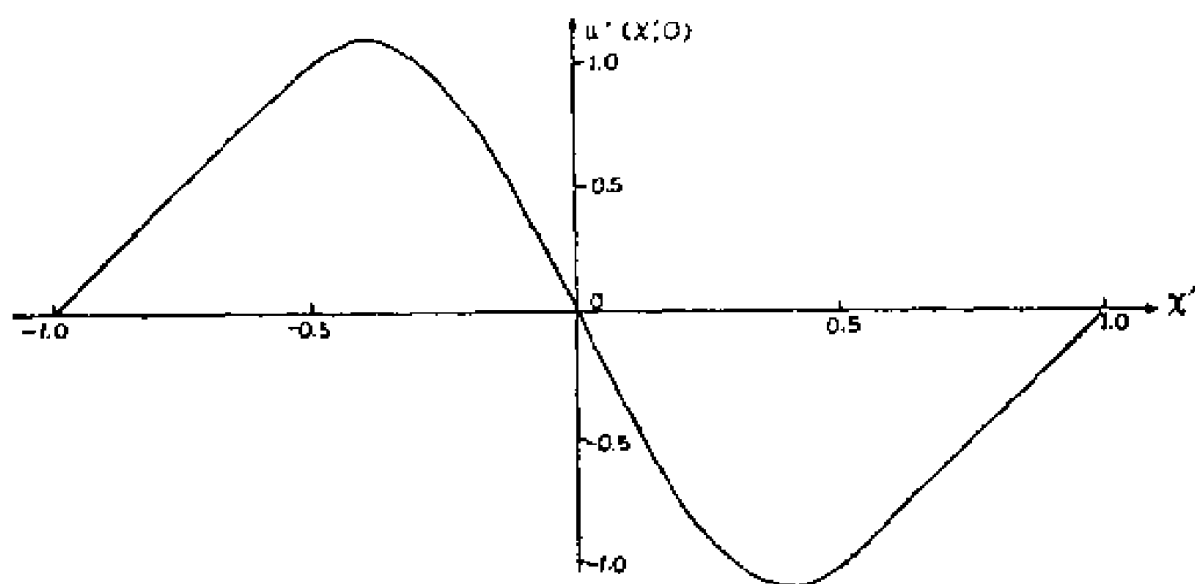


图 22 初始场 $u'(x', 0)$ 的分布 [$v'(x', 0) = 0$, $c'(x', 0) = 0$]

不同. 例如: $V = 10$ 米/秒时, $\lambda = 1$, x' 的单位在小尺度为 10 公里, 而在中尺度为 100 公里. 图 23 和图 24 分别为小尺度和中尺度在 $x' = 0.1, 0.2$ 及 0.3 处 u' 的演变. 这二图一致表明无论是中尺度或小尺度运动, 当有一个不平衡的扰动时, 在某时以前 u' 变化极大. 以 $x' = 0.2$ 为例, 在 $t' = 1.8$ 以内, u' 从初始的 -0.8 变成了 0.3 . 因而在这段时间内 $\partial u' / \partial t'$ 也是非常大的. 但自 $t' = 2.0$ 以后, u' 只是围绕 $u' = 0.3$ 作缓慢而微小的扰动, 振幅极小, 这时可以看出 $\partial u' / \partial t'$ 非常小.

在 x' 为 $0.1, 0.2$ 及 0.3 处, 中尺度和小尺度运动的 v' 和 h' ($h' = \frac{h}{h_0}$, $h_0 = 1000$ 米) 的演变分别绘于图 25, 26 和 27 (小尺度

1) 由(7.22)式可见, $c'(x, 0) = 0$, 即相当于 $q(x, 0) = \bar{q} = \text{常数}$, 也就是设在初始时刻没有气压的扰动.

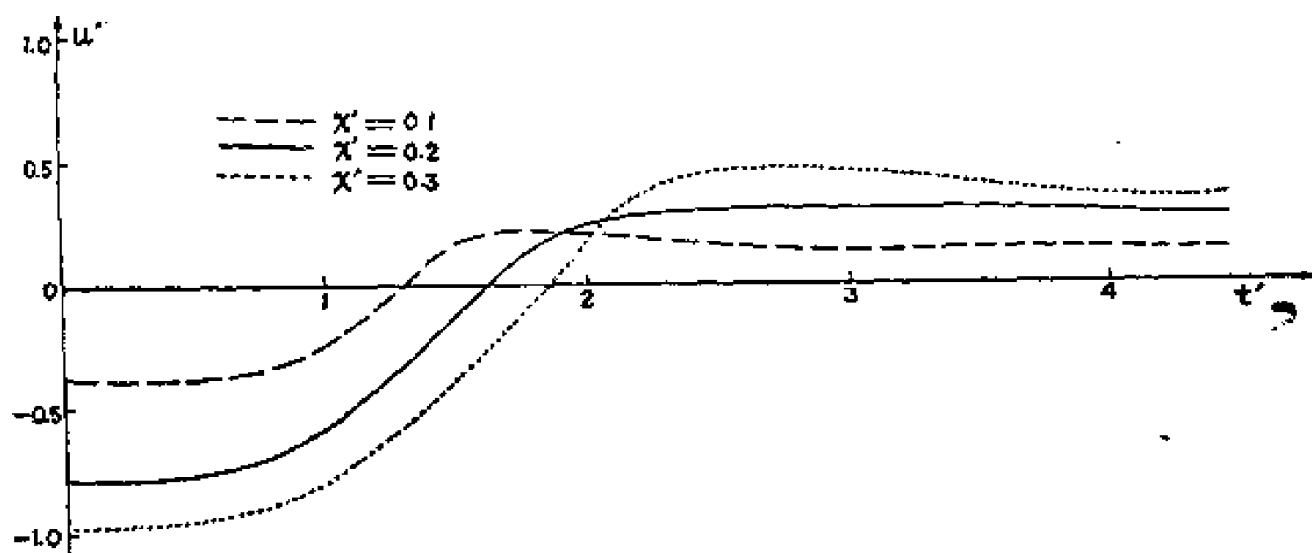


图 23 小尺度扰动中 $u'(x', t')$ 随时间演变
(初始值见图 22)

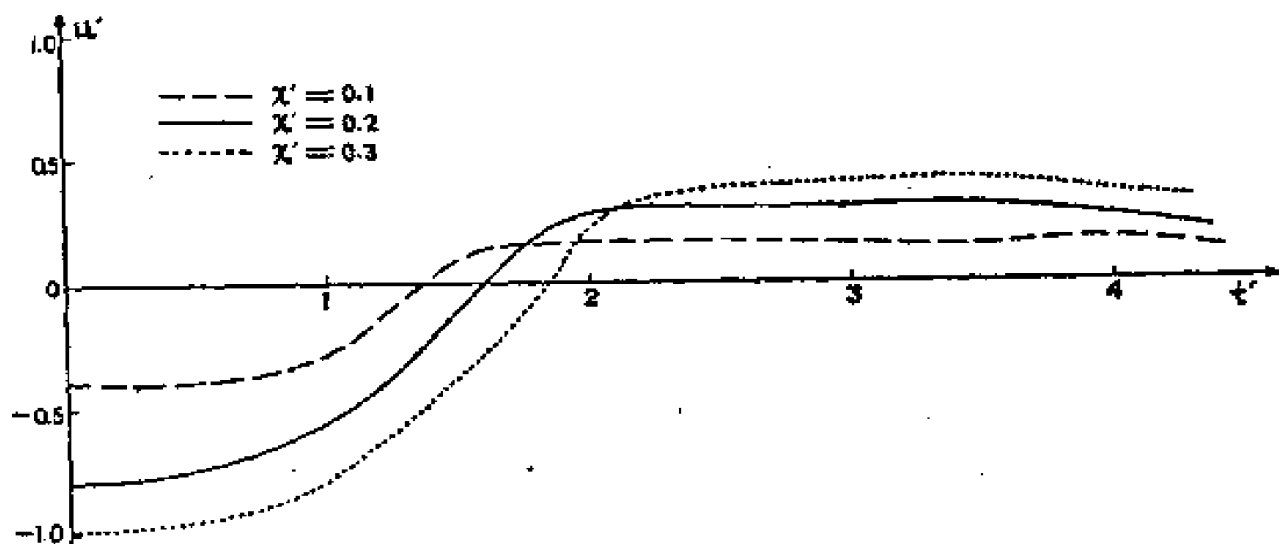


图 24 中尺度扰动中 $u'(x', t')$ 随时间演变
(初始值见图 22)

$v' = 0$), 与 u' 一样在某时 (对于 $x' = 0.2$ 在 $t' = 2.0$) 以前, 它们有很大的变化, 而在该时以后, 它们基本上保持不变。

上面各图还指出: 运动保持稳定所出现的时间随着离扰动中心的距离而后延。

对中尺度运动来说, $t' = 1$ 相当于 $t = 10^4$ 秒, 对于小尺度运

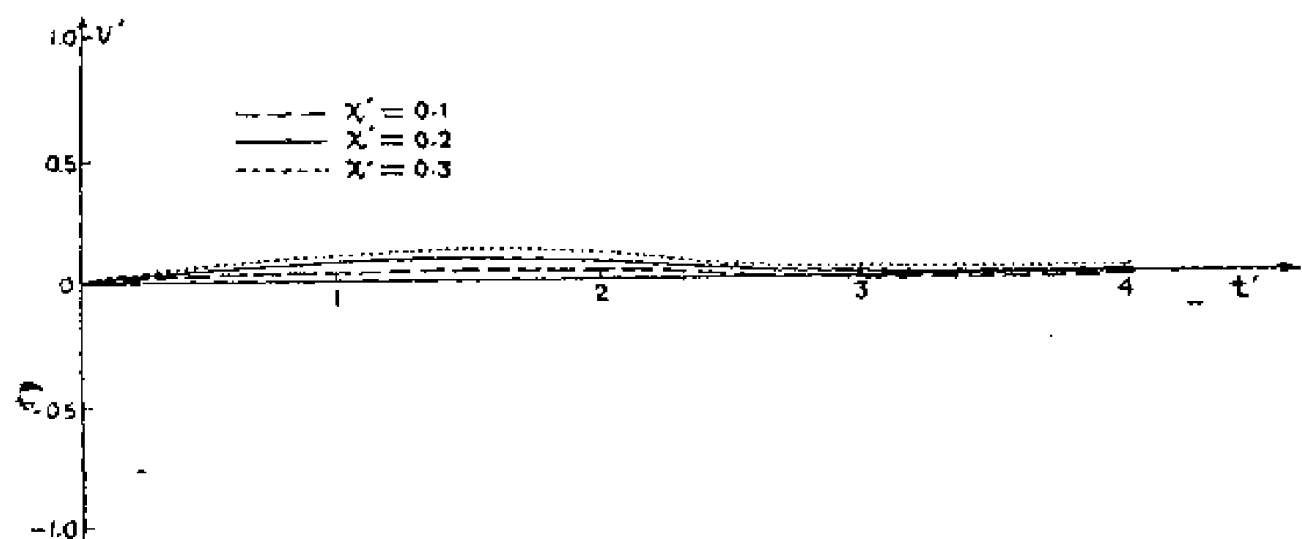


图 25 中尺度扰动 v' 随时间演变
(初始值同图 22)

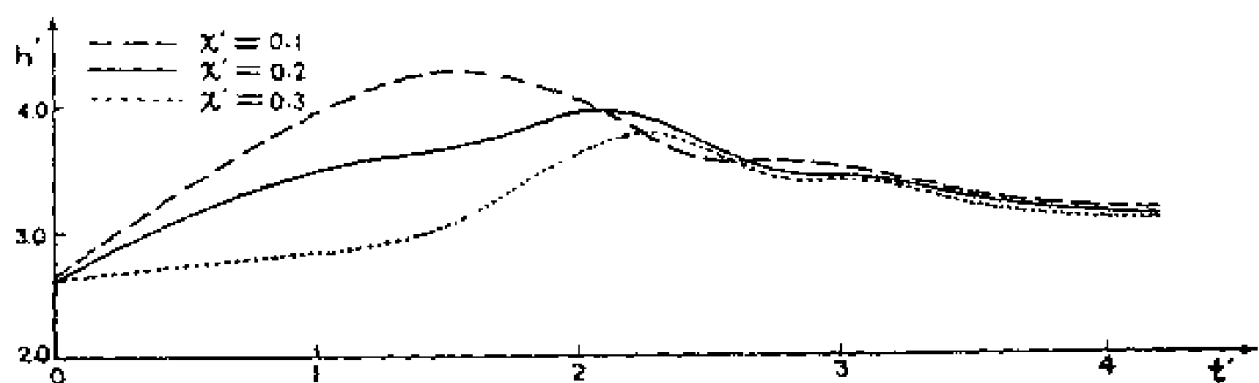


图 26 中尺度扰动中 $h'(x', t')$ 随时间演变
(初始值见图 22)

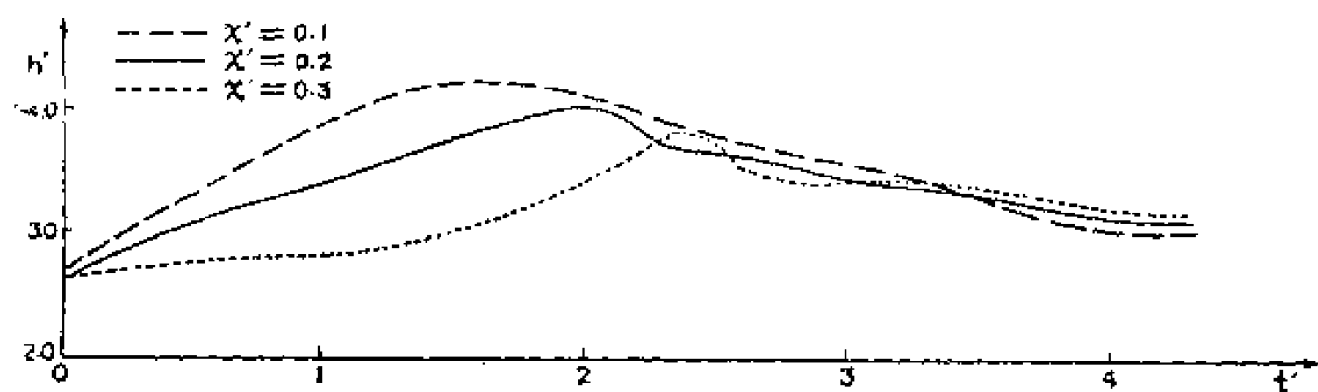


图 27 小尺度扰动中 $h'(x', t')$ 随时间的演变
(初始值见图 22)

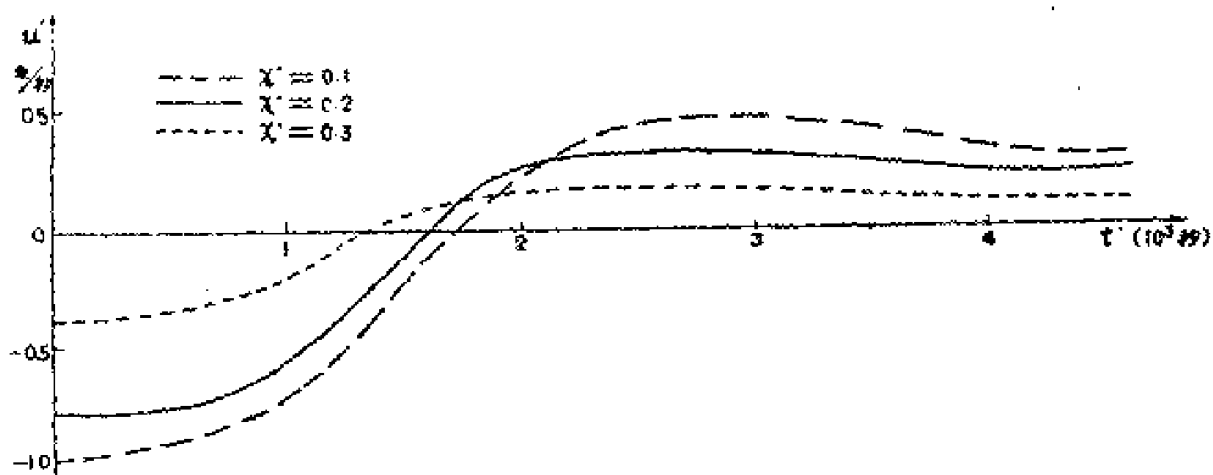


图 28 中尺度扰动中 $u'(x', t')$ 随时间的演变
[初始值 $v' = -u'(x', 0) \approx 0$, 见图 22. $h'(0, x) = 0$]

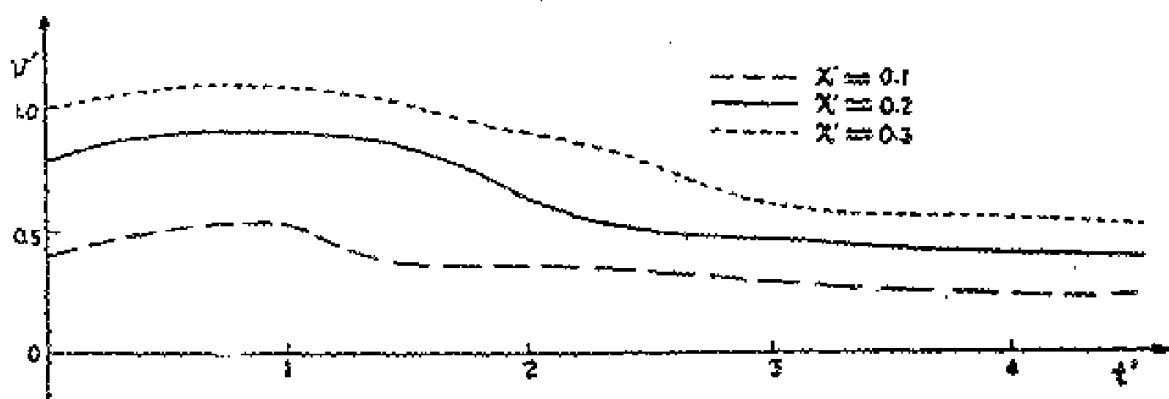


图 29 中尺度扰动中 $v'(x', t')$ 随时间的演变
(说明同图 28)

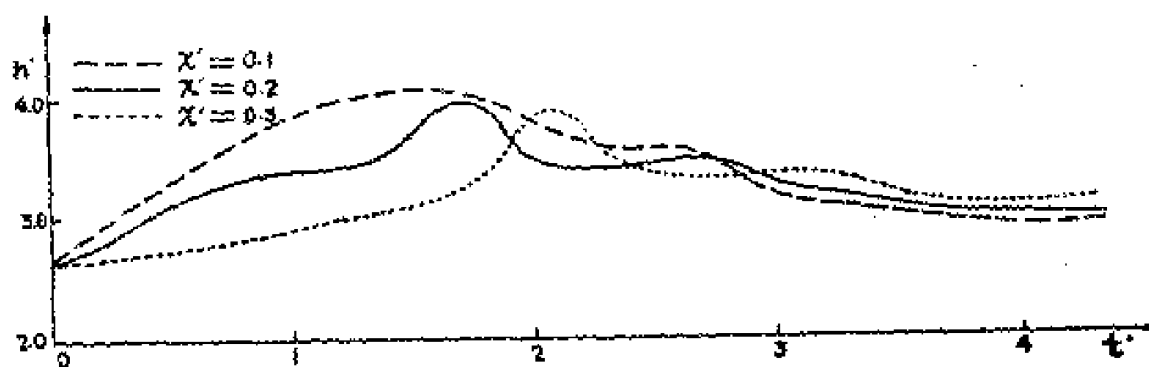


图 30 中尺度扰动中 $h'(x', t')$ 随时间的演变
(说明同图 28)

动, $t' = 1$, 相当于 $t = 10^3$ 秒, 所以对于中尺度适应时间约为二、三小时, 对于小尺度适应时间为二、三十分钟。

前面的计算假定了初始值 $v'(x', 0) = 0$, 对于中尺度运动, 由于 f 的存在, $f v$ 可能对于适应过程产生影响, 因此我们又计算了 $v'(x', 0) \neq 0$, $u'(x', 0) \neq 0$, 而 $c'(x', 0) = 0$ 的情况, 并且取 $v'(x', 0) = -u'(x', 0)$, 而初始 $u'(x', 0)$ 的分布仍见图 22。计算结果, 如图 28, 29 和 30 所示。将此三图与前例比较, 可以看出, 不论初始有无 v' 的扰动, u' , v' 和 c' 的演变性质基本上是一致的。

上面计算的结果再一次指出, 在中小尺度运动范围内, 当有一个不平衡的扰动发生后, 在一个短时期内, 场中要素发生急剧的变化, 场中各要素进行调整, 然后, 场围绕准平衡状态作缓慢的演变。

4. 适应状态中的中小尺度运动的一些性质 及中小尺度的一些天气分析问题

我们已经证明, 在中小尺度运动中也有气压场和风场的适应过程, 也就是说在一般情况下, 中小尺度的运动和大尺度运动一样, 也是在力的准平衡状态下或准适应状态下进行演变的, 这种状态下运动的一些特性, 在第二章中已略作叙述, 这里我们将再予以简单的讨论。

当风场和气压场已经适应了之后, (7.4) 式完全可以成立, 它指出, 等能量线 (即等 P) 和流线是平行的, 在一般的中尺度运动中, $|\zeta| < |f|$, 所以在北半球 $(\zeta + f) > 0$, 这时背风而立, 高 P 区在右, 低 P 区在左。这和地转关系是一样的。在小尺度运动中, f 可以忽略, 等 P 线仍和流线平行, 但这时 ζ 可正可负, 对于气旋式 ($\zeta > 0$) 的运动, 背风而立高 P 区仍在右边, 低 P 区在左边, 而对于反气旋式 ($\zeta < 0$) 运动, 则背风而立, 高 P 区在左, 低 P 区在右了。但若运动是无辐散的或无势的, 这时

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

即得:

$$J(\psi, \Phi) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0. \quad (7.29)$$

这时流綫与等高綫平行, 但因同时 $J(\psi, P)$ 或 $J(\psi, \Phi + K)$ 仍为零, 这里 $K = (u^2 + v^2)/2$, 由此可得:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (7.30)$$

最后有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial K}{\partial x}, \text{ 或 } J(\Phi, K) = 0. \quad (7.31)$$

所以在无势运动中, 等高綫、等动能綫和流綫三者是重合的.

一般中小尺度系統中, 輻散輻合是比較強烈的, 但若这时 $f + \zeta = 0$, 运动变为无旋的, 就可以得出:

$$P = \Phi + K = \text{常数}. \quad (7.32)$$

于是 K 仅为 Φ 的函数, 亦即等高綫和等动能綫仍然是重合的. 这种运动和大尺度的地轉运动的性質完全相反, 前者(中小系統)是无旋的, 而后者(大尺度)是无势的.

因为在中小系統中, 一般等 P 綫不与等高綫或等压綫平行, 所以即使中小尺度运动完全处于适应状态, 流綫也要与等高綫或等压綫有較大的交角. 这就和大尺度准地轉运动中等高綫或等压綫与流綫相平行的情况不同. 这就使人想到中小尺度分析中采用等高綫或等压綫的物理意义問題. 在大尺度运动中, 等高綫或等压綫的一个重大性質, 就是它們能表示气流的方向, 这个性質在中小尺度运动中就不存在了. 但在这种运动中, 等 P 綫是能表示气流方向的, 因此在中小尺度問題中, P 場的分析應該比高度場或气压場的分析更有意义些. 但必需指出: 上面的討論仅对对流不太

强或 $w \frac{\partial u}{\partial z}$ 和 $w \frac{\partial v}{\partial z}$ 較水平平流項为小的运动才能适用, 因为在

我們的討論中, $w \frac{\partial u}{\partial z}$ 和 $w \frac{\partial v}{\partial z}$ 項被略去了.

第八章

今后待研究的問題

在前面几章中，我們較全面地分析了大气中的适应过程，指出了大气适应是大气动力过程中最根本的性质，但是正如我們所知，适应就是場中各种力的平衡，显然从大气过程的发展与天气的演变角度来看，場的不平衡是經常的、絕对的，而平衡則是暫时的、相对的，大气中平衡与不平衡（适应与不适应）是矛盾的对立統一，是大气运动过程中的两个阶段，而大气运动就是在这种由适应到不适应，即从平衡到不平衡，然后又在一个新的基础上产生新的平衡和不平衡，如此循环往复，就构成了大气运动过程中丰富而又复杂的現象。

大气的实际演变过程是多种多样的，而我們的理論工作和它相比，就显得十分貧乏，解决的問題还很少，留待討論的問題还非常多，現仅就作者所想到的討論如下。

中高緯度大型运动的准地轉性是大家早已熟知的事情，关于中高緯度大型运动的地轉适应問題的研究，开展得較早，研究得也比較多，而中小尺度运动的准平衡性以及它的适应問題，是最近才提出来的^[4]，这方面的研究自然还不多，有待开展，同时，有关这方面的討論，現在也仅限于正压的情况，斜压大气的情况如何，值得进一步研究，在討論时，如引入斜压性以后，問題便成为三維空間的了，数学上自然增加了困难，但在三維空間問題中，溫度場和流場的垂直結構对适应过程的影响，就可以得到了解，从而我們将会得到不少新的知識，正如同在討論大型运动斜压大气地轉适应过程中，我們得到了不少在正压大气里所得不到的知識一样。

低緯度地帶占地球总面积很大一部分，但这一地帶的气象問

題往往不为居住于中高緯度地区的气象工作者們所注意。在本书中,就沒有談到低緯度大气运动的适应問題,这个問題是值得研究的。作者的初步看法是: 低緯度的运动也近似地有(7.4)式的平衡关系, 这个关系受到破坏后, 也将产生适应过程, 但在低緯 f 小, 而 $\frac{dt}{dy}$ 大, 因此这个看法是否正确还待进一步研究。

总的来說, 有关地轉适应过程虽已有了不少研究, 但主要还是处于理論阶段, 有关这方面的应用还不多。只有陈秋士^[39]等开始将这方面的一些理論应用于天气分析, 結果尚令人鼓舞。更多的应用研究, 还极待深入。而中小尺度运动的适应研究刚刚开始, 因此应用自然还談不上。不过根据已有的結果, 可以提出下列这样一些可能的应用。我們知道, 在中小尺度运动中, 准地轉关系不能应用, 这給中小尺度运动的天气图分析带来了一定的困难, 因为这时等压綫不能代表流場。(7.4)式指出, 等 $P\left(=gh + \frac{u^2 + v^2}{2}\right)$ 綫是和流綫平行的(如无摩擦影响), 这給予我們一个提示, 說明对于这种运动可以分析 P 場, 对于低緯度的运动也可以这样, 这是值得嘗試的¹⁾。

此外, 我們知道中高緯度运动的准地轉性質, 不仅在天气分析上发挥了巨大作用, 在动力气象上也作出了很大貢獻。如数值預报中的准地轉模式就是一例。中小尺度运动或低緯度的运动不是准地轉的, 在这二种运动中, 也就不能再应用这个假定了。对中小尺度运动, 不但不能用准地轉模式, 即使准无輻散模式(平衡方程)也不能用, 因为在这种运动中輻散輻合是比較強烈的。从这个角度出发, 对中小尺度和低緯度运动的适应研究也是需要的, 因为对它的研究将会有助于提供适于描写这两类运动的方程組。

相对而論, 大气一般是准适应的, 即准平衡的, 但大气中不平

1) 对于大气的运动, 除在地面层外, 一般 $gh \gg \frac{u^2 + v^2}{2} = V^2/2$, 所以直接分析 P 場不如分析 $P' = gh' + V^2/2$ 場, 这里 $h' = h - \bar{h}$, \bar{h} 为所分析的等压面的平均高度。

衡的偏差則是經常存在的,它是产生大气运动的动力,例如,非地轉风在大气中就总是存在的^[46],虽然平均量較小,但是它是补充大气能量消耗所必須的。沒有非靜力平衡,就沒有对流不稳定能量的释放及局地对流的发展。此外,最近的研究表明,在天气系統的強烈发生时,往往伴有非常強的不平衡(即不适应)的現象,例如,在一次阻塞高压发生前,在其脊上就发现与实测风相当的非地轉风(最大可达 30 余米,与实测风相当)、而千秋銳夫^[47]在一次颶綫形成过程中,根据 20 个站的实测风計算, $\partial u / \partial t$ 可达 44.4 米/秒², 而 $\frac{1}{\rho} \partial p / \partial x$ 只有 28.1 米/秒², 至于局地对流(如雷雨云), 在开始时大气几乎为平靜的,但十几分钟之后,即可产生 10 米/秒²的垂直加速度,这种情况是常見的^[48]。上面的情况說明,在天气发展过程中不平衡是主要的。

由于非平衡过程的研究,不是本书的重点,此处不再作进一步討論,总之,对于大气不平衡过程及其形成机制的研究也是个重要問題。

参 考 文 献

- [1] Rossby, C. G., *Pap. in Phys. Ocean and met.*, V. 5 (1936), No. 1.
- [2] Rossby, C. G., *J. Marine Res.* I, V. 1 (1937—1938), No. 1.
- [3] Rossby, C. G., *J. Marine Res.* II, V. 1 (1937—1938), No. 3.
- [4] Cain, A., *J. Met.*, 2 (1945), 113—119.
- [5] Обухов, А. М., *Изв. АН СССР сер. геогр. и геофиз.*, 13(1949), 281—306.
- [6] Bolin, B., *Tellus*, 5 (1953), 373—385.
- [7] Кибель, И. А., *ДАН СССР* т. 104 (1955), 60—63.
- [8] Yeh, T. C. (叶笃正), *J. Met. Soc. Japan.*, The 75th Anniversary Volume (1957), 130—134.
- [9] 曾庆存, *气象学报*, 33 (1963), 第 1 期, 37—50.
- [10] 陈秋士, *气象学报*, 33 (1963), 第 1, 2 期.
- [11] Fischer, G., *Berichter des Wetterdienstes*, 13d. 12 (1963), No. 87.
- [12] Raethjen, P., *Arch. Met. Geoph. u. Biok. A.*, Bd. 2 (1950), 207—222.
- [13] Кибель, И. А., *ДАН СССР* т. 132 (1960), 319.
- [14] 曾庆存, 大气中的适应过程和发展过程, *气象学报*, 33 (1963), 第 2, 3 期, 163—174, 281—289.
- [15] Byers, H. R. and Bruhum, Jr., *The Thunderstorm*, 1949.
- [16] 叶笃正、李麦村, 中小尺度运动中风场和气压场的适应, *气象学报*, 34(1964), 第 4 期, 409—423.
- [17] Монин, А. С. и Обухов, А. М., *Изв. АН СССР сер. геофиз.* № 11, 1958.
- [18] Hollmann, G., *Beitr. Z. Physik der Atmosphäre*, Bd. 31 (1959), 5—30.
- [19] 赵纪平, 论层结和风场对小尺度扰动发展的非线性影响, *气象学报*, 32(1962), 第 2 期, 164—176.
- [20] Кибель, И. А., *ДАН СССР* т. 118 (1958), № 4.
- [21] Кибель, И. А., *Изв. АН СССР сер. геогр. и геофиз.*, № 5, 1940.
- [22] Rossby, C. G., *J. Met.*, 2 (1945), 187—204.
- [23] Yeh, T. C. (叶笃正), *J. Met.*, 6 (1949), 1—16.
- [24] Rossby, C. G., *J. of Marine Res.*, 2 (1939), 38—55.
- [25] Charney, J. G., *Geofys. Publ.*, 17 (1948), 17.
- [26] Кuo, H. L. (郭晓岚), *J. Met.*, 11 (1954), 399—411.
- [27] Hide, R., *Q. J. Roy. Met. Soc.*, 79 (1953), 161.
- [28] Charney, J., *J. Met.*, 4 (1947), 135—162.
- [29] Монин, А. С., *Изв. АН СССР сер. геофиз.*, № 4, 1958.
- [30] Ogura, Y. and Charney, J. G., *Proceedings of the International Symposium on Numerical Weather Prediction in Tokyo Nov. 7—13 1960.*

