

前 言

长期以来，存在着两种描写客观世界的理论体系：确定论和概率论。确定论认为，只要已知所有系统的初始条件，就可以从确定性方程算出将来的一切，而且系统演化轨迹的变化与其初始条件的改变遵从数学上的 δ — ε 关系。确定论是一种“一一对应”的因果关系。与此相反的，是概率论的“一多对应”关系。确定论认为，只要系统的外力不发生突然变化，系统就不会自发地发生突变；概率论则认为控制参数的微小变化有可能导致系统状态的突变。然而自70年代以来，来自气象、天文、生物、物理、化学和数学等领域的大量研究表明：某些确定性非线性系统由于其内部非线性相互作用亦可产生类似随机性现象——混沌。

混沌的发现，使我们发现在概率论和确定论描述之间，存在着由此及彼的桥梁。混沌理论的提出，使我们能够把许多复杂现象看作是有目的的、有结构的行为。

80年代以前，人们对混沌的研究主要集中在计算机实验（如Lorenz系统、Logistic系统、强迫Brusselör系统）和物理实验（如Duffing振动、浅水波的强迫振动）上，而所借助分析的数学工具是分岔理论和突变理论。人们关心的是系统通往混沌道路的分岔类行、临界参数、功率谱及混沌系统的共性等。

80年代以来，人们则着重研究混沌的结构，而所借助的数学理论是多标度分形理论和符号动力学。

混沌吸引子的一个显著特征是存在着无穷嵌套的自相似几何结构。而这种无特征尺度的自相似结构，人们在相变研究中是早已熟悉的。由于70年代初期，相变理论因引入重正化群方法而使相变研究有重大突破，人们自然地从此理论中借用临界指数、标

度性、标度律等来研究混沌系统。1983年, Mandelbrot 指出, 自然界的很多现象(包括混沌)从几何上讲都是不规则的, 可以用分形维数来描述。在这之后的几年内, 物理、化学、生物、材料和地球科学等许多领域都取得了许多成果。分维这一概念之所以能在各个领域内得到应用, 首先是在于它反映了与几何相关的一类新的动力学标度类型, 其次它还揭示了一些看起来是毫不相关的自然现象中的某种相同构造原则。

然而, 分数维除了标志着该结构的自相似构造规律(单标度律)外, 并不能完全揭示出产生相应结构的动力学特征。为此, Grassberger、Procaccia 等人提出了重构动力系统的理论和方法, 这首先使我们可以把在理论模型上研究混沌的一些概念和方法直接移植到由观测资料所确定的系统上。一些描写吸引子性态的特征量, 如分维、Lyapunov 指数等都可以从实测资料的时间序列得到适当的估计。其次使混沌问题的研究跳出了理论模型的巢臼, 大大缩短了混沌理论与实际应用之间的距离, 使混沌理论开始步入一个实际应用阶段。

用单个分维来描述经过了较为复杂的非线性动力学演化过程而形成的结构的缺点在于它过于笼统。在大多数的物理现象中, 系统的行为主要取决于某个物理量的空间分布。因此, 如果考虑分形体的物理本质, 在分形概念所涉及的现象中也应存在着类似的某个量的空间分布。多标度分形理论正是研究分形体的这一行为。多标度理论受到普遍关注的时间是1986年Feigenbaum的工作以后, 但它的应用不仅已用于研究奇怪吸引子的复杂结构, 而且涉及到分形所涉及的所有领域。

符号动力学的讨论着重于建立符号动力学与实际动力学之间深刻的内在联系, 从而得出丰富的结果。即先将实际系统进行粗粒化描述而抽象出符号动力学系统加以研究, 然而将符号动力学的研究结果再反过来应用于研究实际系统。用符号动力学研究离散系统的奇怪吸引子的构造及通往混沌的途径是方便的、成功的

大气科学的发展必然受到自然科学、特别是物理学和数学发展水平的制约和推动。在非线理论取得重大进展的背景下，有关大气科学的许多观念、方法和体系也发生了深刻的变化，并已出现了不少饶有兴趣的工作。即有定性研究，也有定量计算工作。涉及的领域主要有：天气动力学、湍流和气候学。

本书较全面地介绍了非线性力学的主要内容：分岔理论、突变理论、混沌理论、多分形标度理论和符号动力学。并介绍了非线性力学在大气科学中应用的一些典型工作。目的在于让读者了解非线性力学研究的主要课题及在大气科学中应用非线性力学的可能途径。

本书是为攻读大气科学的研究生介绍非线性力学及其在大气科学中的应用而编写的。故在介绍基本理论时，并不拘泥于原有的理论体系，而是努力寻找非线性力学与大气科学的结合点，为建立边缘交叉学科构造理论和应用的基础。本书共分二篇。第一篇为非线性力学，共七章。第二、第三和第四章分别介绍分岔、突变和突变理论；第五章介绍分维和 Lyapunov 指数的计算方法；第六和第七章则分别介绍多标度分形理论和符号动力学。第二篇是非线性力学在大气科学中的应用，共二章。第一章介绍定性研究工作，第二章介绍定量研究工作。

本书的编写较广泛地参考了国内外非线性理论及其在大气科学中应用的有关论著，作者曾将本书的初稿（讲义）作为研究生选修课在南京大学研究生院研究生教学中使用过二届，受到研究生的欢迎。但由于涉及内容较多，作者水平有限，难免有许多错误和不当之处，敬请读者提出批评指正。

本书的编写得到伍荣生先生和刘式达先生的大力支持，谨此致谢。

林振山

1992年5月于南京大学契阔斋

目 录

第一篇 基本理论

第一章 非线性动力系统的定性描述	(1)
§ 1.1 线性系统与非线性系统	(1)
§ 1.2 相空间、相平面和奇点	(6)
§ 1.3 定态的稳定性及其分类	(8)
§ 1.4 极限环及其计算方法	(15)
§ 1.5 吸引子	(24)
§ 1.6 吸引子的功率谱	(31)
第二章 分岔	(35)
§ 2.1 多个吸引子、同宿轨道和异宿轨道	(35)
§ 2.2 分岔及其举例	(38)
§ 2.3 一维离散动力系统的分岔	(46)
§ 2.4 二维离散动力系统的分岔	(56)
第三章 突变	(62)
§ 3.1 基本概念	(62)
§ 3.2 折叠突变	(65)
§ 3.3 尖点突变	(68)
§ 3.4 燕尾突变	(71)
§ 3.5 椭圆脐点突变	(75)
§ 3.6 双曲脐点突变	(79)
§ 3.7 突变约定	(83)
第四章 混沌与分形	(85)
§ 4.1 混沌	(85)
§ 4.2 几个典型的混沌系统	(88)

§ 4.3 Lyapunov 指数	(107)
§ 4.4 分形与分维	(111)
§ 4.5 几个典型的分形及其分维的计算	(116)
§ 4.6 Shannon 信息、测度熵和信息维	(121)
第五章 分维和 Lyapunov 指数的计算	(125)
§ 5.1 关联维	(125)
§ 5.2 从单变量时间序列提取关联维	(128)
§ 5.3 Renyi q 阶熵	(130)
§ 5.4 从单变量时间序列提取 Lyapunov 指数	(132)
§ 5.5 分维和 Lyapunov 指数的计算实例	(135)
§ 5.6 计算关联维的参考程序	(141)
§ 5.7 计算 Lyapunov 指数的参考程序	(145)
第六章 单标度律和多标度分形理论	(153)
§ 6.1 分形理论的意义	(153)
§ 6.2 单标度律	(154)
§ 6.3 多标度分形结构	(156)
§ 6.4 Cantor 集合	(161)
§ 6.5 多分形的几何结构	(167)
§ 6.6 集团的多标度分形生长	(168)
§ 6.7 动力学系统中的多标度分形	(173)
第七章 符号动力学	(179)
§ 7.1 符号动力学	(179)
§ 7.2 一维单峰映射	(181)
§ 7.3 符号序列的字	(183)
§ 7.4 符号序列的序	(188)
§ 7.5 揉序列和允字条件	(191)
§ 7.6 中介字	(193)
§ 7.7 乘积和广义合成律	(197)
§ 7.8 人字映射、锯齿映射和 λ 展开	(199)
§ 7.9 一维多临界点映射	(208)
§ 7.10 符号动力学与常微分方程	(213)

第二篇 非线性力学在大气科学中的应用

第一章 定性分析	(216)
§ 1.1 混沌理论在大气科学中的应用途径	(216)
§ 1.2 零维气候模式	(219)
§ 1.3 大气对流问题	(222)
§ 1.4 海-气相互作用系统的可能性态	(225)
§ 1.5 线性和非线性正压不稳定	(236)
§ 1.6 Burger's-巢纪平方程的非线性机制	(246)
§ 1.7 Ertel 位涡和非线性对称不稳定性问题	(260)
§ 1.8 轴对称涡旋的非线性运动	(271)
§ 1.9 中国气候的动力学区划	(284)
§ 1.10 大气中的多平衡态与阻塞形势	(293)
第二章 长期预报的相空间理论和模式	(305)
§ 2.1 长期预报可行性问题的讨论	(305)
§ 2.2 长期预报的相空间理论	(312)
§ 2.3 距平符号预报法	(313)
§ 2.4 长期预报的相空间线性模式	(317)
§ 2.5 长期预报的相空间非线性模式	(321)
§ 2.6 超长期预报的相空间技术	(323)
§ 2.7 长期预报的自组织建模模式	(327)
§ 2.8 长期预报的相空间分量组合法	(333)
§ 2.9 长期预报的相空间分量平衡法	(334)
§ 2.10 相空间模式的预报误差估计	(339)
参考文献	(345)

第一篇 基本理论

第一章 非线性动力系统的定性描述

§ 1.1 线性系统与非线性系统

为认识事物,研究系统的演化行为及其特征,往往需要建立系统的状态参量演化所遵循的动力方程。而在建立旨在描述系统演化的动力方程时,我们必须考虑系统内部的相互作用。如果只考虑系统内部或外界的线性相互作用,则所建立起来的动力系统称为线性动力系统,而如果考虑到系统内部的非线性相互作用以及外界对系统的非线性影响(或者二者只居其一),则所建立起来的动力系统称为非线性动力系统。由于世界的复杂性,事物内部的相互作用以及外界对事物(系统)的影响往往是非线性的。所以,用线性动力模式来描述事物的演化,只能是近似的。以大鱼吃小鱼为例,若是线性的话,其结果只能是:大鱼愈来愈多,小鱼愈来愈少。最终小鱼被吃尽,而大鱼均被饿死。显然,这不符合生态平衡规律。这里忽略了小鱼对大鱼的反馈作用,小鱼少了,大鱼食量不够了,从而大鱼也得减少。这种反馈作用使得大鱼和小鱼以一定的比例而平衡共存。

一个系统如果只有线性相互作用,其线性作用即使再强烈,也只能引起量的增减,决不会引起质的变化。只有当系统存在非线性作用,才会出现巨涨落,系统才可能产生突变,才能出现崭

新的结构。所以，非线性作用是万千世界的根本。

1.1.1 非线性现象举例

例 1. 流体力学中的 Navier-Stokes 方程组的平流项。如 $u \frac{\partial u}{\partial x}$, $u \frac{\partial v}{\partial x}$, $w \frac{\partial T}{\partial z}$ 等都是非线性项, 它反映了物理量不均匀性 (如风切变 $-\frac{\partial u}{\partial z}$ 、温度层结 $\frac{\partial T}{\partial z}$ 等) 通过风的运输造成的。

例 2. 非线性对流模式

$$\begin{cases} T(z) = T_0 - \Gamma_d z \\ \bar{T}(z) = \bar{T}_0 - \Gamma z - \epsilon z^3 \end{cases} \quad (1-1)$$

这里的 $\bar{T}(z)$ 、 $T(z)$ 分别为环境温度和气块温度; T_0 、 \bar{T}_0 分别为起始高度处气块温度和环境温度; Γ_d 、 Γ 分别为干绝热减温率和垂直减温率; 而参数 ϵ 反映了非线性的作用。

例 3. Duffing 方程:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x + \alpha x^3 = F \cos \Omega t, \quad k > 0 \quad (1-2)$$

这是一个最简单的非线性振荡器。许多机电、生物系统都可用它作近似的数学描述。式中的三次项表示恢复力的非线性部分。如果 $\alpha > 0$, 则恢复力的增加比随着位移作线性变化的情况为快, 于是我们有一个“硬弹簧”; 而当 $\alpha < 0$ 时, 我们有一个“软弹簧”。

例 4. 在自催化过程中:



其反应速率,

$$W = k_1 \rho_A \rho_x - k_2 \rho_x^2 \quad (1-4)$$

与 x 的浓度 ρ_x 满足二次非线性关系。这里的 k_1 、 k_2 分别表示正过程速率和逆过程速率; 而 ρ_A 、 ρ_x 分别表示 A 和 x 的质量密度。

例5. 物理规律本身就是非线性的。如电磁波能量随距离的平方成反比衰减；黑体的辐射能力和温度的四次方成正比。

例6. 线性的迭加原理不再成立。如二列振幅分别为 A_1 和 A_2 的相干光迭加时，其合成波的光强并不等于两光波单独存在时的光强度 $I_1 = A_1^2$ 和 $I_2 = A_2^2$ 的线性代数之和，而等于：

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (1-5)$$

这里 δ 为两光波的位相差。

例7. 自然界的很多形状并不是直线。海岸线不是直的；山是凹凸不平的；树枝看起来也是很乱的。这些都不能用通常的规整几何来描述，都属于非线性现象。

1.1.2 线性系统和非线性系统的数学描述

如果描述系统状态的物理量在空间的分布是均匀的，即：

$$\nabla x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1-6)$$

则我们可以用下面的方程来描述线性系统：

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\{x_j\}, \mu_l, t) \quad (1-7)$$

$$x_i(t) \in R^n, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

这里的 f_i 是物理量 $\{x_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 的线性函数，即 f_i 不含 x_j 的二次及更高次幂的项。而 μ_l 为参数。

如果系统的状态参量不仅是时间的函数，而且还是空间的函数，则由于：

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \quad (1-8)$$

故而当 \vec{v} 也是变量时，方程 (1-7) 则不再是一个线性系统了。这里的 d/dt 称为个别变化，它表示在运动过程中流体质点所具有物理量随时间的变化率；而 $\frac{\partial}{\partial t}$ 为局地变化，它表示某一固定地点所观测到的物理量随时间的变化率，而与 (1-7) 式对应

的线性偏微分方程是:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i(\{x_j\}, \mu_i, t) \quad (1-8)$$

这里的 f_i 只是 $\{x_j\}$ ($j=1, 2, \dots, n$) 的线性函数。

例如, 描述波动的基本方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1-9)$$

就是一个线性系统, 这里的 \bar{u} 为某一常数。

如果我们把 (1-9) 式中的 \bar{u} 改为未知函数 u , 即,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1-10)$$

这是一个最简单的非线性偏微分方程。(1-9) 式中的 $\bar{u} \frac{\partial u}{\partial x}$ 称为线性平流项, 而 (1-10) 式中的 $u \frac{\partial u}{\partial x}$ 称为非线性平流项。

一般地, 对任何复杂体系的状态演变我们均可以用以下的非线性数学模型来描写:

$$-\frac{d}{dt} X(t) = f(X, \mu_i, t) \quad (1-11)$$

$$X(t) \in R^n, \quad l=1, 2, \dots, m$$

这里的 X 为状态矢量; f 是 X 的非线性函数。而 μ_i 为参数。

1.1.3 线性系统与非线性系统的特点

一般说来, 线性系统具有均匀性、独立性和可逆性三个特点。

(1) 均匀性: 事物或系统中的各部分的相互作用若是线性的, 则只能造成系统的衰亡。因为事物只能是无限增长或衰减的极端均匀状态。线性系统的均匀性首先表现在系统的状态量在空

间的分布是均匀的，其次表现在系统各要素之间的相互作用的权重在时空上是均匀的。如线性弹簧的恢复力与被拉伸的长度的比是不随时空而变的，其振动的方式是均匀的（其圆频率 ω 为一常值）。

（2）独立性：对于线性系统而言，两个不同因素的组合作用等于每个因素单独作用的简单迭加，即遵守迭加原理。对线性弹簧而言，每次拉伸1厘米而拉5次的力等于一次拉伸5厘米所需的力。

（3）可逆性：对线性系统而言，如果它的演化是极端发展的，则我们只需将时间 t 反转变为 $t' = -t$ ，那么它将沿同一轨线回到原来的状态。对于牛顿第二定律： $F = m\ddot{x}$ ，当我们把时间变为 $t' = -t$ 时，它的形式并无变化。也就是说，过去和将来起着完全相同的作用，这也属于可逆性范畴。可逆性是时空对称性的表现。

非线性系统的特点则在于：非均匀性、相干性和不可逆性（非对称性）。

（1）非均匀性：非线性系统的非均匀性可以表现为：或是状态量的空间分布不均匀；或是相互作用方式、效应及其结果随时间、地点的条件不同而不相同。如云街的出现，台风的形成。

（2）相干性：由于非线性系统内部各要素之间相互约束、相互反馈和相互干扰，故各要素已丧失了自身运动的独立性，构成或表现为某种整体的作用与效应。例如，光的干涉和衍射现象。所以，迭加原理对非线性系统原则上是不适用的。

（3）不可逆性：生物由低级向高级进化，现有的高等动物决不会退化为低等动物。地球24小时自转一周，但每天天气是不可重复的。由于系统内部非线性作用各要素之间的重要性与所起的作用是不同的，处于支配与从属，控制与反馈，策动与响应等不对称关系中。所以系统的演化行为是不可逆的。不可逆性是时

空不对称的产物。

§ 1.2 相空间、相平面和奇点

为了直观、方便地研究动力系统，把握所有可能的解的特征，人们提出了抽象的相空间概念。所谓的相空间指的是用状态变量 $\{x_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$) 支撑起的抽象的空间。从而在系统的状态和相空间的点之间建空一一对应关系。相空间里的一个点，即相点，表示系统在某时刻的一个状态，而相空间里的相点的连线，构成了点在相空间的轨道，即相轨道。相轨道表示了系统状态随时间的演变。

相空间是非现实的空间，可以是 n 维的，也可以是无穷维的。此外，相空间的坐标还可以代表任意一个状态参量 x_i 的某个分量。而此时相空间的含义则更为广义了。

二维的相空间也叫相平面。如果以 \vec{i} 、 \vec{j} 表示相空间里任二个彼此独立的“坐标”，则 \vec{i} 、 \vec{j} 所构成的平面也叫做相平面。

以二阶非线性常微分方程为例，

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \quad (1-12)$$

其中 $f(x, \dot{x})$ 是作用于单位质量点上的力； \dot{x} 和 \ddot{x} 分别表示质点的速度和加速度。(1-12)式中质点的位置 x 和速度 \dot{x} 刻划了该系统任一时刻的状态，故称为相。位置 x 和速度 \dot{x} 的数值对应着平面 (x, \dot{x}) 上的点，平面 (x, \dot{x}) 叫做相平面。

若令 $y = \dot{x}$ ，则方程(1-12)化为以下的常微方程组，

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x, y) \end{aligned} \quad (1-13)$$

方程组(1-13)式的解 $(x(t), y(t))$ 在相平面 (x, y) 上为一曲线簇, 称为轨线(相轨道)。它描述了系统状态在全部运动时间(从 $t = -\infty$ 到 $t = +\infty$) 内的变化。

(1-13) 更为普遍的形式是二维自治系统,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, y) \\ \dot{y} &= G(x, y)\end{aligned}\quad (1-14)$$

所谓的自治系统指的是方程右边的函数 F 、 G 不含自变量 t 。由(1-13)式所描述的体系所对应的相空间为 $x-y$ (相) 平面。而由系统所服从的物理规律所决定的向量场,

$$\vec{u}(x, y) = \vec{i} F(x, y) + \vec{j} G(x, y) \quad (1-15)$$

直观地刻划了系统的演化行为及其特点。该向量场在相空里表现为一簇带箭头方向的曲线, 即相轨道, 轨道上的箭头方向表示时间 t 增加的方向。

如果假设整个相平面上充满了质点, 在每条轨线上有许多质点络绎不绝地运动着。由于系统(1-14)式是自治的, 它表明在一固定点 $M(x, y)$ 处的向量 $\vec{u}(x, y)$ 是不随时间而改变的。故而运动是稳定的, 而轨线是动点的运动轨迹。

若令(1-14)式的右端恒等于零, 即

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1-16)$$

此时, 若 F 、 G 是 (x, y) 的线性函数, 则(1-16)式只有一个解, (x_0, y_0) ; 若 F 、 G 是 (x, y) 的非线性函数, 则(1-15)式有若干个解 $(x_{0i}, y_{0i}) (i, j = 1, 2, \dots)$ 。由于解 (x_0, y_0) 或 $(x_{0i}, y_{0i}) (i, j = 1, 2, \dots)$ 满足,

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \quad (1-17)$$

故称之为是系统(1-14)式的定态(解), 亦称为平衡态(在

一些教科书里，平衡态是指稳定的定态）。

由于定态(解) (x_0, y_0) 或 (x_{0i}, y_{0i}) ($i, j = 1, 2, \dots$) 满足 (1-17) 式，所以 $dx/dy = 0$ 。即平衡点(态)没有确定的切线方向，不满足微分方程解的存在和唯一性定理的条件，故在数学上称为奇点。

由 (1-13) 式可以直观地看出奇点的物理意义：即质点的速度或广义速度（在高维相空间里）为零。质点是静止的。这也就是之所以称为定态的物理含义。

在奇点处，方程 (1-14) 式的解是一(组)常数，因而不能定出一条随时间变化的轨线，即奇点是没有轨线经过的。除奇点外，通过相平面上的每一点只能有一条轨线，即轨线不能相交。这也就是所谓的相空间状态的唯一性。

§ 1.3 定态的稳定性及其分类

1.3.1 稳定性

由于物理系统中的平衡态相当于相平面中的奇点，我们可以把它看作是未被扰动的状态。

令：

$$\begin{cases} x = x_0 + \delta x \\ y = y_0 + \delta y \end{cases} \quad (1-18)$$

这里的 (x_0, y_0) 表示定态(平衡态)，而 $(\delta x, \delta y)$ 表示扰动。

将 (1-18) 式代入 (1-14) 式，并将右端进行泰勒展开至线性项，则有：

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = a_{11} \delta x + a_{12} \delta y \\ \delta \dot{y} = a_{21} \delta x + a_{22} \delta y \end{cases} \quad (1-19)$$

其中：

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0, y_0}, & a_{12} &= \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} \\ a_{21} &= \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x_0, y_0}, & a_{22} &= \left. \frac{\partial G}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} \end{aligned} \quad (1-20)$$

方程组 (1-19) 式也可写成以下的矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta x} \\ \dot{\delta y} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \quad (1-21)$$

其中,

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (1-22)$$

为 Jacobi 矩阵。

由于方程 (1-21) 式是线性的, 故有解为:

$$\begin{aligned} \delta x &= c_1 e^{\omega t} \\ \delta y &= c_2 e^{\omega t} \end{aligned} \quad (1-23)$$

的解。这样的解称为简正模。将 (1-23) 式代回到方程 (1-21) 式中可得到对系数 c_1, c_2 为一阶的齐次代数方程组。该方程组有非平凡解的条件为:

$$|J - \omega I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \omega & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \omega \end{vmatrix} = 0 \quad (1-24)$$

其中 I 为单位矩阵。而 (1-24) 称为特征方程。

由 (1-24) 可得:

$$\omega^2 - T\omega + \Delta = 0 \quad (1-25)$$

其中:

$$T = a_{11} + a_{22} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)}$$

是 Jacobi 矩阵 J 的迹。

而

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} \quad (1-26)$$

是Jacobi行列式的值。

一般说来，方程（1-25）式容许有两个不同的解 ω_1 和 ω_2 。从而方程（1-19）式或（1-21）式的解是下列形式：

$$\begin{aligned} \delta x &= b_1 e^{\omega_1 t} + b_2 e^{\omega_2 t} \\ \delta y &= b_1 k_1 e^{\omega_1 t} + b_2 k_2 e^{\omega_2 t} \end{aligned} \quad (1-27)$$

其中 b_1 、 b_2 由初始条件决定，而系数 k_1 、 k_2 是方程：

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{21} = 0 \quad (1-28)$$

的两个根。

由方程（1-27）式，我们有以下的稳定性判据：

（1）若两个特征值的实部 $Re\omega_i < 0 (i=1, 2)$ ，则定态 (x_0, y_0) 是渐近稳定的。

（2）若至少有一特征值 $Re\omega_\alpha > 0 (\alpha=1 \text{ 或 } 2)$ ，则定态 (x_0, y_0) 是不稳定的。

在（1）和（2）两种情况里均有 $Re\omega_i \neq 0$ ，非线性系统（1-14）式和它相应的线性化系统的相图在平衡态附近是拓扑等价的。这种平衡态的点称为双曲点。在下面的讨论里，我们将知道鞍点、结点和焦点都是双曲点。

（3）若至少有一特征值 $Re\omega_\alpha = 0 (\alpha=1 \text{ 或 } 2)$ ，而另一根仍保持为负，则定态是临界稳定的。

1.3.2 奇点的分类

$$1. \Delta > 0, T^2 - 4\Delta > 0$$

此时方程（1-25）式的两个根 ω_1 和 ω_2 为不等的实根。这意味着不出现振荡地趋近或偏离奇点（平衡点）。当 $T > 0$ 时，两根皆为正，解远离平衡点；当 $T < 0$ 时，两根皆为负，解趋向平衡点。它们分别称之为不稳定结点和稳定结点。图1.1(a)(b)分别描述了稳定结点和不稳定结点附近（扣除该奇点）轨道的定性行为。

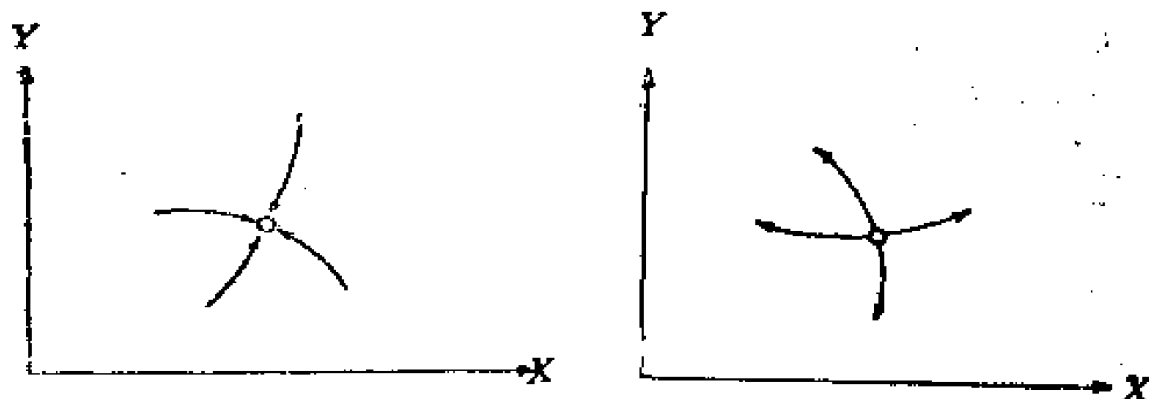


图1.1 (a)渐近稳定结点

(b)不稳定结点

稳定的结点和不稳定的结点又分别称为“汇”和“源”。

2. $\Delta < 0$

此时方程 (1-25) 式的两个实根异号, 故方程 (1-27) 的解有两支。其中一支趋向于平衡点, 而另一支远离平衡点。该平衡点 (奇点) 称为鞍点。由图1.2看出, 鞍点显然是不稳定的。

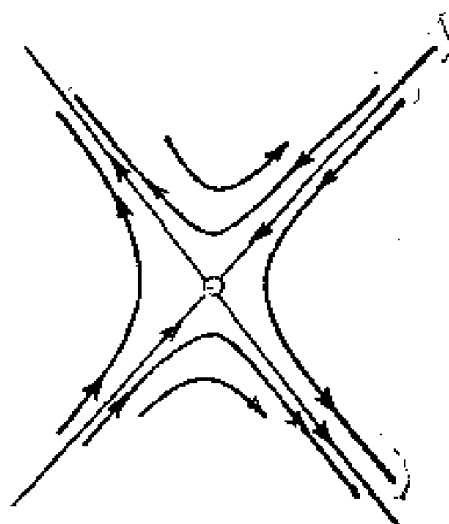


图 1.2 分界线和围绕鞍点的轨道的形状

3. $T \neq 0, T^2 - 4\Delta < 0$

此时方程 (1-25) 式的两根有非零的实部, ω_1 和 ω_2 为共轭复根 $\omega = Re\omega \pm iIm\omega$, 解为振荡型式。

当 $T > 0$ 时, 其实部为正, 振幅不断增大; 当 $T < 0$ 时, 其实部为负, 振幅不断衰减。它们分别称为不稳定焦点和稳定焦点。如图1.3所示。

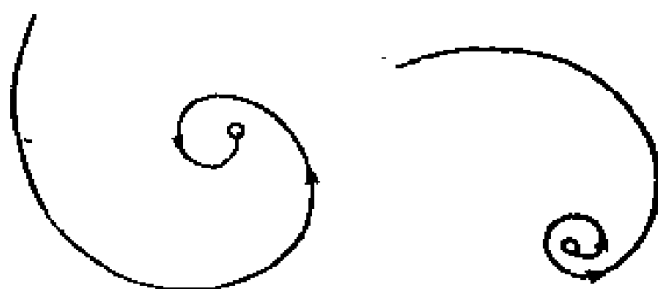


图 1.3 (a)渐近稳定焦点 (b)不稳定焦点

4. $T=0, \Delta>0$

此时方程 (1-25) 式的根是纯虚数: $\omega_i = \pm i\gamma$ 。解为周期振荡型式。由于轨道是围绕奇点的闭曲线, 该平衡点 (奇点) 被称为中心点。中心点是临界稳定的。如图1.4所示。

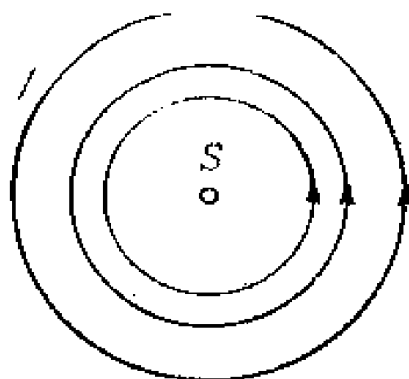


图1.4 围绕中心点的闭轨道

图1.5表示二维平衡点在 $T-\Delta$ 平面里的分布

例1. 设:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = x + 4y \end{cases} \quad (1-29)$$

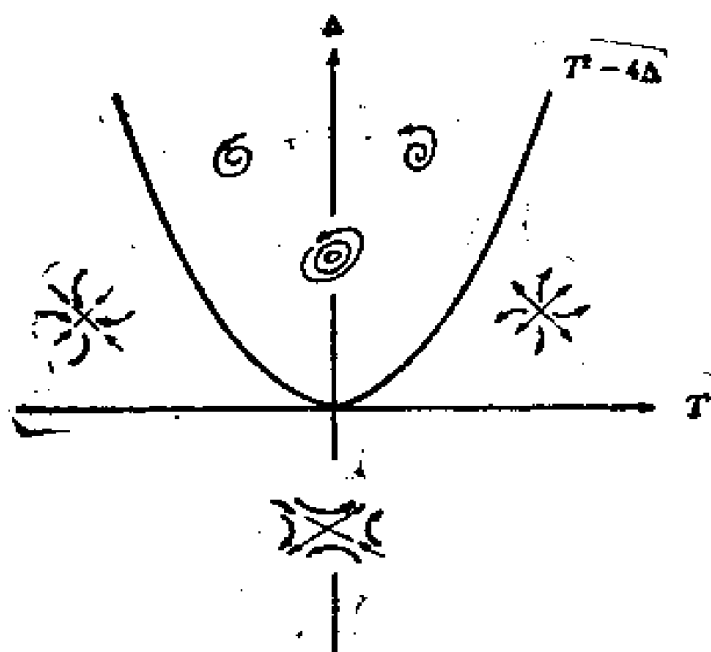


图1.5 二维平衡点分布

显然, $(x_0=0, y_0=0)$ 是系统 (1-29) 式的奇点。由于:

$$a_{11} = -\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} = 1, \quad a_{21} = -\frac{\partial E}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} = 0$$

$$a_{21} = -\frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} = 1, \quad a_{22} = -\frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} = 4$$

且:

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 4 > 0$$

$$T = a_{11} + a_{22} = 5 > 0$$

$$T^2 - 4\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$$

所以方程 (1-25) 式的两个根 ω_1 和 ω_2 为不等的正实根。故而, (0, 0) 为系统 (1-29) 式的不稳定结点。

例 2. Lorenz 在研究大气对流时, 用截谱方法得到了以下著名的 Lorenz 方程:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x-y) \\ \dot{y} = \gamma x - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (1-30)$$

其中 x 表示对流强度; y 表示上升气流和下降气流的温差; z 表示铅直方向温度分布的非线性强度; γ 是瑞利数, σ 是 Prandtl 数; b 是参数。Lorenz 所考虑的物理系统:

$$\sigma = 10; \quad b = 8/3; \quad 0 < \gamma < \infty \quad (1-31)$$

由 (1-30) 式可得其奇点 (平衡态) 所满足的方程:

$$\begin{aligned} x &= y \\ x(\gamma - 1 - z) &= 0 \\ y^2 &= bz \end{aligned} \quad (1-32)$$

当 $\gamma < 1$ 时, (1-32) 只有 (0, 0, 0) 一个解。即 (1-30) 系统只有一个奇点, 记为

$$A_1: (x_0 = 0, y_0 = 0, z = 0)$$

为研究 A_1 奇点的性质, 首先应分析 A_1 附近的点, 设为 $(x_1,$

y_1, z_1) 且 $x_1 = x + x'$, $y_1 = y + y'$, $z_1 = z + z'$; 将 (x_1, y_1, z_1) 代入 (1-30) 式, 由于 (x', y', z') 均为小扰动, 在进行稳定性分析时, 略去非线性小量, 得以下线性扰动方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}' = -\sigma(x' - y') \\ \dot{y}' = (\gamma - z)x' - y' - xz' \\ \dot{z}' = yx' + xy' - bz' \end{cases} \quad (1-33)$$

对于奇点 A_1 , 其稳定性决定于 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \gamma - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}_{A_1(x_0, y_0, z_0)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \gamma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (1-34)$$

的特征值 ω , 而 ω 的特征方程为:

$$(b + \omega)[\omega^2 + (\sigma + 1)\omega + \sigma(1 - \gamma)] = 0 \quad (1-35)$$

其解为:

$$\omega_1 = -b$$

$$\omega_{2,3} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - \gamma)}}{2} \quad (1-36)$$

当 $\gamma < 1$ 时, ω_1, ω_2 和 ω_3 均为负实根, 故 A_1 为稳定的结点。

当 $\gamma > 1$ 时, (1-32) 式有三个解:

$$\begin{cases} A_1 : (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) \\ A_2 : (x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{b(\gamma - 1)}, \sqrt{b(\gamma - 1)}, \gamma - 1) \\ A_3 : (x_0, y_0, z_0) = (-\sqrt{b(\gamma - 1)}, -\sqrt{b(\gamma - 1)}, \gamma - 1) \end{cases} \quad (1-37)$$

但此时的 A_1 是不稳定的鞍点, 因为 (1-36) 式中的 ω_2, ω_3 分别为一正实数和一负实数。

对奇点 (平衡点) A_2 由 (1-34) 得:

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \gamma-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}_{A_2} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(\gamma-1)} \\ \sqrt{b(\gamma-1)} & \sqrt{b(\gamma-1)} & -b \end{pmatrix} \quad (1-38)$$

而对奇点 A_3 有:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \gamma-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}_{A_3} &= \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{b(\gamma-1)} \\ -\sqrt{b(\gamma-1)} & -\sqrt{b(\gamma-1)} & -b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(\gamma-1)} \\ \sqrt{b(\gamma-1)} & \sqrt{b(\gamma-1)} & -b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1-39)$$

所以, A_2 与 A_3 的奇点性质是一致的, 它们均由矩阵(1-39)式的特征值 ω 决定。而(1-39)式的特征方程为:

$$\omega^3 + (\sigma + b + 1)\omega^2 + (\gamma + \sigma)b\omega + 2\sigma(\gamma - 1) = 0 \quad (1-40)$$

当 $\gamma \rightarrow 1^+$ 时($b = \frac{3}{8}$), (1-40)式的三个根趋于:

$$\begin{cases} \omega_1 \rightarrow 0^- \\ \omega_2 \rightarrow -b \\ \omega_3 \rightarrow -(\sigma + 1) \end{cases} \quad (1-41)$$

即 $\gamma \rightarrow 1^+$ 时, 奇点 A_2 、 A_3 均为稳定的结点。而当 $24.74 > \gamma > 1.345$ 时, (1-40)式的三个根中有两个是一对复共轭特征值, 且其实部为负, 故此时的 A_2 、 A_3 均为稳定的焦点。

从 Lorenz 方程可以看出, 随着系统参数取值的变化, 系统奇点的类型和稳定性亦随之而变。

§ 1.4 极限环及其计算方法

上面我们介绍了奇点的分类及稳定性性质, 从而使我们可以

定性地知道系统在整个相平面上在某些奇点附近的情况以及 $t \rightarrow -\infty$ 和 $t \rightarrow +\infty$ 时的情况。即我们只能定性地了解系统所具有的局部轨线特征。能否定性地知道系统在相平面大区域上的演化特性？即能否了解系统在整个相平面（而不仅仅在某些奇点附近）上的解的结构？为此，我们有必要研究一下极限环。

定义：相空间里孤立的闭轨线（道）叫做极限环。

这里的孤立不是唯一的意思。而是指在闭轨的极小邻近域里，不会出现其他的闭轨。而闭轨的数学意义是系统存在以 T 为周期的周期解。即当：

$$f(x, y, t+T) = f(x, y, t) \quad (1-42)$$

时，系统存在一极限环。这就把极限环存在与否的问题转化为找系统周期解的问题。而找周期解的方法一般有以下三种：

（1）极坐标法：即通过坐标变换化成极坐标形式，而极坐标系中的平衡态就对应于原相空间坐标系中的周期解。

（2）平均法：由于系统存在周期解，那么在极限环上系统的总能量变化应为零，即：

$$E(2\pi) - E(0) = 0 \quad (1-43)$$

这里的 E 表示能量，由（1-43）式可找到极限环的平均半径。

（3）Poincare 截面法：即将动力系统的轨迹转化为轨迹与相空间的一个截面的交点来研究。

1.4.1 极坐标法

例 1. 考察非线性系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x[\mu - (x^2 + y^2)] = f_1(x, y) \\ \dot{y} = x + y[\mu - (x^2 + y^2)] = f_2(x, y) \end{cases} \quad (1-44)$$

这里的 μ 为参数，显然 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 是系统（1-44）式的一个奇点。而（1-44）式的线性扰动方程为，

$$\begin{cases} \dot{x}' = -y' + \mu x' \\ \dot{y}' = x' + \mu y' \end{cases} \quad (1-45)$$

其Jacobi矩阵为:

$$J = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x'} & \frac{\partial f_1}{\partial y'} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x'} & \frac{\partial f_2}{\partial y'} \end{array} \right]_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix} \quad (1-46)$$

其特征根方程的解为:

$$\omega_{1,2} = \mu + i \quad (1-47)$$

所以, 当 μ 为负数时, 奇点 $(0,0)$ 是稳定的焦点; 当 $\mu=0$ 时, 奇点 $(0,0)$ 是中心点; 当 μ 为正数时, 奇点 $(0,0)$ 是不稳定的焦点。

至此, 我们通过稳定性分析, 才获得系统在奇点 $(0,0)$ 附近的行为特征。能否对系统的动力行为有更多的了解?

$$\text{令: } \begin{cases} x = \gamma \cos \theta \\ y = \gamma \sin \theta \end{cases} \quad (1-48)$$

则系统(1-44)式在极坐标里的形式为:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\gamma} = \gamma(\mu - \gamma^2) \\ \dot{\theta} &= \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{\gamma^2} = 1 \end{aligned} \quad (1-49)$$

方程组(1-49)式的第二式说明, 轨线以定常角速度旋转。而第一式则说明, 当 $\mu > 0$ 时, 系统(1-49)式还存着另一平衡态:

$$\gamma = \sqrt{\mu} \quad (\mu > 0) \quad (1-50)$$

这一新的平衡态显然不是奇点, 而是一个极限环。

当 $\gamma < \sqrt{\mu}$ 时, $\dot{\gamma} > 0$, 即半径在 $\sqrt{\mu}$ 内的运动其半径随着时间的增加而逼近 $\sqrt{\mu}$; 而当 $\gamma > \sqrt{\mu}$ 时, $\dot{\gamma} < 0$, 半径在 $\sqrt{\mu}$ 外的

运动其半径亦将随着时间的增加而逼近 $\sqrt{\mu}$ 。总之当 $\mu > 0$ 时， $t \rightarrow +\infty$ 时，系统的运动将向内或向外绕向半径为 $\sqrt{\mu}$ 的圆。这就是极限环的物理含义。极限环是非线性系统才有可能出现的特殊情况。如图1.6所示。

显然，上述的极限环是稳定的。关于极限环稳定性的定义如下：

定义：如果存在极限环 L ，且使得从包含 L 的环形域 ζ 内出发的（ L 的内侧和外侧）任何轨线在 $t \rightarrow +\infty$ 时都渐近

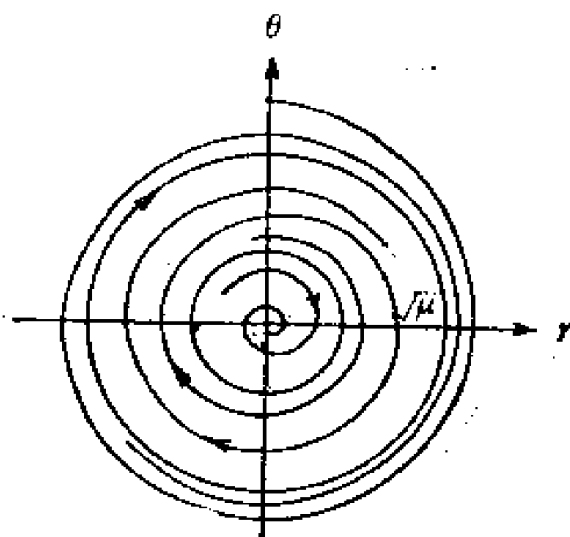


图 1.6 极限环

地逼近极限环 L ，则称 L 为稳定的极限环。否则，则称极限环 L 是不稳定的。而如果从包含 L 的环形域 ζ 内的某一侧（内侧或外侧）出发的轨线在 $t \rightarrow +\infty$ 时都渐近地逼近极限环 L ，而从另一侧（外侧或内侧）出发的轨线远离它（当 $t \rightarrow -\infty$ 时逼近 L ），则称 L 为半稳定的极限环。显然，半稳定的极限环是不稳定极限环的一种。

关于极限环稳定性定义的图解如图1.7所示。

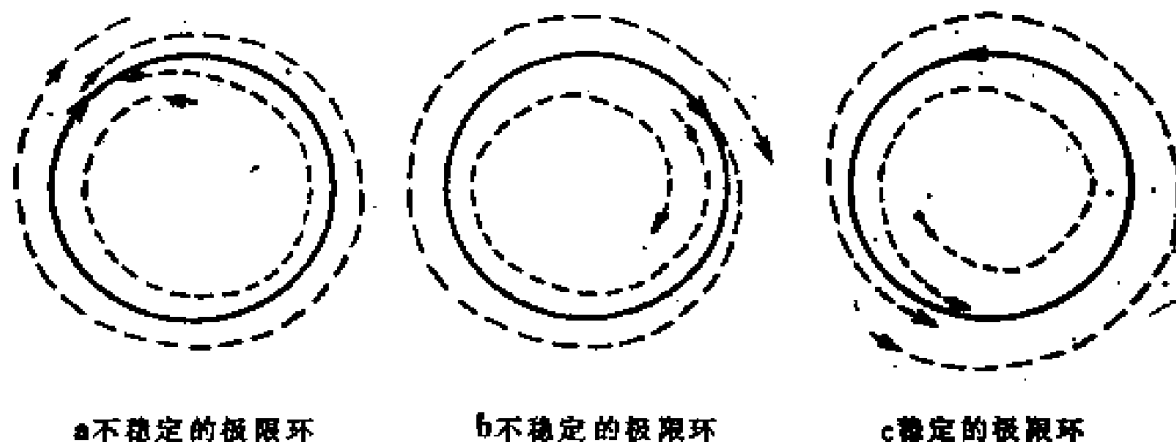


图 1.7 极限环稳定性的讨论

例 2.

$$\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1) \quad (1-51)$$

令

$$\begin{cases} x = \gamma \cos \theta \\ y = \gamma \sin \theta \end{cases} \quad (1-52)$$

可把 (1-51) 式化为下面的极坐标形式:

$$\dot{\gamma} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\gamma} = \gamma(\gamma^2 - 1) \quad (1-53)$$

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{\gamma^2} = 1$$

显然 (1-53) 式有一平衡态 ($\gamma_0 = 1, \dot{\theta}_0 = \text{常数}$)。

即存在 $\gamma = 1$ 的极限环。由于当 $\gamma < 1$ 时, $\dot{\gamma} < 0$; 而当 $\gamma > 1$ 时, $\dot{\gamma} > 0$ 。即极限环内、外两侧的运动都将远离极限环, 故 $\gamma = 1$ 的极限环是不稳定的。

1.4.2 平均法

例 3. Van der Pol 方程

$$\ddot{x} + b(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad |b| < 2 \quad (1-54)$$

令 $x = y$, (1-54) 化为:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -b(x^2 - 1)y - x \end{cases} \quad (1-55)$$

若令

$$\begin{cases} x = \gamma \cos \theta \\ y = \gamma \sin \theta \end{cases} \quad (1-56)$$

则:

$$\dot{x} = \dot{\gamma} \cos \theta - \gamma \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \dot{\gamma} \sin \theta + \gamma \cos \theta \dot{\theta} \quad (1-57)$$

将 (1-57) 代入 (1-55) 式得:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} \cos \theta - \gamma \sin \theta \dot{\theta} = \gamma \sin \theta \\ \dot{\gamma} \sin \theta + \gamma \cos \theta \dot{\theta} = -b(\gamma^2 \cos^2 \theta - 1) \gamma \sin \theta - \cos \theta \end{cases} \quad (1-58)$$

(1-58) 的第一式乘 $\cos \theta$ 加上 (1-58) 的第二式乘 $\sin \theta$ 得:

$$\dot{\gamma} = -b(\gamma^2 \cos^2 \theta - 1) \gamma \sin^2 \theta \quad (1-59)$$

(1-58) 式的第一式乘 $\sin \theta$ 减去 (1-58) 的第二式乘 $\cos \theta$ 得:

$$-\gamma \dot{\theta} = -b(\gamma^2 \cos^2 \theta - 1) \gamma \sin \theta \cos \theta \quad (1-60)$$

即:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = b\gamma(1 - \gamma^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta \\ \dot{\theta} = b\gamma(\gamma^2 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (1-61)$$

显然由 (1-61) 式不易找出 γ 的平衡态。但我们知道对极限环而言, 系统在极限环轨线上的总能量变化应该为零。而系统的总能量:

$$\begin{aligned} E &= \text{动能} + \text{势能} \\ &= \frac{1}{2}(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}x^2 \end{aligned} \quad (1-62)$$

所以:

$$\int_t^{t+\tau} \frac{dE}{dt} dt = 0$$

即:

$$\int_t^{t+\tau} \frac{d\left[\frac{1}{2}(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}x^2\right]}{dt} dt = \int_t^{t+\tau} (\dot{x}\ddot{x} + x\dot{x}) dt = 0 \quad (1-63)$$

由 (1-54) 式得:

$$\dot{x}\ddot{x} + x\dot{x} = b(1 - x^2)(\dot{x})^2 \quad (1-64)$$

将 (1-64) 式代入 (1-63) 式得:

$$\int_t^{t+\tau} b(1-x^2)(\dot{x})^2 dt = 0 \quad (1-65)$$

设极限环的平均半径为 \bar{r} , 则设系统所存在的周期解为:

$$x = \bar{r} \cos t \quad (1-66)$$

并令 $t=0$, $T=2\pi$, 则由 (1-65)、(1-66) 式得:

$$\int_0^{2\pi} b(1-x^2)(\dot{x})^2 dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} b(1-\bar{r}^2 \cos^2 t)(-\bar{r} \sin t)^2 dt = 0$$

即:

$$-b\left(-\frac{\bar{r}^2}{4} - 1\right)\pi^2 \bar{r}^2 = 0$$

所以, $\bar{r} = 2$

当 $\bar{r} < 2$ 时, $\int_t^{t+\tau} \frac{dE}{dt} dt > 0$; 而当 $\bar{r} > 2$ 时 $\int_t^{t+\tau} \frac{dE}{dt} dt < 0$ 。

这说明随时间的增加, 极限环内的运动将由于能量增加而逼近极限环。同时极限环外的运动将由于能量的减小而逼近极限环。故该极限环是稳定的。

1.4.3 Poincare 截面法

由于非线性系统的复杂性, 一般地要直接研究 (求解) 非线性系统的轨道是十分困难的, 故而我们引进 Poincare 截面方法。

所谓的 Poincare 截面法是将动力系统的轨迹转化为轨迹与相空间里的一个横截面 (Poincare 截面) 的交点来研究。从而将连续的动力演化问题转化为一个离散的映射。Poincare 截面法的优点在于它能在保证原连续动力系统的拓扑性质不变的前提下, 而将相空间的维数减少一个, 从而使问题的复杂性程度极大地降低了。同时在数学上, 由于映射是一差分方程, 而差分方程

较连续方程更容易解决。

如图1.8所示, 设系统在三维相空间 $x_1 - x_2 - x_3$ 里的演化轨

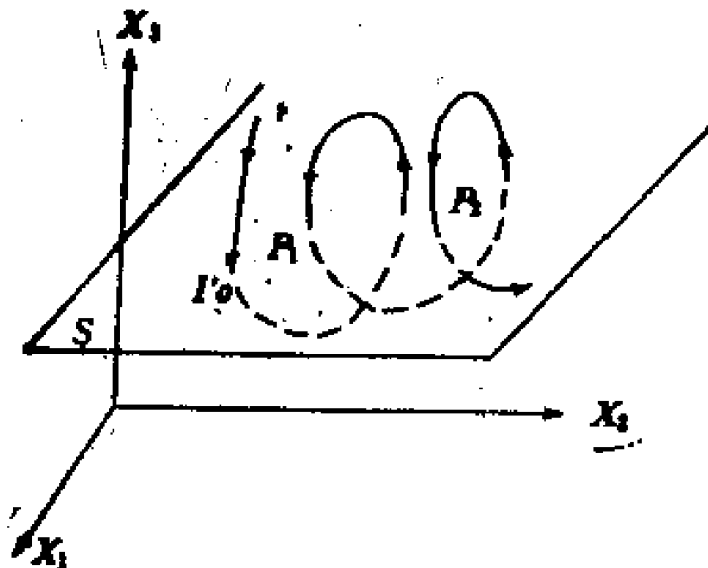


图 1.8 Poincare映像

迹为一阻尼螺旋线 (在 x_3 方向速度递减), 引入Poincare截面 $x_3 = c$ (c 为常数), 记为 s 。使得轨线与 s 依次相交于 P_0, P_1, P_2, \dots , 形成Poincare映像, 即:

$$P_1 = \Gamma(P_0), P_2 = \Gamma(P_1) = \Gamma^2(P_0)$$

$$P_3 = \Gamma(P_2) = \Gamma(\Gamma(P_1)) = \Gamma(\Gamma(\Gamma(P_0))) = \Gamma^3(P_0)$$

.....

$$P_n = \Gamma(P_{n-1}) = \Gamma^n(P_0)$$

(1-67)

这里的 Γ 的映射, 而 Γ 的次幂表示映射的次数。

对于周期运动的极限环, 轨迹与 Poincare 截面的交点显然只有一个。

如图1.9所示;

显然此时有:

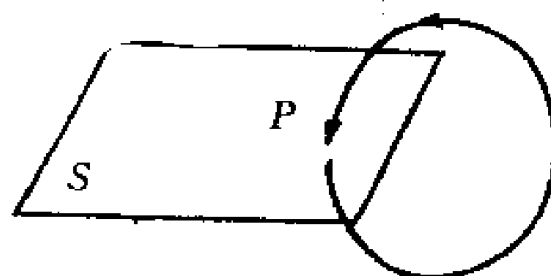


图 1.9 极限环的Poincare截面及其映射

$$P_0 = P_1 = P_2 = \dots = P_n = \dots = P$$

$$P_n = P = \Gamma^n(P_0) = \Gamma^n(P) \quad (1-68)$$

这里的 P 为 Poincare 截面上的不动点，即轨道与截面 S 的唯一的交点。而极限的稳定性可由不动点 P 的稳定性来决定：

$$\text{因为：} \quad P_{n+1} = \Gamma(P_n) \quad (1-69)$$

$$P = \Gamma(P) \quad (1-70)$$

由 (1-69)、(1-70) 式可得：

$$\begin{aligned} |P_{n+1} - P| &= |\Gamma(P_n) - \Gamma(P)| \\ &= \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial P_n} \right| \cdot |P_n - P| \end{aligned} \quad (1-71)$$

所以，当

$$\left| \frac{\partial \Gamma}{\partial P_n} \right| < 1 \quad (1-72)$$

时，只要 n 充分大，则 $|P_{n+1} - P|$ 为无穷小量，即 P_n 趋于 P 。从而不动点 P 是稳定的。

$$\text{例 4.} \quad \begin{cases} \dot{x} = -y + x[\mu - (x^2 + y^2)] \\ \dot{y} = x + y[\mu - (x^2 + y^2)] \end{cases} \quad (1-44)$$

(1-44) 式在极坐标里的形式为：

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \gamma(\mu - \gamma^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (1-49)$$

显然正如我们在例 1 里所讨论的，只有当 $\mu > 0$ 时，系统 (1-44) 才有可能出现极限环。

设 $t = 0$ 时， $\gamma = \gamma_0$ ，则由 (1-49) 的第一式得：

$$-\frac{d\gamma^2}{\gamma^2(\mu - \gamma^2)} = 2dt \quad (1-73)$$

$$-\frac{1}{\mu} \ln \frac{\mu - \gamma^2}{\gamma^2} = 2t + c \quad (1-74)$$

由初始条件可求得:

$$c = -\frac{1}{\mu} \ln \frac{\mu - \gamma_0^2}{\gamma_0^2} \quad (1-75)$$

由 (1-74) 和 (1-75) 式得:

$$\gamma = \left[\frac{\mu}{\left(\frac{\mu}{\gamma_0^2} - 1 \right) e^{-2\mu t} + 1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1-76)$$

取 $\theta = 0$, $\gamma > 0$ 为 Poincare 截面。如果系统存在周期行为的极限环, 则截面上任一点 γ_n 经绕行 $t = 2\pi$ 后, 又回到截面上, 形成 Poincare 映射。即:

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \Gamma(\gamma) \\ &= \left[\frac{\mu}{\left(\frac{\mu}{\gamma^2} - 1 \right) e^{-4\pi\mu} + 1} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1-77)$$

显然 (1-77) 式有个不动点: $\gamma_n = \sqrt{\mu} = \gamma_{n+1}$ 。所以系统 (1-44) 式存在一半径为 $\sqrt{\mu}$ 的极限环。而且:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_n} \right|_{\gamma_n = \sqrt{\mu}} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\mu} \left[\left(\frac{\mu}{\gamma_n^2} - 1 \right) e^{-4\pi\mu} + 1 \right]^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad \left(-\frac{2\mu e^{-4\pi\mu}}{\gamma_n^3} \right)_{\gamma_n = \sqrt{\mu}} \\ &= e^{-4\pi\mu} < 1 \end{aligned} \quad (1-78)$$

所以极限环是稳定的。

§ 1.5 吸引子

对动力系统而言, 人们最关心的往往是其状态的最终归宿。保守的哈密顿系统, 遵从刘维定理, 即把相间空中一定体积内的点都取作初值, 这个区域的形状在演化过程中随时间改变, 但体

积始终不变，故而保守系统的运动总是周期或准周期的。虽然通常返回周期很长，以致没有实际意义。耗散系统则不然，其相体积在演化过程中不断收缩。即，

$$\operatorname{div} V < 0 \quad (1-79)$$

这里的 V 为相体积，例如，若耗散系统为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (1-80)$$

则，

$$\begin{aligned} \operatorname{div} V &= \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} < 0 \end{aligned} \quad (1-81)$$

所以，耗散系统的任何相轨道（线）最终将被吸引到一个维数比原始空间低的极限集合——吸引子。因而对于相空间中的大多数区域而言，系统根本不会返回。实质上，所谓的吸引子表征了动力系统当 $t \rightarrow \infty$ 时的渐近行为。由于动力系统总是对应着一个物理问题，因此我们可以通过对建立相空间，把一个物理问题转化为一个几何问题来处理。

由高维相空间收缩到低维吸引子的演化，实际上是一个归并自由度的过程。耗散消磨掉大量小尺度的较快的运动模式，使决定系统长时间行为的有效自由度数目减少。许多自由度在演化过程中成为“无关变量”，最终剩下支撑起吸引子的少数自由度。如果为描述非平衡定常状态所选取的宏观变量集合中，恰好包括了这些 $t \rightarrow \infty$ 时起作用的自由度，那就会有一个比较成功的宏观描述。

一般说来，对动力系统中出现的吸引子可分为两大类：平庸

吸引子和奇怪吸引子。而平庸吸引子又可分为定常吸引子、周期吸引子和拟周期吸引子。

1.5.1 定常吸引子

定常吸引子指的是当 $t \rightarrow \infty$ 时，系统所趋向一个与时间无关的定常态。这个定常态在相空间里表现为一个零维的不动点。如二维相空间中稳定的结点和焦点，它们分别表征了状态 $x(t)$ 随时间直接衰减或振荡衰减的阻尼运动。如图1.10所示。

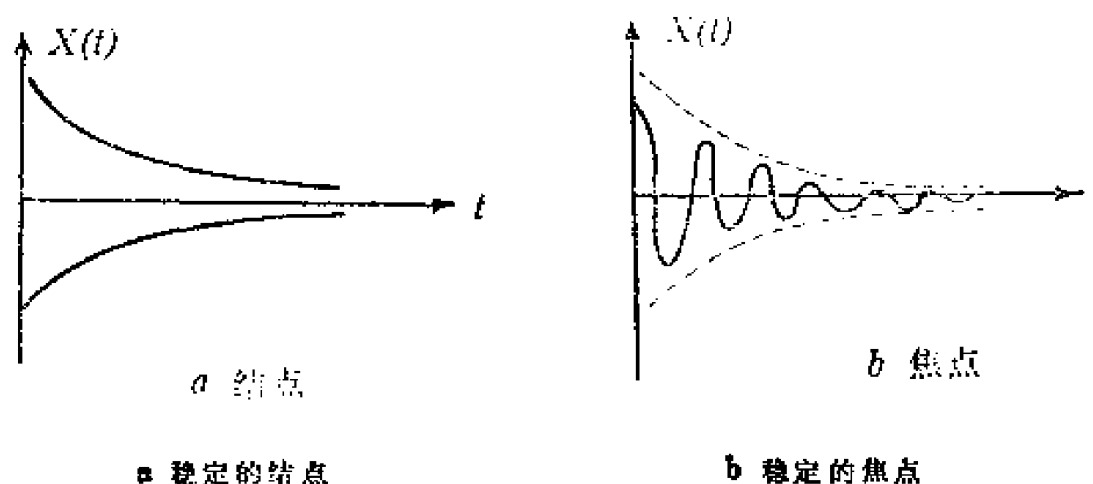


图 1.10 以稳定结点和稳定焦点作为定常吸引子的系统演化特性

原则上，一维以上的系统就有可能具有定常吸引子。

1.5.2 周期吸引子

(1) 一维周期吸引子——稳定的极限环，它表征了 $t \rightarrow \infty$ 时，系统中所剩下的唯一的有一个周期振动。显然，只有二维以上的相空间才有可能出现一维周期吸引子。

图1.11表示了一维周期吸引子。

(2) 多维周期吸引子，二维以上的周期吸引子表现为相空间中相应维数的环面。只有当二维环面上，两

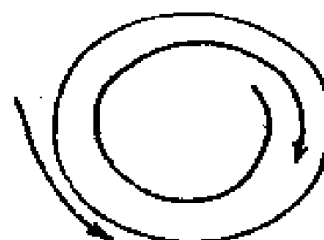


图 1.11 一维周期吸引子——稳定的极限环

个运动方向的频率呈有理比例关系时，才会有周期运动。图1.12表示了当二维环面上两个运动方向的频率比为： $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 5$ 时的一个二维周期吸引子。

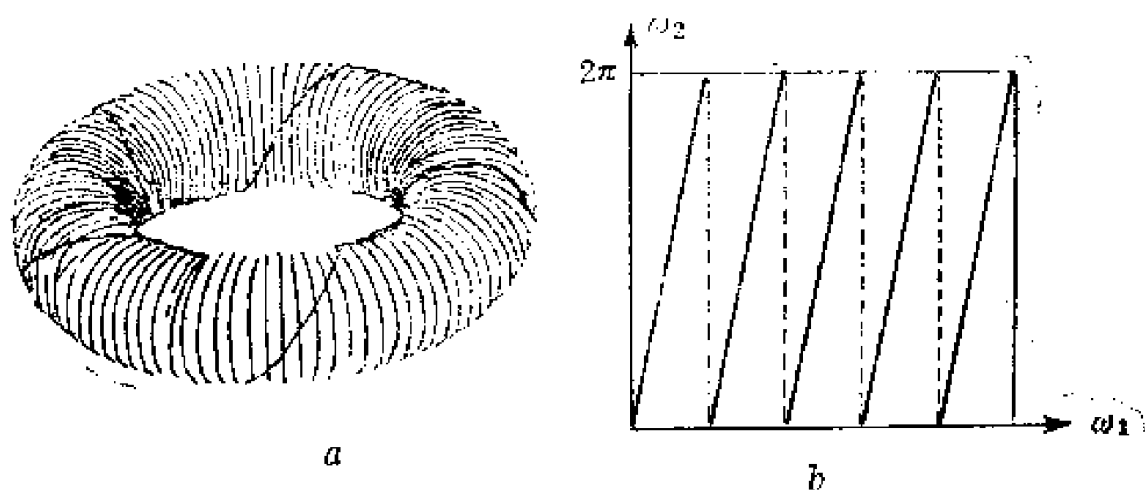


图 1.12 环面上的周期吸引子， $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 5$

1.5.3 准周期吸引子

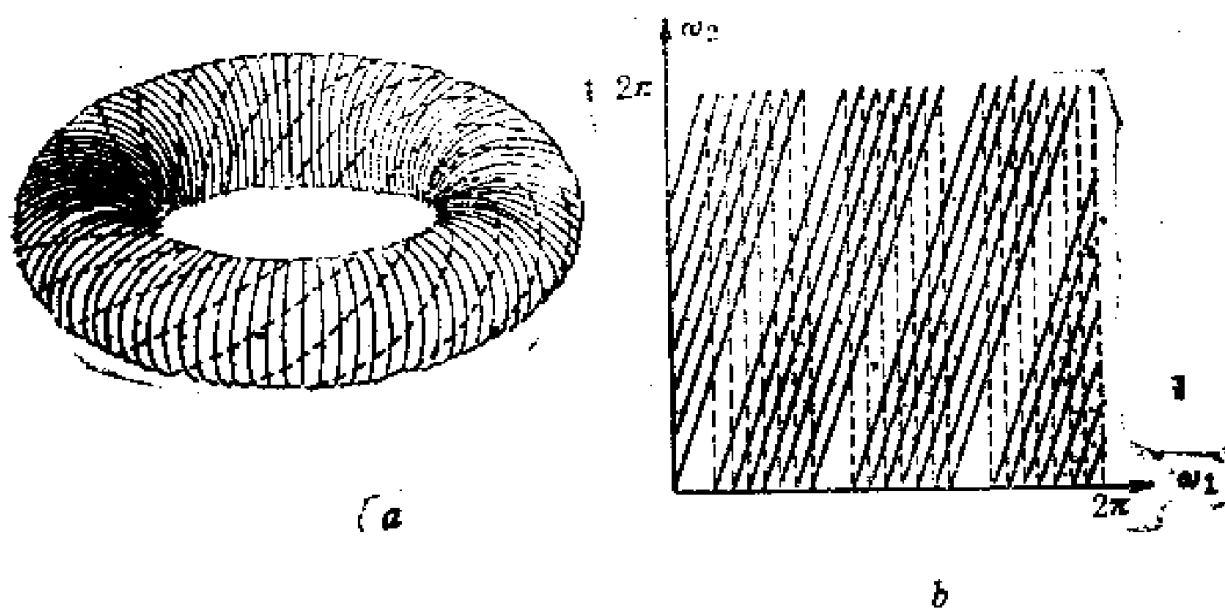


图 1.13 环面上拟周期吸引子， $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \pi$

准周期吸引子表示 $t \rightarrow \infty$ 时, 系统的状态依两个 (或三个) 不可约频率做准周期变化。它在相空间中表现为一个封闭的环面。这是因为当 $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ 为无理数时, 系统在环面上的轨迹将充满整个环面。如图1.13所示。

一般情形下, 高维环面上的运动总是准周期的。但自Ruelle-Takens的工作以来, 人们越来越清楚地认识到: 准周期轨道成为平庸吸引子的可能性不大, 更可能出现的是所谓的奇怪吸引子。

1.5.4 奇怪吸引子

我们知道, 耗散系统的耗散作用, 是使运动轨道稳定地收敛到吸引子上。而任一不稳定的运动轨道, 在局部看来总是指数分离的。现在让我们考察非线性耗散动力系统在某些不稳定的方向上的特征渐近行为。显然, 其特征渐近行为应该是以下两种运动的统一: 一是耗散运动最终要收缩到相空间的有限区域即吸引子; 二是局部不稳定的运动轨道要沿着某些方向指数分离。在有限的几何对象上实现指数分离的办法, 只有是: 无穷次地折迭起来, 制造出一种新的几何对象——奇怪吸引子。奇怪吸引子表示系统的状态随时间呈无规则的非周期变化, 它具有浑沌的一切特性 (有关浑沌的讨论, 将在下一章进行)。

理解耗散系统奇怪吸引子的关键在于理解状态空间中的伸长和折迭变换。系统内部的局部不稳定, 是系统发生分岔的必要条件, 这相当于指数型伸长。但由于系统的耗散性, 要使系统整体上保持稳定, 吸引子相空间的体积保持有限, 这就必把吸引子折迭到自身上。这样状态空间中奇怪吸引子的轨道就被搅乱了, 这也是浑沌的一层含义。

奇怪吸引子有内外两种方向: 一切在吸引子之外的运动都要向它靠拢, 这是“稳定”方向; 而一切到达吸引子内的轨道都相互排斥, 对应不稳定的方向。所以, 奇怪吸引子表现为一种整体

稳定而局部不稳定的运动状态。即作为一个整体，又是运动不变量，它对小扰动是稳定的。显然，奇怪吸引子的维数必须大于零，才有“排斥”的功能。零维之下，只有不稳定的不动点，没有奇怪吸引子。

奇怪吸引子的主要物理特性表现为：

(1) 奇怪吸引子上的运动，对于初始条件十分敏感。进入奇怪吸引子的部位稍有差异，运动轨道就截然不同。

(2) 奇怪吸引子作为相空间的子集合，往往具有非整数的维数。

(3) 即使原来的微分方程连续地依赖于参数，奇怪吸引子的结构也完全不是连续地随参数变化。而往往是在参数连续变化过程中，其整体结构会突然发生转变。

(4) 奇怪吸引子具有无穷嵌套的自相似结构。

例1. Lorenz吸引子如图1.14所示

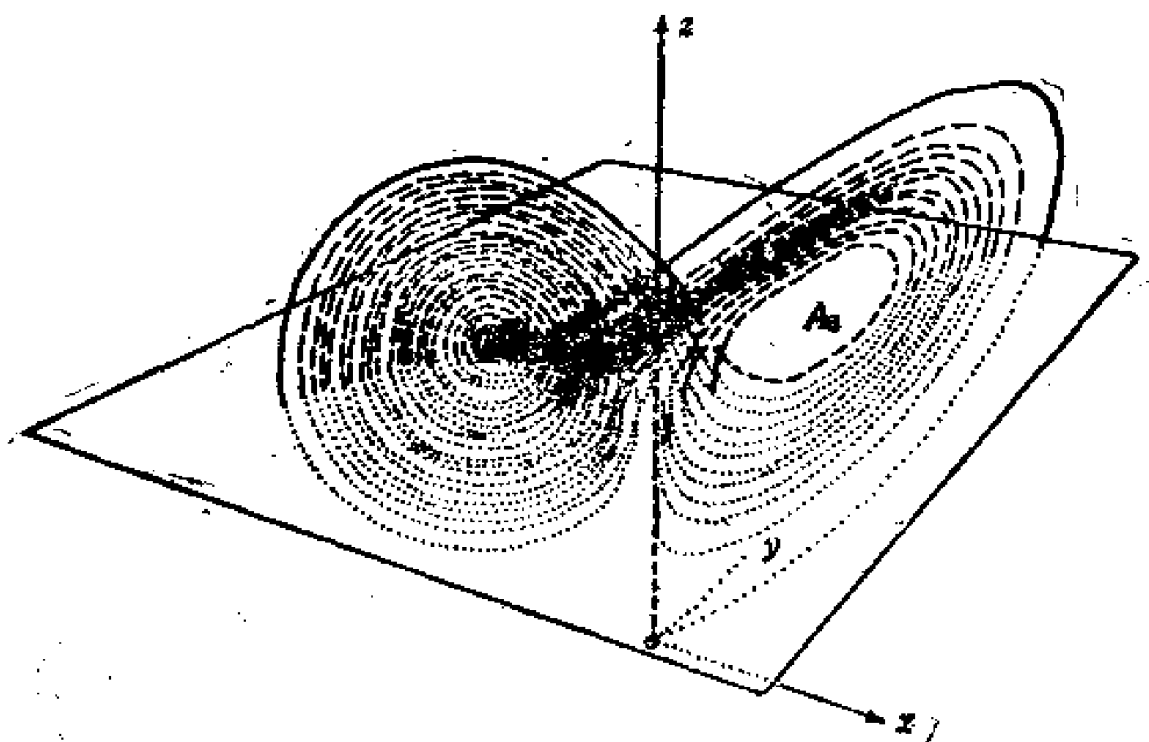


图 1.14 Lorenz吸引子
 $A_1, A_2: (\pm 6\sqrt{2}, \pm \sqrt{2}, 27)$

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda(x-y) \\ \dot{y} = \gamma x - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (1-82)$$

$$\lambda = 10, \quad b = \frac{8}{3}$$

例 2. Rössler 吸引子如图 1.15 至图 1.17 所示。

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b - cz + xz \end{cases} \quad (1-83)$$

$$a = b = 0.2,$$

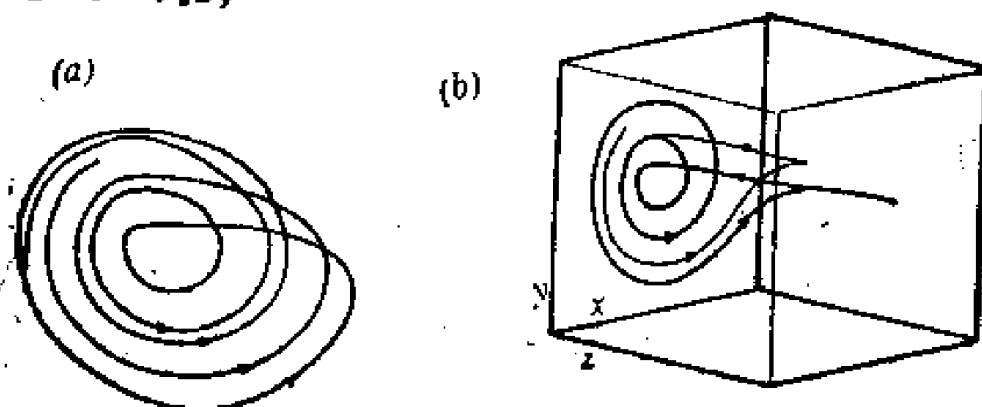


图 1.15 Rössler 吸引子

(a) 在 xy 平面投影；

(b) 在三维空间中的吸引子 (x 和 y 轴从 -14 到 14 , z 轴从 0 到 28)





图 1.16 通过周期倍分岔产生Rössler吸引子，均是在xy平面上投影
(a) $c=2.4$, (b) $c=3.5$, (c) $c=4.0$, (d) $c=4.23$, (e) $c=4.3$, (f) $c=5.0$

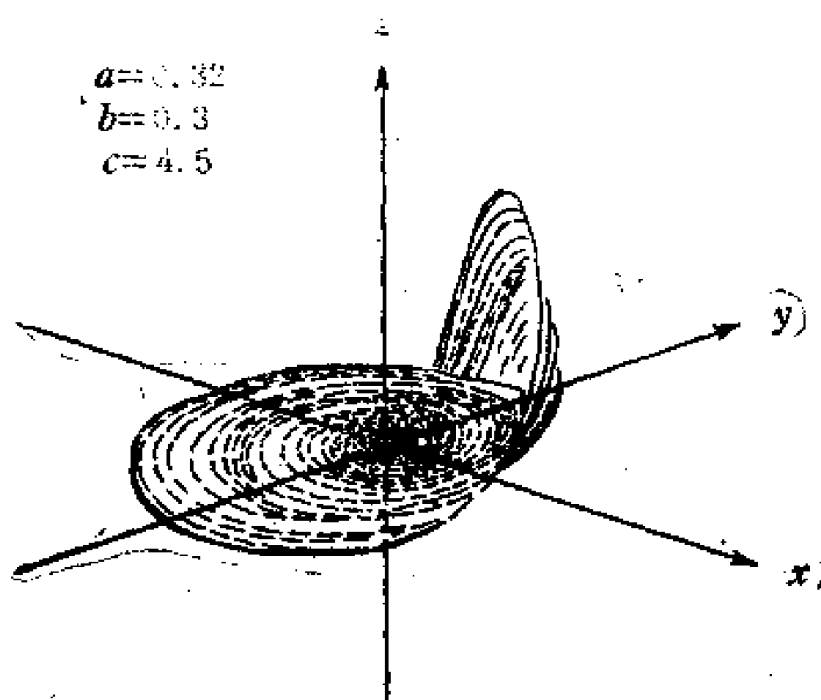


图 1.17 Rössler模型, (涡旋状混沌)
 $a=0.32$, $b=0.3$, $c=4.5$ 轨道从不稳定定点的同侧射入

§ 1.6 吸引子的功率谱

对于连续动力系统，要区分四种吸引子不是一件很难的事。但在解决许多问题时，我们常常面对的只是观测到的离散的时间序列 $\{x_i\} (i=1, 2, \dots, n)$ 。要从时间序列提取有关的系统的信息，最常用的方法就是功率谱分析。因为，我们可以对时间序列 $\{x_i\}$ 作付里叶变换：

$$A_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j e^{-i 2 \pi \frac{j k}{n}}, k = 1, 2, \dots, n \quad (1-84)$$

其频率间隔: $\Delta f = \frac{1}{n \Delta t}$

而(1-84)的付里叶变换为:

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n A_k e^{i 2 \pi \frac{j k}{n}} \quad (1-85)$$

上述的变换具有哈密顿长度的守恒性, 即:

$$\sum_{j=1}^n |x_j|^2 = \sum_{k=1}^n |A_k|^2$$

而时间序列 $\{x_j\}$ 的自相关函数为:

$$\phi_m = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n x_j x_{m+j} \quad (1-86)$$

对自相关函数 ϕ_m 作付氏变换, 则得到所谓的功率谱:

$$E_k = |A_k|^2 = \sum_{m=1}^n \phi_m \cos\left(\frac{2 \pi m k}{n}\right) \quad (1-87)$$

对于周期吸引子(包括定常吸引子), 其功率谱是离散、分立的。如果时间序列的周期是 T , 则周期吸引子的功率谱包括了基频 $f_0 = (T)^{-1}$ 及其谐波 $\frac{2}{T}, \frac{3}{T}, \dots$ 和它的分频 $\frac{f_0}{2}, \frac{f_0}{3}, \dots$ 。

如图1.18所示。

对于拟周期吸引子, 由于它包含了各式各样的周期或频率, 而且这些周期或频率之间的比例是无理数。所以, 拟周期吸引子的功率谱也是分立、离散的。除了包含基频 f_0, f_1, \dots, f_i 之外, 还包含了由于非线性作用而产生的频率 $a_i f_i + b_j f_j$ (a_i, b_j 为任意整数)。故而, 拟周期吸引子的谱线不象周期吸引子的那样以等间隔的频率分立。如图1.19所示。

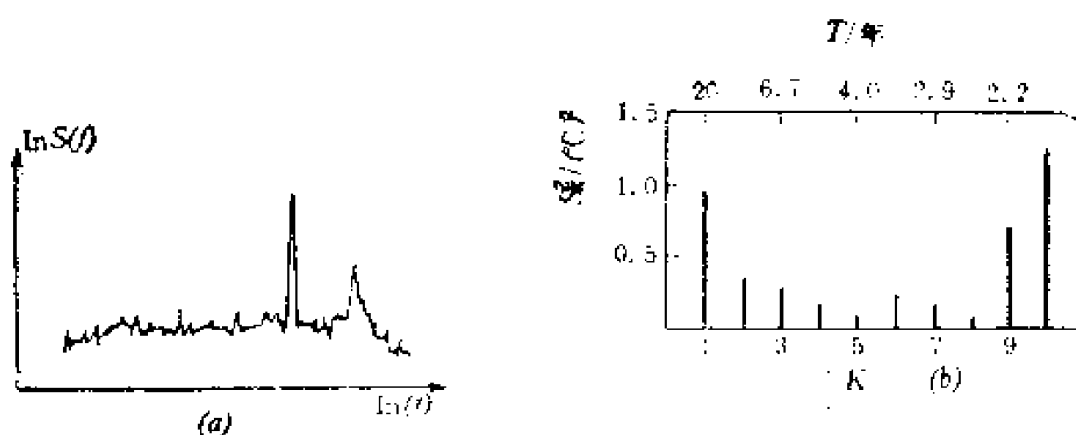
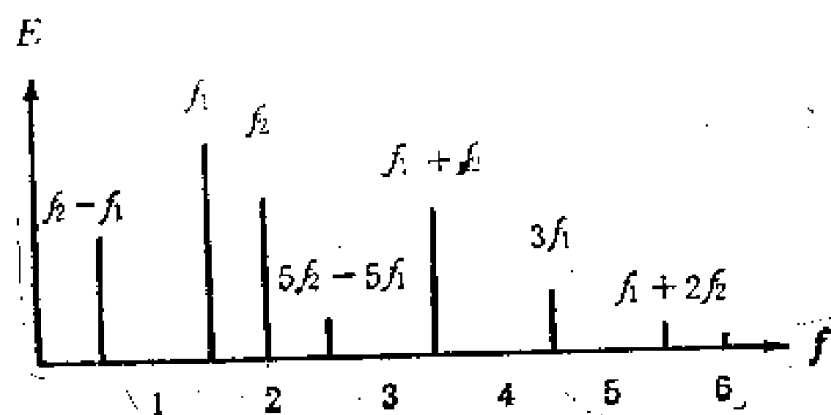


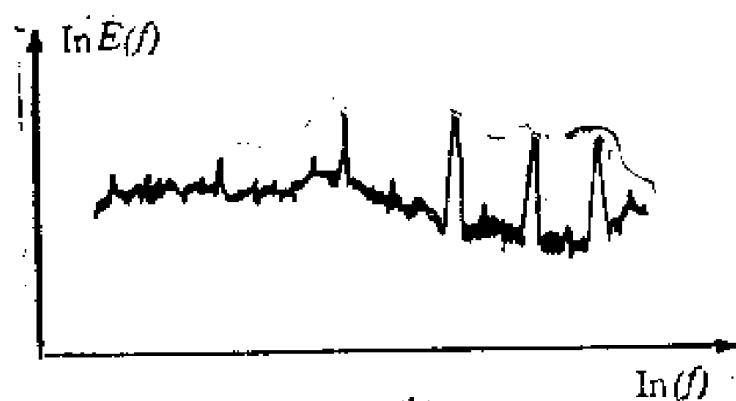
图 1.18 周期吸引子功率谱

(a) Burger's-s-巢纪平大气湍流模式的功率谱

(b) 北京1961—1970, 1月上旬最低温度资料的功率谱



(a)



(b)

图 1.19 拟周期吸引子功率谱

(a) 离散系统的拟周期吸引子的功率谱

(b) Burger's-s-巢纪平大气湍流模式的拟周期吸引子的功率谱

奇怪吸引子由于其内部非线性相互作用，而使得系统的演化行为具有随机性——内随机性。所以其功率谱与白噪声的一样也是连续的。但与白噪声的功率谱所不同的是前者是平谱，而后者不是平谱，且多为“红噪声”谱。这是由于奇怪吸引子的功率谱的振幅与频率有关的缘故。如图1.20为一实测的奇怪吸引子的功率谱。

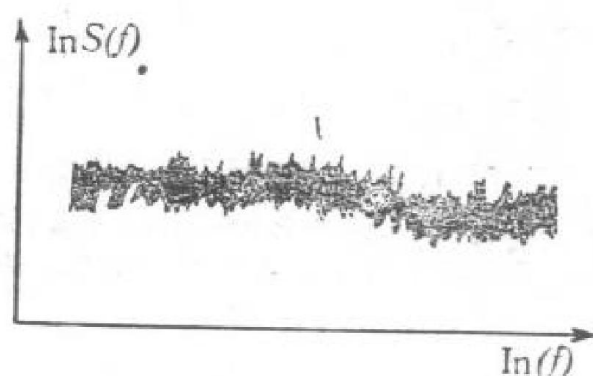


图 1.20 Burger's-巢纪平大气湍流模式的奇怪吸引子的功率谱

第二章 分 岔

§ 2.1 多个吸引子、同宿轨道和异宿轨道

2.1.1 多个吸引子

在第一章里，我们系统地研究了动力系统的形态，对于非线性系统而言，系统总有可能出现多个奇点。从而就有可能出现多个吸引子并存的情况。

考查一维系统： $\dot{x} = -x^3 + px, \quad p > 0$ (2-1)

显然系统有三个奇点： $A_1: x_{01} = 0$
 $A_2: x_{02} = \sqrt{p}$
 $A_3: x_{03} = -\sqrt{p}$ (2-2)

对 (2-1) 进行扰动，可得以下的线性扰动方程：

$$\dot{x}' = -3x_{0i}^2 x' + px', i = 1, 2, 3 \quad (2-3)$$

(2-3) 的 Jacobi 矩阵的特征根方程为：

$$\omega = \frac{\partial F}{\partial x'} = -3x_{0i}^2 + p \quad (2-4)$$

对 A_1 而言， $\omega > 0$ 。所以 A_1 是不稳定结点，即是一个定常排斥子。对 A_2 和 A_3 而言，当 $0 < p$ 时， $\omega < 0$ 。故 A_2 和 A_3 都是定常吸引子，这就出现二个吸引子并存的情况。如图 2.1 所示：

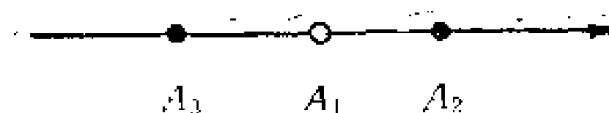


图 2.1 两个定常吸引子被一个排斥子隔开
(•表示吸引子, ○表示排斥)

这时, 当点稍微偏到排斥子 A_1 的右边, 系统的最终状态就将趋向于吸引子 A_2 。而当点稍微偏到排斥子 A_1 的左边, 系统的最终状态就将趋向于吸引子 A_3 。

二维的非线性系统所出现的情况要比一维的丰富的多。因为这时的吸引子可以是定常吸引子 (稳定的结点、稳定的中心和稳定的焦点)、周期吸引子 (稳定的极限环) 等, 而排斥子可以是定常排斥子 (不稳定的结点、不稳定的焦点和鞍点)、周期排斥子 (不稳定的极限环) 等。如图2.2—图2.4所示。

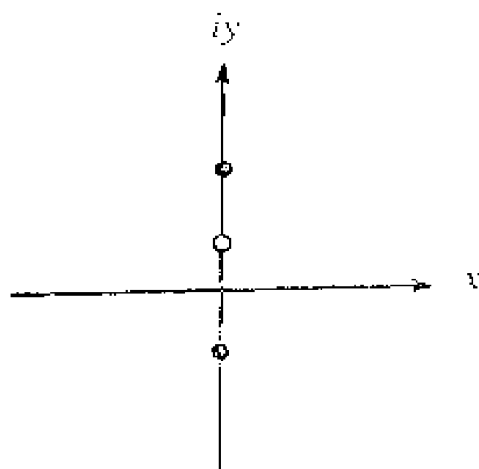


图 2.2 两个稳定的中心和一个排斥子

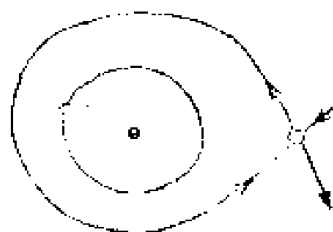


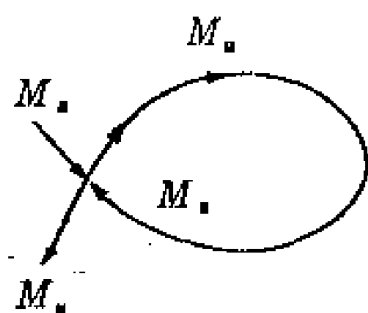
图 2.3 一个稳定的中心和一个不稳定的鞍点



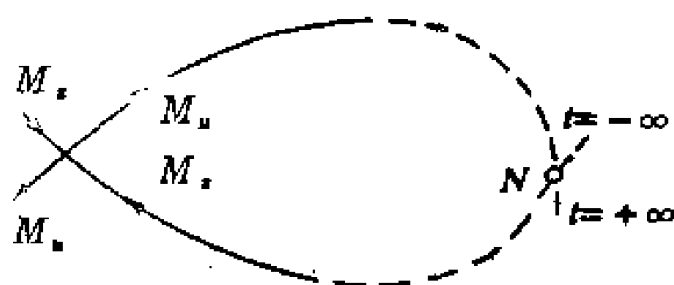
图 2.4 一个吸引点和一个吸引环并存

2.1.2 同宿轨道和异宿轨道

对鞍点附近的轨线而言，运动方向可分为流进鞍点和流出鞍点两种情况。我们把流出鞍点的轨线称为不稳定流形 M_u ，而把流进鞍点的轨线称为稳定流形 M_s 。所谓的同宿轨道是指鞍点的稳定流形 M_s 和本身的不稳定流形相交而成的轨道。如图 2.5 所示。其交点称为同宿点。对鞍点来说，系统至少有一个同宿点，那就是不稳定流形在 $t \rightarrow +\infty$ 时，和来自同一鞍点的稳定流形在 $t \rightarrow -\infty$ 的交点。



(a) 同宿轨道



(b) 一个特殊的同宿点 N —— $t = +\infty$ 的 M_u 和 $t = -\infty$ 的 M_s 的交点

图 2.5 同宿轨道和同宿点

所谓的异宿轨道指的是某一鞍点的不稳定（稳定）流形与另一轨道的稳定（不稳定）流形相交而成的轨道。而其交点叫做异宿点。如图 2.6 所示。

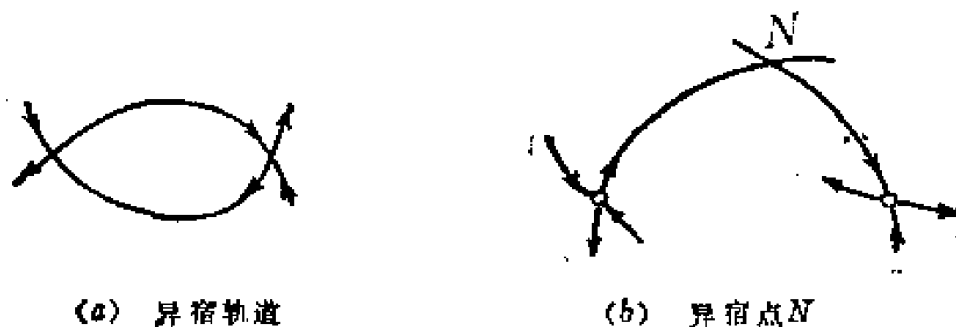


图 2.6 异宿轨道和异宿点

§ 2.2 分岔及其举例

我们在 §1.3 里初步地研究了 Lorenz 系统，得知：当系统的参数 $\gamma < 1$ 时，系统只有一个平衡态 $A_1(0, 0, 0)$ ，而且是稳定的结点。而当参数 $\gamma \rightarrow 1^+$ 时，系统有三个平衡态 $A_1(0, 0, 0)$ ， $A_2(\sqrt{b(\gamma-1)}, \sqrt{b(\gamma-1)}, \gamma-1)$ 和 $A_3(-\sqrt{b(\gamma-1)}, -\sqrt{b(\gamma-1)}, \gamma-1)$ 。此时 A_1 是不稳定的鞍点，而 A_2 和 A_3 均是稳定的结点。这表明：当参数 γ 从小于 1 向大于 1 变化时，在 $\gamma=1$ 这一点上，原来的定态解的稳定性发生了变化，产生了分岔。从一个定态解分为三个定态解。所以在参数坐标里 $\gamma=1$ 是个临界点。而该临界参数所对应的状态叫分岔点。

对于一维非线性动力系统：

$$\dot{x} = f(x, \gamma), \quad (\gamma \text{ 为参数})$$

平衡点的稳定性由于 Jacobi 矩阵的特征值 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 所决定：

$$\frac{\partial f}{\partial x} < 0, \quad \text{平衡点是稳定的}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} > 0, \quad \text{平衡点是不稳定的。}$$

而在 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ 时, 平衡点可能将由稳定变成不稳定。所以

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2-5)$$

是分岔点的必要条件。

此外, 分岔点在参数空间里对应着一个参数临界点。所以分岔点的充分必要条件是:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0 \end{cases} \quad (2-6)$$

参数变化引起平衡态稳定性的变化还可从Jacobi矩阵的特征值的实部变化来研究:

(1) 有一个实的, 单重本征值 $\omega(\gamma)$ 。当它在参数值 $\gamma = \gamma_c$ 的一侧为负, 在另一侧为正, 而在中间恰好为 $\omega_c(\lambda_c) = 0$, 则在 $\lambda = \lambda_c$ 处有分岔(支)存在, 而且新分岔解是定态分岔(支)解。

(2) 有一对共轭的本征值 $\omega_{\pm}(\gamma)$ 。这两个根的实部在 $\gamma = \gamma_c$ 的一侧为负, 在另一侧为正, 中间恰好是 $Re \omega_{\pm}(\lambda_c) = 0$ 则在 $\lambda = \lambda_c$ 处有分支存在, 而且新分支解是一时间周期解——极限环。

一般说来, 分岔可分为叉型(Pitchfork)分岔、Hopf分岔和鞍——结点分岔三种。但无论那一种, 在分岔点都有:

$$\frac{d[Re \omega(\gamma)]}{d\gamma} \neq 0 \quad (2-7)$$

(2-7)式是显然的。因为若 $Re \omega$ 不是 γ 的函数, 则不存在原奇点稳定性的变化, 从而更谈不上分岔了。

设有两个分岔(支): (x_c, γ) 和 (x'_c, γ) , 前者是参考态分岔; 后者是分叉分支, 它是从参考态分岔出来的。如果参考态分支 (x_c, γ) 上的各点对应的解 x , 在 $\gamma < \gamma_c$ 时是渐近稳定的, 则:

对于 $\gamma < \gamma_c$, 解 $x(\gamma)$ 是亚临界的。

对于 $\gamma > \gamma_c$, 解 $x(\gamma)$ 是超临界的。

而如果分叉分支 (x_c', γ) 上的各点是亚临界的, 则称分叉分支是亚临界的; 如果分叉分支上的各点是超临界的, 则分叉分支是超临界的。

2.2.2 叉型分岔

所谓的叉型分岔是指 Jacobi 矩阵的特征值沿复平面 ($Re\omega$, $Im\omega$) 的实轴穿过虚轴。

例 1. $\dot{x} = -x^3 - \gamma x$ (2-8)

当 $\gamma > 0$ 时, 系统只有一个定态解:

$$A_1: x_0 = 0$$

$$\text{而 } \omega = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} = -\gamma < 0$$

故而 A_1 是稳定的。

当 $\gamma < 0$ 时, 系统有三个定态解:

$$A_1: x_{01} = 0$$

$$A_2: x_{02} = \sqrt{-\gamma}$$

$$A_3: x_0 = -\sqrt{-\gamma}$$

$$\text{此时对 } A_1 \text{ 而言, } \omega = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{01}} = -\gamma > 0$$

所以 A_1 是不稳定的

对于 A_2 和 A_3 均有:

$$\omega = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{02} \text{ 或 } x_{03}} = 3\gamma - \gamma = 2\gamma < 0$$

所以, A_2 和 A_3 都是稳定的。

由于参数从正数变到负数时, 是沿实轴穿过虚轴的, 故 $\gamma = 0$ 为一临界点, 而 A_1 为一分岔点。这是一个典型的叉型分岔, 而

且是超临界的。如图2.7所示：

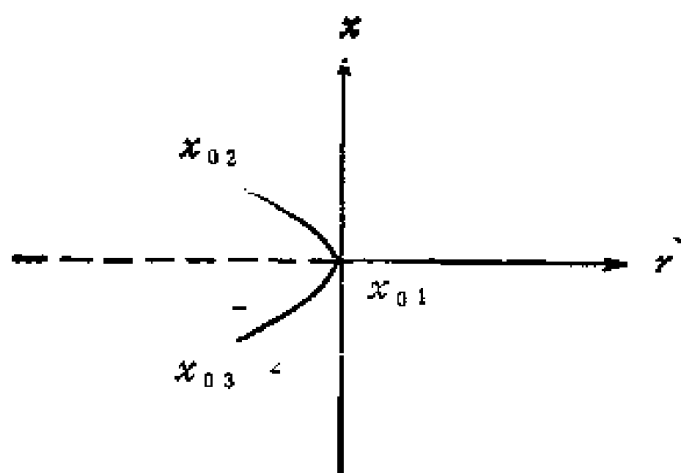


图 2.7 超临界叉型分岔，虚线代表不稳定

例 2. $\dot{x} = x^3 + \gamma x$ (2-9)

当 $\gamma > 0$ 时，系统只有一个定态解 $A_1(x_0 = 0)$ 而且是不稳定的 ($\omega = \gamma > 0$)。

当 $\gamma < 0$ 时，系统有三个定态解 $A_1(x_{01} = 0)$ 、 $A_2(x_{02} = \sqrt{-\gamma})$ 和 $A_3(x_{03} = -\sqrt{-\gamma})$ 。而且 A_1 是稳定的 ($\omega = \gamma < 0$)； A_2 和 A_3 都是不稳定的 ($\omega = -2\gamma > 0$)。这是一个典型的亚临界叉型分岔，如图 2.8 所示。

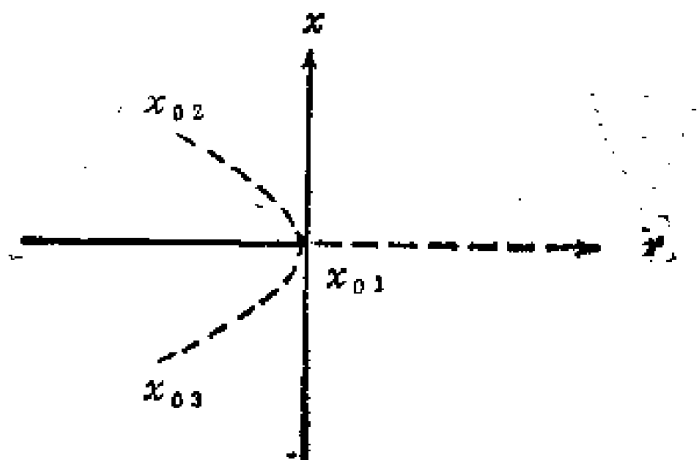


图 2.8 亚临界分岔

2.2.2 Hopf分岔

所谓的Hopf分岔指的是Jacobi矩阵的特征值沿复平面($Re\omega$, $Im\omega$)的上方或下方穿过虚轴。

例3. 仍以§1.4里的(1-44)式为例

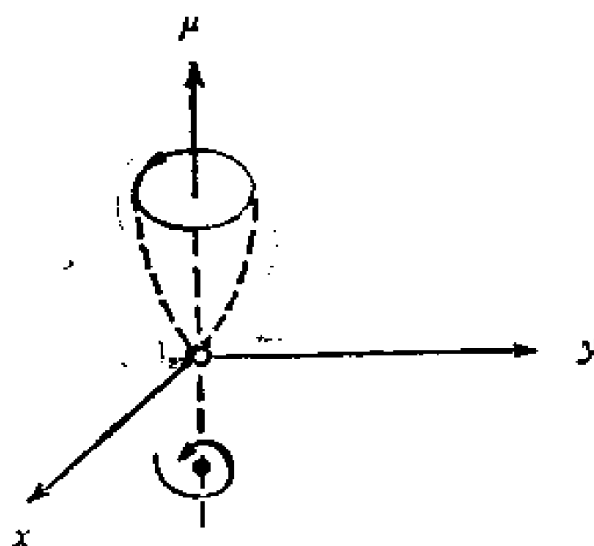
$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x[\mu - (x^2 + y^2)] \\ \dot{y} = x + y[\mu - (x^2 + y^2)] \end{cases} \quad (1-44)$$

当 $\mu < 0$ 时, 系统只有一个稳定的焦点 $A_1(0,0)$, 而当 $\mu > 0$ 时, 系统原来的稳定焦点 $A_1(0,0)$ 变成不稳定的焦点。且同时分岔出一个稳定的极限环 $A_2(r = \sqrt{\mu}, \dot{\theta} = 1)$ 。

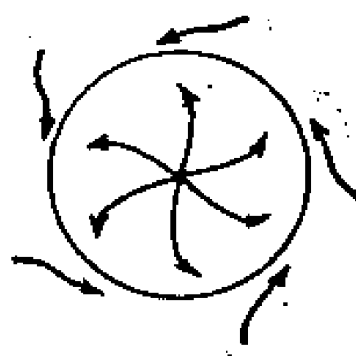
由于系统Jacobi矩阵的特征值为:

$$\omega_{1,2} = \mu \pm i \quad (1-47)$$

当 μ 从小于零变为大于零, 由于 $Im\omega \neq 0$, 故当 $Re\omega$ 以负值变为正值时, 是沿复平面($Re\omega, Im\omega$)的上方($Im = 1$)或下方($Im = -1$)穿过虚轴的。故 $(\mu = 0, x = 0, y = 0)$ 为一Hopf分岔点, 而且是超临界的。如图2.9所示。



(a) 超临界的Hopf分岔



(b) Hopf分岔结构示意图

图 2.9 Hopf分岔

例4. 若系统变为:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x[\mu + (x^2 + y^2)] \\ \dot{y} = x + y[\mu + (x^2 + y^2)] \end{cases} \quad (2-10)$$

(0,0)态的Jacobi矩阵为:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}_{(0,0)}$$

其特征值为: $\omega_{1,2} = \mu \pm i$

当 $\mu > 0$, 系统唯一的奇点(0, 0)是不稳定的焦点。

$$\text{令} \quad \begin{cases} x = \gamma \cos \theta \\ y = \gamma \sin \theta \end{cases} \quad (2-11)$$

将(2-11)代入(2-10)得:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\gamma} \\ \quad = \frac{-xy + x^2[\mu + (x^2 + y^2)] + yx + y^2[\mu + (x^2 + y^2)]}{\gamma} \\ \quad = \gamma(\mu + \gamma^2) \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{\gamma^2} = 1 \end{cases} \quad (2-12)$$

所以, 当 μ 从大于零变为 $\mu < 0$ 时, 原来的不稳定的焦点变为稳定的焦点。同时, 还分岔出一个极限环($\gamma = \sqrt{-\mu}, \dot{\theta} = 1$)

但当: $\gamma < \sqrt{-\mu}$ 时, $\dot{\gamma} < 0$

$\gamma > \sqrt{-\mu}$ 时, $\dot{\gamma} > 0$

故极限环($\gamma = \sqrt{-\mu}$, $\dot{\theta} = 1$)是不稳定的极限环。所以, $\mu = 0$ 是个亚临界Hopf分岔点, 如图2.10所示。

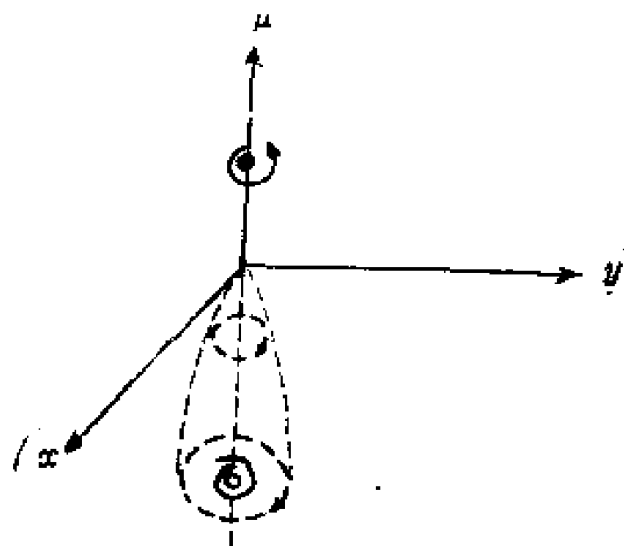


图 2.10 亚临界Hopf分岔

2.2.3 鞍—结分岔 (切分岔)

所谓的鞍—结分岔指的是 Jacobi 矩阵的特征值沿复平面 ($Re\omega$, $Im\omega$) 的实轴两边趋向虚轴。

例 5.

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu + x^2 \\ \dot{y} = y \end{cases} \quad (2-13)$$

当 $\mu > 0$ 时, 系统 (2-13) 式无平衡态。

当 $\mu = 0$ 时, 系统只有一个平衡态 $A_1(0, 0)$

且:

$$J = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(0,0)} \quad (2-14)$$

其特征根为 $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, 故 A_1 为不稳定的鞍点。

当 μ 从零变为小于零时,系统有两个平衡态: $B_1(+\sqrt{-\mu}, 0)$ 和 $B_2(-\sqrt{-\mu}, 0)$ 。

对于 $B_1 = (\sqrt{-\mu}, 0)$, 其Jacobi矩阵特征方程为:

$$\omega^2 - (2\sqrt{-\mu} + 1)\omega + 2\sqrt{-\mu} = 0$$

其中: $\Delta = 2\sqrt{-\mu} > 0$, $T^2 - 4\Delta > 0$, $T = 2\sqrt{-\mu} + 1 > 0$ 故 B_1 是不稳定的结点。

而对于 $B_2(-\sqrt{-\mu}, 0)$, 其Jacobi矩阵特征方程为:

$$\omega^2 - (1 - 2\sqrt{-\mu})\omega - 2\sqrt{-\mu} = 0$$

因为: $\Delta = -2\sqrt{-\mu} < 0$, 故 $B_2(-\sqrt{-\mu}, 0)$ 为不稳定的鞍点。

综上所述, 当参数从 $\mu = 0$ 变到 μ 小于零时, 系统定态由一个不稳定的鞍点分岔为一个鞍点和结点, 这就是鞍—结分岔。如图 2.11 所示。

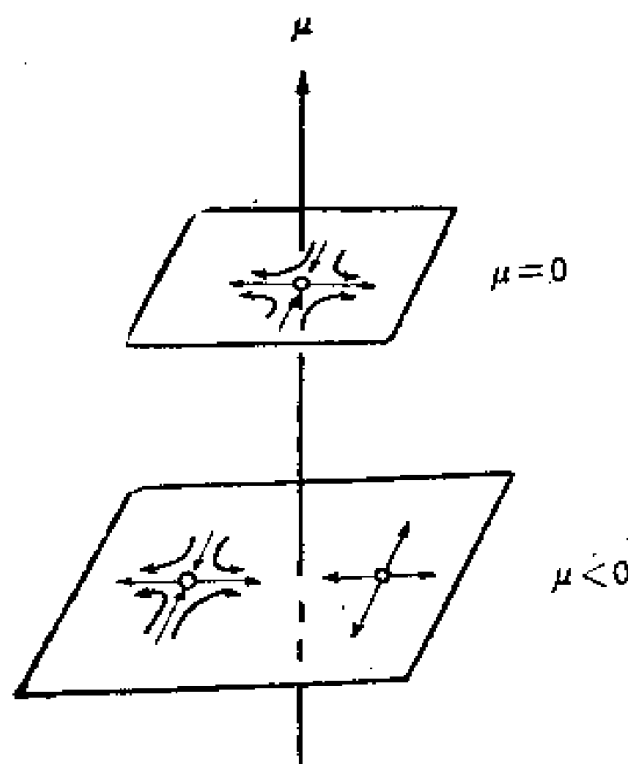


图 2.11 鞍—结分岔

§ 2.3 一维离散动力系统的分岔

我们在上一节里已系统地讨论了连续动力系统的分岔情况。现在，我们要研究离散动力系统——映射的分岔情况。

对于一维映射系统，其数学表示为：

$$x_{n+1} = \Gamma(x_n) \quad (2-14)$$

这里的 Γ 表示映射，类似于连续动力系统 $\dot{x} = f(x)$ 里的函数 f 。 Γ 的另一含义是“操作”，一种叠代操作。

与连续系统平衡态（定态）所对应的概念是映射系统的不动点。映射（2-14）式的不动点是：

$$x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \dots$$

$$\text{即} \quad x_n = \Gamma(x_n) \quad (2-15)$$

$$\text{例如：} \quad x_{n+1} = \mu - x_n^2 \quad (2-16)$$

则系统（2-16）式所具有的不动点由以下方程决定：

$$x_n = \mu - x_n^2$$

$$\text{即：} \quad x^2 + x - \mu = 0$$

与连续动力系统的奇点（平衡态）稳定性判据类似，一维离散动力系统的不动点的稳定性由矩阵 $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}$ 的特征值 λ 决定。这里的 λ 叫做 Floquet 乘子。它的形式类似于连续动力系统里的 Jacobi 矩阵的特征值 ω 。但作为判据，其性质类似 $\text{Re} \omega$ 。即：

$$\begin{cases} |\lambda| < 1 & \text{不动点稳定} \\ |\lambda| > 1 & \text{不动点不稳定} \\ |\lambda| = 1 & \text{不动点为分岔点} \end{cases} \quad (2-17)$$

而：

$$\lambda = \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right|_{x_0}$$

与连续动力系统类似。一维映射系统也有可能存在周期轨

道，如果系统满足：

$$x_{n+k} = x_n = \Gamma^k(x_n) \quad (2-18)$$

则我们说系统具有周期 k 轨道。这里的 Γ^k 表示进行 k 次映射操作。
例如，若：

$$x_{n+2} = \Gamma(x_{n+1}) = \Gamma(\Gamma(x_n)) = x_n$$

则系统具有周期 2 轨道（解）。

周期 k 的稳定性也满足（2-17）式，但此时：

$$\lambda = \frac{\partial \Gamma(x_{k-1})}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Gamma(x_{k-2})}{\partial x} \cdots \frac{\partial \Gamma(x_0)}{\partial x} \quad (2-19)$$

这里的 $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$ 分别为第一次、第二次， \cdots 第 $(k-1)$ 次迭代的输出

$$\text{例 1. } x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n); \mu > 0; x > 0 \quad (2-20)$$

不动点所满足的方程为：

$$x = \mu x(1 - x) \quad (2-21)$$

$$\text{不动点 } A: x = 1 - \frac{1}{\mu} \quad (2-22)$$

不动点 A 与参数 μ 的函数关系如图 2.12 所示

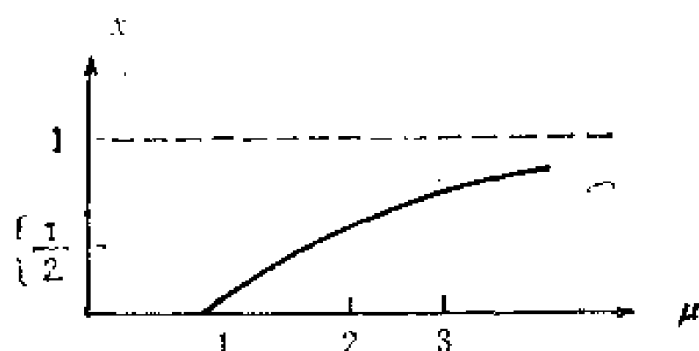


图 2.12 虫口模式不动点 A 与参数 μ 的关系

不动点 O 由（2-21）式可得：

$$O: x = 0 \quad (2-23)$$

显然，不动点 A 与 O 满足下列方程：

$$\begin{cases} y = x \\ y = \mu x(1-x) \end{cases} \quad (2-24)$$

由于 $[\mu x(1-x)]$ 是一抛物线，其高度是 $\frac{\mu}{4}$ 。故我们可作出(2-24)式的图解，如图2.13所示：

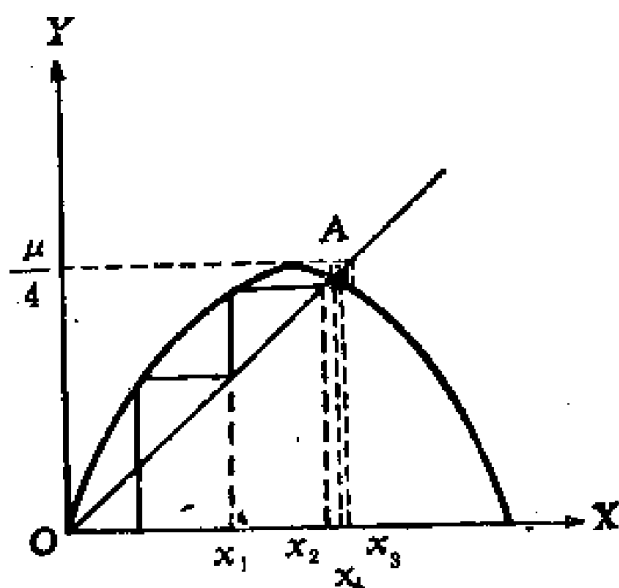


图 2.13 虫口模式(Logistic)的映射图

对不动点 O ，由于：

$$|\lambda| = \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0} = |(\mu - 2\mu x)_{x=0}| = \mu \quad (2-25)$$

而对不动点 A 有：

$$|\lambda| = \left| \left(-\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x_0} \right|$$

$$|\lambda| = |2 - \mu| \quad (2-26)$$

由于(2-20)式是虫口模式， x_n 表示第 n 代小虫的出生数，故而 $x_n > 0$ 。根据 $x > 0$ 条件和(2-22)式可知：

当 $0 < \mu < 1$ 时，(2-20)式只有一个不动点 O ，由(2-25)式

可知 $|\lambda| < 1$ ，故不动点 O 是稳定的。

当 $1 < \mu \leq 3$ 时，(2-20) 式有两个不动点： O 和 A 而且 $|F'(x=0)| > 1$ ， $|F'(x=1-\frac{1}{\mu})| < 1$ 。所以，不动点 O 是不稳定的，而不动点 A 是稳定的。

由于 $\mu=1$ 时， $|F'(x=0)|=1$ ，所以 $\mu=1$ 是一临界分岔点。当参数 μ 从小于 1 变到 $1 < \mu \leq 3$ 时，系统发生了分岔。这种分岔仍是叉型分岔。

不动点 A 的稳定性质，可以从图 2.13 中看出：图中箭头所指示的迭代过程都将收敛到 A 点。

上面只研究了周期 1 的情况，即 $x_{n+1} = x_n = F(x_n)$ 。是否系统还存在周期 2 的分岔？为此令：

$$x_{n+2} = x_n \quad (2-27)$$

$$\text{即：} \quad x_n = x_{n+2} = F(x_{n+1}) = F(F(x_n)) = F^2(x_n) \quad (2-28)$$

若系统存在周期 2 分岔，则此时的不动点方程由 (2-28) 可得：

$$x = \mu[\mu x(1-x)][1-\mu x(1-x)] \quad (2-29)$$

此方程可化为：

$$x \left[x - \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \right] [\mu^2 x^2 - \mu(\mu+1)x + (\mu+1)] = 0 \quad (2-30)$$

即这时系统有四个不动点：

$$\begin{cases} O: x_{01} = 0 \\ A: x_{02} = 1 - \frac{1}{\mu} \\ C: x_{03} = \frac{1 + \mu + \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu} \\ B: x_{04} = \frac{1 + \mu - \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu} \end{cases} \quad (2-31)$$

其中 O 、 A 为原来的两个不动点，而 C 、 B 才是符合周期 2 的新解，令 $x_1^* = x_{03}$ ， $x_2^* = x_{04}$ ，由 (2-28) 式得：

$$\begin{cases} x_1^* = \mu x_2^* (1 - x_2^*) = \Gamma(x_2^*) \\ x_2^* = \mu x_1^* (1 - x_1^*) = \Gamma(x_1^*) \end{cases} \quad (2-32)$$

用虫口语言说就是：如果今春虫口数目是 x_1^* ，明春就是 x_2^* ，则后年的春天又是 x_1^* ，如此重复下去。

周期 1 的临界参数值 $\mu = \mu_1$ 由 A 的稳定边界条件 $|\Gamma'(x_{02})| = 1$ 而求得 $\mu_1 = 3$ 。当 $\mu_1 < \mu < \mu_2$ 时，不动点 A 失稳后而分岔出两个新的不动点 x_1^* 和 x_2^* 。当 $3 < \mu < \mu_2$ 时，对不动点 x_1^* 和 x_2^* 均有：

$$|\Gamma'(\mu, x_2^*) \Gamma'(\mu, x_1^*)| = |\Gamma'(\mu, x_1^*) \Gamma'(\mu, x_2^*)| < 1 \quad (2-33)$$

所以，不动点 B 和不动点 C 是稳定的。这时系统 (2-20) 式取值将上两个值 x_1^* 和 x_2^* 上往返跳动。如当 $\mu = 3.2$ 时 x_2 趋向在 0.513 和 0.799 两个值上跳动，这就是叫周期 2 的缘故。

由

$$\begin{cases} y = x \\ y = \mu[\mu x(1-x)][1-\mu x(1-x)] \end{cases} \quad (2-34)$$

可作出以下关于 4 个不动点的图解。

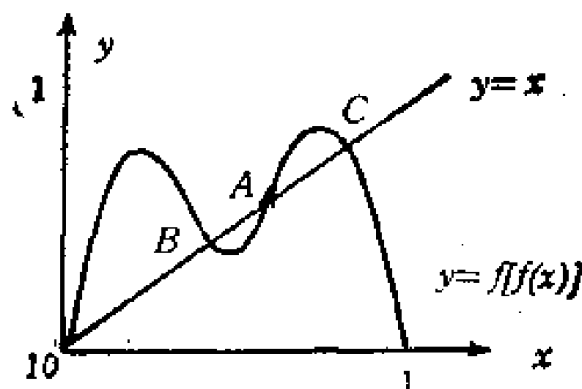


图 2.14 虫口模式 ($3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$) 的周期 2 的 4 个不动点图示

当 $\mu = 1 + \sqrt{6}$ 时，

$$|\Gamma'(\mu, x_1^*) \Gamma'(\mu, x_2^*)| = 1 \quad (2-35)$$

故此时不动点 B 和不动点 C 又都成了临界分岔点。进一步的研

究表明, 当 $1 + \sqrt{6} < \mu < 3.545$ 时, 系统 (2-20) 式的取值将在 4 个值上跳动, 即 B 、 C 各自又“分出二个叉”来。如当 $\mu = 3.5$ 时, x_n 趋向于 $0.152 \rightarrow 0.879 \rightarrow 0.373 \rightarrow 0.823 \rightarrow 0.152 \cdots$ 。

上述的分岔过程将随 μ 值的增大而不断继续下去, 这是一个不断一分为二的过程, 周期 1 不稳定分岔出周期 2, 周期 2 不稳定分岔出周期 4, 周期 4 不稳定分岔出周期 8 ……。可以想象 (在浑沌一章里, 还要继续研究虫口模式), 不断分岔的最终结果, 模式 (2-20) 式所给出的值就象分布在区间 $[0, 1]$ 上的随机数, 但这是由确定系统 ((2-20) 式是一确定系统) 所产生的“随机”性。一般称之为类随机性, 或浑沌。

例 2.
$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2 \quad (2-36)$$

(2-36) 也是一个简单的虫口模式, x_n 表示第 n 代虫的虫口数。所以有以下条件:

$$x_n > 0, \quad \mu > 0 \quad (2-37)$$

系统 (2-36) 式的不动点方程为: $x_n = x_{n+1} = \Gamma(x_n)$,
即:
$$x = 1 - \mu x^2 \quad (2-38)$$

(2-38) 式有两个解, 即系统 (2-36) 式有两个不动点:

$$\begin{aligned} A_1: \quad x_1 &= \frac{\sqrt{1+4\mu}-1}{2\mu} \\ B_1: \quad x_2 &= -\frac{\sqrt{1+4\mu}+1}{2\mu} \end{aligned} \quad (2-39)$$

对不动点 A_1 其乘子:

$$|\lambda| = |\Gamma'(x_1)| = |2\mu x_1| = |\sqrt{1+4\mu}-1| \quad (2-40)$$

$$\text{当 } 0 < \mu < 0.75 \text{ 时} \quad (2-41)$$

$$|\Gamma'(x_1)| < 1 \quad (2-42)$$

所以, 不动点 A 是稳定不动点。而对不动点 B 有:

$$|\Gamma'(x_2)| = |2\mu x_2| > 1 \quad (2-43)$$

所以, 不动点 B 是不稳定的。

由初值 x_0 经过叠代到达或离开不动点的过程可以作图表示。图2.15画出 $\Gamma(x_n)$ 的曲线，它在第一和第三项限分角线的交点就是不动点 A 和 B 。稳定条件 (2-17) 式要求不动点处的斜率在 (-1) 和 $(+1)$ 之间。

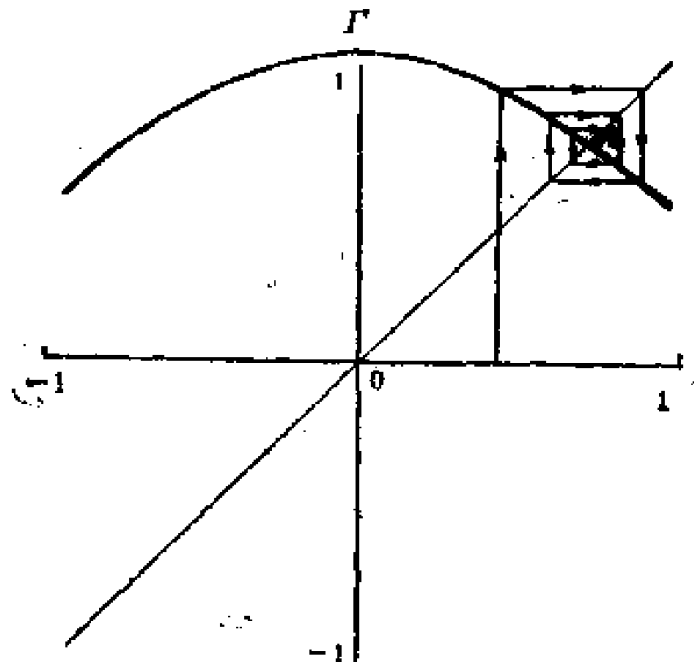


图 2.15 单峰映象 $\Gamma = 1 - 0.5x^2$

在图2.15所示的情形中， $\mu = 0.5$ ， A 处的斜率满足 $|\lambda| < 1$ 的条件，而 B (图中没标出来) 处的斜率显然不满足 $|\lambda| < 1$ 的条件。由任一初值 x_0 出发的叠代过程总是离开 B 而趋近 A 的。图 2.15 已用箭头标出了上述的叠代过程。

令 $|\Gamma'(x_1)| = 1$ 可得

$$\mu = 0.75 \quad (2-44)$$

且 $|\Gamma'(x_2)| > 1$

故而此时 A 为临界分岔点，而 B 仍为不稳定。可以推测当 $\mu > 0.75$ 时， A 将出现分岔，故设系统 (2-36) 式将有周期 2 解，即：

$$x_n = x_{n+2} = \Gamma(x_{n+1}) = \Gamma(\Gamma(x_n)) = \Gamma^2(x_n) \quad (2-45)$$

此时不动点所满足的方程是：

$$x = 1 - \mu[(1 - \mu x^2)]^2 \quad (2-46)$$

这是一个4次方程，共有4个解。即此时系统除了原有二个不动点A、B外，还有二个新的不动点C(x_1^*)和D(x_2^*)。这里的 x_1^* 和 x_2^* 是(2-46)式的两个解，且满足：

$$\begin{cases} x_2^* = 1 - \mu(x_1^*)^2 \\ x_1^* = 1 - \mu(x_2^*)^2 \end{cases} \quad (2-47)$$

(2-47)实际上是(2-45)式的另一写法。

可以证明，当 $0.75 < \mu < \mu_2 = 1.25$ 时。

$$|\Gamma'(x_1^*)\Gamma'(x_2^*)| = |\Gamma'(x_2^*)\Gamma'(x_1^*)| < 1 \quad (2-48)$$

所以不动点 x_1^* (或C)和 x_2^* (或D)是稳定的。而 $\mu = 1.25$ 是由不动点 x_1^* 和 x_2^* 的稳定边界条件：

$$|\Gamma'(x_1^*)\Gamma'(x_2^*)| = 1 \quad (2-49)$$

和方程(2-46)联合求解而得的。

图2.16给出了 $\mu = 1.0$ 时 $\Gamma(\mu, x)$ 和 $\Gamma^2 = F(2, \mu, x)$ (F 里的2表示周期2的曲线。 $\Gamma(\mu, x)$ 变得很陡，两个不动点(图中只给出了一个交叉点)处的切线斜率绝对值都大于1，而 Γ^2 的四个不动点(其中一点落在区间外)中有两个是稳定的(切线斜率绝对值小于1)。

当 $\mu > 1.25$ 后， x_1^* 和 x_2^* 失稳，出现稳定的四点周期 $x_i^*(i = 1, 2, 3, 4)$ ，它们都是复合函数：

$$\Gamma^4(\mu, x) = \Gamma(\mu, \Gamma(\mu, \Gamma(\mu, \Gamma(\mu, x)))) \quad (2-50)$$

的不动点。稳定条件为：

$$|\Gamma'(x_1^*)\Gamma'(x_2^*)\Gamma'(x_3^*)\Gamma'(x_4^*)| < 1 \quad (2-51)$$

(2-51)式对四个不动点是相同的。若要确定四点周期的稳定边界，必须求解以下两个高次代数方程：

$$\begin{cases} x = \Gamma^4(\mu, x) \\ |\Gamma'(x_1^*)\Gamma'(x_2^*)\Gamma'(x_3^*)\Gamma'(x_4^*)| = 1 \end{cases} \quad (2-52)$$

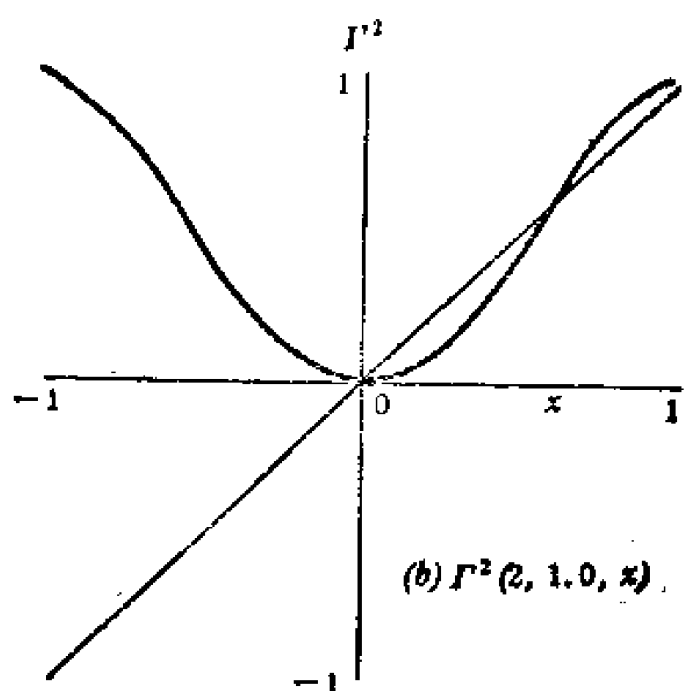
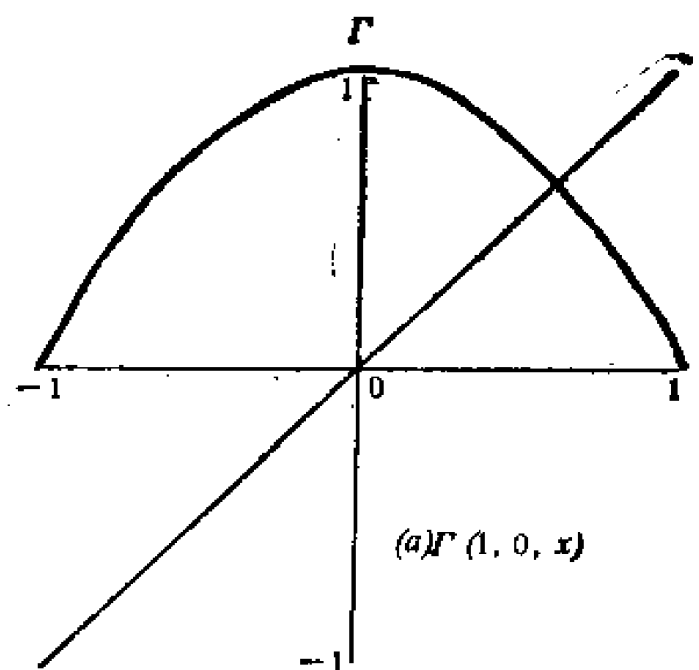


图 2.16 Γ 和 $\Gamma^2, \mu=1.0$

(2-52) 可用数值方法而求解。出现 4 点稳定周期的 $\Gamma^2 \equiv F(2, \mu, x)$ 和 $\Gamma^4 \equiv (4, \mu, x)$ 曲线分别如图 2.17 中的 (a) 和 (b) 所示。其中 $\mu=1.3$ 。